Title: Sobre la hipótesis de Riemann

Abstract

Diseño de un test para la prueba de la hipótesis de Riemann vía transformada Z.

Autor: Enrique Domínguez Pinos. © Todos los derechos reservados.
Ingeniero Industrial.

Email: enrique_pinos@yahoo.es

Málaga, 7 de Octubre de 2026

Table of Contents

Introducción....1
Obtención de la función de transferencia....2
Teoremas relacionados con la convergencia: Teorema del valor final....4
Simulación en maxima....5
La serie de Moebius....6
Anexo I: El test incompleto....7
Trazadores diferenciales de raíces....7
Trazado del lugar de las raíces....7
Raíces de polinomios....9
Evaluación de la integral sobre la circunferencia unidad....12
Cuencas de convergencia de sistemas dinámicos....14
La Xi de Riemann....19
El equiespaciado de Riemann Von Mangoldt....20
El lugar de las raíces a partir de la representación gráfica de la ecuación característica....20
Anexo II: Polinomios de Wilkinson....21
Referencias....21

Introducción

La hipótesis de Riemann[1] establece que todos los ceros no triviales de la continuación analítica de la función zeta de Riemann (que nombraremos dos) se encuentran sobre la recta con Re(s)=1/2+i·t, con t un número real. A esa recta se le denomina linea crítica. Y a la banda que comprende 0<Re(s)<1 se le llama banda crítica.

La zeta de Riemann cuando se calcula a través de la eta de Dirichlet (una de sus continuaciones analíticas) se puede expresar,

$$Z(s)=\frac{1}{1-2^{1-s}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{s}}.$$

Cuando hablemos de la zeta de Riemann, nos referimos a ésta.

Lo que vamos a hacer aquí es analizar la serie desde el punto de vista de la teoría de control de sistemas discretos[2],[3], obteniendo una función de transferencia en el plano z desde zeta; cuando hablemos de la función de transferencia sin especificar el plano, es sobre el plano z. La prueba va a consistir en calcular la respuesta de la función de transferencia a entrada impulso, y ver que la salida del sistema es una señal estable, obteniendo la transformada inversa de z.

La función de transferencia en s se obtiene directamente desde la zeta de Riemann. Empezamos desplazando el eje imaginario a Re(s)=1/2, luego invirtiendo la función de transferencia en s (así convertimos los ceros no triviales en polos) y, finalmente, obteniendo la transformada z de la función de transferencia en s. Y verificando que la función de transferencia es estable frente a entrada impulso, confirmamos que no existen polos inestables fuera de la frontera de estabilidad |z| =1; esto es, ceros no triviales de la serie original, a la derecha de la línea Re(s)=1/2 en el plano s.

Aunque no es el primer intento en aplicar teoría de control, ver referencia [4], en ese caso se identifican las señales escalón retrasadas y se establece una cota entre el contador de números primos (π) y la función li, sorprendentemente, usa la zeta original, no la continuación analítica.

Obtención de la función de transferencia

Como dijimos, la continuación analítica de la zeta de Riemann es, notaremos con prima a la variable compleja s,

$$Z(s')=\frac{1}{1-2^{1-s'}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{s'}}.$$

Convergente para Re(s')>0 (la región de interés). Los ceros se encuentran en Re(s')=1/2. La sumatoria en la expresión es una función con nombre propio, se denomina función eta de Dirichlet.

Hagamos un inciso para advertir que la exponenciación se define matemáticamente, para un número complejo z, como,

$$z^{y}=e^{y\ln(z)},$$
$$\ln(z)=\ln|z|+i(\theta+2k\pi).$$

Cuando se trata de la potencia de un número real, x, el ángulo es cero y la expresión se reduce a,

$$x^{y}=e^{y\ln(x)},$$
$$\ln(x)=\ln|x|+2k\pi i.$$

Donde se asume que nos quedamos con el valor principal (k=0),

$$x^{y}=e^{y\ln(x)}.$$

Usemos esto en la expresión de la serie, para dar,

$$2^{1-s'}=e^{(1-s')\ln(2)},$$
$$n^{s'}=e^{s'\ln(n)},$$
$$Z(s')=\frac{1}{1-e^{(1-s')\ln(2)}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{e^{s'\ln(n)}}=\frac{1}{1-e^{(1-s')\ln(2)}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}e^{-s'\ln(n)}.$$

Ahora vamos a trasladar el eje imaginario, s'=s+1/2; y los ceros pasan a estar en Re(s)=0,

$$s' = s + 1/2,$$
$$1 - s' = 1 - s - 1/2,$$
$$1 - s' = 1/2 - s,$$
$$Z(s) = \frac{1}{1 - e^{(\frac{1}{2} - s)\ln(2)}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-\left(s + \frac{1}{2}\right)\ln(n)},$$
$$e^{(\frac{1}{2} - s)\ln(2)} = e^{\frac{1}{2}\ln(2) - s\ln(2)} = e^{\ln(\sqrt{2}) - s\ln(2)} = e^{\ln(\sqrt{2})} e^{-s\ln(2)} = \sqrt{2}\, e^{-s\ln(2)},$$
$$e^{-\left(s + \frac{1}{2}\right)\ln(n)} = e^{-s\ln(n) - \frac{1}{2}\ln(n)} = e^{-s\ln(n)} e^{\frac{-1}{2}\ln(n)} = e^{-s\ln(n)} e^{\ln(\frac{1}{\sqrt{n}})} = \frac{e^{-s\ln(n)}}{\sqrt{n}},$$
$$Z(s) = \frac{1}{1 - \sqrt{2}\, e^{-s\ln(2)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} e^{-s\ln(n)}.$$

Nótese que la serie sigue siendo el producto de coeficientes alternos por coeficientes decrecientes. Haciendo la inversa de la función,

$$F(s) = \frac{1 - \sqrt{2}\, e^{-s\ln(2)}}{1} \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} e^{-s\ln(n)}},$$

Vamos a multiplicar y dividir por s, esto nos va a ayudar a analizar qué estamos obteniendo,

$$F(s) = \frac{1 - \sqrt{2}\, e^{-s\ln(2)}}{s} \frac{s}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} e^{-s\ln(n)}},$$

ó,

$$F(s) = \frac{1 - \sqrt{2}\, e^{-s\ln(2)}}{s} \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \frac{e^{-s\ln(n)}}{s}},$$

El primer término de la función de transferencia es asimilable a un ‘Hold 0’ o retenedor de orden cero; su función es retener (hacer constante) el valor de una señal muestreada, el intervalo de tiempo suficiente hasta que una nueva muestra se produce. Con una salvedad, retiene el valor de la señal previa raíz de 2; lo que significa, para una serie de pulsos alternos, que el nuevo pulso ve disminuido su valor por $1 - \sqrt{(2)}$ multiplicado por el valor del pulso previo.

El segundo término de la función de transferencia, puede entenderse como el modelo de una planta obtenido dividiendo la transformada de Laplace de la salida, un impulso unitario, entre la transformada de Laplace de la entrada, una serie de entradas escalón de signo alterno, retrasadas en el tiempo y de magnitud $1/\sqrt{(n)}$; de modo que lo que a primera vista parecía ser que sería una serie de entradas sinusoidales de diferente amplitud, aparece ahora como algo muy distinto. Obtengamos ahora su transformada Z, vamos a suponer la entrada X(s), que como hemos dicho, será un impulso unitario, eliminando la ‘s’ que introdujimos para ayudar a la interpretación,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\frac{e^{-s\ln(n)}}{s}\right)F(s)=\frac{1-\sqrt{2}\,e^{-s\ln(2)}}{s}X(s),$$
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}e^{-s\ln(n)}\right)F(s)=\left(1-\sqrt{2}\,e^{-s\ln(2)}\right)X(s),$$
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}z^{-\ln(n)}\right)F(z)=\left(1-\sqrt{2}\,z^{-\ln(2)}\right)X(z),$$

y ahora volvemos a ensamblar la función de transferencia,

$$\frac{F(z)}{X(z)}=\frac{1-\sqrt{2}\,z^{-\ln(2)}}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}z^{-\ln(n)}},$$

Donde hemos supuesto el tiempo de muestreo T=1, ya que $z=e^{sT}$. La entrada, como dijimos, es un impulso unitario, X(z)=1. Por lo que tenemos la función de la que queremos analizar la estabilidad,

$$F(z)=\frac{1-\sqrt{2}\,z^{-\ln(2)}}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}z^{-\ln(n)}},$$

que es de fase no mínima, por el cero del numerador.

