- Yes, The Riemann Hypothesis Is True ! -
- Oui, L'Hypothèse de Riemann Est Vraie !-

Abdelmajid Ben Hadj Salem[1]

Résidence Bousten 8, Bloc B, Av. Mosquée Raoudha, 2036 Soukra, Tunisia.
Email : abenhadjsalem@gmail.com

Abstract

In 1859, Georg Friedrich Bernhard Riemann had announced the following conjecture, called Riemann Hypothesis : *The nontrivial roots (zeros) $s = \sigma + it$ of the zeta function, defined by :*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ for } \quad \Re(s) > 1$$

have real part $\sigma = \dfrac{1}{2}$. In this note, I give the proof that $\sigma = \dfrac{1}{2}$ using an equivalent statement of the Riemann Hypothesis : the Dirichlet η function.

Résumé

En 1859, Georg Friedrich Bernhard Riemann avait annoncé la conjecture suivante dite Hypothèse de Riemann : *Les zéros non triviaux $s = \sigma + it$ de la fonction zeta définie par :*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \textit{ pour } \quad \Re(s) > 1$$

ont comme parties réelles $\sigma = \dfrac{1}{2}$.

On donne une démonstration que $\sigma = \dfrac{1}{2}$ en utilisant une proposition équivalente de l'Hypothèse de Riemann : la fonction η de Dirichlet.

Keywords: `Zeta function`, `non-trivial zeros of eta function`, `equivalence statements`, `the definition of limits of real sequences`, `real functions`.

2010 MSC: 11AXX, 11M26.

This paper is dedicated to the memory of my Father ***Mohamed***
who taught me arithmetic,
To my wife ***Wahida****, my daughter* ***Sinda****, my son* ***Mohamed Mazen*** *and my granddaughter* ***Rayhane***

'I feel that these aren't the right techniques to solve the Riemann hypothesis itself, it's going to need some big idea from somewhere else.'

James Maynard (07/15/2024)[1]

1. Introduction

En 1859, G.F.B. Riemann avait annoncé la conjecture suivante [2] :

Conjecture 1. *Soit $\zeta(s)$ la fonction complexe de la variable complexe $s = \sigma + it$ définie par le prolongement analytique de la fonction :*

$$\zeta_1(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ pour } \Re(s) = \sigma > 1$$

sur tout le plan complexe sauf au point $s = 1$. Alors les zéros non triviaux de $\zeta(s) = 0$ sont de la forme :

$$s = \frac{1}{2} + it$$

Dans cette communication, nous donnons une démonstration que $\sigma = \frac{1}{2}$. Notre idée est de partir d'une proposition équivalente de l'Hypothèse de Riemann et en utilisant la définition de la limite des suites réelles.

1.1. *La fonction ζ*

Notons par $s = \sigma + it$ la variable complexe de $\mathbb{C}$. Pour $\Re(s) = \sigma > 1$, appelons ζ_1 la fonction définie par :

$$\zeta_1(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ avec } \Re(s) = \sigma > 1$$

Nous savons qu'avec la définition précédente, la fonction ζ_1 est une fonction analytique de s. Notons par $\zeta(s)$ la fonction obtenue par prolongement analytique de $\zeta_1(s)$, alors nous rappelons le théorème suivant [3] :

Théorème 2. *Les zéros de $\zeta(s)$ satisfont :*

1. $\zeta(s)$ n'a pas de zéros pour $\Re(s) > 1$;

2. le seul pôle de $\zeta(s)$ est au point $s = 1$; son résidu vaut 1 et il est simple ;

3. les zéros triviaux de $\zeta(s)$ sont déterminés pour les valeurs $s = -2, -4, \ldots$;

4. les zéros non triviaux se situent dans la région $0 \leq \Re(s) \leq 1$ dite bande critique et ils sont symétriques respectivement par rapport à l'axe vertical $\Re(s) = \dfrac{1}{2}$ et l'axe des réels $\Im(s) = 0$.

