Нелинейные пространства
Мультипликативная алгебра обобщённых кватернионов

С.Я. Котковский

В качестве базы для создания нелинейной алгебры мы берём векторы – математические объекты с некоторыми заранее заданными общими свойствами, но без определения этих объектов через числа или числовые матрицы. Далее мы строим нашу алгебру на основе операции умножения векторов. Наш подход позволяет получить новые и более общие представления о векторах, скалярах и связанных с ними объектах смешанного скалярно-векторного типа – обобщённых кватернионах. Мы предлагаем принципиально новый взгляд на столь привычные понятия как пространство, векторы, кватернионы, комплексность, параллельность, ортогональность, размерность. В нелинейной алгебре такие геометрические понятия как параллельность и ортогональность приобретают операторный смысл коммутативности и антикоммутативности векторов. Сущность перехода от линейных к нелинейным представлениям заключается в переходе от статических геометрических представлений к операционным представлениям. Особое место в полученной алгебраической системе занимают векторные циклы – тройки циклически связанных друг с другом векторов. Построенная нами аксиоматика позволяет доказать ряд утверждений важных для дальнейшего развития теории нелинейных пространств.

Содержание

Введение

Стандартная векторная алгебра строится на основе чисел: в ней вектор есть тот или иной набор действительных либо комплексных чисел, либо же матриц, составленных из этих чисел. Однако возможен и другой подход, когда за основу берутся вектора с заданными свойствами, но без определения их через числа или числовые матрицы. Мы предлагаем иной взгляд на столь привычные вещи, как пространство, векторы, кватернионы, комплексность, параллельность и ортогональность, размерность. В основе нашей алгебры лежат не числа и даже не скаляры, а векторы.

В основе таких понятий как пространство или многообразие лежит идея определённой замкнутости, возвращения объектов, получаемых в результате основных операций, таких как сложение и умножение, в исходное множество. Замкнутость тех или иных операций неявно подразумевает наличие циклов, образуемых этими операциями. Операционная цикличность лежит в самой природе многих типов пространств, или многообразий. Сами эти пространства возможно строить исключительно на основе операций умножения и сопряжения без необходимости введения операции сложения. Алгебра таких пространств, оказывается естественным образом мультипликативной. Даже такие операции как кватернионное и комплексное сопряжение строятся на основе обращения множителей в соответствующих произведениях.

Как показывает алгебра преобразований Лоренца, векторы невозможно рассматривать в отрыве от более широкого класса объектов, называемых бикватернионами. Бикватернион представляет собой связку комплекснозначных числа и трёхмерного вектора с заданными свойствами сложения и умножения. Бикватернионы могут быть определены и как комплексифицированные кватернионы. По этой причине для упрощения терминологии здесь и далее мы называем бикватернионы кватернионами. В настоящей работе мы ставим перед собой задачу разработки общей теории кватернионов, или бикватернионов, для которых не требуется определение через числа. Обычные бикватернионы, выражаемые с помощью комплексных чисел, становятся частным случаем обобщённых кватернионов. Наличие такого класса объектов предоставляет способы для проверки тех или иных положений теории.

В теории классических векторных пространств вектор можно умножать только на скаляр, но не на другой вектор. Мы же, напротив, строим нашу алгебру на основе операции произведения векторов между собой. Сразу заметим, что это произведение, если его рассматривать в классическом смысле, определённым образом объединяет в себе известные скалярное и векторное произведения. При таком подходе скаляры оказываются не базой построения векторов, а наоборот объектами, вторичными по отношению к векторам - которые можно построить из последних.

Наш подход позволяет получить новые и более широкие представления о векторах, скалярах и связанных с ними объектах смешанного скалярно-векторного (кватернионного) типа и выявить соответствующие закономерности. На этом пути возникает возможность создания не только обычной линейной алгебры векторов, но и их нелинейной алгебры векторов.

Поскольку базовой операцией над векторами у нас становится умножение, то особо важное значение приобретают свойства парных произведений векторов. Можно определить слабый тип параллельности векторов определяется как коммутативность их произведения. В соответствии с этим, слабый тип ортогональности векторов определяется как их антикоммутативность. Не только эти, но и многие другие характеристики и отношения объектов нашей алгебры обладают двумя уровнями – сильным и слабым. Сильный, или более жёсткий, уровень соответствует классическим линейным пространствам, построенным на числах, в то время как слабый, или более мягкий, уровень соответствует нелинейным пространствам.

В нелинейных мультипликативных пространствах по-новому определяется и их размерность. Вспомним, размерность линейного векторного пространства определяется как количество векторов, составляющих базис пространства. Произвольный вектор этого пространства может быть представлен в виде суммы векторов базиса с некоторыми числовыми коэффициентами, называемых координатами этого вектора. Размерность нелинейного векторного пространства определяется более абстрактным образом, который вообще не требует операции сложения векторов и базиса, а именно как максимальное число взаимно-ортогональных векторов.

В стандартной линейной алгебре нет принципиальной разницы между различными размерностями пространства, как и нет какой либо выделенной размерности. Как показывает теорема о трёхмерности векторной оболочки, многообразие векторов, изучаемых в настоящей работе, напротив, оказывается существенно трёхмерным. При этом, нелинейный характер нашей алгебры предполагает потенциальную возможность возникновения фрактальных, или дробных, измерений, и, следовательно, масштабируемость этой алгебры.

Характеристическими свойствами рассматриваемых в настоящей работе объектов являются их мера[1] и делимость. В зависимости от своей меры все величины подразделяются на конечные и нульмерные. Важный вывод состоит в том, что с одной стороны конечные и делимые величины эквивалентны., а с другой стороны эквивалентны нульмерные и неделимых величины. Разделение на нульмерные и конечные величины имеет фундаментальное значение для физики: конечные величины описывают поля частиц, обладающих массой, а нульмерные величины описывают безмассовые поля, т.е. свет и нейтрино.

Несколько слов об аксиоматике. Традиционная математическая теория для своих доказательств требует заранее заданной фиксированной аксиоматики, желательно с минимальным числом аксиом. Мы предлагаем иной подход, а именно *конструктивную аксиоматику*. При этом подходе не только доказательства и результаты, но и сама аксиоматика формируются в процессе построения теории. Перед подобной аксиоматикой не стоит обычного требования минимизации количества аксиом. Главное, что требуется от конструктивной аксиоматики, это целостность и непротиворечивость. Количество же аксиом может меняться как в одну, так и другую сторону. Одни аксиомы могут добавляться, а другие устраняться, оказываясь доказуемыми утверждениями. Аксиомы таким образом превращаются из диктующего начала в активный инструмент построения теории.

[1] Наше определение меры отличается от классического.

Предварительные замечания

В работе мы широко используем метод *рекурсии*, обобщающий метод индукции. В самом общем виде этот метод можно сформулировать следующим образом. Если некоторое отношение вводится между объектами данного типа, то подобным же внутренним свойством должен быть наделён и каждый отдельный объект данного типа. Рекурсия действует и в обратном направлении: любое внутреннее свойство объекта переносится на отношения этого объекта с ему подобными. В частности рекурсивными операциями оказываются умножение и сопряжение.

Другой метод, востребованный нами при разработке аксиоматики алгебры, это метод *переноса* - когда определённые свойства конечных объектов переносятся на нульмерные объекты, обладающие свойствами бесконечно малых величин. Вспоминая опыт классической теории множеств Кантора, подобные операции могут вести к неразрешимым противоречиям. По этой причине использование этого метода предполагает высокую степень осторожности. Конкретное применение этого метода в построении алгебры даёт возможность изучения принципов, лежащих в основе описания бесконечных объектов конечными категориями.

Мы работаем не со множествами в их классическом смысле, а с *подвижными многообразиями*, свойства которых заранее неизвестны и могут меняться «со временем». Такие многообразия не имеют постоянного состава, поэтому знак принадлежности $\in$ не следует понимать в стандартном теоретико-множественном смысле. Термин «существует» и знак $\in$ означают возможность выбора данного элемента из многообразия при осуществлении некоторой операции. Таким образом, мы не считаем векторное пространство или многообразие заранее состоящим из векторов. Вместо этого мы предполагаем возможность выбора векторов с теми или иными заданными свойствами из этого пространства или многообразия. Такое многообразие можно уподобить потоку воды, из потока воды можно выделить отдельные капли, но было бы неверно считать сам поток состоящим из отдельных капель.

В нашей алгебре отсутствует понятие нуля как объекта; нет нулевых скаляров, векторов или кватернионов. Вместо этого используется понятие *отсутствия,* или *не существования,* $\emptyset$. Существование того или иного объекта A мы будем выражать как $A \neq \emptyset$, или $\exists A$, что означает одно и то же. В отношении существования тех или иных объектов мы следуем принципу исключённого третьего: рассматриваемая величина либо существует, либо не существует.

По ходу текста понятия, для которых даются определения, как правило, выделены курсивом. Термины «вектор», «скаляр», «кватернион» употребляются нами в обобщённом смысле. Под обычными же, или линейными, векторами мы понимаем комплекснозначные трёхмерные вектора, образующие линейное векторное пространство; под обычными кватернионами – бикватернионы; под обычными скалярами – комплексные числа. Таким образом, под линейной или стандартной алгеброй мы подразумеваем алгебру классических бикватернионов, включающую в себя комплексные числа и трёхмерные комплексные вектора. Линейная алгебра представляет собой узкий специальный класс алгебр обобщённых кватернионов.

В статье широко используются буквенно-символьные обозначения различных типов величин: Q – обобщённые кватернионы, s – скаляры, жирным шрифтом – векторы, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – конечные векторы, A, B, C –конечные кватернионы, $\mathbf{q}$ – нульвекторы, $\mathcal{N}$ – нулькватернионы, N – квазиединицы и т.д. Например, выражение $X = s$ означает, что величина X представляет собою скаляр. Символ ⊡ обозначает конец доказательства. В тексте используются следующие сокращения: *е.с.*=если существует, с *т.д.п.*= с точностью до подобия.

Векторы и кватернионы

Вектор представляет собой алгебраический объект обладающий некоторой направленностью. *Векторная оболочка* $\mathcal{V}$ это многообразие векторов $\{\mathbf{v}\}$, на котором задана операция умножения. Произведение векторов, если оно существует, есть некоторый *кватернион* Q :

$$\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_n = Q \mid \emptyset\,, \quad n > 1, \mathbf{v}_i \in \mathcal{V}\,, \ \ Q \in \mathcal{Q} \tag{1}$$

Здесь и далее, вплоть до введения другого, внутреннего, произведения, знак произведения опускается. Символ «|» – обозначает взаимоисключающее «или»; « $\mid \emptyset$ » обозначает «или не существует». Q может быть или не быть вектором. Произведение векторов (1) некоммутативно – в нём важен порядок сомножителей. Поэтому говоря об умножении на вектор, следует указывать с какой стороны, левой или правой, оно производится. Предполагается, что операция внешнего умножения векторов ассоциативна:

$$(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2)\,\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1(\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3) \tag{2}$$

Произведение векторов (1) задаёт некоторый единственный кватернион Q. Однако один и тот же кватернион может выражаться произведением различных векторов. Многообразие всех произведений векторов для данного векторного пространства $\mathcal{V}$ мы назовём его *кватернионным пространством* $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\mathcal{V})$. Как будет показано ниже, $\mathcal{Q}$ действительно является пространством по умножению. $\mathcal{V}$ есть, соответственно, *векторная оболочка* $\mathcal{Q}$: $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathcal{Q})$. Все элементы $\mathcal{Q}(\mathcal{V})$ могут быть получены как произведения тех или иных векторов $\mathcal{V}$. При помощи попарных произведений своих векторов векторная оболочка $\mathcal{V}$ генерирует всё кватернионное пространство $\mathcal{Q}(\mathcal{V})$. Поскольку произведение векторов может выходить за рамки векторной оболочки $\mathcal{V}$, то последняя не является подпространством всего кватернионного пространства $\mathcal{Q}(\mathcal{V})$.