No es una función de transferencia usual, las muestras no se encuentran equiespaciadas, de hecho se encuentran en una escala logarítmica, lo que va a complicar la transformada inversa, que por las propiedades de la función z, vamos a poder obtener por división larga entre numerador y denominador, solo que al multiplicar polinomios, los exponentes se multiplican en lugar de sumarse. Ya se adelanta que la serie que se obtiene es de signo alterno y decreciente nuevamente, pero ya no sería convergente en el sentido de Dirichlet, ni de Leibniz, ni de ningún otro criterio conocido. Nos vamos a limitar a mostrar que la serie es alterna y decreciente. Aquí ya podemos ver cómo se asoma la complejidad del problema, puesto que determinar un criterio de convergencia para la serie es equivalente a demostrar la hipótesis de Riemann.

Teoremas relacionados con la convergencia: Teorema del valor final

Aunque no constituye una prueba si el límite no existe (porque la función vaya a infinito, implicando que hay algún polo a la derecha del eje imaginario; lo que invalidaría la hipótesis de Riemann; o porque la función no se estabilice en ningún valor), vamos a ver qué predice, asumiendo que f(t) es convergente. El teorema establece que el valor (final) de la función f(t) cuando el tiempo tiene a infinito puede obtenerse multiplicando su transformada de Laplace F(s) por s y tomando el limite cuando s tiene a 0, siempre y cuando el limite exista (no sea infinito y se centre en un valor),

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} s\,F(s).$$

para nuestra función,

$$\lim_{s\to 0}\frac{s\left(1-\sqrt{2}\,e^{-s\ln(2)}\right)}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}e^{-s\ln(n)}},$$

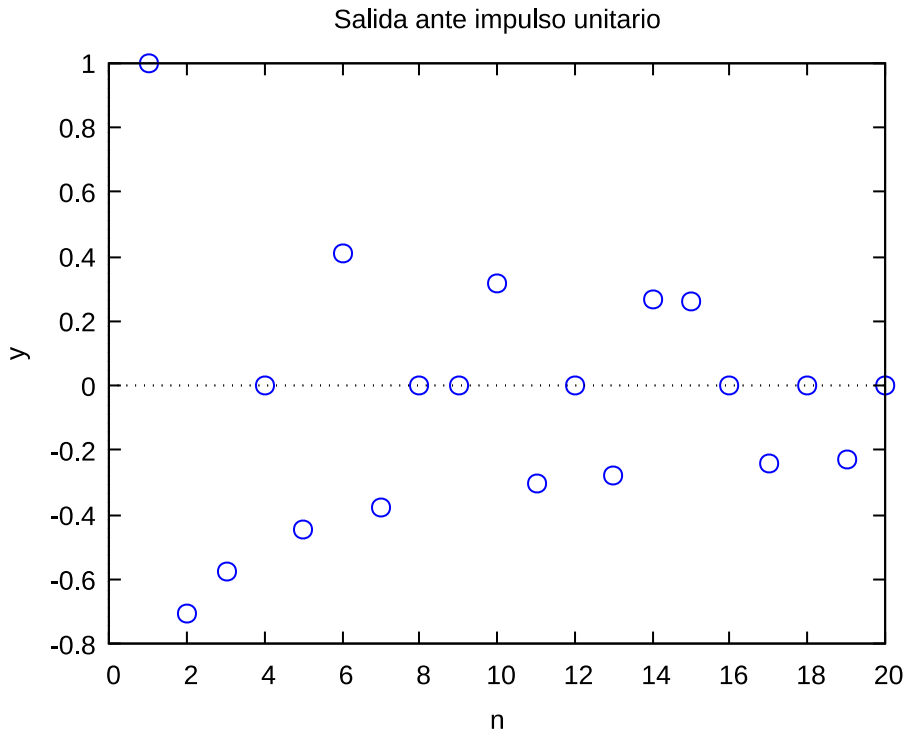
Como el denominador está probado que es una serie convergente a un valor g(s), que depende de forma complicada de s, pero es finito, nos preocupamos por el numerador,

$$\lim_{s\to 0}\frac{s\left(1-\sqrt{2}\,e^{-s\ln(2)}\right)}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}e^{-s\ln(n)}}=\lim_{s\to 0}\frac{s\left(1-\sqrt{2}\right)}{g(s)}=0.$$

Que nos dice que si F(s) es estable, su valor final es 0.

Simulación en maxima

Como se ha indicado, se implementó la división larga en maxima y se obtuvo una primera salida del sistema, para comprobar que la serie era alterna y decreciente. Es una salida costosa, así que se limitó a 20 muestras,



En el eje x aparecen las muestras, n, sin la escala logarítmica, para que el gráfico sea más legible. La sucesión que se obtiene tiene la forma,

$$F(k)=1-\frac{z^{-\ln(2)}}{\sqrt{2}}-\frac{z^{-\ln(3)}}{\sqrt{3}}-\frac{z^{-\ln(5)}}{\sqrt{5}}+\frac{z^{-\ln(6)}}{\sqrt{6}}-\frac{z^{-\ln(7)}}{\sqrt{7}}+\frac{z^{-\ln(10)}}{\sqrt{10}}\ldots,$$

La sucesión es una suma de los inversos de las raíces cuadradas de n, siendo negativo el valor cuando n es un número primo, cero en los números compuestos que tienen primos repetidos y positivo cuando el número es compuesto sin repeticiones de primos.

Esta forma del término general la demostró Leonard Euler en 1748, partiendo de la zeta original (no existía la teoría de la transformada Z). Nótese que estamos haciendo mucha distinción entre la serie y la sucesión. La transformada inversa de z que hemos obtenido es una sucesión (no sumamos los términos que obtenemos), mientras que Euler trabajaba en la suma de series (él sí se preocupaba por la suma). Luego comentaremos más sobre ésto.

La respuesta del sistema la podemos concluir analizando el límite de la sucesión cuando n tiene a infinito. En nuestro caso tiende a cero, por lo que el teorema del valor final nos confirma el resultado. Por lo tanto, no existen polos (ceros no triviales de Zeta) fuera del círculo unidad; o, en términos de s', a la derecha de la línea crítica Re(s')=1/2.

Es interesante notar, que la respuesta del sistema de la serie infinita puede obtenerse mediante transformada z de forma exacta aún usando una versión de la serie infinita con sólo 20 términos (obviamente en los últimos términos falla).

Como nota interesante, la estabilidad absoluta del sistema, desde el punto de vista del control de sistemas, sólo se garantiza si la suma de los valores absolutos de los coeficientes de la división larga (la transformada inversa de z tomando valores absolutos) convergen. Esto evita que una entrada al sistema que se acople con la alternancia de la serie, haga la misma crecer descontroladamente, dando un sistema inestable.

Nótese que si la transformada z de una función F(z) es un cociente de polinomios con exponente entero, podemos obtener la transformada inversa, f(kT), usando el comando de maxima 'taylor.' Si F(z) está expresada en potencias negativas de z, el comando sería: taylor(subst(z=1/x),F,x,0,imax), donde imax es el k máximo de f(kT) que queremos obtener.

