相对集合论（一）：有限集合与无限集合的定义*

Independent Researcher (吴文杰)

2026 年 5 月 12 日

摘 要

针对经典集合论基于实无穷先验假定与概括原则所引发的罗素悖论，本文提出一种全新的底层架构——相对集合论。本理论以潜无穷思想为本体论核心，从确定元素的动态生成逻辑出发，自下而上地严格界定有限集合，并废除绝对全集以阻断悖论根基。在此基础上，本文创新性地将无限集合统一定义为“真增长型有限集合序列的极限”，指出脱离具体演化过程的静态无穷缺乏逻辑合法性。通过引入以标准自然数序列为基准的相对量级代数，本理论确立了无穷度量的“相对性原理”，揭示了无限集合的大小本质上等同于其生成序列的渐进增长速率。该框架不仅在代数层面上消解了经典等势理论的反直觉困境，更为彻底规避第三次数学危机、重新审视数学哲学中的无穷概念提供了一套严密且自洽的相对主义新范式。

关键词： 相对集合论；潜无穷；有限集合序列；极限集合；相对量级；罗素悖论

Relative Set Theory (I): Definitions of Finite and Infinite Sets

Abstract: In response to Russell's Paradox, which arises from the *a priori* assumption of actual infinity and the unrestricted comprehension principle in classical set theory, this paper proposes a novel foundational framework: Relative Set Theory. Taking the concept of potential infinity as its ontological core, this theory strictly defines finite sets from the bottom up based on the dynamic generation logic of determined elements, and abolishes the absolute universal set to eradicate the logical root of the paradox. On this basis, the paper innovatively and uniformly defines an infinite set as the "limit of

*本文的初步版本此前曾在知乎（Zhihu）平台发布并讨论。本文是其正式的学术呈现。

a strictly increasing sequence of finite sets," pointing out that static infinity divorced from a specific evolutionary process lacks logical validity. By introducing an algebra of relative magnitudes benchmarked against the standard sequence of natural numbers, this theory establishes the "principle of relativity" for infinite metrics, revealing that the size of an infinite set is essentially equivalent to the asymptotic growth rate of its generating sequence. This framework not only resolves the counterintuitive dilemmas of classical equipotence theory at the algebraic level but also provides a rigorous and self-consistent relativistic new paradigm for fundamentally circumventing the third foundational crisis of mathematics and re-examining the concept of infinity in mathematical philosophy.

Keywords: Relative Set Theory; Potential Infinity; Sequence of Finite Sets; Limit Set; Relative Magnitude; Russell's Paradox

1 引言

自康托尔（G. Cantor）基于概括原则与外延原则创立朴素集合论以来，集合已成为现代数学最基本的研究对象，集合论亦确立了其作为现代数学底层基石的地位。

在经典集合论的框架下，依据概括原则，无限集合被预设为业已完成的实在对象。这一先验预设确立了实无穷（Actual Infinity）在现代数学理论体系中的绝对统治地位。集合理论的历史性成功，也在客观上将实无穷思想推向了前所未有的高度。然而，在数学哲学与逻辑基础层面，实无穷与潜无穷（Potential Infinity）作为两种平行的本体论视角，本无绝对的真伪之分。根据公理化演进的逻辑必然性，理应存在一套以潜无穷观为底层基础的自洽集合理论；若非如此，则等同于在逻辑上彻底否定了潜无穷思想的合法性。

另一方面，经典集合论体系并非无懈可击。自朴素集合论诞生之初，以罗素悖论（Russell's Paradox）为代表的逻辑危机便始终伴随着该体系的发展，深刻揭示了无限制概括原则的内在逻辑隐患。

为解决上述基础性问题，本文提出一种全新的理论架构——相对集合论（Relative Set Theory）。本理论彻底摒弃了依赖传统概括原则所产生的静态集合概念，转而以潜无穷思想为核心，从底层元素的动态生成逻辑出发，重新严格界定有限集合与无限集合。这一底层重构旨在从根本上消除罗素悖论产生的逻辑土壤，从而为现代数学提供一种更为严密、自洽且无歧义的替代性基础框架。

2 元素与有限集合

在本理论框架中，为彻底消除由“无限制概括原则”引发的逻辑隐患，我们不再预设宏观集合的先验存在，而是从构成一切集合的微观基础——“元素”的本质属性出发，自下而上地严格构建有限集合的逻辑体系。

定义 1 (元素)**.** *元素是构成本理论的最原初逻辑客体，指代任何自身含义绝对明确且独立存在的数学对象。不同的数学对象严格对应不同的元素。*

定义 2 (有限集合)**.** *有限集合是由有穷个且互不相同的元素构成的无序聚合体。*

基于上述定义可知，由于有限集合的元素规模具有“有穷性”，其内部的每一个元素在逻辑上均具备绝对的可识别与穷尽性。因此，构成有限集合的要素必须严格满足三大基本数学准则：**确定性**、**互异性**与**无序性**。

为规范后续的形式化表述，本文统一采用字母（变元或参数）来标定所论及的具体元素及有限集合对象。

定义 3 (属于关系)**.** *若对象 x 为构成有限集合 A 的元素之一，则称 x 属于 A，记作 $x \in A$；反之，若 x 不包含于该集合中，则记作 $x \notin A$。*