Мы будем исходить из принципа, что если в некотором произведении хотя бы один из сомножителей не существует, то не существует и всё произведение. Обратное утверждение неверно: произведение может не существовать даже при существовании всех его сомножителей. Последнее требует наличия в произведении делителей нуля. Как следствие указанного принципа, если некоторое произведение не существует, то не существует и произведение с дополнительными множителями. Другими словами, несуществующее произведение, т.е. произведение, результат которого не существует, можно домножать слева или справа и таким образом снова получать несуществующие произведения:

$$AB = \emptyset \Rightarrow \ \forall C\colon\ ABC = \emptyset,\ CAB = \emptyset \tag{3}$$

Будем считать (1) произведением n-го порядка. Тогда, применяя принцип рекурсии, одиночный вектор $\mathbf{v}$ можно считать произведением 1-го порядка:

$$\mathbf{v} = Q_{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}\,, \ \ Q_{\mathbf{v}} \in \mathcal{Q} \tag{4}$$

Таким образом, каждый вектор является также кватернионом. Это обстоятельство объясняет само название векторной оболочки кватернионного пространства – элементы оболочки некоторого объёма можно считать принадлежащими этому объёму.

> **Аксиома 1.** *Каждый кватернион может быть представлен одним вектором и/или произведением двух векторов:*

$$\forall Q \in \mathcal{Q},:\ Q = \mathbf{v} \text{ и/или } \mathbf{v_1 v_2} \tag{5}$$

Согласно (5) могут существовать такие кватернионы, которые представляются одновременно одним вектором и произведением двух векторов. Смысл Аксиомы Аксиома **1** состоит в том, что для любого кватерниона любые его представления в виде произведений-цепочек многих векторов (1) всегда может быть редуцировано к одному вектору или произведению двух векторов. Как будет показано далее, этот предположение определяет размерность три многообразия векторной оболочки.

Квадрат вектора **v** (произведение его само на себя), если он существует, есть специальный вид кватерниона, называемый *скаляром* s:

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}:\ \mathbf{vv} = \mathbf{v^2} = s \mid \emptyset \tag{6}$$

> **Аксиома 2.** *Никакие скаляр и вектор не равны друг другу:*

$$\forall s \in S,\ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}:\ s \neq \mathbf{v} \tag{7}$$

Многообразие всех скаляров данного кватернионного пространства Q есть его *скалярное ядро* $S = S(\mathcal{Q})$. Заметим, что в линейной алгебре скаляры изоморфны числам. Далее мы убедимся в том, что $S(\mathcal{Q})$ образует подпространство $\mathcal{Q}$.

Согласно Аксиоме 2 векторы и скаляры представляют собой непересекающиеся типы кватернионов. Существует ещё третий тип – кватернионы, не являющиеся ни скалярами, ни векторами. Назовём такие кватернионы *смешанными* и обозначим их как $\mathcal{G}$:

$$Q \in \mathcal{G}:\ \ Q \neq s, Q \neq \mathbf{v} \tag{8}$$

Вышесказанное позволяет отнести произвольный кватернион к одному и только одному из трёх *типов*: векторы, скаляры или смешанные кватернионы:

$$\forall Q: Q = s \ \mid Q = \mathbf{v} \mid\ Q \in \mathcal{G} \tag{9}$$

Тип кватерниона Q мы будем обозначать как $T(Q)$.

> **Аксиома 3.** *При обращении множителей в произведении двух векторов тип кватерниона (результата произведения) сохраняется.*

$$\exists \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 \Rightarrow \exists \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1,\ \ T(\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2) \tag{10}$$

Два вектора **u** и **v** *подобны,* если их произведение есть скаляр или оно не существует.

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{v}:\ \mathbf{uv} = s \mid \emptyset \tag{11}$$

Очевидно, любой вектор подобен самому себе. Два подобных друг другу вектора считаются равными с точностью до подобия (сокращённо "т.д.п."). Все вектора подобные данному составляют *класс подобия*.

Произведение двух или более кватернионов получается следующим образом. Каждый из этих кватернионов есть вектор или произведение двух векторов. В силу этого произведение двух или более кватернионов всегда выражается в виде произведения некоторого числа векторов, что мы и положим в основу определения произведения кватернионов: $Q_1 Q_2 \dots Q_n$. Будем считать, что такое произведение всегда определено однозначно, т.е. не зависит от конкретного выбора факторизации каждого из входящих в него кватернионов.

Вектор $\mathbf{u}$ называется *делимым*, если его можно представить в виде произведения двух векторов, каждый из которых не подобен $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_{1,2} \nsim \mathbf{u} \tag{12}$$

В противном случае вектор называется *неделимым*. Замечание: в определении неделимости важно, что количество множителей (векторов разложения) два. Как мы убедимся в будущем, неделимый вектор может быть разложен в произведение трёх векторов, каждый из которых не подобен ему.

Согласно Аксиоме 1любой кватернион есть вектор и/или произведение двух векторов. Любые скаляры или смешанные кватернионы мы будем считать *делимыми*, поскольку они всегда требуют двух векторов для своей факторизации. Что же касается векторов, то они могут быть как делимыми, так и неделимыми.

Вектор $\mathbf{a}$ с существующим («ненулевым») квадратом, называется *конечным*:

$$\mathbf{a}\colon\ \mathbf{a}^2 = s \tag{13}$$

Вектор $\mathbf{q}$, квадрат которого не существует, называется *нульвектором*:

$$\mathbf{q}\colon\ \mathbf{q}^2 = \emptyset \tag{14}$$

Очевидно, произвольный вектор является либо конечным вектором, либо нульвектором. Конечные векторы и нульвекторы мы будем называть *типами векторов*. Подчеркнём, что определённый выше в (9) тип кватернионов есть понятие отличное от типа векторов.

> **Аксиома 4.** *Каждый конечный вектор делим:*

$$\forall \mathbf{a}\ \exists\, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} :\ \mathbf{a} =\ \mathbf{v_1} \mathbf{v_2} \tag{15}$$

Свойства скаляров

Следующая аксиома, состоящая из нескольких частей, описывает основные свойства скаляров.

Аксиома 5 (свойства скаляров)**.**

1) *Универсальная коммутативность: скаляры коммутативны по умножению с любыми кватернионами:*

$$\forall s \in S,\ \forall Q \in \mathcal{Q} : sQ = Qs \tag{16}$$

2) *При произведении любого кватерниона на скаляр его тип сохраняется::*

$$\forall Q: T(Q) = T(sQ) \tag{17}$$

3) *Существует и единственен единичный кватернион – скаляр I:*

$$\forall Q: \quad IQ = QI = Q \tag{18}$$

4) *Для каждого скаляра существует и единственен обратный ему скаляр:*

$$\forall s \in S\ \exists!\, s^{-1}: \quad s\, s^{-1} = I \tag{19}$$

5) *Для каждого скаляра существует по крайней мере один скалярный квадратный корень:*

$$\forall s \in S\ \ \exists s_0 = \sqrt{s} \in S: \quad s_0^2 = s_0 s_0 = s \tag{20}$$

Единичный скаляр I мы также будем называть *единицей*. Согласно (16) при умножении кватерниона на некоторый скаляр не требуется указывать с какой стороны это делается.

Напомним, что кватернионы могут быть трёх типов: скаляры, векторы и смешанные кватернионы. Свойство (17) означает, в частности, что произведение скаляра на скаляр есть снова скаляр:

$$\forall s_1, s_2 \in S:\ s_1 s_2 \in S, \tag{21}$$

произведение скаляра на вектор есть снова вектор:

$$\forall\ s \in S,\ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}:\ s\mathbf{v} = \mathbf{v}' \in \mathcal{V},$$

а произведение смешанного кватерниона на скаляр есть снова смешанный кватернион:

$$\forall Q \in \mathcal{G}, \forall s \in S\ :\ sQ = Q' \in \mathcal{G}$$

Из (17) следует, что скалярное ядро S есть подпространство кватернионного пространства $\mathcal{Q}$. Как будет показано ниже (см. раздел "Универсальная коммутативность скаляров"), скаляры являются единственно возможными кватернионами, обладающими свойством универсальной коммутативности.

Из единственности единичного скаляра вытекает следующее правило:

$$sQ = Q \Rightarrow s = I \tag{22}$$

Объединяя вместе (19), (22), получим следующее правило:

$$s_1 Q = s_2 Q \ \Rightarrow \ s_1 = s_2 \tag{23}$$

Формулы (22), (23) могут показаться тривиальными, однако подобные закономерности имеют место только для скалярных множителей, но не выполняются, когда в качестве множителей выступают векторы или смешанные кватернионы.

В (20) $\sqrt{s}$ служит обозначением какого-то одного из обязательно существующих скаляров, являющихся квадратными корнями s.

Из свойства (19) и универсальной коммутативности скаляров (16) вытекает свойство симметричности операции обращения скаляров:

$$s_2 = s_1^{-1} \ \Leftrightarrow s_1 = s_2^{-1}$$

Как следует из (17), если существует кватернион Q, то существует и кватернион sQ:

$$\forall s \in S : \ Q \neq \emptyset \Leftrightarrow \ \ sQ \neq \emptyset \tag{24}$$

Из (24) вытекает подобное же свойство для умножения на конечный вектор:

$$\forall \mathbf{a}, Q: \ \mathbf{a}Q \neq \emptyset \,, Q\mathbf{a} \neq \emptyset \tag{25}$$

Действительно, умножая некоторый кватернион Q на скаляр $s = \mathbf{a}^2$, получим существующий кватернион $sQ = \mathbf{aa}Q$. Но если бы $\mathbf{a}Q$ не существовало, то, в силу (24), не существовало бы и $\mathbf{aa}Q = sQ$. Значит, $\mathbf{a}Q$ существует. Аналогично, доказывается обратное утверждение. Обратим внимание, что правило (25) имеет место только для конечных векторов, в то время как для нульвекторов оно уже не выполняется. Экстраполируем свойство скаляров (25) на конечные векторы в виде следующей аксиомы.

> **Аксиома 6.** *Для произвольного кватерниона Q и двух конечных векторов $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$ следующие утверждения равносильны:*

$$\mathbf{a_1} Q = \mathbf{a_2} Q \Leftrightarrow \mathbf{a_1} = \mathbf{a_2} \tag{26}$$

Подобие векторов

> **Аксиома 7.** *Никакие конечный вектор и нульвектор не могут быть подобны друг другу.*

$$\forall \mathbf{a} \ \forall \mathbf{q}: \mathbf{a} \nsim \mathbf{q} \tag{27}$$

Прямым следствием этой аксиомы является утверждение, что произведение конечного вектора и нульвектора всегда существует.

$$\forall \mathbf{a} \ \forall \mathbf{q}: \ \mathbf{aq} \neq \emptyset, \ \mathbf{qa} \neq \emptyset \tag{28}$$

В противном случае $\mathbf{a}$ и $\mathbf{q}$ были бы по определению подобны друг другу.

Конкретизируем вид подобных друг другу конечных векторов. Пусть два конечных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ подобны: $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$. Согласно определению подобия векторов (11):

$$\mathbf{ab} = s_1,$$

где s_1 скаляр. Умножим обе стороны последнего тождества на $\mathbf{a}$ слева:

$$s_2\mathbf{b} = s_1\mathbf{a},$$

где $s_2 = \mathbf{a^2}$. Умножая обе стороны последнего тождества на s_2^{-1}, получим:

$$\mathbf{b} = s\mathbf{a},$$

где $s = s_2^{-1}s_1$. Последнее тождество служит критерием подобия конечных векторов:

$$\mathbf{a} \sim \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a} = s\mathbf{b} \tag{29}$$

Применяя метод переноса (см. раздел Предварительные замечания) обобщим критерий подобия (29) на нульвекторы в виде следующей аксиомы:

> **Аксиома 8** (критерий векторного подобия нульвекторов):

$$\mathbf{q} \sim \mathbf{q}' \;\Leftrightarrow\; \mathbf{q}' = s\mathbf{q} \tag{30}$$

Объединяя вместе (29) и (30) получим критерий подобия для произвольных векторов:

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{v}' \;\Leftrightarrow\; \mathbf{v}' = s\mathbf{v} \tag{31}$$

Из (31) следует симметрия подобия векторов:

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{v} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{v} \sim \mathbf{u} \tag{32}$$

Применяя критерий подобия векторов (31) дважды, убеждаемся в том, что подобие векторов транзитивно:

$$\mathbf{u}\sim\mathbf{v}, \mathbf{v}\sim\mathbf{w} \;\Rightarrow \mathbf{u}\sim\mathbf{w} \tag{33}$$

Подобные кватернионы определяются аналогично подобным векторам (31):

$$Q_1 \sim Q_2 \Leftrightarrow \; Q_1 = sQ_2$$

Коммутативность векторов

Два кватерниона A и B *коммутативны*, если их произведение существует и коммутативно:

$$A \parallel B : AB \neq \emptyset, \;\; AB = BA \tag{34}$$

В силу своего определения свойство *коммутативности* симметрично: $A \parallel B \Leftrightarrow B \parallel A$. Выпишем отдельно свойство коммутативности векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} : \mathbf{uv} \neq \emptyset, \;\; \mathbf{uv} = \mathbf{vu} \tag{35}$$

Использование нами символа параллельности $\parallel$ для обозначения коммутативности кватернионов обусловлено тесной связью этих двух свойств, к рассмотрению которой мы обратимся в дальнейшем.

