

Droite réelle et hypothèse de Riemann

Johannes Debouto

1^{er} août 2026

Résumé

L'objectif de ce travail est double : on montre simultanément l'incomplétude de la description géométrique du corps $\mathbb{R}$, et la preuve de l'hypothèse de Riemann lorsque l'on s'autorise à utiliser l'axiome de Cantor-Dedekind.

1 Introduction

Les nombres réels sont depuis très longtemps utilisés dans les raisonnements mathématiques de la vie du scientifique.

Que ce soit en physiques, mathématiques, sciences naturelles ou autres, ces nombres ont souvent montré plus d'intérêt que les autres en raison des opérations de corps possibles à l'intérieur de l'ensemble $\mathbb{R}$.

Pourtant il n'a pas toujours semblé nécessaire de proposer une construction théorique précise de cet ensemble : au début on se contentait juste d'utiliser les réels dans les calculs à chaque fois qu'ils s'y invitaient.

Les premiers formalismes de l'ensemble des nombres réels sont apparus bien après leur découverte, avec les constructions proposées par Dedekind et Cantor, la première identifiant les nombres réels à des sous-ensembles de $\mathbb{Q}$ appelés 'coupures de Dedekind', et la seconde faisant un lien entre nombre réel et 'suites de Cauchy' de rationnels par l'usage des classes d'équivalences.

On peut ainsi montrer pour chaque construction, la propriété dite de complétude du corps ' $\mathbb{R}$ ' construit, qui de plus se transmet à l'aide de l'axiome de Cantor-Dedekind, au corps $\mathbb{R}$ tel que décrit par la droite réelle.

Cependant, la démonstration de cet axiome n'ayant jamais été rigoureusement effectuée, il n'est pas immédiat de déduire la complétude de la droite numérique sans ce raccourci.

L'objectif principal de ce travail est de montrer l'incomplétude de la droite numérique réelle $\mathbb{R}$.

Les conséquences principales seront : l'incohérence de ZF +axiome de Cantor-Dedekind et la preuve de l'hypothèse de Riemann avec cet axiome d'une part, et de l'autre la preuve de l'hypothèse de Riemann sans cet axiome en s'autorisant (faussement) à y intégrer l'axiome de complétude de $\mathbb{R}$, qui notons-le n'a jamais fait défaut dans la quasi-totalité des démonstrations obtenues depuis l'établissement de cette théorie.

2 Un résultat préliminaire

Nous présentons un résultat calculatoire élémentaire qui servira de base à notre travail :

$\forall x \in]0, 1[, \forall w \in \mathbb{N}$, si $xw \notin \mathbb{N}$ ou si $xw \in \mathbb{N}$ et $\gcd(xw, w) \neq 1$, alors

$$\sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, w)=1}}^{xw} 1 = x\phi(w) + \frac{1}{\pi} \Im(S_w(\exp 2i\pi x)),$$

avec $S_w(z) = - \sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, w)=1}}^w \log(1 - z \exp(-2ik \frac{\pi}{w})).$

Preuve : On a du fait que $xw \in]0, w[$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, w)=1}}^w \lfloor \frac{xw - k}{w} \rfloor &= \sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, w)=1}}^{xw} \lfloor \frac{xw - k}{w} \rfloor + \sum_{\substack{k=xw \\ \gcd(k, w)=1}}^w \lfloor \frac{xw - k}{w} \rfloor \\ &= 0 + \sum_{\substack{k=xw \\ \gcd(k, w)=1}}^w \lfloor \frac{xw - k}{w} \rfloor \\ &= - \sum_{\substack{k=xw \\ \gcd(k, w)=1}}^w 1 \\ \sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, w)=1}}^w \lfloor \frac{xw - k}{w} \rfloor &= -\phi(w) + \sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, w)=1}}^{xw} 1 \end{aligned}$$

c'est-à-dire en échangeant les membres

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, w)=1}}^{xw} 1 &= \phi(w) + \sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, w)=1}}^w \lfloor \frac{xw - k}{w} \rfloor \\ &= \phi(w) + \sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, w)=1}}^w \frac{xw - k}{w} - \sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, w)=1}}^w (\frac{xw - k}{w}) \\ \sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, w)=1}}^{xw} 1 &= x\phi(w) + \frac{\phi(w)}{2} - \sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, w)=1}}^w (\frac{xw - k}{w}) \end{aligned}$$

Comme $\frac{xw-k}{w}$ n'est jamais un entier, on a par décomposition en série de Fourier de la partie fractionnaire :

$$(\frac{xw-k}{w}) = - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi l \frac{xw-k}{w})}{l\pi} + \frac{1}{2}.$$

d'où en injectant dans la formule précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k=1 \\ gcd(k,w)=1}}^{xw} 1 &= x\phi(w) + \frac{\phi(w)}{2} - \sum_{\substack{k=1 \\ gcd(k,w)=1}}^w \left(- \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi l \frac{xw-k}{w})}{l\pi} + \frac{1}{2} \right) \\
&= x\phi(w) + \sum_{\substack{k=1 \\ gcd(k,w)=1}}^w \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi l \frac{xw-k}{w})}{l\pi} \\
&= x\phi(w) + \sum_{\substack{k=1 \\ gcd(k,w)=1}}^w \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Im(\exp(2i\pi l \frac{xw-k}{w}))}{l\pi} \\
&= x\phi(w) + \sum_{\substack{k=1 \\ gcd(k,w)=1}}^w \Im\left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\exp(2i\pi l \frac{xw-k}{w})}{l\pi}\right) \\
\sum_{\substack{k=1 \\ gcd(k,w)=1}}^{xw} 1 &= x\phi(w) + \sum_{\substack{k=1 \\ gcd(k,w)=1}}^w \frac{1}{\pi} \Im\left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\exp(2i\pi(x - \frac{k}{w}))^l}{l}\right)
\end{aligned}$$