Par suite, la conjecture relative à l'Hypothèse de Riemann est exprimée comme suit :

Conjecture 3. *(Hypothèse de Riemann,[3]) Tous les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ sont sur la droite critique $\Re(s) = \dfrac{1}{2}$.*

En plus des propriétes citées par le théorème cité ci-dessus, la fonction $\zeta(s)$ vérifie la relation fonctionnelle [3] pour $s \neq 1$:

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s} cos\frac{s\pi}{2}\Gamma(s)\zeta(s) \tag{1}$$

où $\Gamma(s)$ est la fonction définie sur le demi-plan $\Re(s) > 0$ par :

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{s-1}dt,$$

Alors, au lieu d'utiliser la fonctionnelle donnée par (1), nous allons utiliser celle présentée par G.H. Hardy [4] à savoir la fonction eta de Dirichlet [3] :

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$$

Elle est convergente pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\Re(s) > 0$.

1.2. Une Proposition équivalente à l'Hypothèse de Riemann

Parmi les propositions équivalentes à l'Hypothèse de Riemann celle de la fonction eta de Dirichlet qui s'énnonce comme suit [3] :

Equivalance 4. *L'Hypothèse de Riemann est équivalente à l'énnoncé que tous les zéros de la fonction eta de Dirichlet :*

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$$

qui se situent dans la bande critique $0 < \Re(s) < 1$*, sont sur la droite critique* $\Re(s) = \dfrac{1}{2}$.

Nous avons aussi le théorème (voir page 16, [4]) :

Théorème 5. *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\zeta(1 + it) \neq 0$.

Ainsi, on considère la bande critique la région définie par $0 < \Re(s) < 1$.

2. Démonstration que les zéros de la fonction $\boldsymbol{\eta(s)}$ sont sur la droite critique $\boldsymbol{\Re(s) = \frac{1}{2}}$

Notons par $s = \sigma + it$ avec $0 < \sigma < 1$. Considérons maintenant un zéro de $\eta(s)$ qui se trouve dans la bande critique et appelons $s = \sigma + it$ ce zéro, nous avons donc $0 < \sigma < 1$ et $\eta(s) = 0 \Longrightarrow (1-2^{1-s})\zeta(s) = 0$. Notons $\zeta(s) = A+iB$, et $\theta = tLog2$, alors :

$$(1-2^{1-s})\zeta(s) = \left[A(1 - 2^{1-\sigma}cos\theta) - 2^{1-\sigma}Bsin\theta\right]+i\left[B(1 - 2^{1-\sigma}cos\theta) + 2^{1-\sigma}Asin\theta\right]$$

$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = 0$ donne le système :

$$A(1 - 2^{1-\sigma}cos\theta) - 2^{1-\sigma}Bsin\theta = 0$$
$$B(1 - 2^{1-\sigma}cos\theta) + 2^{1-\sigma}Asin\theta = 0$$

Comme les fonctions *sin* et *cos* ne s'annulent pas simultanément, supposons par exemple que $sin\theta \neq 0$, la première équation du système donne $B = \dfrac{A(1 - 2^{1-\sigma}cos\theta)}{2^{1-\sigma}sin\theta}$, la deuxième équation s'écrit :

$$\frac{A(1 - 2^{1-\sigma}cos\theta)}{2^{1-\sigma}sin\theta}(1 - 2^{1-\sigma}cos\theta) + 2^{1-\sigma}Asin\theta = 0 \Longrightarrow A = 0$$

Par suite, $B = 0 \Longrightarrow \zeta(s) = 0$, il s'ensuit que :

$$\boxed{s \textit{ est un zéro de } \eta(s) \textit{ dans la bande critique est aussi un zéro de } \zeta(s)} \qquad (2)$$

Reciproquement, si s est un zéro de $\zeta(s)$ dans la bande critique, soit $\zeta(s) = A+iB = 0 \Longrightarrow \eta(s) = (1-2^{1-s})\zeta(s) = 0$, donc s est aussi un zéro de $\eta(s)$ dans la bande critique. Nous pouvons écrire :

$$\boxed{s\, est\ un\ zéro\ de\, \zeta(s)\ dans\ la\ bande\ critique\ est\ aussi\ un\ zéro\ de\, \eta(s)} \qquad (3)$$

Ecrivons la fonction η :

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}e^{-sLogn} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}e^{-(\sigma+it)Logn} =$$

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}e^{-\sigma Logn}.e^{-itLogn}$$

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}e^{-\sigma Logn}(cos(tLogn) - isin(tLogn))$$

Définissons la suite de fonctions $((\eta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}(s))$, par :

$$\eta_n(s) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^s} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{cos(tLogk)}{k^\sigma} - i\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{sin(tLogk)}{k^\sigma}$$

avec $s = \sigma + it$ et $t \neq 0$.