Лемма 1. *Если два конечных вектора подобны, то они коммутативны:*

$$\mathbf{a} \sim \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \tag{36}$$

Доказательство: В силу критерия подобия конечных векторов (29):

$$\mathbf{a} \sim \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} = s\mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{ab} = s\mathbf{bb} = s\mathbf{b}^2, \tag{37}$$

$$\mathbf{ba} = \mathbf{b}s\mathbf{b} = s\mathbf{b}^2 \;\Rightarrow\; \mathbf{ab} = \mathbf{ba} \;\; \boxdot$$

Тогда как подобные вектора всегда коммутативны, нелинейная алгебра предполагает наличие конечных коммутативных векторов не подобных друг другу. В таком случае подобие конечных векторов оказывается требованием более сильным, чем их коммутативность.

Кватернионное сопряжение

Из Аксиомы 3 следует, что если существует прямое произведение векторов, то существует и их обратное произведение. Введём операцию *кватернионного сопряжения* (или просто *сопряжения*) делимого кватерниона как обращение векторных сомножителей в одном из представлений его факторизации:

$$Q = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 \;\Rightarrow\; \bar{Q} = \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1 \tag{38}$$

Если взять факторизацию того же кватерниона Q другими векторами: $Q = \mathbf{v}_1'\mathbf{v}_2'$ и получить уже из неё сопряжение $\bar{Q}' = \mathbf{v}_2'\mathbf{v}_1'$, то результат останется прежним: $\bar{Q}' = \bar{Q}$, что составляет содержание следующей аксиомы.

> **Аксиома 9.** *Сопряжение данного кватерниона не зависит от выбора его факторизации.*

Для наглядности перепишем формулу (38) в виде:

$$\overline{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2} = \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1 \tag{39}$$

Очевидно, операция сопряжения (38) симметрична: кватернионы Q и $\bar{Q}$ сопряжены по отношению друг к другу:

$$Q_1 = \bar{Q}_2 \Leftrightarrow Q_2 = \bar{Q}_1 \tag{40}$$

Скаляры инвариантны по отношению к сопряжению. Действительно по определению (38) для произвольного скаляра $s = \mathbf{a}^2$ верно: $\bar{s} = \overline{\mathbf{aa}} = \mathbf{aa} = s$ **.**

> **Аксиома 10.** *Сопряжение произведения двух кватернионов равно обратному произведению их сопряжений:*

$$\forall Q_1, Q_2 \colon\ \overline{Q_1 Q_2} = \bar{Q}_2 \bar{Q}_1 \tag{41}$$

В силу свойства универсальной коммутативности скаляров (16) произведение делимого кватерниона на сопряжённый ему кватернион, если оно существует, есть скаляр:

$$\forall Q = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 \colon Q\bar{Q} = s \mid \emptyset \tag{42}$$

В самом деле, $Q\bar{Q} = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2^2\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1^2\mathbf{v}_2^2 = s \mid \emptyset$, т.к. каждый из квадратов $\mathbf{v}_1^2$ и $\mathbf{v}_2^2$ либо есть скаляр, либо его не существует. Далее будет показано, что формула (42) верна в общем случае, а не только для делимых кватернионов.

Инверсия

Применим принцип рекурсии к операции сопряжения. Рассматривая одиночный вектор $\mathbf{v}$ как произведение 1-го порядка и «разворачивая» его в обратном направлении, мы, согласно Аксиоме 3 получим некоторый другой вектор**.** Назовём этот вектор *противоположным* вектору $\mathbf{v}$ и обозначать его как $(-\mathbf{v})$:

$$-\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \tag{43}$$

Саму же операцию получения противоположного вектора мы назовём *инверсией*.

Требуется наполнить определение противоположного вектора конкретным содержанием. Пусть данный вектор $\mathbf{v}$ делимый. Тогда согласно Аксиоме 1 он, как и любой другой делимый кватернион, выражается через произведение некоторых других векторов: $\mathbf{v} = \mathbf{v_1}\mathbf{v_2}$**.** По определению (43) обращение знака $\mathbf{v}$ есть обращение его сомножителей:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v_1}\mathbf{v_2} \ \Rightarrow\ -\mathbf{v} = \mathbf{v_2}\mathbf{v_1} \tag{44}$$

Важно подчеркнуть, что введённая здесь операция инверсии вектора не нуждается в определении суммы или разности векторов. Напомним, что эти операции вообще не рассматриваются в настоящей работе. Из симметричного характера кватернионного сопряжения следует симметричность инверсии:

$$-(-\mathbf{v}) = \mathbf{v} \tag{45}$$

Прямым следствием (41) в применении к делимому кватерниону $Q = \mathbf{v_2 v_1}$ является соотношение:

$$(-\mathbf{v}_1)(-\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\,, \tag{46}$$

Формула (46) даёт предпосылку для введения специального скаляра – отрицательной единицы.

Лемма 2. *Вектор противоположный данному делимому вектору подобен ему:*

$$\forall \mathbf{v} = \mathbf{v_1 v_2}:\ -\mathbf{v} \sim \mathbf{v} \Leftrightarrow -\mathbf{v} = s_{-1}\mathbf{v} \tag{47}$$

Доказательство: Чтобы убедиться в справедливости (47), достаточно перемножить данный вектор $\mathbf{v}$ и противоположный ему вектор $(-\mathbf{v})$ в соответствии с их видом (44): $\mathbf{v}(-\mathbf{v}) = \mathbf{v_1 v_2 v_2 v_1} = \mathbf{v_1} s_2 \mathbf{v_1} = s_1 s_2 = s$ $\boxdot$

Покажем, что скаляр s_{-1} в (47) универсален – он один и тот же для всех делимых векторов. Применим сопряжение к произведению некоторой пары векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$:

$$\overline{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2} = \bar{\mathbf{v}}_2\bar{\mathbf{v}}_1 = (-\mathbf{v}_2)(-\mathbf{v}_1) = s_2\mathbf{v}_2 s_1\mathbf{v}_1 = s\,\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1, \quad s = s_1 s_2, \tag{48}$$

где мы учли, что $-\mathbf{v}_1 = s_1\mathbf{v_1}, -\mathbf{v}_2 = s_2\mathbf{v}_1$. По определению (39) $\overline{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2} = \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1$, следовательно, в (48) $s = s_1 s_2 = I$ **.** Но поскольку векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ произвольны, то это означает, что $s_1 = s_2 = s_{-1}$, где s_{-1} константа, определяемая условием:

$$s_{-1}^2 = I \tag{49}$$

Уравнение (49) имеет в качестве решения единицу I. Это решение, очевидно, следует отбросить, а в качестве s_{-1} взять некоторое определённое одно для всех (если их более одного) скалярное решение (49) отличное от I. Мы предполагаем, что в нашей алгебре такое решение всегда существует.

Операцию инверсии векторов можно перенести на все кватернионы. Кватернион $-Q$ *противоположный* данному кватерниону Q определяется следующим образом:

$$\forall Q:\ -Q = s_{-1}Q \tag{50}$$

Применяя это определение к самой единице I, получим:

$$s_{-1} = -I \tag{51}$$

Универсальный скаляр $(-I)$ естественно назвать *отрицательной единицей*. Тогда определение противоположных кватернионов запишется так:

$$-Q = (-I)Q \tag{52}$$

Операция инверсии кватернионов (52) симметрична:

$$Q_2 = -Q_1 \Leftrightarrow Q_1 = -Q_2, \tag{53}$$

В этом легко убедиться, умножая обе части (52) на $(-I)$ и учитывая, что $(-I)^2 = I$.

> **Аксиома 11.** *Никакой кватернион не может быть противоположен самому себе:*

$$\forall Q{:}\ -Q \ \neq Q \tag{54}$$

Операция инверсии позволяет определить сопряжение для неделимых векторов. Если $\mathbf{p}$ неделимый, то по формуле (43): $\overline{\mathbf{p}} = -\mathbf{p}$**.** Тем самым мы определили сопряжение для всех трёх типов кватернионов.

Нам известно, как выглядит сопряжение произведения двух векторов (39). Выясним теперь, как выглядит сопряжение произведения произвольного числа векторов. Сначала обратимся к произведению трёх векторов:

$$\overline{\mathbf{uvw}} = \overline{\mathbf{w}}\,\overline{\mathbf{uv}} = (-\mathbf{w})\mathbf{vu} = (-I)\mathbf{wvu} = -\mathbf{wvu},$$

или

$$\overline{\mathbf{uvw}} = -\mathbf{wvu} \tag{55}$$

Обращение произведения $n > 3$ векторов выводится по индукции:

$$\overline{\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n} = (-I)^n\, \mathbf{v}_n \dots \mathbf{v}_1 \tag{56}$$

$$\begin{cases} (-I)^n = I, n = 2k \\ (-I)^n = -I, n = 2k+1 \end{cases}$$

Мера кватерниона

Выше в (42) мы выяснили, что если $Q\bar{Q}$ существует, то это скаляр. Воспользуемся этой величиной для введения меры кватерниона. *Мера* кватерниона Q определяется как скаляр:

$$|Q| = Q\bar{Q} \tag{57}$$

Из этого определения следует, что мера кватерниона, если она существует, есть скаляр. В силу определения (57) мера вектора есть его квадрат со знаком минус:

$$|\mathbf{v}| = \mathbf{v}\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{v}(-\mathbf{v}) = -\mathbf{v}^2 \tag{58}$$

Выше мы ввели понятия конечного вектора и нульвектора. Перенесём понятие конечности на кватернионы б общем. *Конечный* кватернион A это кватернион определённой меры: $|A| \neq \emptyset$. Кватернион A^{-1} *обратный* данному конечному кватерниону A всегда существует и определяется согласно тождествам:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \tag{59}$$

$$A^{-1} = -\frac{\bar{A}}{|A|} \ , \quad \frac{1}{|A|} \equiv |A|^{-1} \tag{60}$$

Обращение кватерниона, очевидно, симметрично: A и A^{-1} взаимно обратны.

Определим *унитарный кватернион* U как кватернион единичной меры:

$$U\colon |U| = U\bar{U} = I \tag{61}$$

Естественно, что каждый унитарный кватернион конечен. Кватернионом обратным по отношению к данному кватерниону U очевидно служит $\bar{U}$.

Единичный вектор $\mathbf{u}$ это вектор, квадрат которого равен единице $\mathbf{u}^2 = I$, или, по-другому, это вектор меры $(-I)$. Для любого конечного вектора $\mathbf{a}$, в силу (20), существует по крайней мере один квадратный корень $\sqrt{\mathbf{a}^2}$, и, значит, существует единичный вектор $\mathbf{u}$ подобный $\mathbf{a}$:

$$\forall \mathbf{a}\ \exists \mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a}^2}}\colon\ \mathbf{u} \sim \mathbf{a} \tag{62}$$

Процедура (62) получения единичного вектора из конечного называется *нормировкой*. Как показывает следующая лемма, конечные кватернионы замкнуты относительно умножения, иначе говоря образуют подпространство.

Согласно (58) мера единичного вектора равна $(-I)$, поэтому единичный вектор унитарным кватернионом не является. Однако из единичного вектора можно получить унитарный с помощью умножения на мнимую единицу, которая будет определена в следующих разделах.