On reconnaît à l'intérieur le développement en série entière de $-\log(1 - z \exp(-2i \frac{k\pi}{w}))$ évalué $z = \exp(2i\pi x)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k=1 \\ gcd(k,w)=1}}^{xw} 1 &= x\phi(w) - \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ gcd(k,w)=1}}^w \Im(\log(1 - \exp(2i\pi x) \exp(-2i \frac{k\pi}{w}))) \\
&= x\phi(w) - \frac{1}{\pi} \Im\left(\sum_{\substack{k=1 \\ gcd(k,w)=1}}^w \log(1 - \exp(2i\pi x) \exp(-2i \frac{k\pi}{w}))\right) \\
\sum_{\substack{k=1 \\ gcd(k,w)=1}}^{xw} 1 &= x\phi(w) + \frac{1}{\pi} \Im(S_w(\exp(2i\pi x)))
\end{aligned}$$

Comme annoncé. Bien que la preuve ci-dessus soit en toute rigueur valide si on a convergence de toutes les suites croissantes et majorées (résultat immédiat sous ZFC ou ZF+'complétude de $\mathbb{R}$ '), on peut prouver qu'il le reste également sous ZF en utilisant la définition du logarithme complexe.

3 Incomplétude de $\mathbb{R}$

Dans cette partie on raisonne par l'absurde sous ZF et on suppose que $\mathbb{R}$ identifié à la droite géométrique est un corps complet, c'est-à-dire vérifiant la propriété de la borne supérieure. On note aussi ϕ la fonction indicatrice d'Euler.

Montrons qu'alors $\forall w \in \mathbb{N}, \phi(w) > \frac{w-1}{2}$.

Preuve : On considère le polynôme cyclotomique $\Phi_w(z) = \prod_{\substack{k=1 \\ \gcd(k,w)=1}}^w (z - \exp(\frac{2ik\pi}{w}))$ dont on a les résultats immédiats suivants :

* Les coefficients de Φ_w sont réels.

* $\Phi_w(\frac{1}{z}) = z^{-\phi(w)} \Phi_w(z)$.

On pose également pour $0 < a << 1/w$, le domaine $\mathcal{D}_w(a) = (0 < |z| < 1, 2\pi a < \text{Arg}(z) < \frac{\pi}{\phi(w)})$.

L'objectif de cette étude est déterminer une couronne ouverte dans le disque unité, ayant pour frontière son cercle, au sein de laquelle on peut exprimer 'simplement' la fonction S_w à l'aide du polynôme cyclotomique Φ_w .

Remarquons que :

$$\begin{aligned} 2i\Im(\Phi_w(z)) &= \Phi_w(1/z) - \Phi_w(\bar{z}) + \Phi_w(z) - \Phi_w(1/z) \\ &= (1 - z^{-\phi(w)})\Phi_w(z) + \Phi_w(1/z) - \Phi_w(\bar{z}) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{2i\Im(\Phi_w(z))}{1/z - \bar{z}} = \frac{1 - z^{-\phi(w)}}{1/z - \bar{z}} \Phi_w(z) + \frac{\Phi_w(1/z) - \Phi_w(\bar{z})}{1/z - \bar{z}}. \quad (1)$$

Soit $z_0 = \exp(\frac{2ik_0\pi}{w})$ un zéro de Φ_w tel que $\text{Arg}(z_0) \in]0, \frac{\pi}{\phi(w)}[$. D'une part on a $|z_0| = 1$, et d'autre part en appliquant la formule de Taylor à Φ_w en z_0 , et en l'évaluant respectivement en $1/z$ et $\bar{z}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \Phi_w(1/z) - \Phi_w(\bar{z}) &= \sum_{k=1}^n \frac{\Phi_w^{(k)}(z_0)}{k!} [(1/z - z_0)^k - (\bar{z} - z_0)^k] \\ \Phi_w(1/z) - \Phi_w(\bar{z}) &= (1/z - \bar{z}) \sum_{k=1}^n \frac{\Phi_w^{(k)}(z_0)}{k!} \sum_{l=0}^{k-1} (1/z - z_0)^l (\bar{z} - z_0)^{k-1-l} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi_w(1/z) - \Phi_w(\bar{z})}{1/z - \bar{z}} &= \sum_{k=1}^n \frac{\Phi_w^{(k)}(z_0)}{k!} \sum_{l=0}^{k-1} (1/z - z_0)^l (\bar{z} - z_0)^{k-1-l} \\
&\rightarrow_{z \rightarrow z_0} \sum_{k=1}^n \frac{\Phi_w^{(k)}(z_0)}{k!} \sum_{l=0}^{k-1} (\bar{z}_0 - z_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^n \frac{\Phi_w^{(k)}(z_0)}{k!} k (\bar{z}_0 - z_0)^{k-1} \\
\frac{\Phi_w(1/z) - \Phi_w(\bar{z})}{1/z - \bar{z}} &\rightarrow_{z \rightarrow z_0} \Phi'_w(\bar{z}_0)
\end{aligned}$$

En traduisant cette égalité asymptotique par une égalité fonctionnelle :

$$\exists l_{w,z_0} : \mathbb{C} - z_0 \rightarrow \mathbb{C} \text{ continue de limite nulle en } z_0 \text{ tel que : } \frac{\Phi_w(1/z) - \Phi_w(\bar{z})}{1/z - \bar{z}} = \Phi'_w(\bar{z}_0)(1 + l_{w,z_0}(z))$$