需特别指出，鉴于有限集合 A 本身业已构成一个含义明确的数学对象，依据定义 1 的法则，有限集合 A 亦可作为独立的实体元素，参与构造更高阶的其他有限集合。这确立了本理论中数学对象的层级递归属性。

公理 1 (有限集合相等公理)**.** *对于任意两个有限集合 A 与 B，当且仅当二者在历经穷尽列举后，其包含的元素实质完全一致时，称二者相等，记作 $A = B$；否则，称其不相等，记作 $A \neq B$。*

依据公理 1 中“穷尽列举”的底层操作逻辑，我们可以自然推导出判定两个有限集合相等的充要形式化条件：

定理 1 (有限集合相等的等价判定)**.** *对于有限集合 A 和 B，$A = B$ 当且仅当满足以下条件：对于 A 中的任意元素 x，均有 $x \in B$；且对于 B 中的任意元素 y，均有 $y \in A$。*

3 有限集合的表示法

依据有限集合的定义，我们可确立以下两种形式化的集合表达机制。

3.1 列举法

最基础的表示方式为将集合内的所有元素进行穷尽列举。例如，由变元 x, y, z 所构成的有限集合 A，可形式化地表示为：

$$A = \{x, y, z\}$$

鉴于集合元素的无序性准则，括号内元素的排列次序并不影响集合的本体。因此，表述形式 $\{y, z, x\}$ 与 $\{z, x, y\}$ 在逻辑上均与 $\{x, y, z\}$ 严格等价，且均构成对有限集合 A 的精确等价描述。

3.2 描述法

面对元素规模庞大的有限集合，穷举操作将面临物理或计算层面的现实困难。在此情形下，若存在某一明确定义的逻辑性质 p，使得对于任意数学对象 x，其满足性质 p 当且仅当 $x \in A$；即有且仅有集合 A 内部的元素具备性质 p，则我们可通过该性质对集合 A 进行等价的逻辑刻画，记作：

$$A = \{x \mid p(x)\}$$

必须极度明确的是，在本理论框架内，**描述法在本质上仅为列举法的逻辑缩写形式**。采用描述法构建集合的合法性先决条件在于：满足该给定性质 p 的潜在元素总数必须是极其确定的有穷量，且在逻辑层面具备被逐一穷尽列举的绝对可能性。

此处需重申本理论的核心立场：我们彻底拒绝传统集合论中基于"无限制概括原则"（即允许任意性质直接生成集合）所赋予的集合绝对生成权。正是这种底层的严格限制，使得本理论中的集合定义从根本上免疫了罗素悖论（Russell's Paradox）的侵蚀 [2, 8]。然而，这一坚固的约束同时也带来了一个不可忽视的推论：在尚未引入全新的无限公理之前，传统数学中熟知的自然数系、整数系及实数系等宏观对象，均无法直接被视为合法的"有限集合"。

关于无限集合的严格构造机制与底层逻辑，将于后文通过潜无穷序列详述。在此之前，本文将先继续深入探讨有限集合内部的代数与关系性质，以期为后续无穷体系的破局提供坚实的逻辑跳板。

4 子集与空集

在确立了有限集合的基本判定法则后，本节将进一步严格定义集合间的包含关系以及特殊的边界集合形态。

定义 4 (子集与真子集)**.** 对于给定的有限集合 A 与 B，若 B 中的每一个元素均同为 A 的元素（即若 $x \in B$，则必然有 $x \in A$），则称 B 是 A 的子集，记作 $B \subseteq A$。

在此基础之上，若满足 $B \subseteq A$ 且 $A \neq B$，则进一步称 B 是 A 的真子集，记作 $B \subsetneq A$。此时亦称 A 真包含 B，或 B 真包含于 A。

定义 5 (空集)**.** 空集是一种处于特殊边界状态的有限集合，定义为不包含任何实存元素的集合，在数学上统一记作 $\emptyset$。

基于上述底层定义，通过基础的逻辑推演，我们可以自然确立有限集合包含关系的两项核心推论：

推论 1 (包含关系的基本性质)**.** 对于任意有限集合 A，必然满足以下两个性质：

1. **自反性**：有限集合 A 必然是其自身的子集，即 $A \subseteq A$。
2. **空集的绝对极小性**：空集 $\emptyset$ 构成任意有限集合 A 的子集，即 $\emptyset \subseteq A$。

定义 6 (幂集)**.** 给定一有限集合 A，由 A 的所有可能子集（包括空集与 A 自身）共同构成的新有限集合，称为 A 的幂集（*Power Set*），通常记为 2^A 或 $\mathcal{P}(A)$。其严密的描述法表示为：

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

5 有限集合的基本运算

为完善有限集合的代数结构，本节将确立有限集合间的基本二元运算规则。

定义 7 (交集、并集与差集)**.** 设 A 与 B 为任意两个已知的有限集合，作如下形式化定义：

- **交集（*Intersection*）：** $A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$
- **并集（*Union*）：** $A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$
- **差集（*Difference*）：** $A \setminus B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$

定义 8 (相对补集)**.** 对于确定的有限集合 A，若存在有限集合 B 满足 $B \subseteq A$，则称差集 $A \setminus B$ 为 B 在 A 中的**相对补集**（*Relative Complement*），记作 B^A。其等价定义为：

$$B^A = A \setminus B$$

核心逻辑注记（关于"全集"概念的剥离）：

有限集合在执行上述交、并、差及相对补等运算时，严格遵循传统集合代数中的交换律、结合律、分配律及德 · 摩根定律（De Morgan's laws）。此类经典代数运算律及其推演因与传统逻辑同构，本文不予赘述。

