用推迟势建立一个类似相对论的理论

段贤香

Dxx36732@163.com

摘要

这篇文章一个类似相对论的理论。这个理论从推迟势或多普勒效应公式的速度项出发，通过类比电磁场和引力场建立一个数学公式和相对论一样但是物理解释不同的理论。理论把引力场和电磁场类比，提出存在“质量场力”。这是一种平直时空下的有效理论框架，通过推迟势的多普勒权重修正，在不引入弯曲时空几何的前提下，重建了广义相对论在太阳系尺度上的主要可观测效应，并提供了全新的物理图像且预言无奇点。

关键词 推迟势，相对论，多普勒效应的速度项，水星进动，质量场力，引力场强度，电磁场强度

引言

引力磁性理论由来已久，但是，类比一直不太成功。要么就是依旧在 GR 框架下工作人，要么，存在各种相互矛盾不自洽的问题，比如“‘符号差别’：电荷有正负两种，同性相斥，异性相吸；质量则只正不负，虽然同性，却只吸不斥，仿照电磁理论，……，不幸的是，由于上述符号差别，由引力波带走的能量是负的，……”[1]。

一个认为引力场和电磁场不能类比的理由是，电荷有正电荷和负电荷，而质量只有正的，或引力只是吸引没有排斥。但是，负质量其实有人提出来， H.Bondi 在《广义相对论中的负质量》里已经提出了负质量概念:

(iii)惯性质量为正，引力质量为负。在此情况下，我们对所有非引力作用力表现出正常行为，但涉及此类质量及类型(i)质量的引力行为将遵循负库仑定律；即同性质量相互吸引，异性质量相互排斥。[2]

至于力没有排斥，其实也不是。仔细看牛顿力学，其实它存在两种力，一种是引力，另一种是质量互相排斥的力，它就是牛顿第二定律所描述的力。牛顿力学里的力也可以视为存在两种，即斥力和引力。“牛顿第二定律的力是‘斥力’，引力和牛顿第二定律的力是一对正反力，类似电荷的正负特性，……”，“引力场也存在‘斥力’或‘负质量’，因为，如果你把‘牛顿第二定律的 m 看作是‘正的质量’，那么万有引力的 m 就是‘负质量’”。[3]。

康德也认为存在斥力，“这些力可以是引力，也可以是排斥力（阻止一个物体进入其他物体占据的空间）。康德随后系统地提出了这一动力学观点，用这种排斥力的动力作用取代了诸如物体不可穿透性等概念。……”[4]。

把引力场和电磁场类比，早在 Oliver Heaviside 就开始了，把引力场和电磁场类比，就连相对论也这样做。“为此，有必要记住在完整广义相对论中也可以建立精确的引力电磁类比”**【5】：**

Oliver Heaviside 在 A GRAVITATIONAL AND ELECTROMAGNETIC ANALOGY 里就提出：

“Now, bearing in mind the successful manner in which Maxwell's localisation of electric and magnetic energy in his ether lends itself to theoretical reasoning, the suggestion is very natural that we should attempt to localise gravitational energy in a similar manner, its density to depend upon the square of the intensity of the force, especially because the law of the inverse squares is involved throughout”【6】

J. Lens 和 H. Thirring 的引力磁场也是引力源产生的。【7]，[8],[9]

论文里明确展示了旋转质量如何在其周围产生引力磁场并影响行星轨道运动。J. Lens 和 H. Thirring 认为是旋转的质量产生了引力磁场，也就是源产生了场。

布莱恩·希尔在《引力-电磁学：迈向质量起源统一理论的又一步 》一文里提出一个极类似本文的理论，它也是平直时空。但是，它依旧是把引力磁场看作是引力源的贡献（本文采用电磁学中的方程 2-8 将保持其‘原始’形式，系数 α 、 β 和 γ 保持不变，）【11】。作者在论文里修正了万有引力，得到引力磁场的力，也就是类似洛伦兹力磁场力，但他是通过改变质量的方式。与之不同的是，本文并不认为质量会变化，变化的是行星或受测试粒子运动导致它们自身感受到的引力场发生了变化，即产生了质量场。布莱恩·希尔的 mass induction（质量诱导）和本文的“质量场力”很相似，但是，它们不是一回事。

“方程 (2.33)：场的“散度”等于源电流”。【12】Zinoviev 明确地把引力中的速度相关修正项（也就是类似“引力磁场”或 gravitomagnetic 效应的部分）归结为源粒子（另一个粒子）产生的。）

Suvankar Paul “其中 J = (cĩ ，ji)是与电荷（ĩ ）和电流(j)密度相关的 4-矢量，即电磁场的源，”（第 2 页）【10】

Jefimenko 的思路：

Oleg D.Jefimenko 在其 2006 年的著作《Gravitation and Cogravitation》，将电磁学的中的 Jefimenko 方程引入引力场，但是，他是把公式第三项的加速度辐射项视作源的加速度【13】，这导致他计算的水星进动不符合天文观测。而我们也把等价的费曼公式引入引力场。区别在于，Jefimenko 把方程的第三项看作是引力源的加速度而忽略了它，而我们认为第三项加速度是相对加速度，即水星和太阳之间的相对加速度。

Ummarino 和 Gallerati 的认为引力磁场来自引力源，‘‘方程 (7) 或 (35d)’’【14】。

Brian Hills 论文的第 6 页公式(8)直接证明了“引力磁场 B 来自引力源的运动质量电流（J），而不是受力物体的运动”这个观点。【15】

在下面这篇论文里，公式（77b）也引力磁场由引力源产生，而不是受力物体的运动产生。

Comments on Gravitoelectromagnetism of Ummarino and Gallerati in "Superconductor in a weak static gravitational field" vs Other Versions Article in The European Physical Journal C · December 2017【16】

Ulrych 的模型仍是“场由源决定”，矢量势由源的四维速度决定，测试粒子被动反应。【17】

以上各位的立场是引力磁场由源产生或者干脆认为是源的本体属性，不管是哪一类：广义相对论，3+1，潮汐张量，标量–张量理论，塞迪奥尼方程，复 Clifford 代数，周期性时空，互补协变，平行时空，GR 弯曲时空，不管是从 李纳势出发，还是直接用 GR 的张量，等等，这些理论，在“引力磁场的生成机制”这一点上，全部站在同一个假设上：