La serie de Moebius

La serie que obtuvo Euler es una serie alternante decreciente, pero para garantizar el resultado final (ya que la convergencia en el sentido de Dirichlet o Leibniz falla) habría que inventar un criterio de convergencia que lo garantizase. Esta serie tiene nombre propio, es la serie de Moebius y, a pesar del aspecto inocente de las primeras muestras, no se estabiliza nunca (que se sepa). Es convergente en Re(s')>1 y diverge en Re(s')=1/2, pero lo que interesa saber es si es convergente en 1/2<Re(s')<1 (el lado derecho de la banda crítica). Encontrar un criterio de convergencia o extender la serie analíticamente a ese rango, es equivalente a probar la hipótesis de Riemann.

El problema que parece haber con la demostración que hemos dado, es que la sucesión "no tiene poder predictivo" (con lo que sea que signifique esto) fuera de la región de convergencia de la serie, pero nótese que la eta que hemos usado sí que abarcaba la zona de la que queremos obtener información.

Vamos a ver esto con un ejemplo simple, Si hacemos la división larga de la fracción para obtener una representación en forma de serie de potencias,

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \approx 1-x+x^2-x^3\ldots,$$

el radio de convergencia es |x|<1. Luego la serie pierde "poder" para evaluar el valor de x fuera del radio; a pesar de que como hemos establecido la igualdad, podemos evaluar el valor usando la fracción de la izquierda. Técnicamente, la fracción actúa como la prolongación analítica de la serie para |x|>1. El problema aquí es similar, sólo que no queremos evaluar los valores de z, y si quisiéramos, recurriríamos a la fracción que produjo la serie.

Desde el punto de vista de la teoría de control, que la serie no diverja a infinito nunca, sólo es una prueba de que no existen polos muy separados del círculo unidad, pero hasta que no se aclare en qué afecta esta limitación del radio de convergencia, no veo vías para progresar en el problema. El interés de este apartado es a partir de un número grande de muestras de la sucesión, y dar una cota a lo separados que están los polos de la línea crítica.

Anexo I: El test incompleto

Vamos a comentar aquí la prueba en la que estaba trabajando, el contenido es algo caótico y poco establecido. Además, los problemas aparejados de bugs en las series lo ponen difícil (he detectado dos, en la continuación analítica de zeta a todo el plano s en 1>Re(s)>0 y en la zeta de Hardy, hay un máximo local pegado a s=0 que no debería estar ahí porque zeta no lo tiene)

Trazadores diferenciales de raíces

Supongamos que queremos resolver una ecuación con un parámetro k,

$$H(z,k)=0.$$

Podríamos tomar la derivada total, y despejar una ecuación diferencial para el parámetro,

$$\frac{\partial H(z,k)}{\partial z}dz+\frac{\partial H(z,k)}{\partial k}dk=0,$$
$$\frac{dz}{dk}=\frac{-\partial H(z,k)/\partial k}{\partial H(z,k)/\partial z}.$$

Si conocemos la solución de la ecuación para un valor del parámetro, podemos resolverla para otro. La idea es que la solución conocida sea fácil de obtener.

Esto se puede usar para: trazar un diagrama del lugar de las raíces, solucionar raíces de polinomios de alto grado, resolver una ecuación que forma parte de un sistema de ecuaciones diferenciales y cuya solución va cambiando continuamente (en lugar de resolver la solución en cada paso). Por citar algunos usos. También tiene una limitación, si el sistema está mal condicionado, no convergemos a la raíz.

Trazado del lugar de las raíces

El lugar de las raíces es el denominado diagrama de Evans (no es el capitán américa).
En este método de análisis, se calcula cómo cambian las raíces de un polinomio cuando varía un parámetro k. Para una función de transferencia de lazo abierto,

$$\frac{k(s+2)}{s^2+2s+3},$$

la forma de la ecuación característica de lazo cerrado es,

$$s^2+2s+3+k(s+2)=0.$$

Su ecuación diferencial (sistema no autónomo), para aplicar el método anterior es,

$$\frac{ds}{dk}=-\frac{s+2}{2s+2+k}.$$

Nótese que los puntos de equilibro del sistema anterior, son los ceros de la función de transferencia de lazo abierto.
Si disponemos de los ceros del denominador de la función de transferencia, podemos usarlos como condición inicial en esta ecuación diferencial en el plano complejo, y solucionarla hasta el valor de k deseado. Una nota importante es que si el solver no soporta números complejos, hay que hacer el cambio $s = x + i\,y$ en la ecuación diferencial y separar en parte real e imaginaria, con lo que se resuelven ambas por separado, pero acopladas. Un truco en maxima que funciona muy bien con los integradores 'rk' o 'rkf45' (este último requiere un load("rkf45")), es definir una función de dos variables reales 'x' e 'y', pero usar la expresión en s dentro de la función para los cálculos, y luego devolver por separado parte real e imaginaria del resultado en una lista de tamaño dos.

Una limitación del método son los puntos de ruptura, que como la derivada de k respecto a s es nula, en esta ecuación la derivada se hace infinita, y para acercarnos al punto de ruptura, hacen falta valores de k muy grandes. Para los tramos en los puntos de ruptura, calculamos la posición del punto con,

$$\frac{dk(s)}{ds} = 0\,,$$

y resolvemos la ecuación partiendo de él, con la condición de ángulos de salida del lugar de las raíces. Nótese que k(s) es la ecuación que se obtiene de despejar en la ecuación característica de lazo cerrado para k; que, en general, es una expresión mucho más complicada y costosa computacionalmente, pero daría un esquema de integración autónomo.

Nótese que maxima no tiene comando para el lugar de las raíces, pero puede construirse con ayuda del comando drawdf y la opción solns_at, que acepta una lista de condiciones iniciales. Pero sólo despejando k(s) antes de derivar respecto a s, para obtener un sistema autónomo (más costoso). Nótese también que los diagramas de contorno de raíz para cualquier parámetro en la ecuación característica también se construyen de la misma manera que con k, solo obteniendo la derivada de s respecto al parámetro.

Nótese también que podríamos separar la ecuación diferencial no autónoma en s, en dos ecuaciones de variables reales 'x' e 'y', como hemos indicado. En este caso podríamos analizar el campo vectorial que forman ambas ecuaciones, si el campo inicial es,

$$\begin{aligned}\vec{f} &= [f_x, f_y],\\ \frac{dx}{dk} &= f_x(x, y, k),\\ \frac{dy}{dk} &= f_y(x, y, k).\end{aligned}$$

Éste campo tiene la propiedad (derivada de las condiciones de Cauchy-Rieman),

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} = \frac{\partial f_y}{\partial y}.$$

Que directamente no es una condición de integrabilidad, pero nos va a evitar usar la magnitud y fase que suelen usarse en el diagrama de Evans original. Vamos a definir la función potencial U (para maxima),

$$U(x,y)=\int F_x\,dx+\int\left(F_y-\frac{\partial}{\partial y}\int F_x\,dx\right)dy,$$
$$U_o=\int F_x\,dx,$$
$$U=U_o+\int\left(F_y-\frac{\partial U_o}{\partial y}\right)dy.$$

Donde, $\vec{F}=[f_x,-f_y]$ (que es un campo vectorial con los mismos puntos de equilibro que el original) sí es integrable y tiene función potencial U univaluada (por lo que he visto). La curva de nivel de esta función potencial que corresponde con el valor de cualquiera de las raíces iniciales, traza de golpe todo el lugar de las raíces del campo vectorial original; por eso la denomino univaluada; porque una vez calculada U, calculamos con ella el valor que tiene en una de las raíces (Uval), y mediante 'plot2d' con 'implicit plot' en U=Uval obtenemos el lugar de las raíces en maxima. Esta función potencial es una función de corriente o potencial vectorial en dos dimensiones.

Si, en cambio, tomamos $\vec{F}=[f_y,f_x]$ obtenemos una función potencial no univaluada que traza curvas con la misma k, por lo que la vamos a llamar curvas isoK. El problema que presenta es que cada raíz puede tener un valor diferente para la curva. Esto quiere decir que hay una curva que une las raíces del lugar de las raíces en cualquier valor de k. Para trazar esta curva usando ecuaciones diferenciales, útil cuando no podemos integrar la expresión de forma cerrada, recurrimos al campo vectorial $\vec{F}=[f_x,-f_y]$, que es ortogonal al anterior,

$$\frac{dx}{dt}=f_x(x,y,k),$$
$$\frac{dy}{dt}=-f_y(x,y,k).$$

Para ello, se introduce como condición inicial el valor de la raíz junto con su valor de k. Nótese que hemos alterado la variable de integración a 't', porque este sistema traza curvas con idéntica 'k'.