然而，必须在此作出极其重要的学术声明：**为彻底阻断罗素悖论的生成路径，本理论在公理层面严格废除了"绝对全集"（Universal Set）的合法地位**。因此，本理论框架内不存在脱离具体母集的"绝对补集"概念。任何补集运算都必须严格锚定于一个明确已知的逻辑边界（即给定的参考母集 A）。这也是本理论坚持将其严谨界定为"相对补集"的根本原因。

6 有限集合的映射

在确立了有限集合的基础运算后，本节引入映射概念，以严格刻画不同有限集合元素间的结构对应关系。这为后续探讨集合的大小比较与等势关系奠定了必然的逻辑工具。

定义 9 (映射)**.** *设 A 与 B 为给定的有限集合。若存在一种确定的对应法则 f，使得集合 A（定义域）中的每一个元素，在集合 B（值域）中都有唯一确定的元素与之对应，则称 f 为从 A 到 B 的映射，记作 $f : A \to B$。若 $a \in A$，则其对应的 B 中元素记为 $f(a)$，称为元素 a 在映射 f 下的像（Image）。*

定义 10 (单射)**.** *对于映射 $f : A \to B$，若 A 中任意两个不同的元素在 f 下的像也必然不同（即 B 中的目标元素至多被映射一次），则称该映射 f 为单射（Injection）。*

命题 1 (单射的等价判定)**.** *映射 $f : A \to B$ 为单射，当且仅当满足如下逻辑条件：对于任意的 $x_1, x_2 \in A$，若 $f(x_1) = f(x_2)$，则必有 $x_1 = x_2$。*

定义 11 (满射)**.** *对于映射 $f : A \to B$，若 B 中的每一个元素都至少是 A 中某一个元素的像（即 B 中的所有元素均被该映射覆盖），则称该映射 f 为满射（Surjection）。*

命题 2 (满射的等价判定)**.** *映射 $f : A \to B$ 为满射，当且仅当满足如下逻辑条件：对于任意的 $y \in B$，均存在 $x \in A$，使得 $f(x) = y$。*

定义 12 (双射 / 一一映射)**.** *对于映射 $f : A \to B$，若 A 中的每一个元素都有唯一对应的 B 中元素，且 B 中的每一个元素也都有唯一对应的 A 中元素作为原像，则称该映射 f 为双射或一一映射（Bijection）。*

命题 3 (双射的等价判定)**.** *映射 $f : A \to B$ 构成双射的充要条件为：它既是单射，又是满射。*

7 无限集合的序列化定义

在彻底摒弃了以“概括原则”直接宣称无限集合存在的先验路径后，本节将基于潜无穷（Potential Infinity）的动态生成思想，通过有限集合的序列极限，为“无限集合”奠定严密且无歧义的本体论基础。这也是相对集合论区别于经典集合论的核心标志。

定义 13 (有限集合序列及其增长形态). *有限集合序列 $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ 是指由无穷可数个有限集合按自然数索引构成的有序列表:*

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots, A_n, \ldots$$

依据序列中相邻项的包含关系，作如下三种增长形态的严密划分:

1. **增长型有限集合序列**: *若对于任意自然数 m 与 n, 当 $m < n$ 时, 均满足 $A_m \subseteq A_n$;*
2. **真增长型有限集合序列**: *若对于任意自然数 m，总存在某一自然数 $n > m$，使得 $A_m \subsetneq A_n$（即序列在演进过程中必发生实质性扩张);*
3. **纯增长型有限集合序列**: *若对于任意自然数 m 与 n，当 $m < n$ 时，均严格满足 $A_m \subsetneq A_n$。*

定义 14 (序列的极限集合). *对于任意给定的增长型有限集合序列 $(A_n)_{n=1}^{\infty}$，我们可通过动态逻辑确立其极限集合 A_∞：对于任意元素 x，$x \in A_\infty$ 当且仅当存在某一自然数 i，使得 $x \in A_i$。此极限集合记作:*

$$A_\infty = \lim_{i\to\infty} A_i$$

定义 15 (无限集合的正式界定). *由***真增长型有限集合序列***所生成的极限集合 A_∞，定义为***无限集合***。*

命题 4 (无限集合的基数性质). *无限集合必然包含无穷多个独立元素。*

属性继承的逻辑注记: 依据上述潜无穷生成机制，判定某一元素是否隶属于某无限集合，完全取决于其是否隶属于构成该序列的某一个特定有限集合 A_i。鉴于有限集合内的每一个元素均已具备绝对的确定性，因此，以此极限方式动态生成的无限集合，其内部的元素也顺理成章地严格继承了“确定性”这一数学基础属性。

定义 16 (无限集合间的包含关系). *设 $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ 为两个真增长型有限集合序列，且分别对应极限集合 A_∞ 与 B_∞。若对于任意自然数 i，均满足 $B_i \subseteq A_i$，则称极限集合 B_∞ 是 A_∞ 的子集，记作:*

$$B_\infty \subseteq A_\infty$$

若对于任意自然数 i，均满足 $B_i \subsetneq A_i$，则称 B_∞ 是 A_∞ 的真子集，记作:

$$B_\infty \subsetneq A_\infty$$

8 无限集合的表示法

鉴于无限集合的元素基数为无穷大，传统意义上的穷尽列举法在此显然失效。然而，依据前文界定，无限集合 A_∞ 本质上是真增长型有限集合序列 $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ 的极限产物。