En injectant cette formule dans (1), on obtient :

$$\frac{2i\Im(\Phi_w(z))}{1/z - \bar{z}} = \frac{1 - z^{-\phi(w)}}{1/z - \bar{z}} \Phi_w(z) + \Phi'_w(\bar{z}_0)(1 + l_{w,z_0}(z))$$

ie

$$\begin{aligned}
(1 + l_{w,z_0}(z)) &= \frac{2i\Im(\Phi_w(z))}{\Phi'_w(\bar{z}_0)(1/z - \bar{z})} - \frac{1 - z^{-\phi(w)}}{\Phi'_w(\bar{z}_0)(1/z - \bar{z})} \Phi_w(z) \\
(1 + l_{w,z_0}(z)) &= \frac{2i\Im(\Phi_w(z))}{\Phi'_w(\bar{z}_0)(1/z - \bar{z})} - \frac{1 - z^{-\phi(w)}}{\Phi'_w(\bar{z}_0)(\frac{1/z - \bar{z}}{z - z_0})} \frac{\Phi_w(z)}{z - z_0}
\end{aligned}$$

puis en multipliant par $\frac{1/z - \bar{z}}{z - z_0}$ dans chaque membre :

$$\left(\frac{1/z - \bar{z}}{z - z_0}\right)(1 + l_{w,z_0}(z)) = \frac{2i\Im(\Phi_w(z))}{\Phi'_w(\bar{z}_0)(z - z_0)} - \frac{1 - z^{-\phi(w)}}{\Phi'_w(\bar{z}_0)} \frac{\Phi_w(z)}{z - z_0}$$

Une autre égalité asymptotique découlant de la dérivabilité de Φ_w en z_0 : $\frac{\Phi_w(z)}{z - z_0} \rightarrow_{z \rightarrow z_0} \Phi'_w(z_0)$

qui se traduit fonctionnellement par :

$$\exists m_{w,z_0} : \mathbb{C} - z_0 \rightarrow \mathbb{C} \text{ continue de limite nulle en } z_0 \text{ tel que : } \frac{\Phi_w(z)}{z - z_0} = \Phi'_w(z_0)(1 + m_{w,z_0}(z))$$

Donc par substitution :

$$\left(\frac{1/z - \bar{z}}{z - z_0}\right)(1 + l_{w,z_0}(z)) = \frac{2i\Im(\Phi_w(z))}{\Phi'_w(\bar{z}_0)(z - z_0)} - (1 - z^{-\phi(w)}) \frac{\Phi'_w(z_0)}{\Phi'_w(\bar{z}_0)} (1 + m_{w,z_0}(z))$$

De la dérivation de la relation $\Phi_w(1/z) = z^{-\phi(w)}\Phi_w(z)$, on a que $\frac{\Phi'_w(z_0)}{\Phi'_w(\bar{z}_0)} = -z_0^{\phi(w)-2}$. Ainsi :

$$\frac{1/z - \bar{z}}{z - z_0} + \frac{1/z - \bar{z}}{z - z_0} l_{w,z_0}(z) = \frac{2i\Im(\Phi_w(z))}{\Phi'_w(\bar{z}_0)(z - z_0)} + z_0^{\phi(w)-2} (1 - z^{-\phi(w)}) (1 + m_{w,z_0}(z)) \quad (2)$$

On écrit ensuite en suivant la même technique de passage entre égalités asymptotiques et égalités fonctionnelles que :

$$\begin{aligned}\frac{1/z - \bar{z}}{z - z_0} &= \frac{1/z - 1/z_0}{z - z_0} - \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \\ &= -\exp(-2i\text{Arg}(z_0)) + n_{w,z_0}(z) - \exp(-2i\text{Arg}(z - z_0)) \\ \frac{1/z - \bar{z}}{z - z_0} &= -2\exp(-i\text{Arg}(z_0(z - z_0))) \cos(\text{Arg}(z/z_0 - 1)) + n_{w,z_0}(z) \underset{z \rightarrow z_0}{=} \mathcal{O}(1)\end{aligned}$$

On a utilisé la dérivabilité de $z \rightarrow 1/z$ en z_0 pour faire apparaître n_{w,z_0} (même rôle que l_{w,z_0} à savoir de tendre vers 0 en z_0), et obtenir les égalités précédentes par la technique de l'angle moitié. En substituant dans (2) on a alors :

$$\begin{aligned}\frac{1/z - \bar{z}}{z - z_0} l_{w,z_0} &= \frac{2i\Im(\Phi_w(z))}{\Phi'_w(\bar{z}_0)(z - z_0)} \\ &\quad + z_0^{\phi(w)-2} (1 - z^{-\phi(w)}) (1 + m_{w,z_0}(z)) \\ &\quad + 2\exp(-i\text{Arg}(z_0(z - z_0))) \cos(\text{Arg}(z/z_0 - 1)) - n_{w,z_0}(z)\end{aligned}$$

c'est à dire en posant $a_{w,z_0}(z) = \frac{1/z - \bar{z}}{z - z_0} l_{w,z_0}$ ($\underset{z \rightarrow z_0}{=} O(o(1)) = o(1)$),

et $\alpha_{w,z_0}(z) = z_0^{\phi(w)-2} (1 - z^{-\phi(w)}) m_{w,z_0}(z) - n_{w,z_0}(z)$:

$$\begin{aligned}a_{w,z_0}(z) &= \frac{2i\Im(\Phi_w(z))}{\Phi'_w(\bar{z}_0)(z - z_0)} \\ &\quad + z_0^{\phi(w)-2} (1 - z^{-\phi(w)}) \\ &\quad + 2\exp(-i\text{Arg}(z_0(z - z_0))) \cos(\text{Arg}(z/z_0 - 1)) + \alpha_{w,z_0}(z)\end{aligned}$$

ie en posant $b_{w,z_0} = a_{w,z_0} - \alpha_{w,z_0}$ on obtient l'équation :

$$b_{w,z_0}(z) = \frac{2i\Im(\Phi_w(z))}{\Phi'_w(\bar{z}_0)(z - z_0)} + z_0^{\phi(w)-2} (1 - z^{-\phi(w)}) + 2\exp(-i\text{Arg}(z_0(z - z_0))) \cos(\text{Arg}(z/z_0 - 1))$$

