below

THE TWIN PARADOX
EXPLAINED WITH THE ACCELERATION

*Leonardo **Rubino***
April 2026

Abstract: the twin paradox explained with the acceleration.

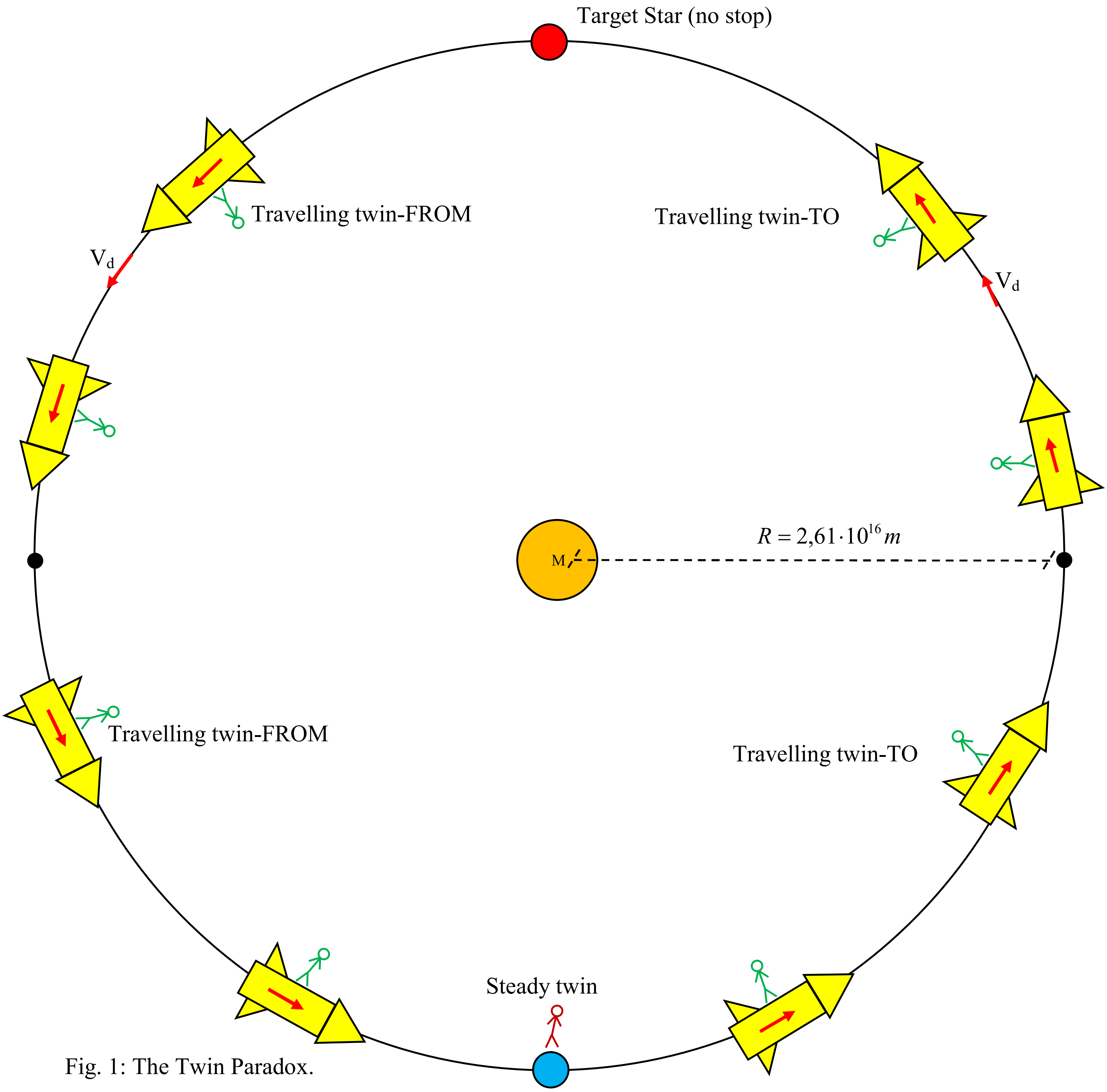

Fig. 1: The Twin Paradox.