若存在某种明确的逻辑性质 p，使得对于序列中的任意第 i 项有限集合 A_i，均可被精确地描述为:

$$A_i = \{x \mid p(i, x)\}$$

在此条件下，不仅序列 $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ 中的每一个局部集合 A_i 具备绝对的确定性，且该序列随索引 i 演化的增长法则亦处于完全确定的状态。由潜无穷的动态生成逻辑可知，该序列所逼近的最终极限集合 A_∞，同样在本体论上具备绝对的确定性。

基于上述推演，我们可以合法地将真增长型有限集合序列 $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ 视为无限集合 A_∞ 的一种“动态展开式列举”。进而，其对应的等价描述法可被形式化地界定为:

$$A_\infty = \{x \mid p(\infty, x)\}$$

核心逻辑注记: 必须强调，与有限集合的情形高度一致，**无限集合的描述法在本质上依然是其潜无穷序列列举法的逻辑缩写**。这意味着，任何无限集合的生成都必须具备底层序列演化的构造性依据。这一设定不仅赋予了无限集合表示法以严格的合法性，更再一次重申了本理论彻底拒绝“无限制概括原则”的核心学术立场。

9 自然数集的构造与多重序列生成

首先郑重申明，本理论体系内的自然数严格遵循皮亚诺公理（Peano Axioms）[4]，并约定自然数序列以自然数 1 为起点呈递增形态。

基于前文确立的潜无穷序列生成机制，我们首先构造一个基础的有限集合序列 $(N^1)_{n=1}^{\infty}$:

$$\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \ldots$$

其通项有限集合可由描述法精确界定为:

$$N_i^1 = \{x \mid x \leq i \wedge x \text{ 为自然数}\}$$

设该序列的极限集合为无限集合 N_∞^1。通过严密的逻辑推演可证:

- 对于任意自然数 i，鉴于局部集合 N_i^1 中的全体元素均为自然数，故根据极限定义，N_∞^1 中的每一个元素亦必为自然数；
- 反之，对于任意给定的具体自然数 n，由于必然满足 $n \in N_n^1$，故根据极限定义，必然得出 $n \in N_\infty^1$。

由此可知，极限集合 N^1_∞ 包含了且仅包含了全体自然数。

与此同时，我们完全可以构造另一个演化速率不同的有限集合序列 $(N^2)_{n=1}^\infty$：

$$\{1,2\},\{1,2,3,4\},\{1,2,3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\dots$$

其通项有限集合界定为：

$$N_i^2=\{x\mid x\le 2i\wedge x\text{ 为自然数}\}$$

设其极限集合为 N^2_∞。同理可证：极限集合 N^2_∞ 同样包含了且仅包含了全体自然数。

核心理论推论（自然数集的多重性）：

上述推演揭示了一个在经典集合论中被掩盖的深刻事实：此类能够生成全体自然数的有限集合序列存在无穷多种。这意味着，脱离了底层生成序列的具体演化速率，仅仅依靠宏观的描述法 $\{x\mid x\text{ 为自然数}\}$，在逻辑上是高度含混的。它无法唯一锚定一个确定的无限集合，因而在本理论中**不构成一个合法的确切集合表达**。广义而言，“自然数集”并非单一的静态实体，而是对一类具有相同元素包容度、但动态生成速率各异的无限集合的**统称**。

为便于后续对自然数相关性质的统一形式化表述，本文作如下标准约定：

定义 17 (自然数集标准约定). *若无特殊声明，本系列论文中所指的“自然数集合序列”，默认特指上述基础有限集合序列 $(N^1)_{n=1}^\infty$，并在此后统一简记为 $(N)_{n=1}^\infty$；该序列中的通项有限集合 N_i^1 简记为 N_i。*

相应地，绝对意义上的“自然数集” N 被严格定义为该默认序列的极限集合，即 $N=N^1_\infty$。基于此约定，陈述“x 是自然数”即可合法且无歧义地用符号表示为 $x\in N$。

10 有限集合与无限集合的统一定义

至此，我们已经分别界定了有限集合与无限集合。为构建一套简洁且普适的公理化集合论基础，本节将通过序列的退化情形，实现两者在底层本体论上的统一。

对于任意已知的有限集合 A，我们完全可以构造一个特殊的有限集合序列 $(A_n)_{n=1}^\infty$：

$$A,A,A,A,A,A,\dots$$

即该序列的通项严格满足 $A_i=A$。依据前文定义，这是一个恒等（常驻）的序列，且显然满足“对于任意 $m<n$ 均有 $A_m\subseteq A_n$”的条件，因此它构成了一个特殊的增长型有限集合序列。同时，根据极限的判定法则，其极限集合 A_∞ 必然等于 A 本身。

基于这一发现，有限集合可被视为序列演化速率为零（即未发生实质性元素扩张）的特殊极限状态。由此，我们可以给出广义集合的统一定义：

定义 18 (广义集合的统一定义)**.** 任意增长型有限集合序列的极限集合，统称为**一个集合（*Set*）**。

生成法则的决定性原则:

需要特别警惕的是，一个合法的增长型有限集合序列包含无穷多个项，在物理与逻辑上均无法被彻底的一一列举。因此，序列表示中用以省略尾项的 “. . .” 符号，不能建立在随意的直觉猜测之上，其背后必须依托于一个绝对确定的生成法则或显式的通项公式。