引力磁场由引力源产生。

这些理论认为只有当源（太阳）在运动或旋转时，空间中才会布满引力磁场。但是，按照他们的理论，如果太阳完全不自转，水星就不会受到引力磁力，也就不会有那 43 角秒的进动。但这显然是错的，因为水星进动的主体并不依赖太阳自转。和这些以往的 GEM 理论不同，我们的引力磁场（或叫“质量场”）它是源的场和受力物体的相互作用产生的，不准确的说是受力物体的运动产生的，引力磁场里包含的加速度是受力物物体的加速度，或者说是源和受力物体之间的加速度。我们把费曼电磁场公式里的第三项看作是测试粒子的加速度而不是源的加速度。当我们把第三项看作是源的加速度时，就可以类比到引力场，并把水星的向心加速度代入公式，由此可得到一个修正势。

不过，并非所有人都认为引力磁场来自引力源或者磁场来自电荷。Purcell (1963) 与 Griffiths (1999) 早已明确指出磁力本质上是电场力的相对论效应。【18】、【19】

实际上，无论是电磁学里的洛伦兹力，还是 GEM，在解释逻辑上，都是把磁场归结为“源”产生的。并且，所有严肃的 GEM 文献都明确指出：引力磁加速度（即项）与测试粒子的质量、成分、内禀属性完全无关，仅依赖其位置和速度（运动学量）。这被视为广义相对论等效原理的直接体现，是 GEM 框架的基本前提。换句话说：GEM 学者一致认为引力磁场的作用与受力物体的质量无关。

就连 GR 也认为引力磁场来自源 ，(在这一点上 ， 这是本文和 GR 的分歧)。根据广义相对论，运动或旋转的物质应产生对引力场的贡献，这种贡献类似于运动电荷或磁偶极子的磁场。【20】事实上，根据广义相对论，运动或旋转的物质应对引力场产生贡献，这与运动电荷或磁偶极子的磁场类似。

不同于传统理论（包括相对论）将引力磁力（GEM）视为场源的属性，并且引力磁场 mvB 明确和受到引力的物体的质量有关。本文提出了一种基于‘相互作用涌现’的新视角，重新解释洛伦兹力 $qv\times B$ ，其中磁力项并非磁场源的主动驱动，而是运动粒子在磁场背景中通过切割磁感线感应而生。同理，行星的‘质量场力’是其在线速度运动过程中切割恒星引力场的结果。这一机制解释了为何线速度（而非仅径向速度）是决定引力修正的关键，并从动力学角度自然导出了与广义相对论等效的轨道进动公式。类比洛伦兹力的生成机制，水星进动所需的额外偏转力并不源于太阳的某种神秘辐射，而是水星公转运动对背景引力场进行‘相对论切割’的动力学涌现。正如 Purcell 所言，磁力在受力粒子的静止系中消失，这一事实暗示了 GEM 项的运动学本质。这一视角的转变，使得我们无需引入复杂的弯曲时空度规，仅凭平直时空下的推迟势即可完美重建水星轨道的动力学图景。

有一些 GEM 理论采用推迟势补充，比如 Oleg D.Jefimenko 的广义引力。延迟势的概念由黎曼（Riemann）[21]（1858）提出，但直到他去世后才与洛伦兹的作品一同发表。洛伦兹在 1861 年研究弹性波时发展了一种标量延迟势[22]。

在本文里，我们采用多普勒效应作为系数，但它和推迟势是等价的。这方面有学者在 2022 年和 2023 年也这样做，但是，我们是从 2020 年就开始了。【23】【24】

1 场强和运动的关系

给麦克斯韦添加多普勒系数的逻辑是，曲面受到的电磁场力和它的运动速度有关，因为这种力是以通量的变化率计算的，那和多普勒效应一样，曲面的运动速度必然会影响经过它的通量的变化率。这就像水经过包住水龙头的网，如果这个网本身也在迎着水流运动，那么，它感受到的水流过它的通量的变化率显然也会因为它自身的运动而变化。

所以，类比多普勒效应，我们认为曲面的运动速度也会影响通量的变化率，所以，给麦克斯韦方程添加多普勒效应系数。

电磁场里的粒子所感受的场强和它自身的运动速度有关，这就像水里的一只船，它行驶

的速度越快，在船尾，它所受的来自水的压力和压强显然比它静止时所受到的压力小，这是很直观的。同样的逻辑，在电磁场里的粒子，当它的速度超过引力场的速度时，它运动方向的相反的方向上，电磁场就无法对它起作用。

这种思想并非本文独有，Ruggiero 和 DavideAstesiano 认为引力磁场引力磁效应并非只由一个单一因素决定。“To summarize, both the motion of the observers and that of the sources might contribute to the definition of the gravitomagnetic effects: a non null vortex tensor, in fact, is generally related to the rotation of the reference frame.”（2.3 节）虽然这与我们所说的“测试粒子所受到的场强和它的运动速度有关”并不同，但是，也就一点相似之处。（Ruggiero 2023）【25】

韦伯认为这本质上是：源电荷 A 的运动直接导致了对接收者 B 的电力发生了变化。所谓的“源激发的磁场”，在韦伯看来只是一个数学中间变量。真正发生的是：源 A 动了，所以它给 B 的静电力里多出了一项与速度相关的“剩余项”。为了方便记忆，把这项剩余项起名叫做“磁场”。

在经典电动力学中，毕奥-萨伐尔定律定义了磁场作为源电荷运动的衍生场，然而，在韦伯电动力学的框架下（如 Steffen Kühn 所述），这一过程被重新解释为源电荷与接收者之间的动态修正，磁场不再是一个由源激发的物理实体，而是一个描述力随相对运动变化的辅助函数。【26】

Paul Gerber 也有引力磁场未必来自源的思想，Paul Gerber 在 1898 写了一个公式了【27】：

$$V=\frac{u}{r(1-\frac{1}{c}\frac{dr}{dt})}$$

也就是：

$$V=\frac{GM}{r(1-\frac{v}{c})^2}$$

在这里，v 是径向相对速度（Paul Gerber，），所以，Gerber 没有执著这个速度是引力源的。

但是，由于这个速度 v 是径向速度，这意味着如果行星的轨道是圆，那就没有进动。但这显然是错的，因为水星进动的主体并不依赖太阳自转。

在 Vikram H.Zaveri 论文里【28】，他把时间乘上一个伽马因子进行修正，理由是时间是由频率定义的，而多普勒效应影响接受频率（Vikram H.Zaveri ，2025）。他也把质量添加一个伽马因子进行修正。他计算出了正确的水星进动和引力红移等。但是，这其实还是相对论，他只是把推导逻辑颠倒了，他从多曾勒效应开始，而不是从时间开始。相对论从时间公设开始推导到多普勒效应，他则相反，从多普勒效应推导时间。但是，本质上他还是依赖时空弯曲，因此，他的这个理论还是相对论。