Soit s un zéro de η dans la bande critique, soit $\eta(s) = 0$, avec $0 < \sigma < 1$. Par suite, on peut écrire $lim_{n\longrightarrow+\infty}\eta_n(s) = 0 = \eta(s)$. Ce qui donne :

$$lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{cos(tLogk)}{k^\sigma} = 0$$

$$lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{sin(tLogk)}{k^\sigma} = 0$$

Utilisons la définition de la limite d'une suite, on peut écrire :

$$\forall\epsilon_1 > 0 \quad \exists n_r, \forall N > n_r \quad |\Re(\eta(s)_N)| < \epsilon_1$$

$$\forall\epsilon_2 > 0 \quad \exists n_i, \forall N > n_i \quad |\Im(\eta(s)_N)| < \epsilon_2$$

En prenant $\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2$ et $N > max(n_r, n_i)$, on obtient :

$$0 < \sum_{k=1}^{N}\frac{cos^2(tLogk)}{k^{2\sigma}} + 2\sum_{k,k'=1;k<k'}^{N}\frac{(-1)^{k+k'}cos(tLogk).cos(tLogk')}{k^\sigma k'^\sigma} < \epsilon^2$$

$$0 < \sum_{k=1}^{N}\frac{sin^2(tLogk)}{k^{2\sigma}} + 2\sum_{k,k'=1;k<k'}^{N}\frac{(-1)^{k+k'}sin(tLogk).sin(tLogk')}{k^\sigma k'^\sigma} < \epsilon^2$$

En faisant la somme des deux dernières inégalités, on obtient :

$$0 < \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2\sigma}} + 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^{\sigma} k'^{\sigma}} < 2\epsilon^2 \tag{4}$$

2.1. Cas $\sigma = \frac{1}{2} \Longrightarrow 2\sigma = 1$

On suppose que $\sigma = \frac{1}{2} \Longrightarrow 2\sigma = 1$. Commençons par rappeler le théorème de Hardy (1914) [3],[4] :

Théorème 6. *Il y'a une infinité de zéros de $\zeta(s)$ sur la droite critique.*

Des propositions (2-3), nous déduisons la proposition suivante :

Proposition 1. *Il y'a une infinité de zéros de $\eta(s)$ sur la droite critique.*

Soit $s_j = \frac{1}{2} + it_j$ un des zéros de la fonction $\eta(s)$ sur la droite critique, soit $\eta(s_j) = 0$. L'équation (4) s'écrit pour s_j :

$$0 < \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} + 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(t_j Log(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}} < 2\epsilon^2$$

ou encore :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} < 2\epsilon^2 - 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(t_j Log(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}}$$

Si on fait tendre N vers $+\infty$, la série $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$ est divergente et devient infinie. Soit :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \leq 2\epsilon^2 - 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty} (-1)^{k+k'} \frac{cos(t_j Log(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}}$$

Par suite, nous obtenons le résultat suivant, sans s'occuper de la manière de la double somme (même remarque pour les prochains cas $0 < \sigma < 1/2$ et $1/2 < \sigma < 1$) :

$$\boxed{lim_{N \longrightarrow +\infty} \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(t_j Log(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}} = -\infty} \tag{5}$$

sinon, nous aurons une contradiction avec le fait que :

$$lim_{N \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^{s_j}} = 0$$

2.2. Cas $0 < \sigma < \dfrac{1}{2}$

2.2.1. Cas où il n'existe pas de zéros de $\eta(s)$ *avec* $s = \sigma + it$ *et* $0 < \sigma < \dfrac{1}{2}$

En utilisant, pour ce cas, le point 4 du théorème (2), nous déduisons que la fonction $\eta(s)$ n'a pas de zéros avec $s = \sigma + it$ et $\dfrac{1}{2} < \sigma < 1$. Par suite, d'après la proposition (2), il s'ensuit que la fonction $\zeta(s)$ a ses zéros seulement sur la droite critique $\Re(s) = \sigma = \dfrac{1}{2}$ et **l'Hypothèse de Riemann est vraie**.