例如，当我们给出如下有限集合序列的前两项时:

$$\{1\}, \{1, 2\}, \ldots$$

若缺乏显式的生成约束，该表达式将陷入严重的逻辑歧义：它既可能代表标准的自然数集合序列 $(N)_{n=1}^{\infty}$，也可能代表另一个呈指数级跨跃的有限集合序列 $(N^3)_{n=1}^{\infty}$:

$$\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \ldots$$

其中，序列 $(N^3)_{n=1}^{\infty}$ 的严格通项公式定义为:

$$N_i^3 = \{x \mid x \leq 2^{i-1} \wedge x \in N\}$$

上述反例深刻表明：**仅依赖有限项的罗列，无法唯一且合法地定义一个无限序列及其极限集合**。任何旨在生成集合的无穷序列，必须提供毫无歧义的通项演化逻辑。

11 集合的量级（大小）与相对代数

集合的大小（即其所包含元素的基数特征）是集合论度量体系的核心。鉴于任何实质性的计数行为在底层逻辑上均无法脱离自然数体系，本节将通过自然数标准序列，建立一套全新的 “相对量级” 代数体系。

定义 19 (自然数集合序列的量度)**.** 对于标准自然数集合序列 $(N)_{n=1}^{\infty}$，定义其通项有限集合 N_i 的大小（量级）为其所包含的最大自然数标号，记作 $|N_i| = i$。

相应地，自然数集 N（即该序列的极限集合）的大小定义为无穷量纲 ∞^N，记作:

$$|N| = \infty^N$$

并在此建立绝对公理约定：广义代数量 ∞^N 大于任意有限自然数 (即 $\forall n \in N, \infty^N > n$); 同时，假定 ∞^N 具备绝对可除性（即能被任意自然数无余数整除）。

以此标准自然数序列作为 “基础量纲”，我们可以自下而上地严格定义一般集合的量级。

定义 20 (有限集合的量级)**.** 对于空集，定义其大小为绝对零，即 $|\emptyset| = 0$。

对于任意非空有限集合 A，若其能与自然数集合序列中的某一项 N_i 建立双射（一一映射）关系，则定义该有限集合的大小等于该项 N_i 的大小，即 $|A| = |N_i| = i$。

定义 21 (无限集合的相对量级)**.** 对于任意真增长型有限集合序列 $(A_n)_{n=1}^{\infty}$，若存在一个明确的代数函数 f，使得对于任意自然数项 i，其通项集合的大小均满足 $|A_i| = f(i)$，则定义该序列生成的极限无限集合 A_∞ 的大小为该函数在无穷量纲 ∞^N 处的代数映射，记作：

$$|A_\infty| = f(\infty^N)$$

量级计算实例：

基于上述相对代数法则，我们可以精准计算各类无限集合的相对大小，从而打破传统基数理论带来的反直觉悖论：

- 对于有限集合序列 $(N^2)_{n=1}^{\infty}$，已知其通项大小 $|N_i^2| = 2i$，则其极限集合 N_∞^2 的大小严格为 $|N_\infty^2| = 2\infty^N$。
- 对于有限集合序列 $(N^3)_{n=1}^{\infty}$，已知其通项大小 $|N_i^3| = 2^{i-1}$，则其极限集合 N_∞^3 的大小严格为 $|N_\infty^3| = 2^{\infty^N - 1}$。

更为深刻的例子是自然数集 N 的偶数真子集 M_∞。其对应的有限集合序列 $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ 为：

$$\emptyset, \{2\}, \{2\}, \{2,4\}, \{2,4\}, \{2,4,6\}, \{2,4,6\}, \dots$$

其中通项集合严格界定为 $M_i = \{x \mid x \in N_i \land x \bmod 2 = 0\}$。可知其通项集合的大小为 $|M_i| = \lfloor \frac{i}{2} \rfloor$。投射至极限集合，并基于 ∞^N 可被任意自然数整除（即消除取整函数的余数波动）的公理约定，可得偶数无限集的大小为：

$$|M_\infty| = \left\lfloor \frac{\infty^N}{2} \right\rfloor = \frac{\infty^N}{2}$$

相对量级理论的本体论结论：

无限集合的“大小”，在本体论上不再是一个孤立、绝对的静态基数（如传统理论中的 $\aleph_0$），而**本质上等价于其生成序列的渐进增长速率**。本理论通过将每次递增单一元素的自然数标准序列作为参考系尺标，以比较序列演化速率的方式确立了无限集合的相对大小。这从逻辑根源上捍卫了“整体大于部分”的经典公理，消解了伽利略悖论与康托尔等势理论所带来的逻辑困境。

12 集合相等法则的重构与统一定义

依据本文前置的公理 1（有限集合相等公理），仅当两个集合包含的元素在穷尽列举后完全一致时，二者方可判定为相等。对于有限集合而言，因其元素总数有穷，通过命题 1（元素互含判定）即可构成相等的充要条件。

然而，对于无穷集合，经典的“元素互含判定”（即传统集合论中的外延公理 [3]）将彻底失效。正如前文所构造的三个无穷集合 N_∞^1、N_∞^2 与 N_∞^3，它们在元素层面上相互完全包含（即每一个集合都包含且仅包含全体自然数），满足元素互含条件；但在本理论的量级代数体系中，它们的大小呈现严格的不等关系（$\infty^N \neq 2\infty^N \neq 2^{\infty^N-1}$）。因此，它们在本体论上绝非同一个集合。