Fig. 1 shows the typical return flight of the twin paradox, from the Earth up to a target star and back.
We know that the relation between the travelling twin (spacecraft) time and the steady twin one is:

$$t_{spacecraft} = t_{s-c} = t_{Earth}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\ . \qquad (1)$$

The halving speed, as an example, is V_d=260.000.000m/s ; with such a speed, when for the twin on Earth 20 years elapse, then the travelling twin counts just 10:

$$t_{s-c} = t_{Earth}\sqrt{1-\frac{V_d^2}{c^2}} = 20\sqrt{1-\frac{260.000.000^2}{299.792.458^2}} \cong 20\cdot\frac{1}{2} = 10\,years\ . \qquad (2)$$

After this, **we have to reconsider the fact that in the special relativity we do not have any privileged (inertial) reference frames, as to say that if two twins are in relative motion with each other, then, when they meet, no one can claim he is the only one who is really moving (and that conversely the other one is steady), just because the motion is relative. It follows that both of them can claim to be the younger twin, so leading to a paradox.**

What follows from all that is that the comparison between the ages of those two twins makes sense only if:

A-they are twins, indeed, so at least once in their lives they met and did it in the same place in space (that's obvious, as they are supposed to be twins) and then one of them, by accelerating, started his trip;

B-the travelling twin, in order to allow any age comparison at the end of the trip, must decide to go back to the steady twin and compare the ages indeed, and so doing he will decelerate, turn around and reaccelerate.
Of course in the situation of Fig. 1 **we do not have a perfectly symmetric system**, as a system is inertial (that of the steady twin) and the other isn't, that is that of the travelling twin, who is undergoing accelerations. Therefore, **the younger twin must be only the one who accelerated**. At last, we remind the equivalence between an acceleration and a gravitational field, as we were taught by Einstein, so that an acceleration can cancel a gravitational field, as well as it happens into the Einstein's Elevator which, being it free falling, makes those who are inside not to feel their own weight pushing over the floor of the elevator itself.
Out of simplicity, in Fig. 1, we have chosen a perfectly round path, so that we do not have any combination of accelerations and decelerations (to and fro), but rather a simple and constant centrifugal acceleration; in practice, it doesn't make any difference, except for having easier calculations.
As, in the current example, the twins part after acknowledging that the travelling twin will be away (for the Earth system) for a time t_{Earth}=20years at the speed V_d=260.000.000m/s and the path in the agreement is that of the circumference 2πR (towards the target star and back), then we have that:

$$2\pi R = V_d\cdot t_{Earth}\ \ \rightarrow\ \ R = \frac{V_d\cdot t_{Earth}}{2\pi} = \frac{(2{,}6\cdot 10^8)\cdot(20\cdot 365\cdot 24\cdot 3600)}{2\pi} = 2{,}61\cdot 10^{16}m\ .$$

Now, under a gravitational point of view (that is of the accelerations), orbiting at a velocity V_d=260.000.000m/s with a radius of curvature $R = 2{,}61\cdot 10^{16}m$ means to orbit around a mass M such that, obviously: $V_d = \sqrt{\frac{GM}{R}}$, so: $M = \frac{V_d^2 R}{G} = 2{,}64\cdot 10^{43}kg \cong 1{,}32\cdot 10^{13}M_{Sun}$.

Now, in considering what the General Relativity tells us, so considering accelerations and decelerations (that can have, as we said, a gravitational correspondence), we use the (A.2) in the Appendix, according to which: $\boxed{t = t_0 e^{\frac{-GM}{c^2 r}}}$, so:

$$t_{s-c} = t_{Earth} e^{\frac{-GM}{c^2 R}} = t_{Earth} e^{\frac{-V_d^2}{c^2}} = \boxed{20 years} \cdot e^{-0,75} \cong 20 \cdot 0,4724 \cong 9,448 years \approx \boxed{10 years}$$

so, the travelling twin is actually younger, as expected, about half the 20years of the steady twin, so he is younger about 10years, indeed, **also after using the (gravitational) reasoning with the accelerations!**
Or, if we do not want to have a "travelling" twin who orbits and then moves, so pushing someone to claim that then we would have to consider not only the gravitational time dilation, but also that given by the motion, then we can also imagine the spacecraft which floats steadily for 20 years at a distance R by the central body and, of course, with engines on, so that they, by pushing outwards, make the spacecraft not to fall back towards M and, in the end, keep a distance R; and so, after the 20 years claimed from the Earth, on the spacecraft just 10 will be elapsed, due to the gravitational acceleration (or to the gravitational field, if you like more).