2.2.2. Cas où il existe des zéros de $\eta(s)$ *avec* $s = \sigma + it$ *et* $0 < \sigma < \dfrac{1}{2}$

Supposons qu'il existe $s = \sigma + it$ un zéro de $\eta(s)$ soit $\eta(s) = 0$ avec $0 < \sigma < \frac{1}{2} \Longrightarrow s \in$ à la bande critique. Nous écrivons l'équation (4), :

$$0 < \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2\sigma}} + 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^\sigma k'^\sigma} < 2\epsilon^2$$

ou :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2\sigma}} < 2\epsilon^2 - 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^\sigma k'^\sigma}$$

Or $2\sigma < 1$, il s'ensuit que $lim_{N \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{N} \dfrac{1}{k^{2\sigma}}$ tende vers $+\infty$ et nous obtenons :

$$\boxed{\sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^\sigma k'^\sigma} = -\infty}$$

2.3. Cas $\dfrac{1}{2} < \Re(s) < 1$

Soit $s = \sigma + it$ le zéro de $\eta(s)$ dans $0 < \Re(s) < \dfrac{1}{2}$, objet du paragraphe précédent. Suivant le point 4 du théorème 2, le nombre complexe $s' = 1 - \sigma + it$ est aussi un zéro de la fonction $\eta(s)$ dans la bande $\dfrac{1}{2} < \Re(s) < 1$. En appliquant (4), nous obtenant :

$$0 < \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2\sigma'}} + 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^{\sigma'} k'^{\sigma'}} < 2\epsilon^2 \tag{6}$$

Or $2\sigma' = 2(1 - \sigma) > 1 \Longrightarrow \sigma < \dfrac{1}{2}$, comme $2\sigma' > 1$, la série $\sum_{k=1}^{N} \dfrac{1}{k^{2\sigma'}}$ est convergente vers la constante $C(\sigma') = \zeta(2\sigma')$. De l'équation (6), nous déduisons que :

$$\boxed{\sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty}(-1)^{k+k'}\frac{cos(tLog(k/k'))}{k^{\sigma'}k'^{\sigma'}}=-\frac{C(\sigma')}{2}>-\infty}$$

Maintenant fixons $t=\Im(s')$ et considérons la fonction $F_N(u)$ définie par :

$$F_N(u)=\sum_{k,k'=1;k<k'}^{N}(-1)^{k+k'}\frac{cos(tLog(k/k'))}{k^u k'^u}=\sum_{k,k'=1;k<k'}^{N}(-1)^{k+k'}cos(tLog(k/k'))e^{-uLog(kk')},\quad u\in]0,1[\tag{7}$$

La fonction $F_N(u)$ est de classe C^∞ pour $\forall N\in\mathbb{N}^*$ et $u\in]0,1[$, et nous avons obtenu précédement que pour $N\longrightarrow+\infty$:

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty}(-1)^{k+k'}\frac{cos(tLog(k/k'))}{k^{\sigma'}k'^{\sigma'}}=-\frac{C(\sigma')}{2} & \text{pour } u=\sigma'=1-\sigma>\dfrac{1}{2}\\[2ex] \displaystyle\sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty}(-1)^{k+k'}\frac{cos(tLog(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}}=-\infty & \text{pour } u=\dfrac{1}{2}\\[2ex] \displaystyle\sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty}(-1)^{k+k'}\frac{cos(tLog(k/k'))}{k^{\sigma}k'^{\sigma}}=-\infty & \text{pour } u=\sigma<\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Ecrivons que $F_N(u)$ est continue au point $u=1/2$, on peut écrire :

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta\text{ tel que }\forall\,u\,/\,|u-1/2|<\delta\Longrightarrow|F_N(u)-F_N(1/2)|<\epsilon$$