Лемма 3. *Произведение конечных кватернионов всегда существует и равно конечному кватерниону. Мера произведения конечных кватернионов равна произведению их мер.*

$$\forall A_{k,} |A_k| \neq \emptyset\colon\ |A_1 A_2 \dots A_n| = |A_1|\,|A_2| \dots |A_n| \tag{63}$$

Доказательство: Пусть A_1 и A_2 – конечные кватернионы, $|A_1| = c_1$, $|A_2| = c_2$, а их произведение есть некоторый конечный кватернион $A = A_1 A_2$. С учётом (41) мера $|A| = A\bar{A} = A_1 A_2 \overline{A_1 A_2} = A_1 A_2 \bar{A}_2\, \bar{A}_1 = A_1 c_2 \bar{A}_1 = c_2 A_1 \bar{A}_1 = c_2 c_1 = c \neq \emptyset$. Из этой цепочки равенств следует, что $|A| = |A_1|\,|A_2|$. Покажем теперь (от противного), что произведение двух конечных кватернионов всегда существует. Допустим, что $A_1 A_2 = \emptyset$. Тогда, мера произведения слева не существует, но это противоречит тождеству $|A| = |A_1|\,|A_2|$, в котором правая часть существует. Утверждение леммы для произведения трёх и более конечных кватернионов индуктивным образом сводится к только что доказанному утверждению для произведения двух конечных кватернионов $\boxdot$

Нулькватернионы

Нулькватернионом $\mathcal{N}$ называется кватернион с несуществующей мерой:

$$|\mathcal{N}| = \emptyset \tag{64}$$

Мы также будем называть нулькватернионы *нульмерными* кватернионами (требуется отличать это определение от классического термина «нульмерный», обозначающего объект, не имеющих измерений, например, точку). Все кватернионы, таким образом, разбиваются на два непересекающихся класса: конечные и нульмерные. Частным случаем нулькватернионов являются нульвекторы. Нулькватернионы не имеют обратных кватернионов. Следующая лемма описывает нулькватернионы как притягивающее по умножению многообразие кватернионов, т.е. идеал.

Лемма 4. *Произведение кватернионов, среди которых есть хоть один нулькватернион, если оно существует, есть также нулькватернион.*

Доказательство: Пусть $\mathcal{N}$ нулькватернион, Q произвольный кватернион, $Q' = Q\mathcal{N}$. Ищем меру Q': $|Q'| = Q'\bar{Q}' = Q\mathcal{N}\overline{Q\mathcal{N}} = Q\mathcal{N}\bar{\mathcal{N}}\bar{Q} = Q\ \emptyset\ \bar{Q} = \emptyset$. Аналогично доказывается нулькватернионность $Q'' = \mathcal{N}Q$. Утверждение для более чем двух кватернионов доказывается по индукции $\boxdot$

Подобно рассмотренной выше классификации векторов в зависимости от существования меры все кватернионы подразделяются на конечные и нулькватернионы. В завершение этого раздела укажем, что введённая нами мера соответствует в линейной алгебре псевдонорме (интервалу) пространства Минковского.

Унитарные преобразования

Пространство кватернионов может преобразовываться само в себя. При таких преобразованиях каждому кватерниону ставиться в соответствие некоторый другой кватернион: $Q \to Q'$. Унитарным преобразованием мы назовём, преобразование кватернионного пространства вида:

$$Q \to Q' = \bar{U}QU, \quad |U| = I \tag{65}$$

Таким образом каждый унитарный кватернион задаёт своё унитарное преобразование. Унитарный кватернион U в (65) называется *генератором* преобразования. Вид преобразования (65) продиктован тем требованием, чтобы произведение кватернионов преобразовывалось тем же способом, что и исходные кватернионы. Действительно, исходя из (65):

$$Q = Q_1Q_2 \quad \to \quad Q' = \bar{U}Q_1U\bar{U}Q_2U = \bar{U}QU \tag{66}$$

Унитарное преобразование обратное данному U задаётся сопряжённым генератором $\bar{U}$.

$$Q' \to Q = UQ'\bar{U}$$

Унитарное преобразование сохраняет меру кватерниона: $|Q'| = |Q|$. Очевидно, что при унитарных преобразованиях скаляры преобразуются в скаляры. Для подобного утверждения о других типах кватернионов требуется своя аксиома.

> **Аксиома 12.** *Унитарные преобразования сохраняют тип кватерниона:*

$$\forall Q,\ Q' = \overline{U}QU \ \Rightarrow\ T(Q') = T(Q) \tag{67}$$

Напомним, что типы кватернионов были определены выше в (9). В заключение этого раздела укажем, что в релятивистской механике унитарным преобразованиям соответствуют общие преобразования Лоренца. Не будет ошибкой называть унитарные преобразования лоренцевыми.

Нульвекторная факторизация

Нулькватернионы были определены нами выше, как кватернионы с несуществующей мерой. Т.к. у скаляра всегда существует мера, то скалярные нулькватернионы невозможны. Поэтому, согласно определению (8), смешанный нулькватернион это нулькватернион отличный от нульвектора: $\mathcal{N} \neq \mathbf{q}$. Смешанный нулькватернион всегда делим, поскольку неделимым может быть только вектор. В соответствии с Аксиомой 1 смешанный нулькватернион раскладывается в произведение пары других векторов. По крайней мере один из этих векторов должен быть нульвектором, т.к. если оба вектора конечные, то и их произведение конечно (Лемма 3). Следующая аксиома учитывает возможные случаи такого разложения.

> **Аксиома 13** (нульвекторная факторизация). *Для произвольного смешанного нулькватерниона $\mathcal{N} \in \mathcal{G}$ существует и единственна пара нульвекторов $\mathbf{q}_\mathrm{L}, \mathbf{q}_\mathrm{R}$, а также существует и единственна пара единичных векторов $\mathbf{u}_\mathrm{L}$ и $\mathbf{u}_\mathbf{R}$, для всех которых одновременно выполняются тождества:*
>
> $$\begin{cases} \mathcal{N} = \mathbf{q}_\mathrm{L}\mathbf{q}_\mathrm{R} \\ \mathcal{N} = \mathbf{u}_\mathrm{L}\mathbf{q}_\mathrm{R} \\ \mathcal{N} = \mathbf{q}_\mathrm{L}\mathbf{u}_\mathbf{R} \end{cases} \tag{68}$$

Представление (68) является одним из центральных в нашей аксиоматике. Заметим, что второе и третье тождества (68) зеркально симметричны по отношению друг к другу. Из (68) в частности следует, что каждой паре не подобных нульвекторов $\mathbf{q}_\mathrm{L}$ и $\mathbf{q}_\mathrm{R}$ можно поставить в соответствие пару единичных векторов $\mathbf{u}_\mathrm{L}$ и $\mathbf{u}_\mathrm{R}$. Однако, это соответствие не является взаимно-однозначным. Требуется уточнить, что общее представление данного смешанного нулькватерниона $\mathcal{N}$ в виде произведения двух нульвекторов единственно только с т.д.п. Однако, в связке с единичными векторами, какую представляет собой система тождеств (68), нульвекторы $\mathbf{q}_\mathrm{L}$ и $\mathbf{q}_\mathrm{R}$ оказывается полностью фиксированы для данного $\mathcal{N}$. Нульвекторы $\mathbf{q}_\mathrm{L}$ и $\mathbf{q}_\mathrm{R}$ мы будем называть левой и правой *половинками* $\mathcal{N}$.

Пусть для данного смешанного нулькватерниона $\mathcal{N}$ и некоторых двух нульвекторов выполняется только первое из тождеств (68) : $\mathcal{N} = \mathbf{q_1 q_2}$. Сопоставляя это разложение со вторым из тождеств (68), имеем: $\mathbf{q_1 q_2} = \mathbf{u}_\mathrm{L}\mathbf{q}_\mathrm{R} \Rightarrow\ \mathbf{u}_\mathrm{L}\mathbf{q}_\mathrm{R}\mathbf{q_2} = \emptyset$. Последнее тождество требует, чтобы выполнялось $\mathbf{q}_{\mathrm{R}}\mathbf{q}_{\mathbf{2}} = \emptyset$. Действительно в противном мы приходим к противоречию: $\mathbf{q}_{\mathrm{R}}\mathbf{q}_{\mathbf{2}} \neq \emptyset \Rightarrow I\mathbf{q}_{\mathrm{R}}\mathbf{q}_{\mathbf{2}} \neq \emptyset \Rightarrow \mathbf{u}_{\mathbf{L}}\mathbf{u}_{\mathbf{L}}\mathbf{q}_{\mathrm{R}}\mathbf{q}_{\mathbf{2}} \neq \emptyset$. Но согласно (25): $\mathbf{u}_{\mathbf{L}}\mathbf{q}_{\mathrm{R}}\mathbf{q}_{\mathbf{2}} \neq \emptyset$. Мы приходим к требованию подобия нульвекторов любого разложения $\mathcal{N}$ его нульвекторам-половинкам:

$$\mathcal{N} = \mathbf{q}_{\mathbf{1}}\mathbf{q}_{\mathbf{2}} \;\Rightarrow\; \mathbf{q}_{\mathbf{1}} \sim \mathbf{q}_{\mathrm{L}}, \mathbf{q}_{\mathbf{2}} \sim \mathbf{q}_{\mathbf{R}} \tag{69}$$

Аналогичным образом показывается, что подобные соотношения имеют место и для смешанных произведений:

$$\mathcal{N} = \mathbf{uq} \;\Rightarrow\; \mathbf{u} \sim \mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{q} \sim \mathbf{q}_{\mathbf{R}} \tag{70}$$

$$\mathcal{N} = \mathbf{qu} \;\Rightarrow\; \mathbf{q} \sim \mathbf{q}_{\mathrm{L}}, \mathbf{u} \sim \mathbf{u}_{\mathbf{R}} \tag{65}$$

Формулы (69)-(71) позволяют говорить об однозначном с т.д.п. разложении смешанного нулькватерниона в виде произведения пары нульвекторов и пар, состоящих из нульвектора и конечного вектора.

Антикоммутативность и ортогональность

Изучаемое в этом разделе свойство антикоммутативности векторов дополнительно по отношению к их свойству коммутативности (35). Два вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ *антикоммутативны,* если их произведение существует и антикоммутативно:

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} : \; \mathbf{uv} = -\mathbf{vu}\,, \tag{71}$$

где знак «-» определяется согласно (52). Заметим, что в определении (71) неявным образом используется Аксиома 3, гарантирующая существование обратного произведения векторов при существовании их прямого произведения. Из симметричности OPERACII инверсии (53) следует симметричность антикоммутативности векторов: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v} \perp \mathbf{u}$.

Лемма 5. *Два вектора не могут быть одновременно коммутативны и антикоммутативны.*
Доказательство (от противного): Рассмотрим такую возможность, когда для двух векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$: $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}, \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. По определению антикоммутативности векторов произведение $\mathbf{uv}$ существует. При этом: $\mathbf{uv} = \mathbf{vu}, \mathbf{uv} = -\mathbf{vu}$ Тогда, для кватерниона $Q = \mathbf{uv}$ имеет место равенство: $Q = -Q$. Но это невозможно в силу Аксиомы 11 $\boxdot$

Два вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ *ортогональны* друг другу, если их произведение есть снова вектор:

$$\mathbf{u} \doteq \mathbf{v}: \;\; \mathbf{uv} = \mathbf{w} \tag{72}$$

Свойство ортогональности векторов дополнительно по отношению к свойству подобия векторов. В линейной векторной алгебре свойства антикоммутативности и ортогональности эквивалентны. В нелинейной алгебре, изучаемой здесь, из ортогональности векторов следует их антикоммутативность, но не наоборот.