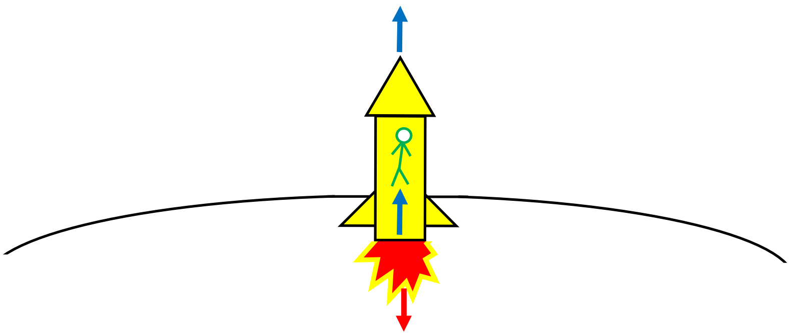

Fig. 2: Spacecraft steady for 20 (terrestrial) years (and so with engines on).

APPENDIX: Gravity slows down the time

Gravity slows down the time! On a mountain time elapses faster than down in the valley. Of course, on the Earth, the difference is imperceptible, but on a neutron star or in a black hole, that effect is very strong.

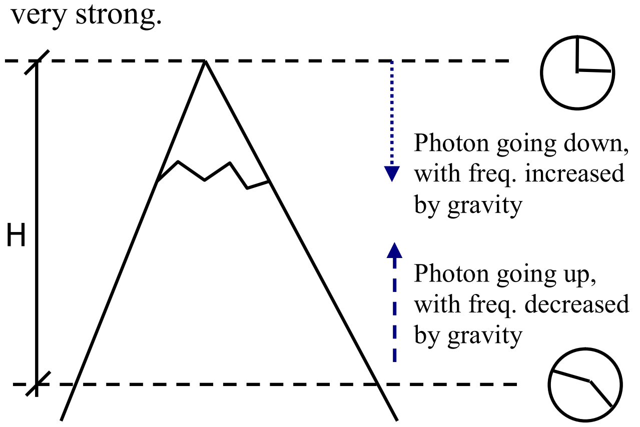

Fig. A.1: Mountain, gravity and time.

$\Delta E = m_0 g H$ (delta energy from the level difference); $\Delta E = h \Delta \nu$ (delta energy due to the freq. decrease of the photon). From them: $\Delta \nu = m_0 g H / h$. For a photon, $E = h\nu$, but in relativity: $E = m_0 c^2$, from which, for a photon: $m_0 = h\nu/c^2$ and so, for $\Delta\nu : \Delta\nu = \nu g H/c^2$ and as time is the reciprocal of the frequency, we have: $\Delta\nu/\nu = \Delta t/t$:

(in fact: t=1/f $\rightarrow \frac{d}{dt}t = 1 = \frac{d}{dt}(\frac{1}{f}) = \frac{df}{dt}\frac{d}{df}(\frac{1}{f}) = \frac{df}{dt}(-\frac{1}{f^2}) \rightarrow$

$\rightarrow 1 = \left|\frac{df}{dt}(\frac{1}{f^2})\right| \rightarrow \frac{df}{f} = dt \cdot f = dt\frac{1}{t} \rightarrow \frac{df}{f} = \frac{dt}{t} \rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta t}{t}$) and so:

$$\Delta t = \frac{gH}{c^2}t \quad . \tag{A.1}$$

Therefore, over a time t, we have a slow down Δt due to gravity! We know that the escape velocity of a celestial body whose mass is M and radius R is: $V_f = \sqrt{2GM/R}$, where the escape velocity V_f is $\sqrt{2}$ times the orbital velocity $V_{orbit.}$, with same mass and radius ($V_f = \sqrt{2}\,V_{orbit.}$); in fact, as we all know, the centrifugal force a_C is: $a_C = \frac{V^2_{orbit.}}{R}$, with a corresponding force (over a mass m) which is: $F_C = ma_C = m\frac{V^2_{orbit.}}{R}$ and such a force must match the gravitational one, generated by a central mass M: $m\frac{V^2_{orbit.}}{R} = \frac{GMm}{R^2}$, so: $V_{orbit.} = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}}V_f$.

If on that body an object is cast vertically with the escape velocity, it will quit the gravitational field of that celestial body and will go towards the infinite, without falling down anymore.
A black hole is a body so compressed (big M and small R) that the escape velocity on its surface reaches the speed of light and so not even the light can escape, from which the name of black hole; moreover, for what above said, we can say that in a black hole time is approximately stopped!