Raíces de polinomios

La forma de usar este método en raíces de polinomios es hacer tender el polinomio que queremos resolver a uno que es fácil. Por ejemplo, $z^n+1=0$, cuyas raíces son fáciles de obtener,

$$z=\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)+i\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k=0,1,\ldots,2n-1.$$

Supongamos que queremos resolver el polinomio,

$$s^3+2s^2+3s+4=0.$$

Introduciríamos el parámetro k,

$$s^3+2(1-k)s^2+3(1-k)s+4-3k=0.$$

De modo que cuando k=0, se recupera el polinomio original, y con k=1 obtenemos el polinomio fácil del calcular. La ecuación diferencial usa como condiciones iniciales en k=1 las raíces del polinomio fácil, y se integra con paso negativo (hacia atrás en k) hasta k=0. Si se usan vectores, se pueden resolver todas las raíces simultáneamente porque es la misma ecuación diferencial. El resultado de la integración, son las raíces del polinomio original.

Nótese que lo planteado es equivalente a trazar el lugar de las raíces de la función de transferencia de lazo abierto,

$$-\frac{k\left(2\,s^2+3\,s+3\right)}{s^3+2\,s^2+3\,s+4}.$$

Otro uso que podemos darle a este método es desplazar las raíces de los ceros no triviales de la zeta de Riemann, para ello, introducimos un parámetro k en la serie,

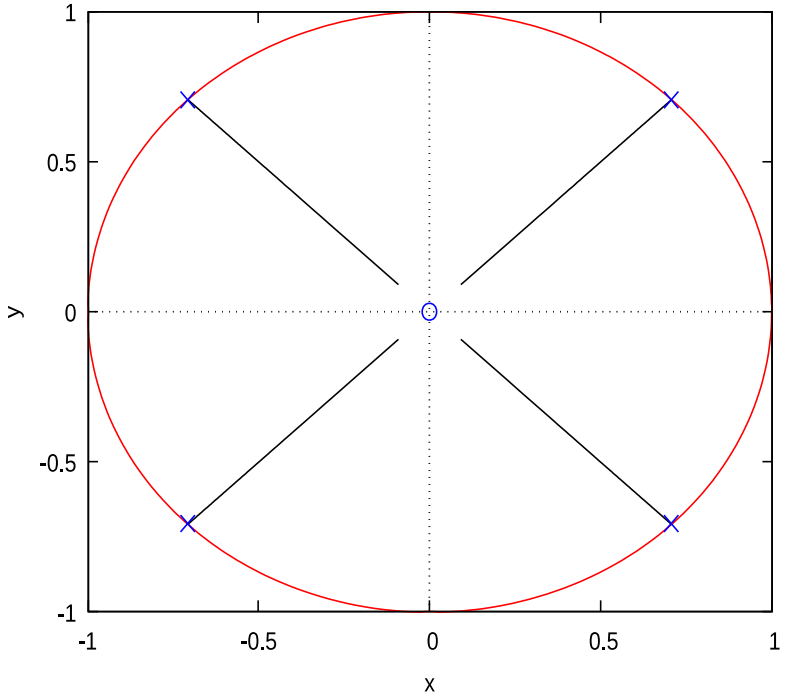
$$F\left(z\,,k\right)=\frac{1-\sqrt{2}\,z^{-\ln\left(2\right)}}{1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{\sqrt{n}}k\,z^{-\ln\left(n\right)}}.$$

Haciendo ésto, podemos llevar los polos de F sobre la circunferencia unidad, hacia el origen, porque cuando k va de 1 a 0, todos los polos colapsan al cero de orden n situado en el origen.

Para que se vea gráficamente, vamos a mostrar cómo se llevan los ceros de un polinomio fácil con n=4, la función de transferencia sería,

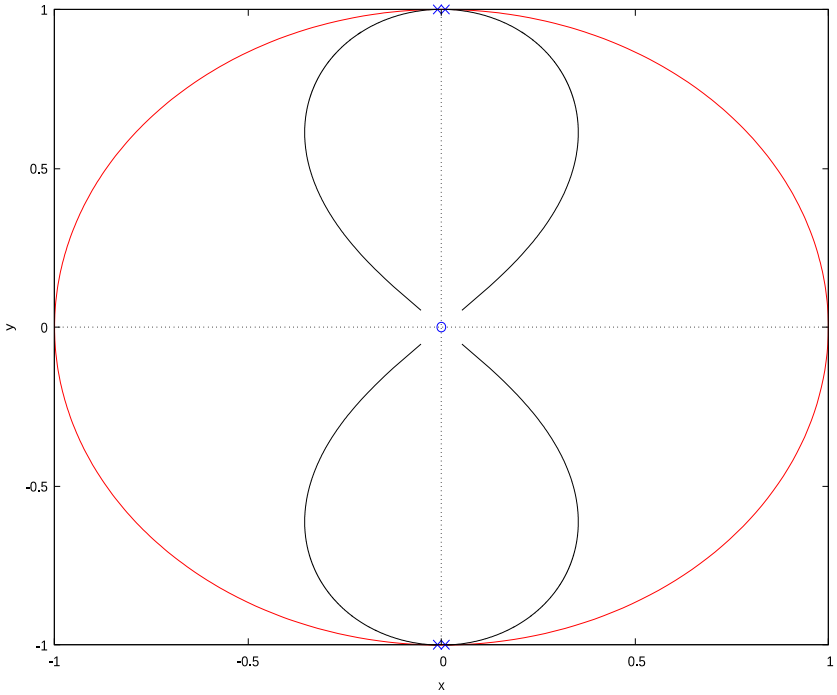
$$E\left(z\,,k\right)=\frac{1}{1+k\,z^{-4}}=\frac{z^4}{z^4+k}.$$

La idea es que k=0 anule todos los términos menos la potencia más alta. El gráfico que se obtiene es,

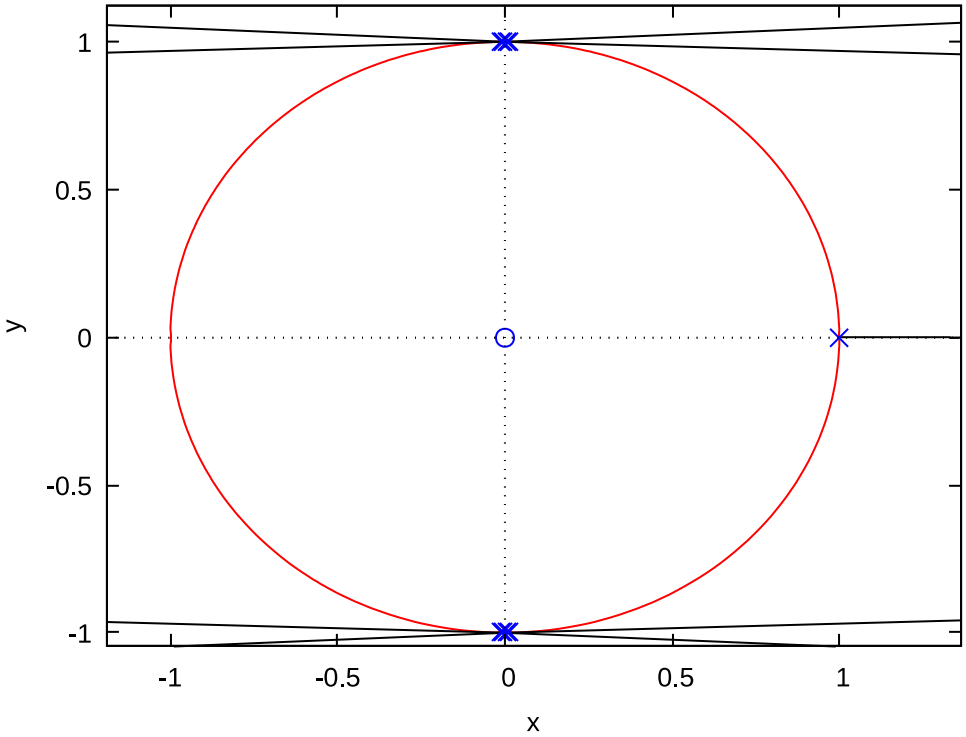


Nota práctica: Nótese que las raíces no llegan al centro, cuanta mayor inestabilidad exista en la expresión de las raíces y en los errores de integración, más se separan las raíces del camino correcto, en este caso, no llegan al destino. Con el integrador rkf45 sí llegan al cero, pero ese integrador se detiene cuando encuentra errores de 0/0.