甚至，连 GR 也有这种思想。“这一最后的性质与多普勒效应密切相关（不仅在频率方面，而且—— 更深刻地—— 在场强方面）”。【29】

这也证明了我们所说的“本理论和相对论在数学上的等价”并不是妄言，但是，我们的理论却不用弯曲时空。

1.1 多普勒因子

考虑源静止，而场点运动，那么：

$$v_d = 0$$

场点/观测曲面运动：$v_E = v_q$（观测者速度）

场传播速度:$v = c$
多普勒系数简化为：

$$\frac{v \pm v_E}{c \mp v_d} = \frac{c \pm v_q}{c} = 1 \pm \frac{v_q}{c} \tag{1.1.0}$$

符号+-取决于运动方向。定义从源指向观测者的单位矢量$\hat{n}$，则$v_q \cdot \hat{n} = \pm v_q$（接近为"+"，远离为"-"）。这里$+v_q$是观测者相对源的速度（也就是曲面或场点相对源速度）。

在 Duan2024 年 6 月 21 日的论文，他把添加给麦克斯韦方程组的多普勒系数又平方了一下理由是通量是二维的，而频率是一维的，因此给。

由于通量是以通过二维平面的电磁场力的线的数量计算，那么，曲面的运动速度影响通量是以平方来计算的（Duan,2024,6），，多普勒效应的频率是一根根横着过来的波，它是一维的，那二维的通量的线当然是平方，通量的变化率的变化应该是平方效应，系数整体应该平方一下。所以，麦克斯韦方程组添加类似多普勒效应的系数要平方。

$$(1 \pm \frac{v_q}{c})^2$$

设：

$$(\frac{v \pm v_E}{c \mp v_d})^2 = k \tag{1.1.1}$$

对于多普勒效应公式，我们现在增加一些解释，即多普勒公式的分子和分母都是相对速度，分子是接收仪器和场的相对速度，而分母是场源和它的场的相对速度。也就是这个系数其实是两个相对速度的比例。

$$(1 \pm \frac{v_q}{c})^2 = \frac{v^2}{c^2} \tag{1.1.2}$$

其中，v 是接收仪器和场的相对速度，c 是场源和它的场的相对速度。

如果仅是采用源静止不动而场点运动的延迟时间，电荷密度是静太（ρ=qδ(r)），电流密度为零（J=0）。但是，在 Duan（2020，6）的论文《一个类似相对论的介质理论》里，麦克斯韦方程组两个方程都被添加多普勒系数，但是，那是把多普勒系数放在积分号外面，现在把它移动到积分号内。因为放在积分号外意味着它是物理常数，这会改变物理定律，放在积分号内等于是给源加权，k 成为被积函数的一部分，它改变的是对源的处理方式
积分形式：

$$\oint_s E \cdot dA = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V k(r,t) \rho dV \tag{1.1.3}$$

$$\oint_s B \cdot dA = 0 \tag{1.1.4}$$

$$\oint_c \mathrm{E} \cdot dl = -\frac{1}{dt}\int_s B \cdot dA \tag{1.1.5}$$

$$\oint_c B \cdot dl = \mu_0 \int_s kJ \cdot dA + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_s k\mathrm{E} \cdot dA \tag{1.1.6}$$

微分形式：

$$\nabla \cdot E = \frac{k(r,t)\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.1.7}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \tag{1.1.8}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t} \tag{1.1.9}$$

$$\nabla \times \mathrm{B} = \mu_0 k(r,t) J + \frac{k(r,t)}{c^2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{t}} \tag{1.2.0}$$

把 k 添加在电荷密度和电场旁边是为了保持麦克斯韦方程不变，将 K 视为一个数学上的积分核或物理上的几何投影因子。它只是计算推迟势的另一种等价但更具洞察力的方法。这**不会**导致任何新的可观测预言，但提供了全新的物理图像。

法拉第定律没有添加 k，因为它是描述场和场之间的关系，不是调制场源来的信号，场和场之间的关系不受观察和测量影响。

微分形式添加了 k,是说观察者在运动的场点上测量到的电荷密度和电流密度会发生变化。 但是，场点静止时，k 为 1。本文重新解释高斯定理，源本身并没有变，我们添加的 k 是说观察者测量到的场会发生变化，换句话说，我们重新解释了这个高斯定理，我们并不认为公式等号右边是源本身的属性，它其实一直就是测量的值。

在本文里，k 被近似视为常数。因为本文的目标是计算水星进动，而计算水星运动时，水星轨道被近似为圆， 在后文的图像示意里，水星的轨道在局部被视为匀速直线，太阳的引力场线视为近似平行，所以，k 因子里的三个速度，即引力场的速度、引力源的速度和水星的速度都是近似不变的，所以，这个 k 近似为常数。而在后文的多普勒效应的图像示意里，用于计算“斜线”等对象时，用的依旧是这几个速度，因此，k 因子依旧近似常数。因此，为分析水星在其轨道任一点附近的运动对引力场的‘切割’效应，我们采用微积分处理。在轨道上任一给定点附近的一个时空微元内，水星的轨迹可近似为其瞬时切线。在此微元上，水星的相对运动可视为沿该切线方向的匀速直线运动。这一处理使得我们能在局部构建清晰的几何图像（如后文图例所示），用以分析推迟势的传播。随后，通过对整个轨道积分，即可得到周期运动的整体效应。此方法是分析曲线运动下推迟势问题的标准手段。

这和 GR 的局域参考系是对应的。GR 中的做法是：在水星轨道附近取一个局域自由下落参考系；在该系中，引力被“消除”，只保留潮汐力；用平直时空 + 小扰动 计算进动（爱因斯坦,1915）。k 的“近似为常数”与广义相对论中“局域惯性系”的思想高度对应，而 k 的“一般形式依赖于速度场”则对应着全局非惯性结构（即弯曲时空）。在 GR 中，曲率由