Now, jumping back to the time slowing, for the (A.1): $\Delta t = \frac{gH}{c^2}t$, which can be seen as: $dt = \frac{gdr}{c^2}t$ and considering that $|g| = \frac{GM}{r^2}$, it follows that: $dt = t\frac{GM}{c^2r^2}dr$, that is:

$\frac{dt}{t} = \frac{GM}{c^2}\frac{dr}{r^2} \rightarrow \int\frac{dt}{t} = \frac{GM}{c^2}\int\frac{dr}{r^2} \rightarrow \ln t = -\frac{GM}{c^2 r} + k \rightarrow t = k \cdot e^{\frac{-GM}{c^2 r}} \rightarrow$ and as:

$(r = \infty >>> t = t_0) \rightarrow$ then:

$$t = t_0 e^{\frac{-GM}{c^2 r}} \quad . \tag{A.2}$$

Then, if $\frac{GM}{c^2 r}$ is very small (V<<c) and as: $(e^{-x} \approx 1 - x) \rightarrow t = t_0(1 - \frac{GM}{c^2 r}) \rightarrow$

and, moreover, being that: $(\sqrt{(1-x)} \approx 1 - \frac{1}{2}x)$, then: $\rightarrow t = t_0\sqrt{(1 - \frac{2GM}{c^2 r})} = t_0\sqrt{(1 - \frac{V_f^2}{c^2})}$.

IL PARADOSSO DEI GEMELLI
SPIEGATO CON L'ACCELERAZIONE

Leonardo ***Rubino***

Aprile 2026

Abstract: il paradosso dei gemelli spiegato con l'accelerazione.