El camino que se traza no siempre es recto, en el siguiente ejemplo, las raíces estaban muy juntas en el eje imaginario. En nuestra F(z), la de Riemann, el primer cero está en |z|=14,13472 y fase 89,96º, ya casi sobre el eje imaginario.



Y en el siguiente ejemplo, la incertidumbre en las raíces hace que no sigan el camino para nada, y también se trazó una raíz que no formaba parte del sistema en z=1, que sigue el camino contrario.



Pero las raíces que sí forman parte del sistema de ecuaciones, si no hay mal condicionamiento, en el primer paso de tiempo abandonan el círculo unidad para entrar al interior, y ésta es la propiedad que nos interesa.

Nótese que al trabajar sobre el plano z, los ceros por encima de cierta 't', se van solapando en vueltas sucesivas, esto es porque la exponencial que usamos para recorrer la circunferencia en un parametrizado y la exponencial que usamos para pasar del plano s al plano z comparten el exponente, y la exponencial es periódica.

Evaluación de la integral sobre la circunferencia unidad

Partimos ahora de que tenemos un método para hacer que las raíces migren de la circunferencia unidad al interior del recinto, la serie que vamos a usar va a diferir un poco de la que hemos definido, porque vamos a cambiar k por 1-ε

$$F(z,\epsilon)=\frac{1-\sqrt{2}\,z^{-\ln(2)}}{1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}(1-\epsilon)\,z^{-\ln(n)}}.$$

De modo que epsilon igual a uno es la serie original con los polos sobre la circunferencia unidad; y con un valor de epsilon mayor que cero, los polos se desplazan al interior de la circunferencia.

Ahora vamos a definir la integral sobre la circunferencia unidad, C,

$$\oint_C F(z,\epsilon)\,dz.$$

La integración se realiza recorriendo C en sentido antihorario.
Nótese que, en el límite,

$$\lim_{\epsilon\to 1}\oint_C F(z,\epsilon)\,dz=\oint_C dz=0.$$

Porque no hay polos dentro de C. Por lo que el método funciona, se han colapsado los polos de F en el cero múltiple (de orden n) de F en z=0.

Lo que realmente nos interesa es la diferencia entre el número de ceros y polos de F. Si la hipótesis de Riemann se cumple, en el límite de epsilon tendiendo a cero, el número de ceros y polos deben coincidir. Ya que si todos los polos están sobre la circunferencia unidad un epsilon pequeño los desplaza al interior a todos, por lo que la integral sobre C está bien definida y es la suma de los residuos de los polos de la función en el interior de C. Si la hipótesis de Riemann no se cumpliera, habría un polo fuera de C, y un epsilon lo bastante pequeño no lo introduce en el interior de C, por lo que quedaría un cero sin emparejar con ese polo dentro de C y la diferencia entre polos y ceros dentro de C no sería nula.

La diferencia entre polos (P) y ceros (Z) de una función se calcula con la derivada logarítmica,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{F'(z,\epsilon)}{F(z,\epsilon)}\,dz=Z-P.$$

En lo que sigue vamos a suponer que la hipótesis de Riemann se cumple, y vamos a intentar probarlo con la integral anterior.

Para nuestro caso, vamos a omitir en el desarrollo el término del numerador, ya que la derivada logarítmica permite separarlos.

$$F(z,\epsilon)=\frac{1-\sqrt{2}\,z^{-\ln(2)}}{1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}(1-\epsilon)\,z^{-\ln(n)}},$$

$$\ln\left(F(z,\epsilon)\right)=-\ln\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}(1-\epsilon)\,z^{-\ln(n)}\right),$$

Y derivando,

$$\frac{F'(z,\epsilon)}{F(z,\epsilon)}=\frac{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln(n)}{\sqrt{n}}(1-\epsilon)\,z^{-\ln(n)-1}}{1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}(1-\epsilon)\,z^{-\ln(n)}},$$

$$\frac{F'(z,\epsilon)}{F(z,\epsilon)}=\frac{1-\epsilon}{z}\frac{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln(n)}{\sqrt{n}}z^{-\ln(n)}}{1+(1-\epsilon)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}z^{-\ln(n)}},$$

Si llamamos,

$$S(z)=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}z^{-\ln(n)},$$

la anterior queda,

$$\frac{F'(z,\epsilon)}{F(z,\epsilon)}=\frac{1-\epsilon}{z}\frac{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln(n)}{\sqrt{n}}z^{-\ln(n)}}{(1-\epsilon)S(z)+\epsilon}.$$

Lo que pone de manifiesto que un valor de epsilon mayor que cero hace que los polos se desplacen. En cambio, los ceros del numerador permanecen inalterados.

El denominador sólo aporta los polos sobre C, y el numerador no tiene polos, sólo tenemos el polo de la fracción externa en z=0, que apareció al derivar. Por lo que el límite,

$$\lim_{\epsilon\to+0}\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{1-\epsilon}{z}\frac{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln(n)}{\sqrt{n}}z^{-\ln(n)}}{1+(1-\epsilon)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}z^{-\ln(n)}}dz,$$

permite calcular el valor de la integral, con la suma de los residuos de los polos dentro de C. El problema que se presenta es que la serie que hemos usado tiene como radio de convergencia Re(s)>-1/2, que para z es, $z>1/\sqrt{e}$. Y ahora necesitamos evaluar un polo en z=0 y con esta serie no podemos hacerlo (el residuo sale menos infinito). Por lo que vamos a evaluar la integral invirtiendo el recinto C hacia afuera, por lo que se invierte el resultado (lo recorremos en sentido contrario),

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{F'(z,\epsilon)}{F(z,\epsilon)}dz=P-Z.$$

Para evaluar la integral, ahora nos preguntamos qué polos quedan fuera de C, y sólo tenemos el residuo de infinito (que se calcula aunque la función no tenga un polo en el infinito), y se evalúa como,

$$Res_{\infty} G(z) = \lim_{z \to \infty} z\, G(z).$$

Que en nuestro caso,

$$G(z,\epsilon) = \frac{F'(z,\epsilon)}{F(z,\epsilon)} = \frac{1-\epsilon}{z} \frac{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln(n)}{\sqrt{n}} z^{-\ln(n)}}{1+(1-\epsilon)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} z^{-\ln(n)}},$$

$$Res_{\infty} = \lim_{z \to \infty} \frac{(1-\epsilon)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln(n)}{\sqrt{n}} z^{-\ln(n)}}{1+(1-\epsilon)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} z^{-\ln(n)}} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

Por lo que,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C G(z,\epsilon)\, dz = Res_{\infty} G(z,\epsilon) = P - Z = 0.$$

O,

$$P = Z.$$

La prueba de la hipótesis de Riemann pasa por probar que la integral se cumple con independencia de epsilon. Numéricamente, es imposible integrar tan cerca del circulo unidad, incluso cuando Riemann lo hizo se separó hasta fuera de la banda crítica.