Лемма 6. *Два взаимно ортогональных вектора антикоммутативны:*

$$\mathbf{u} \doteq \mathbf{v} \;\Rightarrow\; \mathbf{u} \perp \mathbf{v} \qquad (73)$$

Доказательство: Пусть $\mathbf{u} \doteq \mathbf{v}$ **.** Возьмём сопряжение от обоих частей равенства (72). С учётом симметричности операции инверсии (45):

$$\overline{\mathbf{uv}} = -\mathbf{w} \;\Leftrightarrow \mathbf{vu} = -\mathbf{w} \;\Leftrightarrow\; -\mathbf{vu} = \mathbf{w}$$

Сравнивая последнее тождество с (72), получаем: $\mathbf{uv} = -\mathbf{vu}$, т.е. $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, ч.т.д. ⊡

Конечные векторы

Для дальнейших целей перепишем (72) для конечных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} \doteq \mathbf{b}\text{:}\;\; \mathbf{ab} = \mathbf{c} \qquad (74)$$

Подчеркнём, что в определениях ортогональности векторов (72),(74) вектор – результат произведения двух ортогональных векторов, определён с т.д.п. Поэтому произведение векторов в (74) запишется так: $\mathbf{ab} \sim \mathbf{c}$**.**

Лемма 7. *Два конечных вектора не могут быть одновременно подобны и ортогональны друг другу.*

Доказательство (от противного): Предположим , что есть такие два конечных вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}$: $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}, \mathbf{a} \doteq \mathbf{b} \;\;\Rightarrow\;\; \boldsymbol{ab} = s, \mathbf{ab} = \mathbf{c} \;\;\Rightarrow\;\; s = \mathbf{c}$ Но по Аксиоме 2 скаляр не может быть равен вектору ⊡

Умножая обе стороны тождества (74) слева на $\mathbf{a}$, получим: $s_1\mathbf{b} = \mathbf{ac}$, где $s_1 = \mathbf{a^2}$**.** В силу (17) $s_1\mathbf{b}$ есть вектор, и, значит, $\mathbf{a} \doteq \mathbf{c}$ **.** Аналогично показывается, что $\mathbf{b} \doteq \mathbf{c}$ **.** В соответствии с этим**,** для конечных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$**,** если $\mathbf{ab} = \mathbf{c}$, то $\mathbf{a} \doteq \mathbf{c}$, $\mathbf{b} \doteq \mathbf{c}$. Таким образом, определение двух конечных ортогональных векторов эквивалентно определению трёх конечных ортогональных векторов:

$$\mathbf{a} \doteq \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\;\; \mathbf{a} \doteq \mathbf{b} \doteq \mathbf{c} \qquad (75)$$

$\mathbf{a} \doteq \mathbf{b} \doteq \mathbf{c}$ обозначает взаимную ортогональность трёх векторов: $\mathbf{a} \doteq \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \doteq \mathbf{c}$, $\mathbf{c} \doteq \mathbf{a}$. С учётом (75) определение ортогональных векторов (74) $\mathbf{ab} \sim \mathbf{c}$ может быть заменено на эквивалентные утверждения $\mathbf{bc} \sim \mathbf{a}$ или $\mathbf{ca} \sim \mathbf{b}$.

Рассмотрим произвольный конечный вектор $\mathbf{a}$. По Аксиоме 4 для него всегда найдётся пара векторов, реализующая его факторизацию: $\mathbf{a} = \mathbf{bc}$. Но тогда все три вектора оказываются взаимно ортогональны, что позволяет сформулировать следующее утверждение:

$$\forall \mathbf{a}\; \exists \mathbf{b}, \mathbf{c}\text{:}\;\; \mathbf{a} \doteq \mathbf{b} \doteq \mathbf{c} \qquad (76)$$

Нульвекторы

Представим себе, что два некоторых нульвектора $\mathbf{q_1}$ и $\mathbf{q_2}$ ортогональны друг другу. Это означает, что $\mathbf{q_1}\,\mathbf{q_2}$ есть вектор, тогда в силу Леммы 4 этот вектор обязан быть нульвектором: $\mathbf{q_1}\,\mathbf{q_2} = \mathbf{q}$, $\mathbf{q_2 q_1} = -\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{q_2 q} = \emptyset$, $\mathbf{q}\,\mathbf{q_1} = \emptyset \Rightarrow \mathbf{q_2} \sim \mathbf{q}, \mathbf{q_1} \sim \mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{q_1} \sim \mathbf{q_2} \Rightarrow \mathbf{q_1}\,\mathbf{q_2} =$

$\emptyset$. Здесь мы воспользовались транзитивностью подобия векторов (33). Итак, произведение $\mathbf{q_1}\ \mathbf{q_2}$ не существует. Как следствие, никакие два нульвектора не могут быть ортогональны друг другу:

$$\forall \mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}:\ \mathbf{q_1} \not\perp \mathbf{q_2} \tag{77}$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда для некоторых трёх нульвекторов $\mathbf{q_1}$, $\mathbf{q_2}$ и $\mathbf{q_3}$ их произведение не существует: $\mathbf{q_1 q_2 q_3} = \emptyset$. Допустим, что $\mathbf{q_1 q_2} \neq \emptyset$. Согласно (77), $\mathcal{N} = \mathbf{q_1 q_2}$ – смешанный нульакватернион. По (68) и (70) : $\mathcal{N} = \mathbf{a q_2}$, где $\mathbf{a}$ некоторый конечный вектор. Тогда: $\mathbf{q_1 q_2 q_3} = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{N}\mathbf{q_3} \Rightarrow \mathbf{a q_2 q_3} = \emptyset \Rightarrow \mathbf{q_2 q_3} = \emptyset \Leftrightarrow \mathbf{q_2} \sim \mathbf{q_3}$ Если же $\mathbf{q_1 q_2} \neq \emptyset$, то $\mathbf{q_1} \sim \mathbf{q_2}$. В итоге мы получаем:

$$\mathbf{q_1 q_2 q_3} = \emptyset\ \Rightarrow\ \mathbf{q_1} \sim \mathbf{q_2}\ \text{ и/или }\ \mathbf{q_2} \sim \mathbf{q_3} \tag{78}$$

Вернёмся к базовому представлению нулькватерниона (68) и покажем, что входящие в него с одной стороны нульвекторы и с другой стороны единичные векторы не могут быть ортогональны друг другу. Очевидно что $\mathbf{q_L} \not\perp \mathbf{u_R}$, $\mathbf{u_L} \not\perp \mathbf{q_R}$, т.к. в ином случае произведения $\mathbf{q_L u_R}$ и $\mathbf{u_L q_R}$ были бы не смешанными нулькватернионами, а нульвекторами. Покажем, что $\mathbf{u_L} \not\perp \mathbf{q_L}$. От противного, предположим: $\mathbf{u_L} \perp \mathbf{q_L} \Rightarrow \mathbf{u_L q_L} = s\mathbf{q_L}$. Поскольку $\mathcal{N}$ нулькватернион, $|\mathcal{N}| = \emptyset$. Но $\mathcal{N} = \mathbf{u}_\mathrm{L}\mathbf{q}_\mathrm{R} = \mathbf{q_L u_R} \Rightarrow \bar{\mathcal{N}}\mathcal{N} = \mathbf{q_R u_L q_L u_R} = s\mathbf{q_R q_L u_R} = \emptyset \Rightarrow \mathbf{q_R q_L u_R} = \emptyset \Rightarrow \bar{\mathcal{N}}\mathbf{u_R} = \emptyset$. Последнее невозможно в силу (25), т.к. $\bar{\mathcal{N}} \neq \emptyset$. Резюмируем вышесказанное – для структурных половинок любого нулькватерниона всегда верно:

$$\mathbf{q}_{\mathbf{L},\mathrm{R}} \not\perp \mathbf{u}_{\mathbf{L},\mathbf{R}} \tag{79}$$

Подводя итог этому разделу, укажем на соответствие между свойствами коммутативности и антикоммутативности с одной стороны и свойствами подобия и ортогональности с другой. Первые определяются коммутационными свойствами произведения, тогда как вторые определяются типом произведения векторов (скаляр или вектор). Вторые характеристики представляют собой сильный вариант первых характеристик.

Трёхмерность векторной оболочки

Определим *размерность* многообразия как максимальное число взаимно-ортогональных конечных векторов на нём.

Теорема 1. (о трёхмерности векторной оболочки). *Пусть три конечных вектора* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *взаимно ортогональны друг другу:* $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \perp \mathbf{c}$, *тогда никакой конечный вектор не может быть ортогонален каждому из этих векторов.*

Доказательство (от противного)*:* Пусть $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \perp \mathbf{c}$. Предположим, что существует такой вектор $\mathbf{d}$: $\mathbf{d} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{d} \perp \mathbf{b}$, $\mathbf{d} \perp \mathbf{c}$. Рассмотрим тройку векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}$, которая является тройкой взаимно ортогональных векторов и в соответствии с (75): $\mathbf{ab} \sim \mathbf{d}$. В силу взаимной ортогональности $\mathbf{a,b,c}$: $\mathbf{ab} \sim \mathbf{c}$. Согласно свойству транзитивности подобия векторов (33) $\mathbf{c} \sim \mathbf{d}$. Но это невозможно, т.к. по условию $\mathbf{d} \perp \mathbf{c}$, а никакие два вектора не могут быть одновременно подобны и ортогональны друг другу (Лемма 7) $\boxdot$

Из этой теоремы можно непосредственно заключить, что **векторная оболочка $\mathcal{V}$ имеет размерность 3.**

Универсальная коммутативность скаляров

Выше, в разделе «Свойства скаляров» мы постулировали универсальную коммутативность скаляров и предположили справедливость и более сильного утверждения о том, что лишь одни скаляры обладают универсальной коммутативностью. Теперь мы имеем возможность доказать это утверждение.

Покажем, что если некоторый кватернион Q_0 обладает универсальной коммутативностью, иначе говоря его произведение с любыми другими кватернионами коммутативно, то этот кватернион есть скаляр.

1) Предположим, что Q_0 есть конечный вектор: $Q_0 = \mathbf{a}$. По (76) всегда найдётся другой конечный вектор $\mathbf{b}$ ортогональный $\mathbf{a}$ **.** Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ антикоммутативности друг другу: $\mathbf{ab} = -\mathbf{ba}$**.** Итак, $Q_0 = \mathbf{a}$ не коммутативен с $\mathbf{b}$.

2) Пусть теперь Q_0 – нульвектор: $Q_0 = \mathbf{q}$. Согласно Аксиоме 14 существует конечный вектор $\mathbf{m}$ ортогональный $\mathbf{q}$. Вектор $Q_0 = \mathbf{q}$ не коммутативен с $\mathbf{m}$.

3) Пусть Q_0 – конечный смешанный кватернион. Q_0 представляется в виде произведения двух конечных векторов: $Q_0 = \mathbf{ab}$. Из предположения коммутативности Q_0 следует: $Q_0\mathbf{b} = \mathbf{b}Q_0 \;\Rightarrow\; \mathbf{ab^2} = \mathbf{bab} \;\Rightarrow\; \mathbf{ab} = \mathbf{ba}$. Пусть вектор $\mathbf{c}$ ортогонален (следовательно, антикоммутативен) $\mathbf{a}$. Предполагая коммутативность Q_0 и $\mathbf{c}$, получаем: $Q_0\mathbf{c} = \mathbf{c}Q_0 \;\Rightarrow\; \mathbf{abc} = \mathbf{cab} \;\Rightarrow\; \mathbf{acb} = \mathbf{cab} \;\Rightarrow\; \mathbf{ac} = \mathbf{ca}$. Тогда: $\mathbf{abc} = \mathbf{cab} \Rightarrow \mathbf{abc} = \mathbf{acb} \;\Rightarrow\; \mathbf{bc} = \mathbf{cb}$. Последнее же невозможно, поскольку $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ взаимно ортогональны.

4) Последний возможный вариант, это когда Q_0 – смешанный нулькватернион: $Q_0 = \mathcal{N}$. Согласно Аксиоме 13 $\mathcal{N} = \mathbf{q}_\mathrm{L}\mathbf{q}_\mathrm{R}$**.** Рассмотрим произведения Q_0 на $\mathbf{q}_\mathrm{R}$ слева и справа: $Q_0\mathbf{q_R} = \emptyset$, $\mathbf{q_R}Q_0 = \mathbf{q_r q_L q_R} \neq \emptyset$ - в силу (78). Мы видим, что эти произведения не равны друг другу, т.е. Q_0 не коммутативен с $\mathbf{q_R}$.