物质分布通过爱因斯坦方程决定；在我们的理论中，k 的空间分布由引力源（质量+运动）通过斥力-以太机制决定。（以太是否存在有待验证，本文假设以太存在。）“k”在某种程度上，扮演了类似“联络”或“度规导数”的角色，它编码了背景场如何被运动所“感知”和修正的信息。

至于多普勒的两种效应里的相对速度，那是一种”几何效应“，并不是真实的速度，所以并不是 k 因子发生变化的意思。如果要处理双星运动这些复杂问题，这时 k 因子不再是常数，可能需要分布论（广义函数）之类的工具处理，但是，本文暂不考虑这类问题。

1.2 多普勒效应和推迟势效应的图像

想象一个场景，太阳发的某根发射水星的引力线是水平的，叫它 x 轴，而水星垂直于这根轴向上匀速直线运动，和 y 轴平行。

太阳引力场到达水星屁股后，然后作用于水星，因为太阳引力场在水星所有运动的地方都存在，所以，这个作用于水星屁股的引力场时时都存在，水星运动前方的太阳引力场被压缩，水星运动的后方太阳的引力场被拉伸。传统的多普勒效应是指接受者和源之间的效应，而现在这个“源”变成“源的场”，“源的场”才是源。比如太阳和水星的引力关系，水星所受到的多普勒效应来自它和太阳的引力场的相互作用，而不是它和太阳的相互作用，太阳的引力场从太阳发射出来，那它就是一个独立的实体，水星和它之间的相对运动产生多普勒效应。也就是说，在本文这个点电荷或太阳与水星的多普勒效应里，在多普勒效应中，多普勒效应公式的分子应该是观测者相对于信号传播介质的速度，而不是相对于源的速度。这也符合本文推导这个理论的另一个思路，即后文的相对加速度，也就是把费曼公式的第三项看作是场点的加速度，这个加速度和源无关，是场点和“源的场”的相互作用，而不是场点和源的相互作用。

但是，传播方向依然是太阳。太阳的引力场很大，可近似看作是一大块平整的幕布，其中引力线是平行且密布的，像下雨时，雨滴密集的形成的雨帘。水星和太阳引力线近似垂直，水星的公转运动在局部近似为匀速直线运动。

水星相对太阳的速度就是水星垂直向上的线速度和太阳引力场的速度的合成，水星所受到的多普勒效应只有水星的运动方向的前后有，两个侧面近似没有。在多普勒效应里，接受方或观察者的速度是相对绝对参考系的，而在这里，绝对参考系就是太阳的引力场。而显然，水星运动方向和太阳的引力线垂直时多普勒效应最大。

多普勒效应其实它的分子分母的速度应理解为相对速度，而在现在水星和太阳的情况中，水星和太阳的相对速度是太阳在水平方向的引力场速度和水星垂直于引力场线的线速度这二者组成，这是勾股定理。然后，呢，因为通量是二维平面，所以，这个速度要平方一下。

结合我以前另一个修改麦克斯韦方程组的版本，即给这个方程组添加多普勒效应系数的平方，因为理由是它是二维通量面，而频率只是一维的，所以，变成二维，理应添加平方。

如果一个人在雨中站立，一分种能接受多少个雨滴？但是，当他跑起来时，因为本来雨滴下落的频率是 f，但是 ，当我们跑起来时，他会撞到更多的雨滴。当人向前跑时，这相当于雨滴下落的速度变高了，尽管落到人的身上的雨滴不再是原来的那根雨组成的线，但有什么区别？因为雨滴就像场一样是无数小粒子弥漫在空间，这时人撞到的雨滴来自不同的垂直不落的雨线的雨滴，这些雨滴就组成了一条倾斜的雨线，这个跑步的人实际上接受到的雨线经过的空间要大于他静止不动时接受到的某种雨线，但是，时间是一样的，因为无论他静止还是跑步，都是只过了一分钟，但是，一分钟他接受到的雨线的运动距离变长了，那意味着什么？等效于什么？等于雨水下落的速度变快了。因此，这其实是等于水的雨水的下落速度变快了。跑步时接受到的雨线变长了，雨线变长其实就是相对论的空间膨胀，不同的是，这是真实的，雨线真的变长了。

把这个例子类比到引力场，水星在太阳的引力场里向前运动，等效于它接受到的来自在太阳的引力线的速度变快，比它静止时受到引力线的速度更快。而这个速度合成就是引力场的速度和水星的线速度。这个就是多普勒效应里的接收方的速度，它是水星和太阳引力场的相对速度：

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \tag{1.2.1}$$

而那根倾斜的雨线的长度就是观察者观察到的长度 R（观察者观察到的雨线长度并不是垂直的一根雨线的长度，而是斜线）。类比回到引力场的情形，它就是水星和太阳之间我们通常所说的距离 R，也是牛顿万有引力公式中的 R。斜的雨线就是现在这个时刻获得的，因为只有到这个时刻，雨线才能完整形成，它不是从源出发那一刻计算的，它是在整条雨线形成后的时间计算的。所以，这个 R 对应的是现在时刻的距离，不是对应推迟势积分里的延迟距离 $r - r'$ 。

由于斜的引力场线比水平的引力线更长，而两根线的时却相同，因此经过斜线的引力场速度比走水平线的引力场速度更快，但是，这其实是假象，是因为观察者的运动切割不同的引力线碰撞不同引力线的引力子形成的虚线造成的等价效应。【30】

1.3 多普勒效应和势积分

根据法拉第定律和磁高斯定律，我们引入标势和矢势，其定义与标准理论完全相同;

$$E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$B = \nabla \times \mathrm{A}$$

把 E 代入修改后的高斯定理：

$$-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathrm{A}) = \frac{k\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.3.0}$$

把 B 代入修改后的安培-麦克斯韦定律，利用恒等式并入 E 的定义，经过整理可得：

$$\nabla(\nabla \cdot \mathrm{A} + \frac{k}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}) - \nabla^2\mathrm{A} + \frac{k^2}{c^2}\frac{\partial^2\mathrm{A}}{\partial t^2} = k\mu_0\mathrm{J} \tag{1.3.1}$$

选择类似洛伦兹的规范，但是，多了一个 k：

$$\nabla \cdot A + \frac{k}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$$