为解决这一冲突，我们首先确立基于生成序列的强相等判定条件：

命题 5 (序列级极限相等判定)**.** *对于两个增长型有限集合序列 $(A_n)_{n=1}^\infty$ 与 $(B_n)_{n=1}^\infty$，若对于任意自然数 i，均严格满足通项相等（即 $A_i = B_i$），则它们的极限集合必然相等，即 $A_\infty = B_\infty$。*

由于有限集合的相等具备绝对的可判定性，命题 5 在逻辑上亦具备绝对的可判定性。然而，命题 5 仍未能涵盖所有极限集合相等的合法情形。我们引入一个新的有限集合序列 $(N^4)_{n=1}^\infty$ 作为考察对象：

$$\{2\}, \{1,2\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,6\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \ldots$$

（注：该序列的生成逻辑为交替置换，其严格通项可表示为 $N_{2k-1}^4 = N_{2k} \setminus \{2k-1\}$ 且 $N_{2k}^4 = N_{2k}$）。设其极限集合为 N_∞^4。我们需要追问：N_∞^1 与 N_∞^4 是否相等?

若将自然数符号“1, 2, 3 . . .”纯粹视为对数学客体的指称命名，序列 $(N^4)_{n=1}^\infty$ 本质上只是对 $(N^1)_{n=1}^\infty$ 在生成步骤上的局部同构置换（即交换了相邻元素的引入次序）。在这一动态延展的过程中，集合所摄取的底层元素客体并未发生实质性异变。根据有限集合三大基本特征之一的“无序性”，序列元素的引入先后顺序不应改变极限集合的本体。因此，必须认定 $N_\infty^1 = N_\infty^4$。

上述分析表明，仅依赖序列项的绝对相等（命题 5）来判定无穷集合的同一性过于严苛，它无法兼容由于元素无序性带来的生成路径扰动。因此，必须确立一种既能包容生成无序性，又能严格区分不同量级演化的普适性相等法则。

公理 2 (广义集合相等公理)**.** *任意两个集合 A 与 B 相等（记作 $A = B$），当且仅当同时满足以下两大条件：*

1. **量级等同**：$|A| = |B|$；
2. **外延等同**：*A 中的每一个元素 x 均满足 $x \in B$，且 B 中的每一个元素 y 均满足 $y \in A$。*

本公理构成了相对集合论判别集合同一性的最高准则。它完美兼容了有限集合与无穷集合：对于有限集合，外延等同必然导致量级等同；而对于无穷集合，它成功排除了经典外延公理的歧义。基于本公理，我们不仅可以严密确立 $N_\infty^1 = N_\infty^4$，亦可确凿断言 $N_\infty^1 \neq N_\infty^2 \neq N_\infty^3$。

13 广义集合的代数运算与泛化封闭性

基于本文将集合统一定义为极限序列的本体论基础，宏观集合间的代数运算可自然降维，映射为底层有限集合序列的逐项运算。

定义 22 (集合的交集与并集)**.** *设集合 A 与 B 分别由增长型有限集合序列 $(A_n)_{n=1}^\infty$ 与 $(B_n)_{n=1}^\infty$ 生成。定义广义集合的交集与并集分别为其对应序列逐项运算所生成的极限集合：*

- **交集：** $A \cap B = \lim_{n\to\infty}(A_n \cap B_n)$，*即生成序列为* $(A_n \cap B_n)_{n=1}^\infty$
- **并集：** $A \cup B = \lim_{n\to\infty}(A_n \cup B_n)$，*即生成序列为* $(A_n \cup B_n)_{n=1}^\infty$

基于有限集合的基础运算律，易证：若 $(A_n)_{n=1}^\infty$ 与 $(B_n)_{n=1}^\infty$ 均为合法的增长型序列，则其交集序列与并集序列必然严格保持“增长型”特征（即对于任意 $m < n$，均满足项间的包含关系）。因此，交集与并集的运算结果必然属于合法的集合范畴。

定义 23 (集合的差集与相对补集)**.** *同理，定义集合 A 与 B 的差集为其对应序列逐项差集所生成的极限：*

$$A \setminus B = \lim_{n\to\infty}(A_n \setminus B_n)$$

即对应的生成序列为 $(A_n \setminus B_n)_{n=1}^\infty$。

在此基础上，若对于任意自然数 i，均满足 $B_i \subseteq A_i$，则称该差集 $A \setminus B$ 为 B 在 A 中的相对补集，严格记作 $B^A = A \setminus B$。

非单调演化与闭包公理的引入：

在交、并运算中，底层序列的增长连续性得以自然保持。然而，差集运算却能在无穷演化中打破这一性质，催生出一种形态截然不同的动态序列。

公理 3 (差集运算的泛化封闭性)**.** *任意两个合法集合的差集，其运算结果在本体论上必然构成一个合法的集合。*

设立该公理的必要性，源于潜无穷序列在不同演化速率下的“差分漂移”现象。以自然数集的不同演化序列为例，考察差集 $N_\infty^2 \setminus N_\infty^1$：依据差集的序列逐项运算定义，其对应的有限集合序列 $(N_n^2 \setminus N_n^1)_{n=1}^\infty$ 的具体展开形式为：

$$\{2\}, \{3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \{5, 6, 7, 8\}, \ldots$$