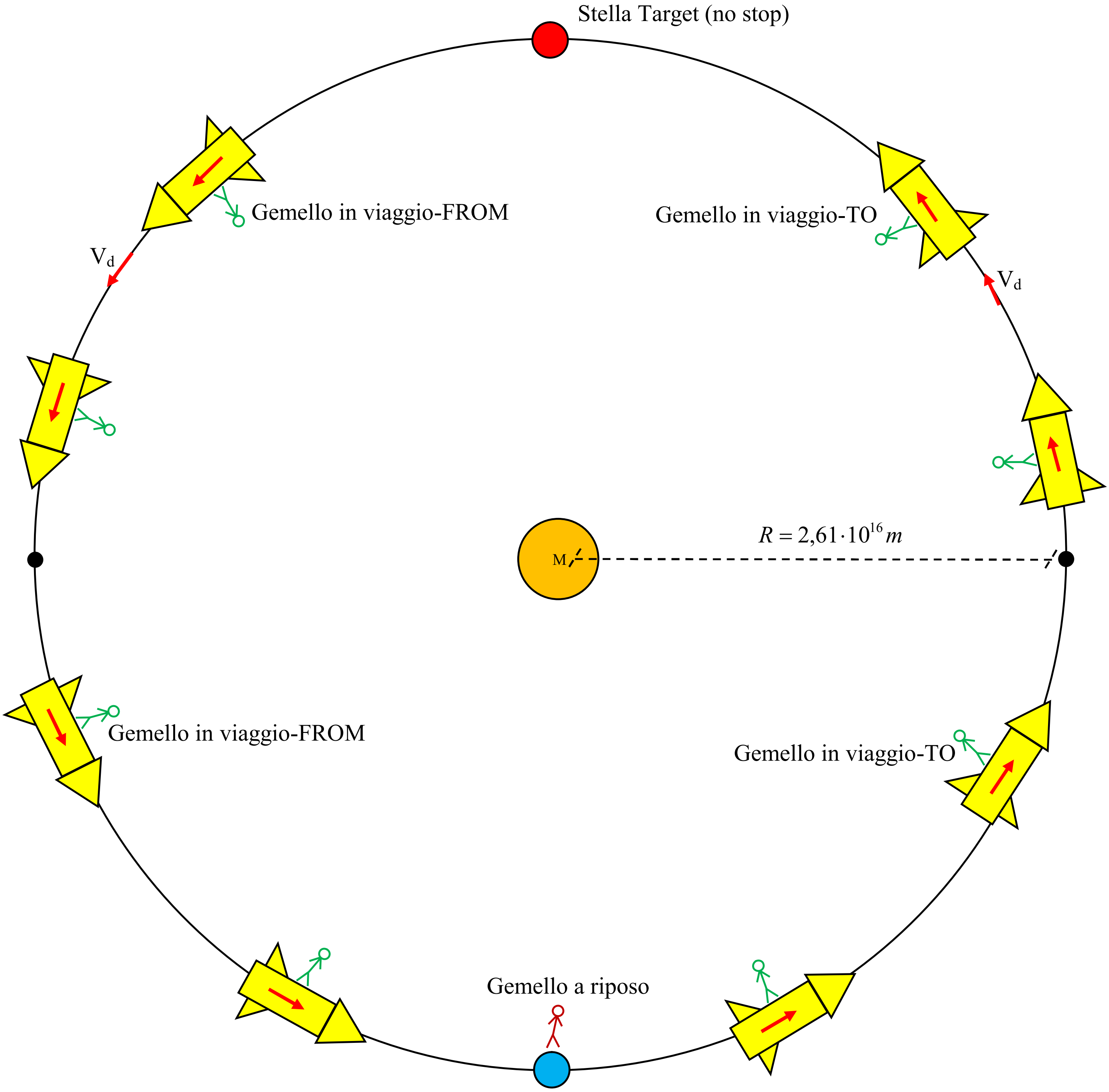

Fig. 1: Paradosso dei gemelli.

La Fig. 1 mostra il tipico viaggio di andata e ritorno del paradosso dei gemelli, dalla Terra verso una stella target.
Sappiamo che la relazione tra tempo del gemello in viaggio (spacecraft) e tempo del gemello statico (Earth) è:

$$t_{spacecraft} = t_{s-c} = t_{Earth}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \, . \tag{1}$$

La velocità di dimezzamento, ad esempio, è V_d=260.000.000m/s ; con una tal velocità, quando, ad esempio, per il gemello sulla Terra sono passati 20 anni, quello in viaggio ne conta solo 10:

$$t_{s-c} = t_{Earth}\sqrt{1-\frac{V_d^2}{c^2}} = 20\sqrt{1-\frac{260.000.000^2}{299.792.458^2}} \cong 20\cdot\frac{1}{2} = 10 anni \, . \tag{2}$$

Detto ciò, **dobbiamo riconsiderare un attimo il fatto che in relatività ristretta non vi sono sistemi di riferimento (inerziali) privilegiati, nel senso che se due gemelli sono in moto relativo l'uno rispetto all'altro, allora, quando si incrociano, nessuno dei due può sostenere che egli stesso sia colui che veramente si muove (e che invece l'altro è fermo), proprio perché il moto è relativo. Segue che ognuno dei due può sostenere di essere quello più giovane, giungendo così al paradosso.**

Il fatto è che, innanzitutto, il confronto tra le età dei due ha senso solo se:

A-i due sono appunto gemelli, dunque almeno una volta si sono trovati insieme nello stesso punto dello spazio (ovvio, in quanto sono gemelli per supposizione) e poi uno dei due, accelerando, si è messo in viaggio;

B-il gemello viaggiatore, per far sussistere il confronto dell'età di fine viaggio, deve decidere di ritornare dal gemello statico e confrontarsi, così decelerando, virando e riaccelerando.

Va da sé che nel caso di Fig. 1 **non siamo in un sistema perfettamente simmetrico**, poiché un sistema è inerziale (quello del gemello statico) e l'altro no, ossia quello del gemello viaggiatore, che sperimenta accelerazioni. Dunque, **il gemello più giovane deve essere solo quello che ha accelerato**. Per ultimo, ribadiamo l'equivalenza tra una accelerazione ed un campo gravitazionale, come insegnatoci da Einstein, tanto che una accelerazione può annullare un campo gravirazionale, come avviene nell'Ascensore di Einstein che, essendo in caduta libera, fa sì che chi sta dentro l'ascensore non avverta più il proprio peso che grava sul pavimento dell'ascensore stesso.
Noi, in Fig. 1, per semplicità, abbiamo scelto un percorso perfettamente circolare, in modo tale che non ci sia una successione di accelerazioni e decelerazioni (andata e ritorno), ma una semplice e costante accelerazione centrifuga; nulla cambia, nella pratica, se non nel vantaggio di avere calcoli più semplici.
Visto che, nell'esempio in corso, i due gemelli si salutano, alla partenza, sapendo che il gemello viaggiatore starà via (per il sistema Terra) un tempo t_{Earth}=20anni alla velocità V_d=260.000.000m/s ed il percorso concordato è quello della circonferenza 2πR (verso la stella target e ritorno), allora si ha che:

$$2\pi R = V_d \cdot t_{Earth} \;\; \rightarrow \;\; R = \frac{V_d \cdot t_{Earth}}{2\pi} = \frac{(2,6\cdot 10^8)\cdot(20\cdot 365\cdot 24\cdot 3600)}{2\pi} = 2,61\cdot 10^{16} m \, .$$