把规范条件代入（1）和（2）并整理，得：

$$\nabla^2\phi - \frac{k}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{k\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 A - \frac{k}{c^2}\frac{\partial^2\mathrm{A}}{\partial t} = -k\mu_0\mathrm{J}$$

由此两个波动方程，得到势积分：

$$\phi(r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{k\rho(r',t)}{R}dV'$$

$$A(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{kJ(r',t)}{R}dV'$$

把分子上的 k 移动到分母上：

$$\phi(r,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(r',t_r)}{R\frac{1}{k}}d^3r'$$

这个式子其实是本文所说的有效势，因此，把势的符号改一下：

$$\phi_{\text{eff}}(r,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(r',t_r)}{R\frac{1}{k}}d^3r' \tag{1.3.2}$$

$$A(r,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{J(r',t)}{R\frac{1}{k}}dV' \tag{1.3.3}$$

在这里，R 是通常的太阳和水星的距离（斜线的距离），在添加了 k 之后，这个值变小了,它现在等于推迟势积分里的$\left|\mathrm{r}-r'\right|$。这其实是在说，给库伦势添加多普勒系数等价于缩短了源和场点的距离。（推迟势也是一样的，在后文示意的物理图像里，运动电荷垂直于水平线运动，其延迟时刻的距离也是看起来就像现在时刻的距离被缩短了。）

电荷密度对应于推迟势积分的密度，因为本文添加的 k 在麦氏方程组方程（1）起到的作用正是修正这个电荷密度，它是水星的运动路径和太阳水平的引力场线的相交的位置时的电荷密度，当水星运动时，感受到的这个密度就会发生变化，而变化之前的电荷密度就相当于推迟势的延迟时刻的电荷密度（所以，为了于推迟势积分公式形成对应，把 t 改成 t-r）。但是，当把 K 移动到分母之后，这种修正变为改变 R，这是等价的。

这两个式子分子上的 k 移动到分母上去，即变成 1/k，然后，这个分母就正好变成了和推迟势积分的分母一样，k 和推迟势其实都是缩短了源和场点的距离 r，且缩短的比例都是 1/k。因为它们都可以用直角三角形和勾股定理计算。它们都是把勾股的“弦”缩短成了“股”。所以，在经过多普勒系数因子修正的势积分把 k 移到分母上之后，带有多普勒因子的势积分和推迟势积分是等价的，因为它们的公式经过变形后都是一样的。

由本文这个势积分，也可以推导出和费曼公式类似的电磁场公式。这表明，推迟势和多普勒效应是同一个物理现象的不同数学表述，它们是等价的。

（补充：物理上推迟时间方程表示：从信号到达场点的时刻 tr，到场点运动到新位置并被我们观测的时刻 t，这段时间间隔 Δt=t−tr 正好等于信号从源传播到场点（在 tr 时刻的位置）所需的时间 R/c。

这是一个有趣的设定：观测延迟 Δt 等于信号传播时间 R/c。这种设定其实也是源运动而场点静止时的情况所做的，即 tr=t-R/c,也就是刻意选择时刻 tr,使得 tr 和 t 这两个时刻之间的时间正好等于 R/c。源动场静也是设定的特殊时刻，使得两个时刻之间的时间正好等于势从源到场点的时间，即 tr=t-R/c。两种情况下，R 都是势实际传播的距离。）

1.4 多普勒效应和推迟势积分的等价

以上是多普勒系数的物理图像，现在，同样想象一下推迟势：

假设空间中有一个固定的场点，在它的一侧经过一个匀速直线运动的点电荷。沿着场点作一条水平的直线，点电荷的运动方向和之个直线垂直，是垂直向上。那在两条直线垂直的相交点，这个位置就是运动电荷在延迟时刻的位置。当点电荷运动时，它到达新位置，而它的新位置到场点的距离就是斜线，这也是我们平时观察到的两者之间的距离 R。

推迟势积分方程：

也就是从原来的麦克斯韦方程解来的延迟势：

$$\phi(r,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(r',t_r)}{|r-r'|}d^3r' \qquad (1.4.0)$$

这里的 $r-r'$ 是延迟时刻源和场点之间的距离。推迟势和多普勒的物理图像都是一样的，因此，缩短的比例都可以用毕达哥拉斯定理计算，它们是 1/k。

$$|r-r'|=\frac{1}{k}R$$

把这个式子代入公式（1.8），得到：

$$\phi_{\text{ret}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(r',t)}{R\frac{1}{k}}d^3r'$$

这个公式和公式（1.3.2）完全一样。所以，可以看出来，本文添加了多普勒系数的势积分在把 k 因子经过简单变后(即把 k 挪到分母)，公式变得和推迟势的标势一样（矢势也是这样），再由势积分，可以推导出和费曼的电磁场公式一样的公式。这说明，二者其实等价的，“给麦克斯韦方程组添加多普勒系数”和“麦克斯韦的推迟势解”是等价的。

由以上分析可知，公式（1.3.2）和（1.3.3）严格和推迟势的势积分相等：

$$\phi_{\text{eff}}=\phi_{ret}$$

$$A_{eff}=A_{ret}$$

因此，和推迟势能得到费曼公式一样，由公式（1.3.2）和公式（1.3.3）可以得到一个和费曼电磁场公式一样的公式：

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{e_{r'}}{r'^2}+\frac{r'}{c}\frac{d}{dt}(\frac{e_{r'}}{r'^2})+\frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}er'\right] \qquad (1.4.1)$$

但是，这个公式的解释和费曼公式有区别，这里的第三项加速度是场点的加速度，这是因为我们从一开始就设定了 k 的物理意义，它是源静止而场点或观察者运动的情景。

把向心加速度 a，线速度 v（它是行星围绕恒星的公转速度）代进公式：

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}e_{r'}=\frac{1}{c^2}\frac{1}{r'}a=\frac{1}{r'^2}\frac{v^2}{c^2}$$

得到：

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{e_{r'}}{r'^2}+\frac{r'}{c}\frac{d}{dt}(\frac{e_{r'}}{r'^2})+\frac{1}{r'^2}\frac{v^2}{c^2}\right] \qquad (1.4.2)$$