Par ailleurs, il clair que $1 - z^{-\phi(w)} = 2i \exp(-i\frac{\phi(w)}{2}\text{Arg}(z_0)) \sin(\frac{\phi(w)}{2}\text{Arg}(z)) + \mu_{w,z_0}(z)$ avec μ_{w,z_0} de limite nulle en z_0 .

Pour cela il suffit de remarquer que $z \rightarrow 1 - z^{-\phi(w)}$ est continue en z_0 , et sinus continue sur $\mathbb{R}$, appliquer ensuite l'angle moitié sur $1 - z_0^{-\phi(w)}$. D'où :

$$\begin{aligned}b_{w,z_0}(z) &= \frac{2i\Im(\Phi_w(z))}{\Phi'_w(\bar{z}_0)(z - z_0)} \\ &\quad + 2i \exp(i(\frac{\phi(w)}{2} - 2)\text{Arg}(z_0)) \sin(\phi(w)\text{Arg}(z)) \\ &\quad + 2\exp(-i\text{Arg}(z_0(z - z_0))) \cos(\text{Arg}(z/z_0 - 1)) \\ &\quad + z_0^{\phi(w)-2} \mu_{w,z_0}(z)\end{aligned}$$

c'est-à-dire en posant $c_{w,z_0}(z) = b_{w,z_0}(z) - z_0^{\phi(w)-2} \mu_{w,z_0}(z)$ (même rôle que l_{w,z_0}) :

$$\begin{aligned}c_{w,z_0}(z) &= \frac{2i\Im(\Phi_w(z))}{\Phi'_w(\bar{z}_0)(z - z_0)} \\ &\quad + 2i \exp(i(\frac{\phi(w)}{2} - 2)\text{Arg}(z_0)) \sin(\phi(w)\text{Arg}(z)) + 2\exp(-i\text{Arg}(z_0(z - z_0))) \cos(\text{Arg}(z/z_0 - 1))\end{aligned}$$

Il vient par inégalité triangulaire inversée :

$$|c_{w,z_0}(z)| \geq \rho_{w,z_0}(z) - \left| \frac{2i\Im(\Phi_w(z))}{\Phi'_w(z_0)(z-z_0)} \right| \quad (3)$$

où on a posé $\rho_{w,z_0}(z) = |2i \exp(i(\frac{\phi(w)}{2} - 2) \text{Arg}(z_0)) \sin(\phi(w) \text{Arg}(z)) + 2 \exp(-i \text{Arg}(z_0(z-z_0))) \cos(\text{Arg}(z/z_0 - 1))|$.

Cette fonction est définie, positive et continue sur tout voisinage épointé de z_0 et intersecté avec $\mathcal{D}_w$.

Rappelons également que $\Phi_w(z) = (z - z_0)\Phi'_w(z_0) + (z - z_0)\Phi'_w(z_0)m_{w,z_0}(z)$.

ie

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_w(z)}{|z - z_0||\Phi'_w(z_0)|} &= \exp(i(\text{Arg}(z - z_0) + \text{Arg}(\Phi'_w(z_0)))) + \exp(i(\text{Arg}(z - z_0) + \text{Arg}(\Phi'_w(z_0))))m_{w,z_0}(z) \\ &= \exp(i(\text{Arg}(z - z_0) + \text{Arg}(\Phi'_w(z_0)))) + \tilde{m}_{w,z_0}(z) \end{aligned}$$

Passant à la partie réelle ça donne :

$$\Re\left(\frac{\Phi_w(z)}{|z - z_0||\Phi'_w(z_0)|}\right) = \cos(\text{Arg}(z - z_0) + \text{Arg}(\Phi'_w(z_0))) + \Re(\tilde{m}_{w,z_0}(z)) \quad (4)$$

D'autre part, un calcul abordable montre que

$$\text{Arg}(\Phi'_w(z_0)) = \begin{cases} -\pi/2 + (\phi(w)/2 - 1)\text{Arg}(z_0) & \text{si } \sum_{\substack{k < k_0 \\ \gcd(k,w)=1}} 1 \text{ est pair} \\ \pi/2 + (\phi(w)/2 - 1)\text{Arg}(z_0) & \text{si } \sum_{\substack{k < k_0 \\ \gcd(k,w)=1}} 1 \text{ est impair} \end{cases}$$

Alors en posant $\theta_0 = -\pi/2 - (\phi(w)/2 - 1)\text{Arg}(z_0)$ on a asymptotiquement grâce à (4) :

$$\Re\left(\frac{\Phi_w(z)}{|z - z_0||\Phi'_w(z_0)|}\right) \xrightarrow{z \rightarrow z_0, \text{Arg}(z-z_0) \rightarrow \theta_0} \begin{cases} -1si \sum_{\substack{k < k_0 \\ \gcd(k,w)=1}} 1 \text{ est pair} \\ 1si \sum_{\substack{k < k_0 \\ \gcd(k,w)=1}} 1 \text{ est impair} \end{cases}$$

Ceci permet de déduire l'existence d'un réel $r_{w,z_0} > 0$ tel que :

$$\forall z \in \mathcal{D}(z_0, r_{w,z_0}) \cap \mathcal{D}_w, \text{Arg}(z - z_0) \in [\theta_0 \pm r_{w,z_0}] \Rightarrow \text{sgn}(\Re(\Phi_w(z))) = (-1)^{\sum_{\substack{k \leq k_0 \\ \gcd(k,w)=1}} 1}.$$

Posons maintenant $V_{z_0} = \mathcal{D}(z_0, r_{w,z_0}) \cap \mathcal{D}_w - (\text{Arg}(z - z_0) \in [\theta_0 \pm r_{w,z_0}])$ et minimisons ρ_{w,z_0} sur V_{z_0} .