（注：其通项为 $\{x \mid i < x \leq 2i \wedge x \in N\}$）。

在此差集序列中，随着索引 i 的递增，序列前端的元素被不断剔除，后端的元素不断补充。这一现象彻底违背了“增长型有限集合序列”必须满足的递增包含条件（即 $A_m \subseteq A_n$ 不再成立）。若仅固守前文关于增长型序列的狭义定义，此类运算结果将陷入“非法”的逻辑绝境。

因此，为了保证广义集合理论在代数运算体系下的绝对封闭（Closure），必须通过本公理直接赋予此类“非增长型差集序列”以合法的集合地位。这也构成了本理论必须向更深层的集合形态进行本体论拓荒的必然动因。

14 黎曼重排定理的集合论解析与非单调集合的必要性

为深刻揭示上一节中“差集泛化封闭性”的物理与逻辑必然性，本节将使用相对集合论体系对经典数学分析中的黎曼重排定理（Riemann Rearrangement Theorem）[5] 进行重新解构。

在经典级数理论中，对于条件收敛的级数，改变其项的求和顺序会收敛到不同的结果。以经典的交错调和级数为例：

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

按自然顺序求和，设其极限为 T_1：

$$\begin{aligned} T_1 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \ln 2 \end{aligned}$$

若将其重排为“一正二负”的次序，设其极限为 T_2：

$$\begin{aligned} T_2 &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) = \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

现在，我们将上述两个级数转化为相对集合论中的有限集合序列构造。设 $(S_1)_{n=1}^{\infty}$ 为原级数截断构成的序列，$(S_2)_{n=1}^{\infty}$ 为重排级数截断构成的序列：

$$\begin{aligned} (S_1)_{n=1}^{\infty}: &\quad \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}, \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right\}, \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}\right\}, \dots \\ (S_2)_{n=1}^{\infty}: &\quad \left\{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right\}, \left\{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}\right\}, \dots \end{aligned}$$

设它们的极限集合分别为 S_1 与 S_2。依据前文的量级代数定义可知，这两个序列的生成速率截然不同。其无限集合的大小严格为：

$$|S_1| = 2\infty^N, \quad |S_2| = 3\infty^N$$

考察 S_2 与 S_1 的差集 $S_3 = S_2 \setminus S_1$。其对应的有限集合序列 $(S_3)_{n=1}^{\infty}$ 呈现出极为特殊的形态：

$$(S_3)_{n=1}^{\infty}: \left\{-\frac{1}{4}\right\}, \left\{-\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}\right\}, \left\{-\frac{1}{8}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}\right\}, \left\{-\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{14}, -\frac{1}{16}\right\}, \ldots$$

此序列的量级显然为 $|S_3| = \infty^N$。这在代数上完美契合了 $|S_2| - |S_1| = |S_3|$。更为深刻的是，若对序列 $(S_3)_{n=1}^{\infty}$ 中的每一个有限集合内部元素进行求和，我们将得到一个有理数序列：

$$-\frac{1}{4}, \quad -\frac{7}{24}, \quad -\frac{37}{120}, \quad -\frac{533}{1680}, \ldots$$

严格的分析计算表明，此有理数序列的极限精确收敛于 $-\frac{1}{2}\ln 2$。

定义 24 (无限集合的广义元素和). *对于给定的有限集合序列 $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ 及其极限集合 A_∞，设序列中通项有限集合 A_i 的内部元素代数和为 $t(i)$。若极限 $\lim_{i\to\infty} t(i) = T$ 存在，则定义该值 T 为无限集合 A_∞ 的广义元素和，记作 $t(\infty) = T$。*

基于上述定义，集合 S_1 与 S_2 的广义元素和正是经典级数理论中的 T_1 与 T_2。而差集 S_3 的广义元素和为 $T_3 = -\frac{1}{2}\ln 2$。因此，代数关系 $T_2 - T_1 = T_3$ 严格成立。

物理与逻辑的本体论启示：

黎曼重排定理中“改变顺序导致结果改变”的诡异现象，在相对集合论体系下得到了彻底的祛魅。级数项的重排，在底层逻辑上绝非对同一个静态集合的操作，而是**实质性地改变了序列的生成演化法则，从而构造出了两个量级完全不同的独立极限集合 S_1 与 S_2**。

二者之差 S_3 尽管呈现出元素不断向无穷远处“漂移”的非单调特征（不满足狭义的增长型序列定义），但其具有绝对确定的集合量级（∞^N）以及确凿客观的广义元素和（$-\frac{1}{2}\ln 2$）。这一实例以不可辩驳的数学实在性证明：将 S_3 此类非单调演化的极限确认为合法的无穷集合，不仅是代数封闭性的理论需要，更是维系现代数学大厦自洽性的客观必然。

15 无限集合的相对性原理（理论核心点题）

回顾经典集合论的本体论基础，其深植于“实无穷”（Actual Infinity）的绝对哲学思想中 [1, 6]。在无限制的概括原则下，无限集合被视为一个业已完成的、确定且永恒不变的静态实体。

然而，本理论立足于“潜无穷”（Potential Infinity）思想，通过底层的有限集合序列来重新动态定义无限集合。在此生成机制下，无限集合在本体上是一个“永不完结的开放过程”。其所谓“大小”与“测度”，本质上是底层序列在演化过程中的渐进增长速率。由于不同的生成法则对应着完全不同的演化速率，因此，在经典集合论中被视为“唯一绝对”的某个宏观无限集合，在本理论中实际上对应着一整族量级各异的无限集合集合（Equivalence Class）。