1.5 水星进动

由公式（1.4.2），类比为引力场的公式：

$$E=\frac{M}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{e_{r'}}{r'^2}+\frac{r'}{c}\frac{d}{dt}(\frac{e_{r'}}{r'^2})+\frac{1}{r'^2}\frac{v^2}{c^2}\right]$$

把水星轨道近似为圆，那么这个第二项为 0，可以得到修正的万有引力库伦方程：

$$\phi=\frac{\text{GM}}{r}(1+\frac{v^2}{c^2}) \qquad (1.5.0)$$

因为：

$$k = 1 + \frac{v^2}{c^2}$$

把速度系数移动到分母：

$$\phi = \frac{\mathrm{GM}}{r\frac{1}{\mathrm{k}}}$$

这表明添加 k 因子相当于把万有引力公式的 r 缩短了。
现在把公式(1.5.0)带进牛顿的能量守恒方程里，可得：

$$E = -\frac{GMm}{r}(1+\frac{v^2}{c^2}) + \frac{1}{2}[(v^r)^2 + (v^\varphi)^2] \tag{1.5.1}$$

因为：

$$L = r^2 v^\varphi$$

$$v^\varphi = \frac{v}{r}$$

所以：

$$E = -\frac{GMm}{r} - \frac{L^2}{r^2}\frac{GMm}{c^2 r} + \frac{1}{2}m[(v^r)^2 + (v^\varphi)^2]$$

它其实和相对论的这个能量守恒方程是一样的：

$$E = -\frac{GMm}{r} - \frac{L^2}{r^2}\frac{GMm}{c^2 r} + \frac{1}{2}m[(v^r)^2 + (v^\varphi)^2]$$

所以，根据这个方程（1.5.1）计算的水星进动的值和相对论的一样。计算星光弯曲也是一样，把公式（1.5.1）里的 v 改成光速 c 就行了。

1.6 k 因子的 v

我们对势函数（1.4.0）直接取梯度。

$$E(r,t) = -\nabla \phi_{eff}(r,t)$$

因为积分限固定，且被积函数在 r 处可微（弱场近似），可把梯度运算移入积分内部（莱布尼茨法则）：

$$E = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(r',t)\nabla_r(\frac{k(r,t)}{R})d^3r'$$

对被积函数内部求梯度, ρ 不含 r：

$$\nabla_r(\frac{k(r)}{\mathrm{R}}) = \frac{\nabla k}{\mathrm{R}} + k\nabla_r(\frac{1}{\mathrm{R}})$$

代入上式：

$$E=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho(r',t)\left[\frac{\nabla k}{\mathrm{R}}+k\nabla_r(\frac{1}{R})\right]d^3r'$$

拆成两项：

$$E=-\frac{\nabla k}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(r,t)}{\mathrm{R}}d^3r'-\frac{k}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho(r',t)\nabla(\frac{1}{\mathrm{R}})d^3r'$$

右边第一项：

$$E_e=-(\nabla k)\cdot\phi_c(r,t)$$

其中，$\phi_c=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho}{\mathrm{R}}d^3r'$是普通瞬时库伦势。

右边第二项：

$$E_2=k\mathrm{E}_c$$

这一项正是 k 倍的标准库伦场E_c

所以，完整电场是：

$$E=k\mathrm{E}_c+E_e$$

点电荷 q 固定在原点，则积分塌缩为$\phi_c=q/(4\pi\varepsilon_0 r)$， $R=r$ 。

场点做半径 r 的匀速圆周运动，横向加速度$v=wr$， $k=1+w^2r^2/c^2$ 。

只看径向分量（∇k沿径向）：

$$E_r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}-\frac{qw^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2}$$

代入向心加速度：

$$E_r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}-\frac{qa}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}$$

右边第二项正是费曼公式第三项在横向加速度 + 非相对论极限下的标准径向投影形式：

$$E_p=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{c^2}\frac{a\perp}{\mathrm{r}} \qquad (1.6.0)$$

比较公式（1.5.0）和（1.6.0），它们在数学形式上一样，但是，公式（1.5.0）的加速度 a 是观察者（场点）的加速度，而公式（1.6.0）的 a 是源的加速度。这表明，一个做半径为 R 的圆周运动的观察者，在测量一个匀速运动电荷的场时，

由于他的运动状态（k 因子的影响），他会感受到一个附加的电场。这个电场的表达式，与一个静止观测者测量一个具有横向加速度的电荷所产生的辐射场（费曼公式的第三项）完全一致。也就是说，费曼公式中的加速度项可以等价地看作是观察者（场点）的加速度，更准确的说，这个加速度其实是相对加速度，费曼电磁场公式里的源的加速度其实是“源与场点的相对加速度”。

1.7 场的波动方程

对法拉第定律两边取旋度：

$$\nabla\times(\nabla\times \mathrm{E})=\nabla\times(-\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \mathrm{t}})$$

左边有矢量恒等式：

$$\nabla\times（\nabla\times E）=\nabla(\nabla\cdot \mathrm{E}）-\nabla^2 E$$

代入修改后的高斯定理：

$$\nabla\times（\nabla\cdot E）=\nabla\ （\frac{k\rho}{\varepsilon_0}）-\nabla^2 E$$

右边交换旋度和时间偏导的顺序：

$$\nabla\times(-\frac{\partial B}{\partial t})=-\frac{\partial}{\partial t}（\nabla\times B）$$

代入修改后的安培-麦克斯韦定律：

$$\nabla\times(-\frac{\partial B}{\partial t})=-\frac{\partial}{\partial t}(k\mu_0 J+\frac{k}{c^2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{t}})$$

由于 k 变化缓慢，可视为常数提出导数外：

$$\nabla\times(-\frac{\partial B}{\partial t})=-k\mu_0\frac{\partial J}{\partial t}-\frac{k}{c^2}\frac{\partial^2 \mathrm{E}}{\partial \mathrm{t}^2})$$

令法拉第定律左右两边相等：

$$\nabla(\frac{k\rho}{\varepsilon_0})-\nabla^2\mathrm{E}=-k\mu_0\frac{\partial J}{\partial t}-\frac{k}{c^2}\frac{\partial^2 \mathrm{E}}{\partial \mathrm{t}^2}$$

整理方程，得到：

$$\nabla^2 E-\frac{k}{c^2}\frac{\partial^2 \mathrm{E}}{\partial t^2}=\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla(k\rho)+k\mu_0\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial \mathrm{t}}$$