Продольник и поперечник

Обратимся теперь к случаю, когда два взаимно ортогональных вектора принадлежат разным типам: один из них конечный $\mathbf{m}$ а другой нульвектор $\mathbf{q}$: $\mathbf{m} \doteq \mathbf{q} \Leftrightarrow \mathbf{mq} = \mathbf{v}.$ Вектор $\mathbf{v}$ согласно Лемме 4 является нульвектором. Перепишем последнее тождество в виде: $\mathbf{mq} = \mathbf{q}'.$ Домножая его слева на $\mathbf{m}$, приходим к выводу, что нульвекторы $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}'$ подобны. Тогда условие ортогональности векторов разных типов выразится в следующем виде:

$$\mathbf{m} \doteq \mathbf{q}: \quad \mathbf{mq} = s\mathbf{q} \tag{80}$$

Применив к последнему тождеству операцию сопряжения, условие ортогональности (80) можно переписать в виде:

$$\mathbf{m} \doteq \mathbf{q}: \quad \mathbf{qm} = -s\mathbf{q} \tag{81}$$

Назовём конечный вектор, ортогональный некоторому нульвектору, *моновектором*. В соответствии с этим определением вектор $\mathbf{m}$ в (80), (81) является моновектором. Подобные друг другу моновекторы мы будем называть одинаковыми *по направлению*.

> **Аксиома 14** (Продольник и поперечник)*. Для произвольного нульвектора* $\mathbf{q}$ *всегда существует и единственен по направлению ортогональный ему конечный вектор (моновектор)* $\mathbf{m}$*:*

$$\forall \mathbf{q} \ \tilde{\exists} \mathbf{m}: \mathbf{m} \doteq \mathbf{q} \tag{82}$$

Символ $\tilde{\exists}$ означает единственность с т.д.п. В рассматриваемой паре векторов $\mathbf{q},\mathbf{m}$ мы будем именовать вектор $\mathbf{m}$ *продольником*, а нульвектор $\mathbf{q}$ – *поперечником*.

Рассмотрим теперь условие антикоммутативности нульвектора $\mathbf{q}$ и конечного вектора $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{q}: \quad \mathbf{qa} = -\mathbf{aq} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{qaq} = \emptyset \tag{83}$$

Лемма 8*. Если для пары векторов разных типов – нульвектора* $\mathbf{q}$ *и конечного вектора* $\mathbf{a}$ *выполняется тождество* $\mathbf{qaq} = \emptyset$ *, то они ортогональны:*

$$\mathbf{qaq} = \emptyset \ \Rightarrow \ \mathbf{a} \doteq \mathbf{q} \tag{84}$$

Доказательство: Пусть для $\mathbf{q}$ и $\mathbf{a}$ выполняется условие $\mathbf{qaq} = \emptyset$. Рассмотрим нульkватернион $\mathcal{N} = \mathbf{qa}$. Возможны два случая: когда $\mathcal{N}$ смешанный нульkватернион, и когда он нульвектор. Обратимся к первому случаю. Согласно представлению (68) $\mathcal{N} = \mathbf{q_L q_R} = \mathbf{u_L q_R}$. Из (31) следует $\mathbf{q_L} \sim \mathbf{q} \Leftrightarrow \mathbf{q_L} = s_0\mathbf{q}$. Подставляя $\mathcal{N} = \mathbf{u_L q_R}$ в $\mathbf{qaq} = \emptyset$, приходим к тождеству: $\mathbf{u_L q_R q} = \emptyset$. Умножим последнее на $\mathbf{u_L}$ слева (см.(3)): $s\mathbf{q_R q} = \emptyset,\ s = \mathbf{u_L^2} \Rightarrow \mathbf{q_R q} = \emptyset \Leftrightarrow \mathbf{q_R} \sim \mathbf{q}$. Но это означает, что $\mathcal{N} = \mathbf{q_L q_R} = \emptyset$,т.к. $\mathbf{q_L} \sim \mathbf{q}, \mathbf{q_R} \sim \mathbf{q}$, что невозможно. Итак, первый случай ($\mathcal{N}$ – смешанный) оказывается невозможен. Обратимся ко второму случаю: $\mathcal{N} = \mathbf{qa} = \mathbf{q}'$. Тогда $\mathbf{q}'\mathbf{q} = \emptyset \Rightarrow \mathbf{q}' \sim \mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{qa} = s\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{a} \doteq \mathbf{q}$ – в силу (80), ч.т.д. $\boxdot$

Лемма 9. *Для смешанных пар векторов разных типов свойства ортогональности и антикоммутативности эквивалентны:*

$$\mathbf{a} \doteq \mathbf{q} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a} \perp \mathbf{q} \tag{85}$$

Доказательство: первая часть этой леммы непосредственно следует из Леммы 6: $\mathbf{a} \doteq \mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{q}$. Вторая часть леммы следует из цепочки, составленной из (83) и (84): $\mathbf{a} \perp \mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{qaq} = \emptyset \Rightarrow \mathbf{a} \doteq \mathbf{q}$ $\boxdot$

Примечательно, что в последнем доказательстве проявилась к цепочка следствий в следующем порядке: $\mathbf{a} \perp \mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{qaq} = \emptyset \Rightarrow \mathbf{a} \doteq \mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{q}$ **.** Объединим вместе три рассмотренных эквивалентных свойства ортогональности/антикоммутативности векторов разных типов:

$$\mathbf{a} \doteq \mathbf{q} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a} \perp \mathbf{q} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{qaq} = \emptyset \tag{86}$$

Лемма 10. *Никакие нульвектор и конечный вектор не могут быть коммутативны:*

$$\forall \mathbf{q}, \mathbf{a}:\; \mathbf{qa} \neq \mathbf{aq} \tag{87}$$

Доказательство (от противного): Пусть существуют такие $\mathbf{q}, \mathbf{a}$: $\mathbf{qa} = \mathbf{aq}$. Умножая последнее тождество на $\mathbf{q}$ справа, получим: $\mathbf{qaq} = \emptyset$. Но, в силу (86), это возможно только при $\mathbf{q} \perp \mathbf{a}$, а по Лемме 5 два вектора не могут быть одновременно коммутативны и антикоммутативны. Мы пришли к противоречию, которое и доказывает лемму $\boxdot$

Замечание: Согласно последней лемме связь нульмерного поперечника $\mathbf{q}$ и конечного продольника $\mathbf{a}$ линейна.

Скалярное произведение

Произвольным двум векторам $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ поставим в соответствие некоторый скаляр, который мы назовём их *скалярным произведением:*

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}:\; \exists s = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

При этом будем требовать симметричность скалярного произведения:

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \tag{88}$$

Если вектора подобны друг другу, то их скалярное произведение по определению совпадает с обычным:

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{v} \Rightarrow (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{uv} \tag{89}$$

Если же вектора ортогональны друг другу, то их скалярное произведение по определению не существует:

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Rightarrow (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \emptyset \tag{90}$$

Рассмотрим некоторые нульвектор $\mathbf{q}$ и конечный вектор $\mathbf{b}$, который не ортогонален $\mathbf{q}$: $\mathbf{b} \not\perp \mathbf{q}$. Их тройное произведение: $\mathbf{qbq} \neq \emptyset$. Согласно Лемме 4 это произведение есть некоторый нулькватернион $\mathcal{N} = \mathbf{qbq}$. Если $\mathcal{N}$ смешанный, то в согласии с Аксиомой 13 он раскладывается как $\mathcal{N} = \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2$. Но тогда, по (33) $\mathbf{q}_1 \sim \mathbf{q}, \mathbf{q}_2 \sim \mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{q}_1 \sim \mathbf{q}_2$, что невозможно. Поэтому $\mathcal{N}$ есть нульвектор, причём подобный $\mathbf{q}$: $\mathcal{N} = \mathbf{qbq} = s\mathbf{q}$. По определению скаляр s мы будем считать скалярным произведением нульвектора $\mathbf{q}$ и конечного вектора $\mathbf{b}$:

$$\forall \mathbf{b}\ \forall \mathbf{q},\ \mathbf{b} \not\perp \mathbf{q}:\ \mathbf{qbq} = s\mathbf{q} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}) = s \tag{91}$$

Если же вектора $\mathbf{q}$ и $\mathbf{m}$ ортогональны, то их скалярного произведения не существует: $\mathbf{m} \perp \mathbf{q} \Rightarrow (\mathbf{q} \cdot \mathbf{m}) = \emptyset$.

Выше мы рассмотрели вид скалярного произведения для трёх сочетаний типов векторов. Определение конкретного вида скалярного произведения в общем случае, по-видимому, невозможно и должно зависит от конкретной реализации алгебры.

Нульвекторы как неделимые кватернионы

Делимые и неделимые кватернионы было определены в разделе "Векторы и кватернионы". Согласно (5) неделимым кватернионом может быть только вектор. Выясним, какие именно вектора являются неделимыми.

Теорема 2. *Каждый неделимый кватернион есть нульвектор. Каждый нульвектор есть неделимый кватернион.*

Доказательство:

Докажем первую часть теоремы – покажем, что конечные векторы делимы. Возьмём произвольный конечный вектор $\mathbf{a}$. Для него, в согласии с (76): $\exists \mathbf{b}, \mathbf{c}$: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \perp \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{a} \sim \mathbf{cb} \Leftrightarrow \mathbf{a} = s\mathbf{cb} = \mathbf{c}'\mathbf{b},\ \mathbf{c}' = s\mathbf{c}$. Этим мы показали, что $\mathbf{a}$ раскладывается в виде произведения векторов $\mathbf{c}'\mathbf{b}$, иначе говоря является делимым вектором. Мы показали, что неделимым кватернионом может быть только нульвектор.

Докажем от противного вторую часть теоремы. Пусть нульвектор $\mathbf{q}$ делимый: $\mathbf{q} = \mathbf{u_1 u_2}$, где каждый из векторов $\mathbf{u_1}$ и $\mathbf{u_2}$ не подобен $\mathbf{q}$. Оба вектора $\mathbf{u_1}$ и $\mathbf{u_2}$ не могут быть одновременно нульвекторами, т.к. тогда эти нульвекторы были бы ортогональны друг другу, что невозможно в силу (77). Вследствие этого по крайней мере один из векторов произведения должен быть конечным, пусть это вектор $\mathbf{u_1} : \mathbf{u_1} = \mathbf{a}$. Второй из векторов произведения тогда нульвектор: $\mathbf{u_2} = \mathbf{q}'$, и, следовательно, $\mathbf{q} = \mathbf{aq}'$. Умножим обе части последнего тождества на $\mathbf{a}$ слева: $\mathbf{aq} = s\mathbf{q}', s = \mathbf{a^2} \Rightarrow \mathbf{q}' = s^{-1}\mathbf{aq}$. Последнее равенство означает подобие векторов $\mathbf{q} \sim \mathbf{aq}$. Но тождество $\mathbf{aq} = s\mathbf{q}'$ означает подобие векторов $\mathbf{q}' \sim \mathbf{aq}$. По свойству транзитивности подобия из $\mathbf{q} \sim \mathbf{aq}, \mathbf{q}' \sim \mathbf{aq}$ следует подобие векторов $\mathbf{q} \sim \mathbf{q}' \Rightarrow \mathbf{q}' = s_1\mathbf{q}$. Тогда тождество $\mathbf{q} = \mathbf{aq}'$ можно переписать в виде $\mathbf{q} = s_1\mathbf{a}\,\mathbf{q} = \mathbf{bq},\ \mathbf{b} = s_1\mathbf{a}$. Итак, условие делимости $\mathbf{q} = \mathbf{aq}'$ выливается в равенство $\mathbf{q} = \mathbf{bq}$. Но последнее тождество не может служить условием делимости, т.к. один из векторов-множителей подобен исходному вектору. Терема доказана $\boxdot$

Итак, неделимый вектор и нульвектор это эквивалентные понятия. Из доказательства теоремы также можно заключить, что каждый конечный вектор делим.

По своему определению нульвектор есть делитель нуля. Но верно и обратное: каждый векторный делитель нуля есть нульвектор. Чтобы убедиться в этом рассмотрим некоторые вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, произведение которых не существует: $\mathbf{uv} = \emptyset$. Оба вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ не могут быть конечными, поскольку в подобном случае, согласно Лемме 3, их произведение существовало бы; поэтому по крайней мере один из этих векторов не конечный, т.е. нульвектор.