Adesso, dal punto di vista gravitazionale (ossia delle accelerazioni), ruotare a velocità V_d=260.000.000m/s con un raggio di curvatura $R = 2,61\cdot 10^{16} m$ equivale ad orbitare intorno ad una massa M tale che, banalmente: $V_d = \sqrt{\frac{GM}{R}}$, da cui: $M = \frac{V_d^2 R}{G} = 2,64\cdot 10^{43} kg \cong 1,32\cdot 10^{13} M_{Sun}$.

Considerando allora quello che ci dice la Relatività Generale, ossia considerando accelerazioni e decelerazioni (che, come abbiamo visto, possono avere un equivalente gravitazionale), ci avvaliamo della (A.2) in Appendice, secondo cui: $\boxed{t = t_0 e^{\frac{-GM}{c^2 r}}}$, da cui:

$$t_{s-c} = t_{Earth} e^{\frac{-GM}{c^2 R}} = t_{Earth} e^{\frac{-V_d^2}{c^2}} = \boxed{20anni} \cdot e^{-0,75} \cong 20 \cdot 0,4724 \cong 9,448anni \approx \boxed{10anni}.$$

dacché, effettivamente, il gemello in viaggio è più giovane, come atteso, della metà dei 20anni del gemello stazionario, ossia più giovane di 10anni appunto, **col ragionamento (gravitazionale) delle accelerazioni!**

Oppure, se non vogliamo considerare il gemello viaggiatore che orbita e dunque che si muove, spingendo qualcuno ad osservare che allora bisogna contare sia la dilatazione del tempo gravitazionale che quella data dalla velocità, allora possiamo anche immaginare l'astronave ferma per 20 anni a distanza R dal corpo centrale e, ovviamente, con i motori accesi che spingono verso l'esterno, per non farla ricadere verso M e mantenere dunque la distanza R, e così, dopo i 20 anni contati da Terra, sull'astronave ne saranno trascorsi solo 10, a causa dell'accelerazione gravitazionale (o del campo gravitazionale, se si preferisce).

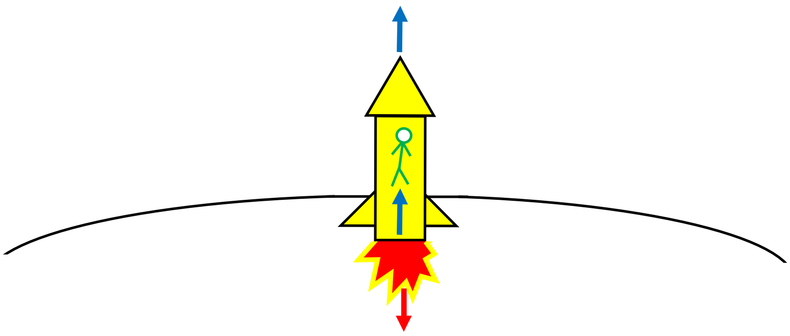

Fig. 2: Astronave ferma (e, dunque, con i motori accesi).

APPENDICE: La gravità rallenta il tempo

La gravità rallenta il tempo! In montagna il tempo scorre più velocemente che a valle. Ovviamente, sulla Terra, la differenza è impercettibile, ma su una stella di neutroni, o in un buco nero, l'effetto è intensissimo.

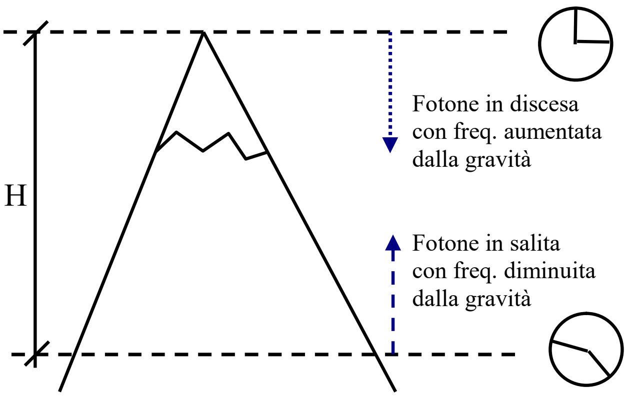

Fig. A.1: Montagna, gravità e tempo.