相对性实例分析：

例如，由全体自然数构成的无限实体，既可以是由自然步进生成的 N_∞^1，也可以是由倍速扩张生成的 N_∞^2 或指数扩张生成的 N_∞^3。尽管它们在元素包容性上完全等同，但其量级大小却呈现出严格的相对层级（$\infty^N \neq 2\infty^N \neq 2^{\infty^N-1}$）。

更为典型的案例是“正偶数集合”。除了前文定义的通过从自然数集中筛选生成的偶数子集 M_∞ 之外，我们亦可通过主动映射构造另一个有限集合序列 $(L_n)_{n=1}^\infty$：

$$\{2\}, \{2,4\}, \{2,4,6\}, \{2,4,6,8\}, \{2,4,6,8,10\}, \dots$$

其通项法则为 $L_i = \{2x \mid x \in N_i\}$。设其极限集合为 L_∞。深入对比 M_∞ 与 L_∞ 的极限描述法则：

- **筛选生成模型：** $M_\infty = \{x \mid x \bmod 2 = 0 \land x \in N_\infty\}$
- **映射生成模型：** $L_\infty = \{2x \mid x \in N_\infty\}$

由生成速率可知，$|L_i| = i$，而 $|M_i| = \lfloor \frac{i}{2} \rfloor$。投射至无穷量纲，我们得出极其震撼的相对量级关系：

$$|L_\infty| = 2|M_\infty| = \infty^N$$

理论总结（相对集合论的命名依据）：

上述分析无可辩驳地表明：在剔除了实无穷的迷雾后，无限集合之间失去了绝对的静态对比基础。它们之间的关系，本质上是一种依托于“参照系”的相对关系。所有的量度比较，均必须通过确定的有限集合序列，并以标准自然数序列 $(N)_{n=1}^\infty$ 为基准标尺来建立相对映射。

这意味着，脱离了生成序列的演化背景，去空谈无限集合的大小是毫无逻辑意义的。** 无限度量的本质是相对比较，这就构成了本理论体系最核心的哲学与数学基石——无限集合的相对性原理。** 本理论亦由此正式定名为**相对集合论（Relative Set Theory）**。

16 结语与展望

在数学哲学的本体论视阈中，实无穷（Actual Infinity）与潜无穷（Potential Infinity）作为两种平行的无穷观，本无绝对的真伪之分。然而，现代主流集合理论（如 ZFC 公理系统 [3]）几乎单边地构建于实无穷的先验假设之上。本文提出的“相对集合论”，正是致力于填补集合论底层基础中潜无穷维度的理论空白。通过彻底废除传统且充满争议的“无限制概括原则”，本理论将广义集合的生成严格锚定于“确定元素的序列极限”，从而在底层构造逻辑上彻底拔除了引发第三次数学危机——罗素悖论（Russell's Paradox）的根基 [2, 8]。

受限于篇幅，本文现阶段的探讨域暂聚焦于能与自然数标准集合序列建立相对量级关系的无穷集合（即离散无穷域）。关于连续统的生成机制以及与实数系相关的无穷集合构造，将是本系列论文后续探讨的核心课题。

然而，基于本文现有的推演，我们已能窥见一个极具张力的数学哲学现象：本理论中推导出的无穷量纲 ∞^N，在代数运算特性上与亚伯拉罕 · 鲁滨逊（Abraham Robinson）所创立的非标准分析（Non-standard Analysis）[7] 中的无限大超自然数展现出了极高的相容性；而传统 ZFC 集合论中的无穷概念，在许多场景下反倒更契合标准实分析（Standard Analysis）[5] 中“趋于无穷”的极限语境。

目前学界普遍公认，传统集合论与非标准分析是实无穷思想的重镇，而相对集合论的序列基础与标准实分析的 $\epsilon-\delta$ 语言则坚守着潜无穷的阵地。这种“理论阵营”与“代数相容性”之间的奇妙交叉与错位，深刻揭示了实无穷与潜无穷并非绝对对立的二元孤岛。二者在更深层的度量逻辑中存在着不可割裂的辩证关系。

综上所述，相对集合论的提出，不仅仅是为现代数学提供了一套免疫逻辑悖论的替代性公理体系；它更旨在打破传统实无穷视角的绝对垄断，为人类重新认知、度量并驾驭“无穷”，提供了一个极具潜力的相对主义新范式。

参考文献

[1] Cantor, G. (1915). *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers* (P. E. B. Jourdain, Trans.). Dover Publications.

[2] Russell, B. (1903). *The Principles of Mathematics*. Cambridge University Press.

[3] Jech, T. (2003). *Set Theory* (The Third Millennium Edition, revised and expanded). Springer Monographs in Mathematics.

[4] Peano, G. (1889). *Arithmetices principia, nova methodo exposita*. Bocca, Torino.

[5] Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis* (3rd ed.). McGraw-Hill.

[6] Aristotle. *Physics* (Book III). (经典古希腊哲学文献，探讨了无穷的潜能与现实).

[7] Robinson, A. (1966). *Non-standard Analysis*. North-Holland Publishing Company.

[8] Kline, M. (1980). *Mathematics: The Loss of Certainty*. Oxford University Press. (中译本：《数学：确定性的丧失》).