Можно сделать следующий вывод: **нульвекторы, неделимые вектора и векторные делители нуля представляют собой эквивалентные понятия.**

Квазиединицы

В этом разделе мы изучим кватернионы, обладающие свойствами единицы в отношении определённых классов кватернионов. *Квазиединица* это кватернион N, не являющийся скаляром, для которого выполняется условие идемпотентности:

$$N^2 = N \tag{92}$$

Очевидно, что не только квадрат, но и любая натуральная степень N снова равна N: $N^n = N$. Квазиединица не может быть вектором, т.к. квадрат вектора, если он существует, равен скаляру (6), а никакие скаляр и вектор не равны друг другу (7). Вследствие этого каждая квазиединица N это обязательно смешанный кватернион. Возьмём сопряжение от обеих сторон (92): $\overline{N^2} = \overline{N} \Leftrightarrow (\overline{N})^2 = \overline{N}$. Тем самым мы убеждаемся, что если нулькватернион N квазиединица, то и сопряжённый ему нулькватернион $\overline{N}$ также является квазиединицей.

Лемма 11. *Каждая квазиединица есть нулькватернион:* $\forall N\colon |N| = \emptyset$.

Доказательство (от противного): Пусть $|N| = N\overline{N} = s \in S$. Тогда $N^2\overline{N} = NN\overline{N} = N|N| = sN$. Но согласно определению квазиединицы (92) $N^2\overline{N} = N\overline{N} = |N| = s$. Следовательно, $s = sN$. Последнее равенство невозможно в силу (17). Приходим к выводу $|N| = \emptyset$ $\boxdot$

Обратим внимание на различие обозначений: $\mathcal{N}$ – нулькватернион общего вида, N – квазиединица, частный случай нулькватерниона .

Согласно (68), произвольная квазиединица N, как и всякий другой смешанный нулькватернион, представляется, причём единственным образом, в виде парных произведений, связанных друг с другом:

$$N = \mathbf{q}_\mathrm{L}\mathbf{q}_\mathrm{R} = \mathbf{q}_\mathrm{L}\mathbf{u}_\mathrm{R} = \mathbf{u}_\mathrm{L}\mathbf{q}_\mathrm{R} \tag{93}$$

Нульвектор $\mathbf{q}$ входящий в разложение (93) для некоторой квазиединицы в качестве левой $\mathbf{q}_\mathrm{L}$ или правой $\mathbf{q}_\mathrm{R}$ половин, мы назовём *нормированным*. Заметим, что именно наличие единичных векторов $\mathbf{u}_\mathrm{L}$ и $\mathbf{u}_\mathrm{R}$ в разложении (93) является нормирующим фактором для входящих в это разложение нульвекторов.

Аксиома 15. *Для любого нульвектора* $\mathbf{q}$ *существует и единственен другой нульвектор* $\mathbf{q}'$, *произведение на который даёт некоторую квазиединицу* N**:**

$$\forall\mathbf{q}\ \exists!\,\mathbf{q}':\ \mathbf{q}\mathbf{q}' = N \tag{94}$$

Для любого единичного вектора $\mathbf{u}$ *существует нульвектор* $\mathbf{q}$, *произведение на который слева даёт некоторую квазиединицу* N*:*

$$\forall\mathbf{u}\ \exists\mathbf{q}:\ \mathbf{u}\mathbf{q} = N \tag{95}$$

и нульвектор $\mathbf{q}'$, *произведение на который справа даёт некоторую квазиединицу* N':

$$\forall\mathbf{u}\ \exists\mathbf{q}':\ \mathbf{q}'\mathbf{u} = N' \tag{96}$$

Нульвекторы в (95), (96) в согласно данному выше определению являются нормированными. Пусть $\mathbf{q}_{\mathrm{L}}$ и $\mathbf{q}_{\mathrm{R}}$ половинки некоторой квазиединицы N. Рассмотрим тройное произведение $\mathbf{q}_{\mathrm{L}}\mathbf{q}_{\mathrm{R}}\mathbf{q}_{\mathrm{L}}$. Поскольку $\mathbf{q}_{\mathrm{L}}\mathbf{u}_{\mathrm{R}}$ это смешанный нулькватернион, то $\mathbf{q}_{\mathrm{L}}$ и $\mathbf{u}_{\mathrm{R}}$не ортогональны друг другу. Согласно (91): $\mathbf{q}_{\mathrm{L}}\mathbf{q}_{\mathrm{R}}\mathbf{q}_{\mathrm{L}} = \mathbf{q}_{\mathrm{L}}\mathbf{u}_{\mathrm{R}}\mathbf{q}_{\mathrm{L}} = s\mathbf{q}_{\mathrm{L}}$. Отсюда следует, что $\mathbf{q}_{\mathrm{L}}\mathbf{q}_{\mathrm{R}}\mathbf{q}_{\mathrm{L}}\mathbf{q}_{\mathrm{R}} = s\mathbf{q}_{\mathrm{L}}\mathbf{q}_{\mathrm{R}} \Rightarrow N^2 = sN$. С учётом (92) и (22) $N = sN \ \Rightarrow\ s = I$. Несложно непосредственно убедиться в том, что верно и обратное утверждение: если половинки некоторого нулькватерниона удовлетворяют равенству $\mathbf{q}_{\mathrm{L}}\mathbf{q}_{\mathrm{R}}\mathbf{q}_{\mathrm{L}} = \mathbf{q}_{\mathbf{L}}$, то этот нулькватернион есть квазиединица. Аналогично доказывается тождество $\mathbf{q}_{\mathrm{R}}\mathbf{q}_{\mathrm{L}}\mathbf{q}_{\mathrm{R}} = \mathbf{q}_{\mathrm{R}}$. Таким образом, половинки некоторой квазиединицы N с необходимостью и достаточностью удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases}\mathbf{q}_{\mathrm{L}}\mathbf{q}_{\mathrm{R}}\mathbf{q}_{\mathrm{L}} = \mathbf{q}_{\mathrm{L}}\\ \mathbf{q}_{\mathrm{R}}\mathbf{q}_{\mathrm{L}}\mathbf{q}_{\mathrm{R}} = \mathbf{q}_{\mathrm{R}}\end{cases} \tag{97}$$

Перепишем условия (97) в виде:

$$\begin{cases}N\mathbf{q}_{\mathbf{L}} = \mathbf{q}_{\mathbf{L}}\\ \mathbf{q}_{\mathbf{R}}\overline{N} = \mathbf{q}_{\mathbf{R}}\end{cases} \tag{98}$$

Формулы (98) означают, что квазиединица N служит левой единицей для класса подобия $\mathbf{q}_{\mathrm{L}}$, а $\overline{N}$ служит правой единицей для класса подобия $\mathbf{q}_{\mathrm{R}}$.

Сделаем в первом из уравнений (98) замену N на $\mathbf{u}_{\mathbf{L}}\mathbf{q}_{\mathbf{R}}$: $\mathbf{u}_{\mathbf{L}}\mathbf{q}_{\mathbf{R}}\mathbf{q}_{\mathbf{L}} = \mathbf{q}_{\mathbf{L}}$ **.** Умножим последнее равенство на $\mathbf{u}_{\mathbf{R}}$ слева: $\mathbf{u}_{\mathbf{R}}\mathbf{u}_{\mathbf{L}}\mathbf{q}_{\mathbf{R}}\mathbf{q}_{\mathbf{L}} = \mathbf{u}_{\mathbf{R}}\mathbf{q}_{\mathbf{L}}$. Замечаем, что $\mathbf{q}_{\mathbf{R}}\mathbf{q}_{\mathbf{L}} = \mathbf{u}_{\mathbf{R}}\mathbf{q}_{\mathbf{L}} = \overline{N}$. Тогда $\mathbf{u}_{\mathbf{R}}\mathbf{u}_{\mathbf{L}}\overline{N} = \overline{N}$. Применяя правило (22), получим: $\mathbf{u}_{\mathbf{R}}\mathbf{u}_{\mathbf{L}} = I$, откуда вытекает равенство левого и правого единичных векторов в разложении произвольной квазиединицы:

$$N:\ \mathbf{u}_{\mathbf{L}} = \mathbf{u}_{\mathbf{R}} \tag{99}$$

Исходя из (99) разложение квазиединицы можно переписать в виде:

$$N = \mathbf{q}_{\mathbf{L}}\mathbf{q}_{\mathbf{R}} = \mathbf{q}_{\mathbf{L}}\mathbf{u} = \mathbf{u}\mathbf{q}_{\mathbf{R}}, \tag{100}$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathbf{L}} = \mathbf{u}_{\mathbf{R}}$.

Из определения скалярного произведения (91) и из (97) следует:

$$(\mathbf{q_L} \cdot \mathbf{u}) = (\mathbf{q_R} \cdot \mathbf{u}) = I \qquad (101)$$

Лемма 12. *Каждый смешанный нулькватернион подобен некоторой квазиединице.*

$$\forall \mathcal{N}\ \exists s, N : \mathcal{N} = sN \qquad (102)$$

Доказательство: Применяя формулы (68) и (91) получим следующую цепочку следствий: $\mathcal{N} = \mathbf{q_L q_R} \ \Rightarrow\ \mathbf{q_L q_R q_L} = s\mathbf{q_L} \ \Rightarrow\ \mathbf{q_L q_R q_L q_R} = s\mathbf{q_L q_R} \ \Rightarrow\ \mathcal{N}^2 = s\mathcal{N}$. Отсюда следует, что искомая квазиединица имеет вид: $N = s^{-1}\mathcal{N}$ $\boxdot$

Из Леммы 12 и свойства квазиединиц (99) непосредственно следует теорема:

Теорема 3. *Для произвольного смешанного нулькватерниона выполняется следующее правило симметрии:*

$$\mathcal{N} = \mathbf{q}_L \mathbf{v}_R = \mathbf{v}_L \mathbf{q}_R \Rightarrow \mathbf{v}_L \sim \mathbf{v}_R\,, \qquad (103)$$

где $\mathbf{v}_\mathrm{L}$ *и* $\mathbf{v}_\mathrm{R}$ *– конечные вектора.*

Если вспомнить (62), то из этой теоремы следует существование и единственность такого представления произвольного нулькватерниона:

$$\mathcal{N} = \mathbf{q}_L \mathbf{u} = \mathbf{u} \mathbf{q}_R\,, \qquad (104)$$

где $\mathbf{u}$ – некоторый единичный вектор.

В линейной алгебре роль квазиединиц играют однородные нулькватернионы [1].

Комплексное сопряжение

На пространстве кватернионов введём операцию комплексного сопряжения, которая каждому кватерниону Q ставит во взаимно-однозначное соответствие некоторый другой кватернион Q^*. Операция комплексного сопряжения симметрична: $Q_2 = Q_1^* \Leftrightarrow Q_1 = Q_2^*$. По аналогии с кватернионным сопряжением (41) потребуем следующее правило взятия комплексного сопряжения от произведения кватернионов:

$$\forall Q_1, Q_2:\ \ (Q_1 Q_2)^* = Q_2^* Q_1^* \qquad (105)$$

По индукции правило (105) распространяется на произвольное количество сомножителей:

$$\forall Q_1, Q_2, \dots, Q_n:\ \ (Q_1 Q_2 \dots Q_n)^* = Q_n^* \dots Q_2^* Q_1^*, \quad n \geq 1 \qquad (106)$$

Кватернион, комплексное сопряжение которого совпадает с ним самим, называется *вещественным*:

$$Q^* = Q \Leftrightarrow Q = Re \tag{107}$$

Из (105) следует, что кватернион, представляющий собой произведение комплексно сопряжённых друг другу кватернионов, вещественен:

$$\forall Q: QQ^* = Re \tag{108}$$

Кватернион, комплексное сопряжение которого является кватернионом, противоположным ему самому, называется *мнимым*:

$$Q^* = -Q \Leftrightarrow Q = Im \tag{109}$$

Из (54) непосредственно следует, что никакой кватернион не может быть одновременно вещественным и мнимым:

$$Q = Re \Rightarrow Q \neq Im \tag{110}$$
$$Q = Im \Rightarrow Q \neq Re$$

По аналогии с кватернионным сопряжением мы будем требовать сохранения типа кватерниона при его комплексном сопряжении:

$$\forall Q: T(Q^*) = T(Q) \tag{111}$$

Прибегая к правилам (22), (23) и (105) легко убедится в том, что как единица, так и отрицательная единица вещественны:

$$I, -I = Re \tag{112}$$

Из (112) прямо следует, что если некоторый кватернион вещественен или мним, то и противоположный ему кватернион также будет вещественным или мнимым соответственно:

$$Q = Re \Leftrightarrow -Q = Re \tag{113}$$

$$Q = Im \Leftrightarrow -Q = Im$$

Произведение вещественных кватернионов не обязано быть вещественным. Более того, произведение двух ортогональных вещественных векторов представляет собою мнимый вектор:

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} = Re,\ \mathbf{u} \doteq \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{uv} = \mathbf{w} = Im \tag{114}$$

Действительно, пусть $\mathbf{uv} = \mathbf{w}$. Тогда, $\mathbf{w}^* = (\mathbf{uv})^* = \mathbf{v}^*\mathbf{u}^* = \mathbf{vu} = -\mathbf{uv} = -\mathbf{w} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w} = Im.$ Здесь мы прибегли к Лемме 6, согласно которой любые два взаимно ортогональных вектора обязательно антикоммутативны: $\mathbf{u} \doteq \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. Точно так же показывается, что и произведение двух ортогональных мнимых векторов мнимо:

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} = Im,\ \mathbf{u} \doteq \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{uv} = \mathbf{w} = Im \tag{115}$$

Если же в некотором парном произведении ортогональных векторов один из этих векторов вещественный, а другой мнимый, то их произведение вещественно:

$$\mathbf{u} = Re, \mathbf{v} = Im,\ \mathbf{u} \doteq \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{uv} = \mathbf{w} = Re \tag{116}$$

Следующая аксиома дополняет постулированные выше свойства скаляров (Аксиома 5) новым свойством, связанным с операцией комплексного сопряжения.