Como nota interesante, la derivada de la zeta de Riemann (ζ') también ha sido muy estudiada, y hay un teorema (de Speiser, 1934) que dice que si no existe ningún cero de ζ' interior a C (en particular entre $1/\sqrt{e} < z < 1$), la hipótesis de Riemann también se cumple, esto se demuestra rápidamente por la derivada logarítmica, ya que podemos decir,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(z,\epsilon)}{F'(z,\epsilon)} dz = P - Z.$$

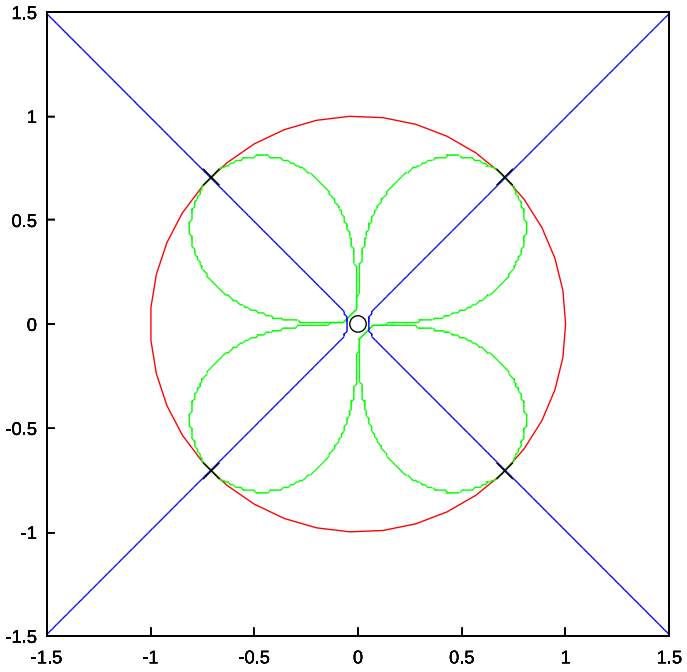
Tan solo invirtiendo el signo antes de derivar el logaritmo (Recorriendo C en sentido antihorario). Efectivamente, si hay algún cero de ζ', F'(z) tendrá un polo, y en ese caso podríamos evaluar la integral calculando su residuo. Si se cumple la hipótesis de Riemann, F' no tiene polos dentro de C y la integral es cero.

Cuencas de convergencia de sistemas dinámicos

Cuando Henri Poincaré trató el problema de los tres cuerpos, descubrió que las cuencas de convergencia de un sistema dinámico se pueden calcular a partir de las curvas estables de puntos de silla (se denominan variedades estables). En dimensión n, la cuenca se calcula como la curva estable de un punto de silla n-1. Numéricamente, se hace integrando la trayectoria desde el punto de silla hacia atrás en el tiempo. En nuestro caso, los puntos de silla son los puntos de ruptura del lugar de las raíces.

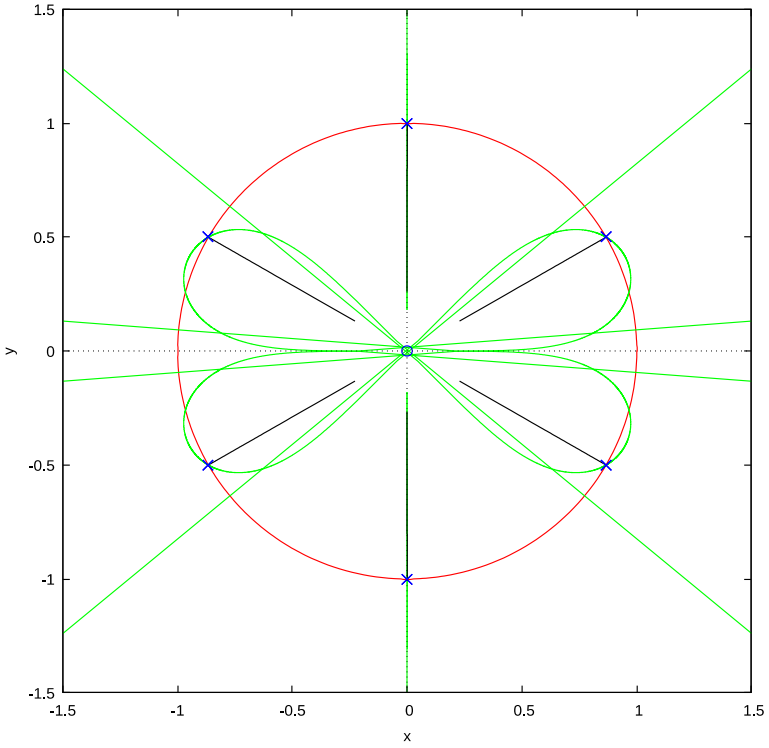
Nótese que el trazado de las cuencas de convergencia es una disciplina en sí, con unas reglas muy estrictas de qué puede pasar o no. En particular, si una trayectoria empieza sobre la cuenca, nunca la abandona. El trazado del lugar de las raíces se corresponde con el trazado de una cuenca de convergencia, donde las raíces se encuentran sobre dicha cuenca.

Vamos a trazar algunos lugares de las raíces. Para el sistema con 4 raíces simétricas anterior, la función U y UisoK tienen forma cerrada y sus curvas de nivel trazan el lugar de las raíces (cuando hay simetría sobre el eje imaginario, creo) y las curvas isoK (sólo trazada para k=1),

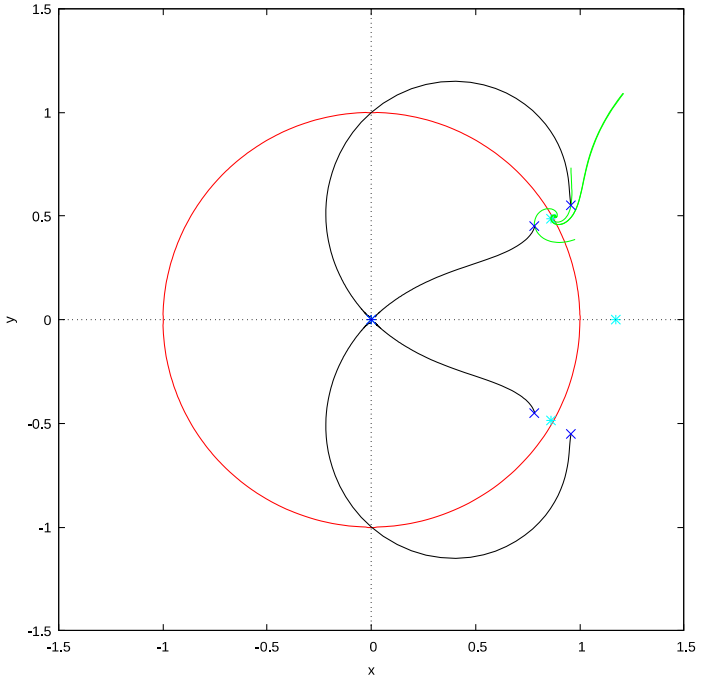


La curva azul es el lugar de las raíces (con k desde menos infinito a infinito). La verde es la isoK con k=1 que, en este caso, se traza con dos curvas de nivel sobre el mismo valor en valor absoluto, la que une a las raíces de los cuadrantes primero y tercero, y la que une a los cuadrantes segundo y cuarto. Todas pasan por el origen que es punto de ruptura (y punto de silla de la cuenca), y son tangentes al circulo unidad. Las cruces negras señalan los cuatro polos, y el círculo el cero del origen. No hay puntos de ruptura en ningún otro sitio.