D'après le théorème de la borne inf (fonction positive donc minorée, V_{z_0} est très petit mais non vide), $\rho_{w,z_0}^{\min} = \inf(\rho_{w,z_0}(z), z \in V_{z_0})$ existe dans $\mathbb{R}_+$, et d'après l'équation (3) on voudrait que $\rho_{w,z_0}^{\min} > 0$.

Par l'absurde, si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver par caractérisation séquentielle une suite (z_n) à valeurs dans V_{z_0} et vérifiant asymptotiquement $\rho_{w,z_0}(z_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$. De (z_n) on pourrait alors extraire par Bolzano-Weierstrass, une sous-suite (z_{n_k}) convergente dans $\bar{V}_{z_0}$. Soit z_1 la dite limite.

-Si $z_1 \neq z_0$, en montrant facilement que ρ_{w,z_0} est continue en z_1 (argument : périodicité du cosinus/sinus) on déduit que $\rho_{w,z_0}(z_1) = 0$, c'est-à-dire :

$$-2 \exp(-i \text{Arg}(z_0(z_1 - z_0))) \cos(\text{Arg}(z_1/z_0 - 1)) = 2i \exp(i(\frac{\phi(w)}{2} - 2) \text{Arg}(z_0)) \sin(\frac{\phi(w)}{2} \text{Arg}(z_1)).$$

Utilisant ensuite que $|z_1| \leq 1$, on voit facilement sur un schéma que : $\pi/2 < \text{Arg}(z_1/z_0 - 1) < 3\pi/2$.

D'où le système :

$$\begin{cases} -\cos(\operatorname{Arg}(z_1/z_0 - 1)) = \sin(\frac{\phi(w)}{2} \operatorname{Arg}(z_1)) \\ -\operatorname{Arg}(z_0(z_1 - z_0)) = \pi/2 + (\phi(w)/2 - 2)\operatorname{Arg}(z_0)[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\cos(\operatorname{Arg}(z_1/z_0 - 1)) = \sin(\frac{\phi(w)}{2} \operatorname{Arg}(z_1)) \\ -\operatorname{Arg}(z_0^2(z_1/z_0 - 1)) = \pi/2 + (\phi(w)/2 - 2)\operatorname{Arg}(z_0)[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\cos(\operatorname{Arg}(z_1/z_0 - 1)) = \sin(\frac{\phi(w)}{2} \operatorname{Arg}(z_1)) \\ -\operatorname{Arg}(z_1/z_0 - 1)) = \pi/2 + (\phi(w)/2)\operatorname{Arg}(z_0)[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\cos(\pi/2 + (\phi(w)/2)\operatorname{Arg}(z_0)) = \sin(\frac{\phi(w)}{2} \operatorname{Arg}(z_1)) \\ -\operatorname{Arg}(z_1/z_0 - 1)) = \pi/2 + (\phi(w)/2)\operatorname{Arg}(z_0)[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Arg}(z_0) = \operatorname{Arg}(z_1) \\ \operatorname{Arg}(z_1/z_0 - 1)) = -\pi/2 - (\phi(w)/2)\operatorname{Arg}(z_0)[2\pi] \end{cases}$$

car $\frac{\phi(w)}{2} \operatorname{Arg}(z_1) \in]0, \pi/2[$ différent de $\pi - \frac{\phi(w)}{2} \operatorname{Arg}(z_0) \in]\pi/2, \pi[$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Arg}(z_0) = \operatorname{Arg}(z_1) \\ -\pi = -\pi/2 - (\phi(w)/2)\operatorname{Arg}(z_0)[2\pi] \end{cases}$$

ceci est immédiat sur un schéma.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Arg}(z_0) = \operatorname{Arg}(z_1) \\ (\phi(w)/2)\operatorname{Arg}(z_0) = \pi/2 \end{cases}$$

ce qui bien sûr ne tient pas au vu des hypothèses sur $D_w(a)$.

Alors nécessairement $z_1 = z_0$.

Mais nous allons voir que c'est impossible également.

En effet, cela implique que :

$$-2 \exp(-i \operatorname{Arg}(z_0(z_{n_k} - z_0))) \cos(\operatorname{Arg}(z_{n_k}/z_0 - 1)) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 2i \exp(i(\frac{\phi(w)}{2} - 2)\operatorname{Arg}(z_0)) \sin(\frac{\phi(w)}{2} \operatorname{Arg}(z_0)).$$

ie d'après la feuille (5) en faisant l'angle moitié inversé :

$$-\exp(-2i \operatorname{Arg}(z_0)) - \exp(-2i \operatorname{Arg}(z_{n_k} - z_0)) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 2i \exp(i(\frac{\phi(w)}{2} - 2)\operatorname{Arg}(z_0)) \sin(\frac{\phi(w)}{2} \operatorname{Arg}(z_0))$$