通过对安培-麦克斯韦进行操作消去电场 E .
对安培-麦克斯韦方程两边取旋度：

$$\nabla\times(\nabla\times\mathrm{B})=\nabla\times(k\mu_0\mathrm{J}+\frac{k}{c^2}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial\mathrm{t}})$$

利用恒等式，方程左边变为：

$$\nabla\times(\nabla\times\mathrm{B})=\nabla(\nabla\cdot B)-\nabla^2\mathrm{B}$$

代入高斯磁定律，得：

$$\nabla\times(\nabla\times\mathrm{B})=-\nabla^2\mathrm{B}$$

方程右边变为：

$$\nabla\times(k\mu_0\mathrm{J}+\frac{k}{c^2}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial\mathrm{t}})=\nabla\times(k\mu_0\mathrm{J})+\nabla\times(\frac{k}{c^2}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial\mathrm{t}})$$

交换右边第二项的旋度和时间偏导：

$$\nabla\times(k\mu_0\mathrm{J}+\frac{k}{c^2}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial\mathrm{t}})=k\mu_0(\nabla\times\mathrm{J})+\frac{k}{c^2}\frac{\partial}{\partial\mathrm{t}}(\nabla\times\mathrm{E})$$

代入法拉第定律：

$$\nabla\times(k\mu_0\mathrm{J}+\frac{k}{c^2}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial\mathrm{t}})=k\mu_0(\nabla\times\mathrm{J})-\frac{k}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial\mathrm{t}^2}$$

令左右两边相等：

$$-\nabla^2 B=k\mu_0(\nabla\times\mathrm{J})-\frac{k}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial\mathrm{t}^2}$$

整理得到：

$$\nabla^2 B-\frac{k}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial\mathrm{t}^2}=-k\mu_0(\nabla\times\mathrm{J}) \tag{1.7.0}$$

在无源区域空间 ，电荷密度为 0，电流密度也为 0，此时，波动方程的右边都为 0，我们得到齐次波动方程：

$$\nabla^2 E-\frac{k}{c^2}\frac{\partial^2\mathrm{E}}{\partial t^2}=0 \tag{1.7.1}$$

$$\nabla^2 B-\frac{k}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial\mathrm{t}^2}=0 \tag{1.7.2}$$

因此，波速为：

$$v_p=\frac{c}{\sqrt{k}} \tag{1.7.3}$$

这说明，一个运动的观察者测量到的电磁波的速度不再是常数 c。看起来似乎变慢了，但是，这个波速的解释需要小心。

在本文理论里，K 是两个相对速度的平方的比例，即分子是场点和场之间的相对速度的平方，而分母是源和自己场的相对速度的平方。如果场点或观察者接近源，那他测的波速是更高的。但是如果他和源之间不是径向速度，而是横向速度，那他和源之间的相对速度用 K 计算，是变小的，因为这时 K 也就是 1+V 平方/C 平方，这里面的 V 就是观察者的横向速度，

它越大，K 因子越大，那波速看起来是越慢？但这是错觉，因为这时的 K 式子的分子是观察者和源的相对速度平方，但是，这个相对速度是雨线的那个斜线上的速度，它并不是真实的波速，它只是因为观察者横向运动撞到不同的引力力子而连成的一个不同引力线的引力子形成的虚线，并不是同一根引力线传播的速度。这时 k 分子的值会因为观察者更快而更大，但其实没有改变波速。波速公式里的波速并不是真实波速，它是观察者运动造成的假像。

2 费曼公式

2.1 费曼公式的加速度

费曼提出了一个电磁场公式，其公式和电动力学教材上的电磁场公式等价[43]。

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{e_{r'}}{r'^2}+\frac{r'}{c}\frac{d}{dt}(\frac{e_{r'}}{r'^2})+\frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}er'\right] \tag{2.1.0}$$

前文用修改的麦克斯韦方程组推导出一个和这个一样的公式，不同的是，它的第三项被解读为场点的加速度，而这个公式里的第三项被解读为源的加速度。

但是，第三项可以被看作是点电荷和场点的相对加速度，“牛顿第二定律的加速度是相对加速度，有相对加速度就表明存在‘力’。”“运动状态的改变是力的原因。”（Duan，2023)

我们审视这第三项。辐射不能说是某个单独的源发出的，没有受力对象，它怎么辐射？比如洛伦兹力里，磁场如果没有测试粒子，或者粒子没有磁场，都不会辐射吧？

这充分说明：辐射是相互作用的产物，而不是单方面“发射”的东西。

传统教科书说“加速的电荷辐射”，给人一种印象：电荷像灯泡一样，**自己**独立发出辐射，但是：

洛伦兹力实验中：没有磁场，电子匀速运动 → 不辐射。

洛伦兹力实验中：没有电子，只有静止磁场 → 不辐射。

辐射只发生在磁场和电子同时存在、且相对运动时。这强烈暗示：辐射是磁场与电子相互作用的产物，不是电子“自己”的独白。这就像：不是“锤子发出声音”或“钉子发出声音”，而是“锤子敲击钉子”这个相互作用过程发出声音。“牛顿第二定律的力是单独的力，不是合力，而力就是相对加速度，不区分惯性系还是非惯性系。”【31】。因为牛顿第二定律是有相对加速度就有力，而力和势是相关的，所以，势也是和相对加速度捆绑在一起,而费曼公式的第三项因为是势之一，那这个加速度就被解读为相对加速度，而不是源的绝对加速度。因此，据此可以提出一个力学公设：牛顿第二定律修改为 F=ma，其中 a 是相对加速度。

经典电磁学认为辐射是源的绝对加速度的结果。但是，这里存在一个不可证伪的东西。有加速度就表明有另一个作用力的存在，因为根据牛顿惯性定律，不受力的状态是静止或匀速直线运动。所以，源的加速度产生辐射就可能是和另一个力的作用共同产生的，而不是源单方面产生的。但是，和源同步加速的观察者又看不到源的辐射，而匀速直线运动的观察者又能看到源在辐射。这显然会导致矛盾，于是，传统电磁学又说麦克斯韦方程组不适用非惯性系，在非惯性系需要添加虚拟惯性力。所以，可以从这看出来，问题的原因其实是因为牛顿定律不能适用非惯性系。那么，通过修改牛顿第二定律，即把 F=ma 里的绝对加速度 a 改为相对加速度，并把这个力解释为单独的力而不是合力，应该可以解决问题。也就是说，通过把费曼公式里的第三项（加速度）看作是相对加速度，从而让这个方程适用于非惯性系。