$\Delta E = m_0 g H$ (delta energia del salto di quota); $\Delta E = h\Delta\nu$ (delta energia del calo di frequenza di un fotone). Dalle due: $\Delta\nu = m_0 g H / h$. Per un fotone, $E = h\nu$, ma in relatività si ha che: $E = m_0 c^2$, da cui, per un fotone: $m_0 = h\nu / c^2$ e dunque, per $\Delta\nu$: $\Delta\nu = \nu g H / c^2$ ed essendo il tempo l'inverso della frequenza, si ha: $\Delta\nu/\nu = \Delta t / t$ (infatti: t=1/f $\rightarrow \frac{d}{dt}t = 1 = \frac{d}{dt}(\frac{1}{f}) = \frac{df}{dt}\frac{d}{df}(\frac{1}{f}) = \frac{df}{dt}(-\frac{1}{f^2}) \rightarrow$

$\rightarrow 1 = \left|\frac{df}{dt}(\frac{1}{f^2})\right| \rightarrow \frac{df}{f} = dt \cdot f = dt\frac{1}{t} \rightarrow \frac{df}{f} = \frac{dt}{t} \rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta t}{t}$) e dunque:

$$\Delta t = \frac{gH}{c^2}t. \tag{A.1}$$

Dunque, su un tempo t, si ha un rallentamento Δt dato dalla gravità! Sappiamo che la velocità di fuga di un corpo celeste di massa M e raggio R vale: $V_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$, dove la velocità di fuga V_f è $\sqrt{2}$ volte la velocità orbitale $V_{orbit.}$, a parità di massa e raggio ($V_f = \sqrt{2}\, V_{orbit.}$); infatti, notoriamente, la forza centrifuga a_C vale: $a_C = \frac{V^2_{orbit.}}{R}$, con una corrispondente forza (su una massa m) pari a: $F_C = ma_C = m\frac{V^2_{orbit.}}{R}$ e tale forza deve equivalere a quella gravitazionale determinata da una massa centrale M: $m\frac{V^2_{orbit.}}{R} = \frac{GMm}{R^2}$, da cui: $V_{orbit.} = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}}V_f$.

Se su quel corpo celeste di massa M un oggetto viene lanciato verticalmente alla velocità di fuga, esso uscirà dal campo gravitazionale del corpo celeste ed andrà verso l'infinito, senza più ricadere. Un buco nero è un corpo così compresso (M grande ed R piccolo) che la velocità di fuga sulla sua superficie raggiunge il valore della velocità della luce e dunque neanche la luce vi sfugge, da cui il nome di buco nero; inoltre, per quanto detto sopra, si può affermare che in un buco nero il tempo è pressoché fermo!

Tornando al rallentamento, per la (A.1): $\Delta t = \frac{gH}{c^2}t$, che può essere interpretata come: $dt = \frac{gdr}{c^2}t$ e considerando che $|g| = \frac{GM}{r^2}$, segue che: $dt = t\frac{GM}{c^2r^2}dr$, ossia: $\frac{dt}{t} = \frac{GM}{c^2}\frac{dr}{r^2} \rightarrow \int\frac{dt}{t} = \frac{GM}{c^2}\int\frac{dr}{r^2} \rightarrow$

$\rightarrow \ln t = -\frac{GM}{c^2r} + k \rightarrow, \quad t = k \cdot e^{\frac{-GM}{c^2r}}$ e visto che: $(r = \infty >>> t = t_0) \rightarrow$

$$\boxed{t = t_0 e^{\frac{-GM}{c^2r}}} \qquad . \tag{A.2}$$

Se poi $\frac{GM}{c^2r}$ è molto piccolo (V<<c) , allora, dal momento che: $(e^{-x} \approx 1 - x) \rightarrow t = t_0(1 - \frac{GM}{c^2r}) \rightarrow$

ed essendo inoltre anche vero che: $(\sqrt{(1-x)} \approx 1 - \frac{1}{2}x)$, allora: $\rightarrow t = t_0\sqrt{(1 - \frac{2GM}{c^2r})} = t_0\sqrt{(1 - \frac{V_f^2}{c^2})}$.