$$\Leftrightarrow -\exp(-2i \operatorname{Arg}(z_{n_k} - z_0)) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \exp(-2i \operatorname{Arg}(z_0)) + 2i \exp(i(\frac{\phi(w)}{2} - 2)\operatorname{Arg}(z_0)) \sin(\frac{\phi(w)}{2} \operatorname{Arg}(z_0))$$

$$\Leftrightarrow -\exp(-2i \operatorname{Arg}(z_{n_k} - z_0)) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \exp(-2i \operatorname{Arg}(z_0))(1 + 2i \exp(i(\frac{\phi(w)}{2})\operatorname{Arg}(z_0)) \sin(\frac{\phi(w)}{2} \operatorname{Arg}(z_0)))$$

$$\Leftrightarrow -\exp(-2i \operatorname{Arg}(z_{n_k} - z_0)) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \exp(-2i \operatorname{Arg}(z_0))(1 - 2 \sin(\frac{\phi(w)}{2} \operatorname{Arg}(z_0))^2 + i \sin(\phi(w) \operatorname{Arg}(z_0)))$$

$$\Leftrightarrow -\exp(-2i \operatorname{Arg}(z_{n_k} - z_0)) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \exp(-2i \operatorname{Arg}(z_0)) \exp(i\phi(w) \operatorname{Arg}(z_0))$$

$$\Leftrightarrow \exp(-2i \operatorname{Arg}(z_{n_k} - z_0)) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} -\exp(i(\phi(w) - 2)\operatorname{Arg}(z_0))$$

$\Rightarrow$ (passage aux arguments modulo 2π , licite car le membre de droite est un nombre complexe non négatif)

$$-2 \operatorname{Arg}(z_{n_k} - z_0) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} -\pi + (\phi(w) - 2)\operatorname{Arg}(z_0) = -2(\theta_0 + \pi)$$

$\Rightarrow$ (le modulo π est décidé car $|z_{n_k}| < 1$, peut se lire sur un schéma)
 $-Arg(z_{n_k} - z_0) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} -(\theta_0 + \pi) + \pi = -\theta_0$

$\Rightarrow Arg(z_{n_k} - z_0) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \theta_0$

Donc pour k assez grand z_{n_k} est à valeurs dans $V_{z_0}^c$, ce qui ne tient pas par définition de (z_n) .

Conclusion : $\rho_{w,z_0}^{min} > 0$.

En revenant à l'équation (3), on a alors :

$$\forall z \in V_{z_0}, \left| \frac{2i\Im(\Phi_w(z))}{\Phi_w'(z_0)(z-z_0)} \right| \geq \rho_{w,z_0}^{min} - |c_{w,z_0}(z)|.$$

Et comme $|c_{w,z_0}(z)| \rightarrow_{z \rightarrow z_0} 0$, $\exists r'_{w,z_0} \in]0, r_{w,z_0}[$ tel que si on pose $V'_{z_0} = \mathcal{D}(z_0, r'_{w,z_0}) \cap \mathcal{D}_w - (Arg(z - z_0) \in [\theta_0 \pm r_{w,z_0}])$, alors

$$\forall z \in V'_{z_0}, \left| \frac{2i\Im(\Phi_w(z))}{\Phi_w'(z_0)(z-z_0)} \right| \geq \frac{\rho_{w,z_0}^{min}}{2}. \text{ C'est à dire que } \forall z \in V'_{z_0}, |\Im(\Phi_w(z))| > 0.$$

Ainsi on montré que pour toute racine z_0 de Φ_w , on peut construire un voisinage $V_0(a) = \mathcal{D}(z_0, r'_{w,z_0}) \cap \mathcal{D}_w(a)$ dans le disque unité tel que :

$$\begin{cases} \Im(\Phi_w(z)) \neq 0 \text{ si } z \in V_0(a) \cap V'_{z_0} \\ \text{sgn}(\Re(\Phi_w(z))) = (-1)^{\sum_{k \leq k_0} 1} \text{ si } z \in V_0(a) \cap V_{z_0}^c \end{cases}$$

On pourrait donc songer à définir sur chacun des $V_i(a)$ obtenus (z_i étant un zéro de Φ_w dans la région angulaire délimitée par $\mathcal{D}_w(a)$) une fonction holomorphe du type $\log(\pm \Phi_w) + Cste$, en choisissant le signe en fonction de la racine rencontrée sur le chemin de sorte à ne pas tomber dans $\mathbb{R}_-$.

Montrons que sous les hypothèses faites au début de cette partie, il est possible de le faire. Considérons dans un premier temps la figure suivante :

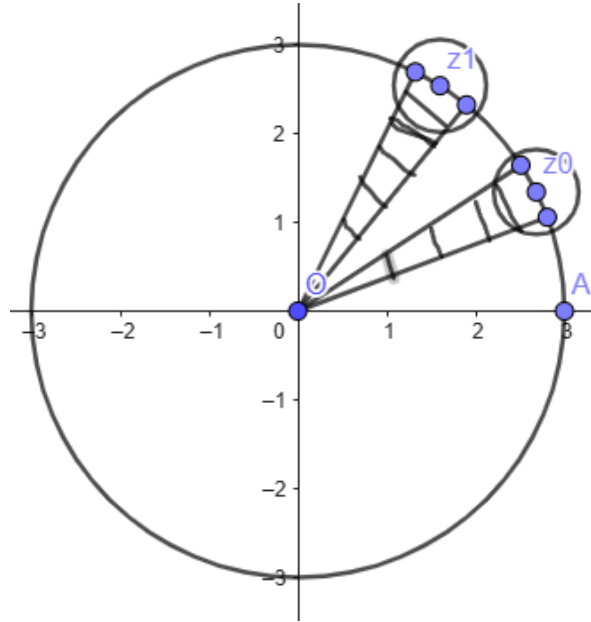


FIGURE 1 – titre de la figure

Notons P_i les régions hachurées et $]t_i^-, t_i^+[$ les arguments limites associés.