Soit $u=\sigma'\in]0,1[$ avec $\sigma'>\frac{1}{2}$ vérifiant $\sigma'-\frac{1}{2}<\delta$, on a alors l'équation :

$$|F_N(\sigma')-F_N(1/2)|<\epsilon\Longrightarrow$$

$$-\epsilon+F_N(\sigma')<\left(F_N(1/2)=\sum_{k,k'=1;k<k'}^{N}(-1)^{k+k'}\frac{cos(tLog(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}}\right)<\epsilon+F_N(\sigma')$$

$$\Longrightarrow-\epsilon+\sum_{k,k'=1;k<k'}^{N}(-1)^{k+k'}\frac{cos(tLog(k/k'))}{k^{\sigma'}k'^{\sigma'}}<\sum_{k,k'=1;k<k'}^{N}(-1)^{k+k'}\frac{cos(tLog(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}}$$

Comme pour t, u fixés, la fonction F_N est définie pour tout entier $N > 0$, quand N devient infiniment grand, nous obtenons :

$$-\epsilon + \sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^{\sigma'} k'^{\sigma'}} \leq \sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}}$$
$$\Longrightarrow -\epsilon - \frac{\zeta(2\sigma')}{2} \leq \sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}} = -\infty$$

D'où la contradiction avec $\zeta(2\sigma')$ bornée. Par suite, l'hypothèse qu'il existe des zéros de $\eta(s)$ dans l'intervalle $\frac{1}{2} < \Re(s) < 1$ étudiée dans [2.3] est fausse. Il s'ensuit que la fonction $\eta(s)$ ne s'annule pas dans les intervalles $0 < \Re(s) < \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} < \Re(s) < 1$ et par suite la fonction $\eta(s)$ a ses zéros non triviaux sur la droite critique $\Re(s) = \frac{1}{2}$ de la bande critique.

3. Conclusion

En résumé : pour nos démonstrations, nous avons fait usage de la fonction $\eta(s)$ de Dirichlet :

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s), \quad s = \sigma + it$$

dans la bande critique $0 < \Re(s) < 1$, en obtenant :

- $\eta(s)$ s'annule pour $0 < \sigma = \Re(s) = \frac{1}{2}$;
- $\eta(s)$ ne s'annule pas pour $0 < \sigma = \Re(s) < \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} < \sigma = \Re(s) < 1$.

De plus, on connaît le résultat suivant : *Pour tout réel* $s = \sigma$ *avec* $0 < \sigma < 1$, $\eta(s) > 0$ *et* $\zeta(s) < 0$.

Par suite, tous les zéros non triviaux de $\eta(s)$ dans la bande critique $0 < \Re(s) < 1$ s'annulent sur la droite critique $\Re(s) = \frac{1}{2}$. En appliquant la proposition équivalente à l'Hypothèse de Riemann 1.2, les zéros non triviaux de la fonction $\zeta(s)$ se trouvent sur la droite critique $\Re(s) = \frac{1}{2}$. La démonstration de l'Hypothèse de Riemann est ainsi achevée. Nous annonçons donc le théorème important :

Théorème 7. ***(L'Hypothèse de Riemann est vraie) :***

Tous les zéros non triviaux de la fonction $\zeta(s)$ avec $s = \sigma + it$ se situent sur l'axe vertical $\Re(s) = \dfrac{1}{2}$.

Déclarations :

L'auteur déclare :

- pas de conflits d'intérêt,

- aucun fond ou support réçu.

- pas d'intérêt financier.

Références

[1] Quanta Magazine, *'Sensational' Proof Delivers New Insights Into Prime Numbers*. July 15 (2024).

[2] Enrico Bombieri : The Riemann Hypothesis. In The millennium prize problems. J. Carlson, A. Jaffe, and A. Wiles Editors. Published by The American Mathematical Society, Providence, RI, for The Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA. 107–124 (2006) `http://www.claymath.org/library/monographs/MPPc.pdf`

[3] Peter Borwein, Stephen Choi, Brendan Rooney and Andrea Weirathmueller : The Riemann hypothesis - a resource for the afficionado and virtuoso alike. 1st Ed. CMS Books in Mathematics. Springer-Verlag New York. (2008) `https://doi.org/10.1007/978-0-387-72126-2`

[4] E.C. Titchmarsh, D.R. Heath-Brown : The theory of the Riemann zeta-function. 2sd Ed. revised by D.R. Heath-Brown. Oxford University Press, New York. (1986)