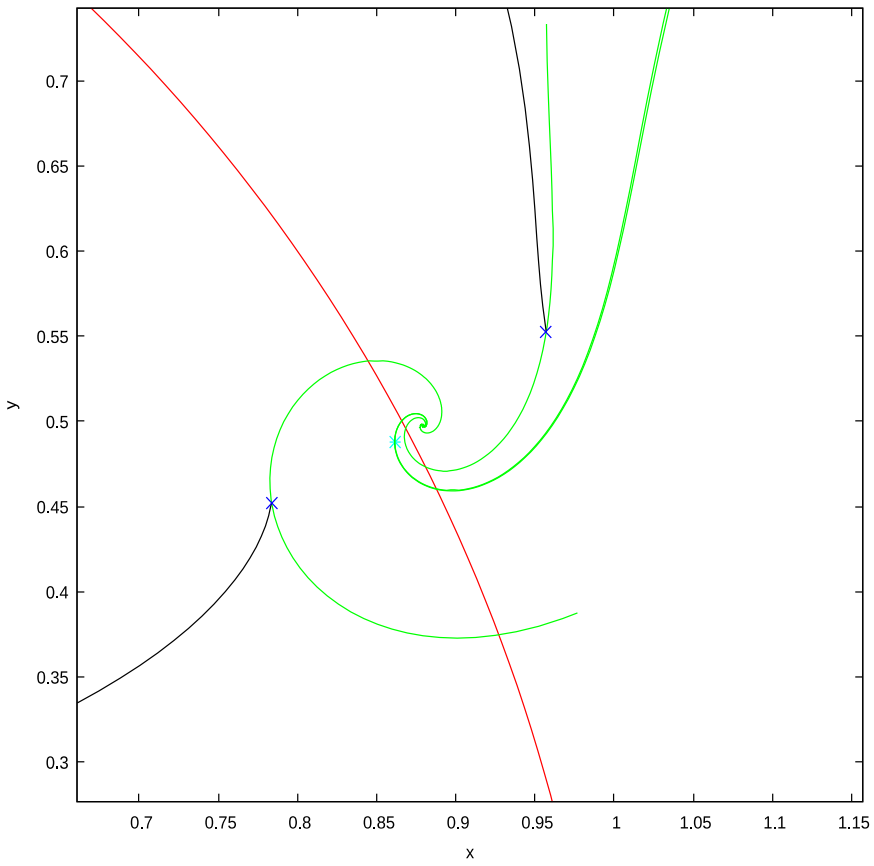
Vamos a repetir ahora el problema con seis raíces simétricas sobre el contorno. Esta vez, se recurrió a las ecuaciones diferenciales para el trazado de las curvas. Los polos siguen siendo el símbolo por (x) y en verde la curva isoK. Esta vez abandonando el recinto por la falta de simetría respecto al eje y. Pero el sistema nuevamente carece de puntos de ruptura (salvo el origen).



Vamos a repetir ahora el problema con cuatro raíces cerca del contorno, pero exteriores. Esta vez sí se forman puntos de ruptura; en asterisco o 'por' en cyan según el gráfico (maxima equivoca esto erráticamente), para diferenciar los polos azules. Esta vez el trazado de la curva isoK se parece mucho más al de una cuenca de convergencia, ya que se forman bucles heteroclínicos entre puntos de ruptura (sólo se muestran los puntos de ruptura de primera derivada, el bucle sería un punto de una derivada superior). Como nota interesante, este bucle tiene geometría fractal. Tanto el bucle como el punto de ruptura son interiores a la circunferencia unidad, por lo que ya vemos lo que Speiser proponía.

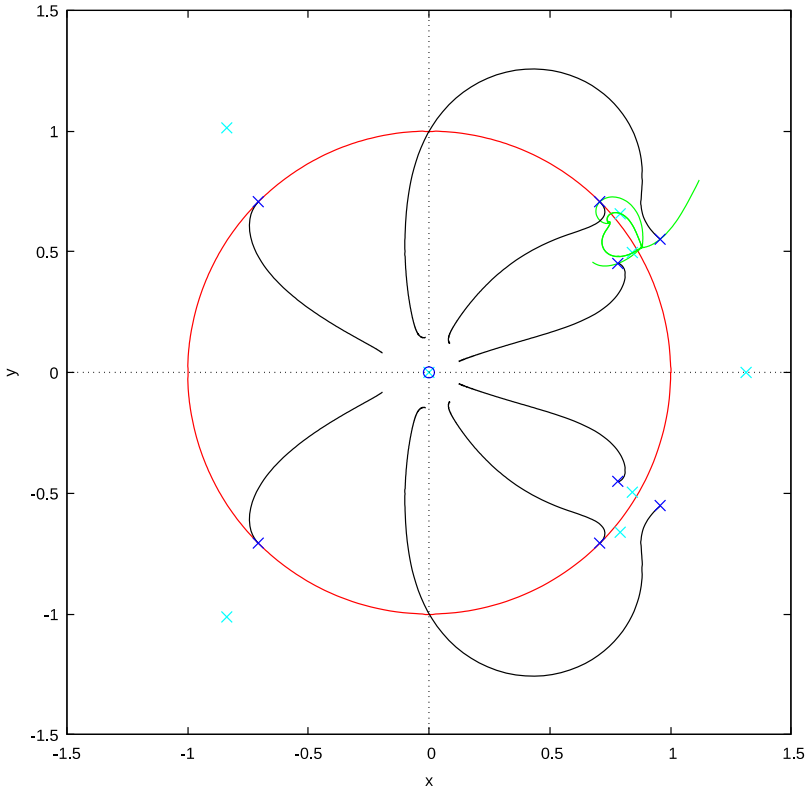


En más detalle,

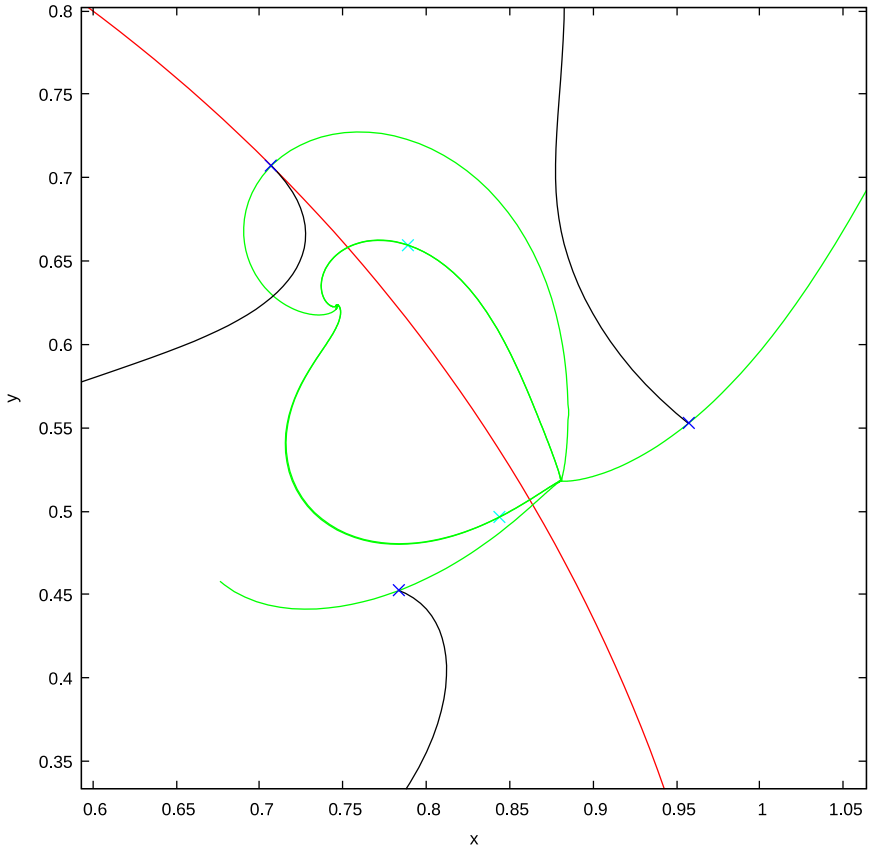


Donde se ve que el bucle es exterior al círculo unidad y es una derivada superior porque no tiene un asterisco marcando su posición.

Finalmente vamos a trazar 8 raíces combinando las 4 simétricas son las 4 exteriores.



Nótese cómo las curvas se esquivan, y cómo las curvas isoK conectan las raíces a través de puntos de ruptura. En más detalle,



Se han trazado las isoK desde los polos y los puntos de ruptura para poder cerrar el contorno de la cuenca.