Posons aussi $\forall t \in]a, \frac{\pi}{\phi(w)}[-\bigcup_i]t_i^-, t_i^+[$, $r_t = \max(r \in [0, 1[, \Im(\Phi_w(r \exp(it))) = 0)$.

Au passage r_t est bien défini (on peut vérifier si besoin), et la famille $(r_t)_{t \in]a, \frac{\pi}{\phi(w)}[-\bigcup_i]t_i^-, t_i^+[}$ est majorée par 1.

Posons alors d'après le théorème de la borne supérieure, le réel $R_w(a) = \sup(r_t, t \in]a, \frac{\pi}{\phi(w)}[-\bigcup_i]t_i^-, t_i^+[) \in [0, 1]$.

- Si $R_w(a) = 1$, alors par caractérisation séquentielle $\exists(t_n)$ à valeurs dans $]a, \frac{\pi}{\phi(w)}[-\bigcup_i]t_i^-, t_i^+[$ tel que $r_{t_n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1$. (t_n) étant bornée on peut en extraire d'après le théorème de Weierstrass une sous-suite (t_{n_k}) convergente vers $t_0 \in [a, \frac{\pi}{\phi(w)}] - \bigcup_i]t_i^-, t_i^+[$, vérifiant à son tour $r_{t_{n_k}} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 1$.

Mais dans ce cas, $r_{t_{n_k}} \exp(it_{n_k}) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \exp(it_0)$. Par continuité de $\Im(\Phi_w)$ on a nécessairement $\Im(\Phi_w(\exp(it_0))) = 0$, c'est-à-dire en décortiquant l'expression de $\Phi_w(\exp(it))$:

$$\begin{aligned} \Im(\Phi_w(\exp(it_0))) = 0 &\Leftrightarrow t_0 = \frac{\pi}{\phi(w)} \in (\frac{2k\pi}{w}, \gcd(k, w) = 1) \\ &\Rightarrow \exists k_0 \in [[1, w]], \gcd(k_0, w) = 1, \frac{\pi}{\phi(w)} = \frac{2k_0\pi}{w} \\ &\Rightarrow \exists k_0 \in [[1, w]], \gcd(k_0, w) = 1, w = 2k_0\phi(w) \\ &\Rightarrow w = 2\phi(w) \\ \Im(\Phi_w(\exp(it_0))) = 0 &\Rightarrow \phi(w) > \frac{w-1}{2} \end{aligned}$$

Donc $R_w(a) = 1 \Rightarrow \phi(w) = \frac{w}{2} > \frac{w-1}{2}$ et la preuve est terminée. On suppose maintenant que $\phi(w) \neq \frac{w}{2}$

Alors $R_w(a) \in [0, 1[$ et $\forall t \in]a, \frac{\pi}{\phi(w)}[-\bigcup_i]t_i^-, t_i^+[$, $\forall r \in]R_w, 1[$, $|\Im(\Phi_w(r \exp(it)))| > 0$.

Considérons alors la figure esquissée suivante :

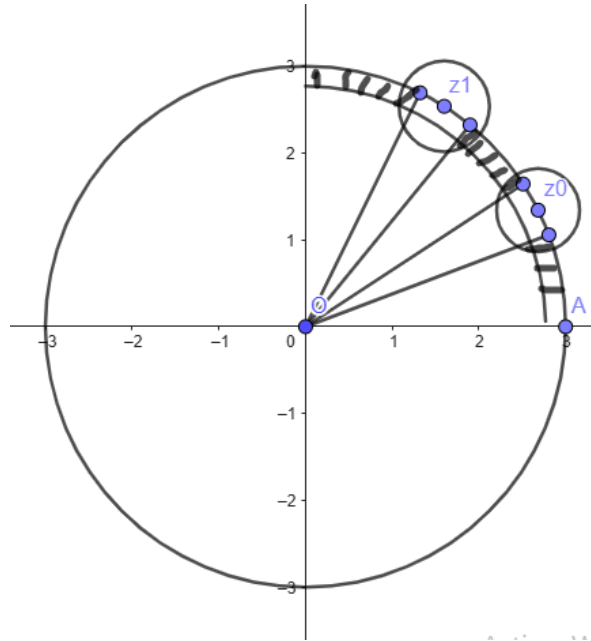


FIGURE 2 – titre de la figure

Notons $\mathcal{G}_w(a)$ la région hachurée, et $\mathcal{G}_{w,z_i^-}, \mathcal{G}_{w,z_i^+}$ les sous-régions intuitives correspondantes. On a montré que $|\Im(\Phi_w(r \exp(it)))| > 0$ sur $\mathcal{G}_w(a)$, donc par connexité des $\mathcal{G}_{w,z_i^\pm}$, par continuité de $\Im(\Phi_w)$ (et théorème des valeurs intermédiaires généralisé), $\Im(\Phi_w(r \exp(it)))$ est de signe constant sur $\mathcal{G}_{w,z_i^-}$ d'une part et $\mathcal{G}_{w,z_i^+}$ de l'autre.

De plus le signe est déterminé en faisant la limite $r \rightarrow 1$.

Posons finalement le domaine $\mathcal{C}_w(a) = (R_w < |z| < 1, 2\pi a < \text{Arg}(z) < \frac{\pi}{\phi(w)})$ et la fonction f définie sur ce domaine de la façon suivante :

En parcourant le domaine de façon angulaire à partir de $\text{Arg}(z) = 2\pi a$, on initialise $f(z) = \log(\Phi_w(z)) - i\pi$.