Аксиома 16 (корень по модулю). *Для уравнения*

$$ss^* = \sigma,\ \ s, \sigma \in S,\ \ \sigma = Re \tag{117}$$

всегда существует по крайней мере одно решение для s. Назовём это решение "корень по модулю" от вещественного скаляра σ:

$$s = \sqrt[*]{\sigma} \tag{118}$$

Замечание: Аксиома 16 не предполагает однозначной определённости s.

Конкретизируем вид комплексного сопряжения для нормированных нульвекторов. Рассмотрим представление (93) для некоторой вещественной квазиединицы N, $N = N^*$:

$$N = \mathbf{q}_\mathrm{L}\mathbf{q}_\mathrm{R} = \mathbf{q}_\mathrm{L}\mathbf{u}_\mathrm{R} = \mathbf{u}_\mathrm{L}\mathbf{q}_\mathrm{R} \tag{119}$$

По определению, будем считать, что нульвекторы $\mathbf{q}_\mathrm{L}$ и $\mathbf{q}_\mathrm{R}$ и единичные векторы $\mathbf{u_L}$ и $\mathbf{u_R}$**,** участвующие в разложении (119) комплексно сопряжены друг другу в своих парах:

$$\begin{cases}\mathbf{q}_\mathrm{R} = \mathbf{q}_\mathrm{L}^* \\ \mathbf{u_L} = \mathbf{u_R^*}\end{cases} \tag{120}$$

Но, как мы выяснили выше в (99), $\mathbf{u_L} = \mathbf{u_R} \equiv \mathbf{u}\ \ \Rightarrow\ \ \mathbf{u} = \mathbf{u}^*\ \ \Leftrightarrow\ \ \mathbf{u} = Re$**.** Получается, что единичный вектор разложения вещественной квазиединицы тоже вещественен. Обозначим $\mathbf{q}_\mathrm{L} = \mathbf{q}$**,** тогда $\mathbf{q}_\mathrm{R} = \mathbf{q}^*$, и разложение вещественной квазиединицы записывается в виде:

$$N = \mathbf{q}\mathbf{q}^* = \mathbf{q}\mathbf{u} = \mathbf{u}\mathbf{q}^*,\ \ N = Re, \mathbf{u} = Re, \mathbf{u}^2 = I \tag{121}$$

Заметим, что в нашем определении комплексного сопряжения мы обошлись без введения мнимой единицы, которая появится далее в статье. Кроме того, как мы убедились, операция комплексного сопряжения и связанные с ней свойства вещественности и мнимости векторов тесно связаны с их свойствами ортогональности и антикоммутативности.

Свойства моновекторов

Рассмотрим некоторый моновектор $\mathbf{m}$ и нульвектор $\mathbf{q}$, ортогональные друг другу (80): $\mathbf{m} \doteq \mathbf{q}$, $\mathbf{mq} = s\mathbf{q}$**.** Возьмём комплексное сопряжение от обеих сторон последнего тождества: $\mathbf{q}^*\mathbf{m}^* = s^*\mathbf{q}^*$. Это означает, что $\mathbf{m}^* \doteq \mathbf{q}^*$**,** т.е. $\mathbf{m}^*$ есть моновектор-продольник для $\mathbf{q}^*$**.** Примем в качестве аксиомы, что моновекторы-продольники для комплексно сопряжённых нульвекторов $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}^*$ всегда одинаковы по направлению, т.е. подобны**.**

Аксиома 17. *Вектор сопряжённый данному моновектору* $\mathbf{m}$ *подобен ему:*

$$\forall\mathbf{m}: \mathbf{m}^* \sim \mathbf{m} \tag{122}$$

Содержание этой аксиомы состоит в том, что комплексно сопряжённые нульвекторы обладают одним и тем же продольным направлением.

Лемма 13. *Произвольный моновектор* $\mathbf{m}$ *подобен некоторому вещественному единичному вектору:*

$$\forall \mathbf{m}\ \exists \mathbf{r},\ \mathbf{r} = Re, \mathbf{r}^2 = I:\ \mathbf{m} \sim \mathbf{r} \Leftrightarrow\ \mathbf{m} = s\mathbf{r} \qquad (123)$$

В (123) $\mathbf{r}$ есть некоторый вещественный единичный вектор. Согласно определению вещественности (108) $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*$.

Доказательство: Наша задача состоит в том, чтобы для данного $\mathbf{m}$ определить соответствующие s и $\mathbf{r}$ в формуле (123). Согласно (122) $\mathbf{m}^*\mathbf{m} = \sigma, \sigma \in S$, т.е. σ некоторый вещественный скаляр. Из (123) получим $\mathbf{m}^*\mathbf{m} = ss^*\mathbf{r}^2\ \Rightarrow\ \sigma\ \Rightarrow\ ss^* = \sigma$. По Аксиоме 13 для последнего уравнения всегда найдётся решение: $s = \sqrt[*]{\sigma}$. После этого находится $\mathbf{r}$, удовлетворяющее (123) : $\mathbf{r} = \mathbf{m}s^{-1}$ $\boxdot$

Следующая аксиома является обращением Леммы 13.

> **Аксиома 18**. *Каждый вещественный вектор является моновектором*:
>
> $$\forall \mathbf{r}, \mathbf{r} = Re: \mathbf{r} = \mathbf{m} \qquad (124)$$

Совместно Лемма 13 и Аксиома 18 устанавливают взаимно-однозначное соответствие с т.д.п. между моновекторами и вещественными векторами. Подобное же соответствие может быть установлено между моновекторами и мнимыми векторами.

Векторные циклы

Три не подобных друг другу конечных вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ образуют *цикл* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, если:

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} \qquad (125)$$

Если все три вектора цикла единичные, то цикл называется *нормированным*. Очевидно, что тройка взаимно ортогональных векторов (75) образует цикл:

$$\mathbf{a} \doteq \mathbf{b} \doteq \mathbf{c}\ \Rightarrow \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \qquad (126)$$

Назовём такой цикл *сильным*.

Аналогично данному в (75) определению взаимной ортогональности трёх конечных векторов можно ввести определение взаимной антикоммутативности трёх конечных векторов. Три вектора $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ являются *взаимно антикоммутативными* $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ если:

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v},\ \ \mathbf{v} \perp \mathbf{w},\ \ \mathbf{w} \perp \mathbf{u} \qquad (127)$$

Лемма 14. *Три взаимно антикоммутативных конечных вектора образуют цикл*:

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \perp \mathbf{c} \ \Rightarrow \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \tag{128}$$

Доказательство: Раскроем условие взаимной антикоммутативности $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \perp \mathbf{c}$:

$$\begin{cases} \mathbf{ab} = -\mathbf{ba} \\ \mathbf{bc} = -\mathbf{cb} \\ \mathbf{ca} = -\mathbf{ac} \end{cases} \tag{129}$$

Применим (129) его к тройному произведению:

$$\mathbf{abc} = (\mathbf{ab})\mathbf{c} = -(\mathbf{ba})\mathbf{c} = -\mathbf{bac} = -\mathbf{b}(\mathbf{ac}) = \mathbf{bca}$$

Скобками показано выделение произведений пар векторов, заменяемых в соответствии с (129). Аналогично показывается, что $\mathbf{abc} = \mathbf{cab}$ ⊡

Цикл (128) называется *слабым циклом*. Лемма 14 указывает на то, что в общем случае цикл не требует взаимной ортогональности входящих в него векторов. Оказывается достаточным более слабого условия их взаимной антикоммутативности.

Нелинейная алгебра

Как мы видели выше, существенные характеристики объектов построенной нами общей алгебры могут иметь т.н. сильный или слабый характер. Сведём эти характеристики в следующей таблице.

Свойство / Тип	*Сильный*	*Слабый*
Параллельность	$\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$	$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$
Ортогональность	$\mathbf{a} \doteq \mathbf{b}$	$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$
Цикличность	$\mathbf{a} \doteq \mathbf{b} \doteq \mathbf{c}$	$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \perp \mathbf{c}$

Можно сделать следующий важный вывод. Если алгебра обладает только сильными характеристиками, то она является линейной. Если же алгебра имеет слабые характеристики, то она является нелинейной. Таким образом, **сущность перехода от линейных к нелинейным представлениям заключается в переходе от статических геометрических представлений к операционным.**

В настоящем исследовании мы приводим общие принципы, согласно которым может быть построена та или иная частная алгебра обобщённых кватернионов. Линейным вариантом такой алгебры служит известная алгебра бикватернионов. Конкретная же реализация нелинейной алгебры пока отсутствует и ждёт своего воплощения.

Вместо заключения

Итак, нами построена аксиоматика пространства обобщённых векторов и кватернионов. На её основе выяснены основные свойства этих математических объектов и доказано несколько важных математических утверждений. Среди них теорема о трёхмерности векторной оболочки и теорема о неделимости нульвекторов. Получен общий вид факторизации нулькватерниона смешанного типа.

В качестве базовой операции нашей алгебры мы использовали умножение. Примечательно, что всё построение нашей алгебры в её изначальном виде обошлось без введения операции сложения, которая вторична по отношению к умножению. Операция сложения будет введена нами далее как раз на основе операции умножения.

Наша теория предлагает принципиально новый взгляд на столь привычные понятия как пространство, векторы, кватернионы, комплексность, параллельность, ортогональность, размерность. В нелинейной алгебре такие геометрические понятия как параллельность и ортогональность приобретают операторный смысл коммутативности и антикоммутативности векторов. Особое место в полученной алгебраической системе занимают векторные циклы – тройки циклически связанных друг с другом векторов.

В развиваемой нами теории обобщённых кватернионов в ином свете представляется и понятие комплексности. Вещественной либо мнимой величиной с точностью до класса подобия является моновектор, тогда как чисто комплексной величиной оказывается нульвектор. Между этими двумя типами объектов устанавливается связь геометрического вида: продольник-поперечник. Геометрически этой паре отвечает плоскость (поперечник) и её нормаль (продольник),

Дальнейшее развитие теории нелинейных пространств обобщённых кватернионов мы видим по следующим направлениям:

1) Конкретная реализация нелинейной алгебры.
2) Возможность описания неевклидовых геометрий средствами нелинейной алгебры.
3) Описание двумерных векторных многообразий типа плоскости и сферы.
4) Нульмерные циклы.
5) Внутреннее и внешнее кватернионные пространства одной векторной оболочки.
6) Внутренний неассоциативный тип умножения.
7) Связь геометрии и операторов.
8) Экспонента. Функции.
9) Операции сложения и вычитания.
10) Теория пространства-времени на основе лоренцевых операторов движения.

Литература

1. С.Я. Котковский. «Нульвекторная алгебра». Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2(23) 12, с.159-172. 2015

2. С.Я. Котковский. «Бивекторная алгебра». viXra:2108.0015, 2021.

3. Sergey Kotkovskiy. "Nonlinear Maxwell equations". arXiv:2403.00836 [physics.class-ph], 2024

Котковский Сергей Яковлевич
s_kotkovsky at mail ru
25 апреля 2026 г.