La consecuencia de la presencia de polos fuera del círculo unidad, fuerza a la curva isoK a realizar quiebros para poder conectar las raíces. Por lo que la condición necesaria y suficiente para que todos los polos se encuentren sobre el círculo unidad es que la función no tenga ninguna derivada nula (de ningún orden) en todo el plano complejo, excepto en z=0 (s=infinito) que es el lugar obligado de corte.

Una nota sobre esto, el teorema de Gauss-Lucas dicta que si todos los polos se encuentran sobre el círculo unidad, sus derivadas se anulan sobre la superficie del mismo.

La Xi de Riemann

Obviamente, la continuación analítica de la función zeta a todo el plano complejo (no la eta que describimos antes, que sólo cubre una parte) tiene muchas derivadas nulas, y si hubiéramos construido la función de transferencia con ella, veríamos que también tiene un cero exterior al círculo unidad y polos sobre el eje real de z a la derecha del origen (ceros triviales de zeta). Por lo que, para establecer este resultado, necesitamos una función de transferencia que carezca de ceros fuera del círculo unidad (|z|=1), ésta función puede obtenerse con la inversa de la Xi de Riemann, en el plano s queda,

$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

Y mantiene la condición de simetría,

$$\xi(s)=\xi(1-s).$$

Una pequeña aclaración sobre la eta y la continuación analítica de z a todo el plano, cuando trabajamos con eta, no mencionamos los polos “triviales” interiores al círculo unidad, porque la región de convergencia de eta no dejaba ver que estos polos existían. Por eso no los mencionamos antes.

Sobre la función Xi, sí podemos concluir que como todos sus polos están sobre el círculo unidad, ello implica que las derivadas de esta función (en cualquier orden) nunca se anulan en el plano complejo.
En particular, para el lugar de las raíces, el primer orden es la definición literal de un punto de ruptura,

$$F(s)=\frac{1}{\xi(s)},$$
$$\xi(s,k)=0,$$
$$\frac{ds}{dk}=\frac{-\partial\xi(s,k)/\partial k}{\partial\xi(s,k)/\partial s},$$
$$\frac{dk}{ds}=\frac{-\partial\xi(s,k)/\partial s}{\partial\xi(s,k)/\partial k}=0\rightarrow\frac{\partial\xi(s,k)}{\partial s}=0$$

La parametrización para Xi puede expresarse,

$$\xi(s,k)=\xi_0+k(\xi(s)-\xi_0),$$
$$0<\xi_0<1,$$

El problema que presenta la Xi de Riemann es que, al contrario que la Zeta, es una función de tiempo continuo, aunque se construya como una aparente multiplicación, el carácter de la función cambia, y hace que para estudiarla tengamos que pasar del plano z otra vez al plano s.

La idea era diseñar un test que si fallaba, no fuera concluyente; pero si funcionaba, probaba la hipótesis de Riemann. En el ejemplo anterior vimos que un polo exterior al círculo unidad, al aumentar k tiene que reingresar al círculo unidad, en el plano s, dependiendo de la distancia al eje imaginario, el polo podría reingresar o no; el lugar de las raíces en s exige que se encuentre muy cerca del eje para el reingreso. Aún en el plano z, otro problema es que la compactación que sufren los polos a medida que 't' se incrementa, hace que algunos polos salgan del círculo unidad para reingresar donde 'hay mas espacio libre'. Por lo que haría falta una reparametrización del círculo unidad para equiespaciar los polos, por suerte, existe.

El equiespaciado de Riemann Von Mangoldt

Si se parametriza el círculo unidad mediante,

$$z=\exp\left(\frac{s}{2\pi}\ln\left(\frac{-i\,s}{2\pi\,e}\right)\right),$$

se asegura que los polos están equiespaciados en promedio. Como no es una relación invertible, para trazar el camino de los polos incluimos una ecuación diferencial que relaciona el plano s con el plano z,

$$\frac{dz}{ds}=\frac{z}{2\pi}\ln\left(\frac{-i\,s}{2\pi}\right).$$

Otro problema aparejado a esta línea de trabajo es que todos los polos no empiezan su camino hacia el centro del círculo unidad al mismo tiempo. Esto puede estudiarse mediante la zeta de Hardy (Zeta de Riemann Siegel), aunque tengo que decir que el comportamiento entre los polos frente al parámetro k es diferente entre la zeta de Hardy y la zeta original. En maxima no lo he evaluado porque carece de las derivadas de la zeta.

La idea era que el equiespaciado garantizase que si un cero se separaba del círculo unidad, es que fuera un polo que se encontraba ya fuera del mismo.

El lugar de las raíces a partir de la representación gráfica de la ecuación característica

Para conocer cómo evoluciona un lugar de las raíces cuando variamos un parámetro en una ecuación característica, trazamos la parte real e imaginaria respecto a la variable de estudio, en nuestro caso s. La zeta de Riemann tiene ambas partes, mientras que la zeta de Hardy tiene sólo parte real, por lo que se estudia más fácilmente. Lo primero es determinar cómo afecta el parámetro a la curva, si la desplaza hacia arriba o hacia abajo, o la deforma. Cuando no hay deformación longitudinal es el caso más útil porque con sólo rectas horizontales (isoK), vamos a poder determinar cómo se mueven los polos sobre la recta de estudio. Los mínimos locales de la curva (f) representan los polos y los máximos locales los ceros. Vamos a suponer que al aumentar k, la curva se desplaza hacia arriba (la idea de este procedimiento es hacer un plot en maxima variando k y ver los cortes con el eje real). Conforme vamos desplazando la curva f verticalmente, podemos deducir las posiciones de los polos, antes de cortar a f, los mínimos dictan la posición del polo sobre el eje real (x) y sobre el eje

imaginario (y). Cuando la isoK entra en el punto de tangencia con f, tenemos un punto de ruptura sobre el eje real, y luego cuando la curva sigue subiendo, los polos se desplazan sobre el eje real.

Esta forma de analizar la curva de Hardy revela algo sorprendente, si se encuentra un mínimo local positivo o un máximo local negativo, se ha demostrado automáticamente que la hipótesis de Riemann es falsa. Otra forma de decir lo mismo, es que si existe diferencia entre el numero de polos y ceros sobre la línea crítica, la hipótesis de Riemann es falsa.

Anexo II: Polinomios de Wilkinson

Mi sorpresa fue mayúscula cuando descubrí que el problema de los polinomios no estaba cerrado, también experimentaban mal condicionamiento. Vamos a proponer aquí un procedimiento para paliarlo. El polinomio de Wilkinson (no es el de las maquinillas) se presenta cuando los coeficientes van creciendo notablemente conforme disminuye el grado del monomio, para equilibrar todos los coeficientes, se puede hacer el cambio a la variable y,

$$p(x)=ax^2+by+c,$$
$$c \gg b \gg a,$$
$$x=y\,e^k,$$

y seleccionamos el valor de k de modo que,

$$\frac{c}{e^{nk}} \approx 1 \rightarrow k \approx \frac{\ln(c)}{n}.$$

Donde n es el grado del polinomio.

Algunas veces también puede ser interesante realizar alguna traslación de los ejes de coordenadas, ya que cuando las raíces se sitúan simétricamente respecto al eje imaginario (simetría par) se anulan los coeficientes de forma alterna, excepto el que define el grado del polinomio. En el caso de la Zeta de Hardy, se anulan las derivadas impares en t=0 por su simetría par (esto se prueba mediante del desarrollo de Taylor).

Referencias

[1] Web de wolfram. https://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html

[2] Ingeniería de control moderna. Katsuhiko Ogata. 5ª Edición, Ed. Pearson.

[3] Sistemas de control en tiempo discreto. Katsuhiko Ogata. 2ª Edición, Ed. Prentice Hall.

[4] A fully new path to prove Riemann Hypotesis. https://arxiv.org/abs/1807.00849v5