A chaque fois que l'on rentre dans $V_i(a)$, on réalise l'opération $\Phi_w(z) = -\Phi_w(z)$, et on ajoute $i\pi$ à $f(z)$ (par exemple lors de la première incursion, dans $V_0(a)$, $f(z) = \log(-\Phi_w(z))$ et gardera cette expression jusqu'à l'incursion dans $V_1(a)$ où elle vaudra $\log(\Phi_w(z)) + i\pi$ et etc).

La fonction f ainsi définie sur la couronne $\mathcal{C}_w(a)$ est (très simple mais laborieux...il suffit d'analyser le signe de $\Re(\Phi_w)$ et $\Im(\Phi_w)$ à chaque étape) holomorphe et sa dérivée vaut : $f'(z) = -S'_w(z) = \frac{\Phi'_w(z)}{\Phi_w(z)}$.

Alors par le théorème intégral de Cauchy, il existe une constante c_a tel que $\forall z \in \mathcal{C}_w(a), -S_w(z) = f(z) + c_a$. Pour déterminer c_a , on peut faire la limite sur le cercle en le point $\exp(2i\pi a)$:

$$-S_w(\exp(2i\pi a)) = f(\exp(2i\pi a)) + c_a, \text{ ie } c_a = -S_w(\exp(2i\pi a)) - f(\exp(2i\pi a))$$

Le même procédé pouvant être appliqué pour toute valeur très faible ($\ll 1/w$) de a , on en déduit que

$$\begin{aligned} c_a &= \lim_{a \rightarrow 0} (-S_w(\exp(2i\pi a)) - f(\exp(2i\pi a))) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} (-S_w(1) - \log(\Phi_w(1)) + i\pi) \\ c_a &= i\pi \end{aligned}$$

Finalement on obtient la formule suivante : $\forall z \in \mathcal{C}_w(a), -S_w(z) = f(z) + i\pi$, qui s'étend par continuité $\forall z = \exp(it)$ avec $t \in [2\pi a, \frac{\pi}{\phi(w)}]$ dès que z n'est pas une racine primitive de 1.

Raisonnons encore par l'absurde et supposons que $\phi(w) \leq \frac{w-1}{2}$. Ceci nous permet d'évaluer la formule en $z = \exp(\frac{2i\pi}{w-1})$: $-S_w(\exp(\frac{2i\pi}{w-1})) = f(\exp(\frac{2i\pi}{w-1})) + i\pi$.

Pour trouver la valeur de $f(\exp(\frac{2i\pi}{w-1}))$, on cherche $k_{max} = \max(k \in [[1, w]], \gcd(k, w) = 1, \frac{2k\pi}{w} < \frac{2\pi}{w-1})$ (ici $k_{max} = 1$), et d'après la définition de $f(z)$ on obtient alors : $f(\exp(\frac{2i\pi}{w-1})) = \log(-\Phi_w(\exp(\frac{2i\pi}{w-1})))$. Ainsi :

$$\begin{aligned} -\Im S_w(\exp(\frac{2i\pi}{w-1})) &= \Im \log(-\Phi_w(\exp(\frac{2i\pi}{w-1}))) + \pi \\ -\Im S_w(\exp(\frac{2i\pi}{w-1})) &= \frac{\pi\phi(w)}{w-1} - 2\left\lceil \frac{\phi(w)}{2(w-1)} - \frac{1}{2} \right\rceil \pi + \pi \end{aligned}$$

Donc d'après la formule établie dans la section 2 :

$$\begin{aligned} 1 &= 2\left\lceil \frac{\phi(w)}{2(w-1)} - \frac{1}{2} \right\rceil - 1 \\ \Leftrightarrow 1 &= \left\lceil \frac{\phi(w)}{2(w-1)} - \frac{1}{2} \right\rceil \\ \Leftrightarrow \phi(w) &> w-1 \end{aligned}$$

ce qui est absurde.

Ainsi on vient de montrer que pour tout entier naturel $w > 2$, $\phi(w) > \frac{w-1}{2}$ et donc d'après le résultat établi par Broughan et Kevin en 2017 [?], l'hypothèse de Riemann est vérifiée.

Cependant, l'inégalité obtenue bien que valide sous $\text{ZF} + \text{'complétude de } \mathbb{R}'$, reste bel et bien fausse en pratique, dans la mesure où on est capable d'exhiber des entiers naturels la contredisant. Comme précédemment on arrive donc à une contradiction et on conclut que la droite géométrique réelle n'est pas complète sous ZF .

4 Conclusion

Contrairement à ce que l'on pensait la droite géométrique réelle n'est pas complète. La complétude démontrée dans la construction du corps des réels cachait en réalité l'utilisation de l'axiome de Cantor-Dedekind, qui n'a bien entendu rien de trivial...

Cette propriété bien que permettant d'obtenir des preuves rigoureuses de conjecture en théorie des nombres telles que l'hypothèse de Riemann, a malheureusement le défaut de rendre la théorie ZF incohérente.

Il n'est donc plus question de considérer la 'propriété de complétude' de la droite réelle en tant que théorème pouvant se déduire à partir des axiomes de base de ZF, mais plutôt en tant qu'approximation dont il faudra à l'avenir estimer l'erreur commise en l'intégrant dans les axiomes de base de cette théorie. Le fait qu'une grande partie des résultats basiques en analyse réelle classique se démontrent à partir de ce 'postulat', pourrait cependant nous faire penser que cette erreur peut être raisonnablement tue.

Références

- [1] Kevin Broughan *Equivalents arithmétiques*, La Presse de l'Université de Cambridge, Equivalents de l'hypothèse de Riemann, Vol 1, Corollaire 5.35, 2017.