根据牛顿惯性定律，不受力肯定是静止或匀速直线运动，那反推，加速度存在不就意味着存在另一个力或场？那有另一个力或场存在，不就说明所谓的辐射总是和另一个力或场相伴？力不可能是“凭空”的产生的，力一定对应某种相互作用 / 场。所以，加速度的存在

就已经表明源和某种力或场在发生相互作用。因此，由于加速度在经典力学中必然对应某种相互作用，所谓“加速电荷辐射”，在任何可实现的物理情形下，都不可避免地与另一种力或场同时出现；将辐射归因于“加速度本身”，在因果上是不充分的。

我们也可以从洛伦兹力公式看出来这点。洛伦兹力方程右边第二项是测试粒子的所受的另一种场，这一种场不是磁场，是粒子在运动并切割磁场时产生的一种场，它是被测试的粒子沿一个中间作圆周运动，比如粒子回旋加速器里的情况。而这时，洛伦兹公式的第二项就是向心加速度，类似水星围绕太阳的运动时的向心加速度。那么，现在，我们看到费曼电磁场公式里第三项也是加速度项，那它极可能就是粒子的向心加速度，而不是场源的加速度。

根据牛顿第二定律的修改和洛伦兹力公式的分析，把费曼电磁场公式的加速度项视为相对加速度是合理和自然的，类比到引力场，这个公式就可以计算水星进动和光线弯曲。

在费曼的物理学讲义里第 2 卷第 21 章第 6 节，他推导了一个公式 21.39，并且说“要是该电荷位于它本身的静止参照系中的原点，则它的势应为：

$$\phi(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{[x^2+y^2+z^2]^{1/2}}$$

然后他又说：“由于我们是在一个运动参照系中对它进行观察，因而好像坐标应该通过以下式子进行变换，”[费曼，]，他指的就是洛伦兹变换。

把费曼的这种坐标变换方法移植到太阳系来，太阳原本假设不动，而水星在运动，而如果在水星这个运动的参照系来看，太阳就不是静止不动，而是在运动。所以，相对论的做法和我们这里对费曼公式第三项的做法一样，就是把水星的加速度给了太阳。

2.2 费曼公式和能量守恒方程

既然费曼公式的第三项可以看作相对加速度，那么，它就和前文的公式（1.4.1）一样，也一样计算水星进动。把费曼的电磁场公式类比到引力场，引力场也有推迟势，这个观点并不稀奇，“由此可见，我们采用与电动力学相同的分析方法，发现牛顿时空中的引力延迟现象同样存在。”[32]

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{e_{r'}}{r'^2}+\frac{r'}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{e_{r'}}{r'^2}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}e_{r'}\right]$$

把公式类比为引力场，其中 q 相当于是 m:

$$E=\frac{m}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{e_{r'}}{r'^2}+\frac{r'}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{e_{r'}}{r'^2}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}e_{r'}\right] \tag{2.2.0}$$

这时，这个式子的第三项就有：

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}e_{r'}=\frac{1}{c^2}\frac{1}{r'}a=\frac{1}{r'^2}\frac{v^2}{c^2}$$

其中，a 是向心加速度，v 是线速度，它是行星围绕恒星的公转速度。

所以，引力场的修正场公式是：

$$E=\frac{M}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{e_{r'}}{r'^2}+\frac{r'}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{e_{r'}}{r'^2}\right)+\frac{1}{r'^2}\frac{v^2}{c^2}\right] \tag{2.2.1}$$

我们再把水星轨道近似看作圆形轨道。那么，水星相对太阳是没有速度的，也就是说，公式里的第二项等于 0，公式化为：

$$E = \frac{M}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{e_{r'}}{r'^2} + \frac{1}{r'^2}\frac{v^2}{c^2}\right]$$

类比成引力场，这时换成引力势，势能也用 E 这个字母，有：

$$E = \frac{GMm}{r}(1+\frac{v^2}{c^2}) \qquad (2.2.2)$$

现在把这个公式带进牛顿的能量守恒方程里，可得：

$$E = -\frac{GMm}{r}(1+\frac{v^2}{c^2}) + \frac{1}{2}[(v^r)^2 + (v^\varphi)^2]$$

因为：

$$L = r^2 v^\varphi$$

$$v^\varphi = \frac{v}{r}$$

所以：

$$E = -\frac{GMm}{r} - \frac{L^2}{r^2}\frac{GMm}{c^2 r} + \frac{1}{2}m[(v^r)^2 + (v^\varphi)^2] \qquad (2.2.3)$$

它其实和相对论的这个能量守恒方程是一样的：

$$E = -\frac{GMm}{r} - \frac{L^2}{r^2}\frac{GMm}{c^2 r} + \frac{1}{2}m[(v^r)^2 + (v^\varphi)^2]$$

这样，这个能量守恒方程一样可以计算水星进动，且结果和相对论一样，因为相对论也是用这个公式计算水星进动。

2.3 Jefimenko 的类比

在对费曼公式第三项的处理中，我们和 Jefimenko 的处理方式区别是：

Jefimenko 这个项视为引力辐射的贡献，它在动态系统中（如加速质量或振荡源）产生远场辐射效应（引力波-like）。他强调这个项确保了因果性和有限传播速度，但在低速、弱场和准静态系统中（如行星轨道），这个项通常被忽略或近似为零（Jefimenko，）。

忽略第三项：在太阳-水星系统中，太阳被 Jefimenko 认为是点质量（这和我们一样），无内部运动或加速度，所以第三项= 0。辐射项不产生可观测贡献（太阳系引力波辐射极弱，对进动影响忽略不计）。在计算中，他直接将 g 场简化为第一项（牛顿延迟）+ 第二项（小感应，如果有），K 场只取稳恒质量电流项，结果是 GR 值的 1/3 。

太阳在全局惯性系中被视为静止，所以第三项必然 ≈ 0。行星（水星）的向心加速度 a = v²/r 被完全放在**粒子运动方程**（F = ma）里处理，而不是反馈到场的产生公式中。伽马因子虽然被引入了，但它只修正了平行/垂直力的相对论效

应（对应特殊相对论的动能部分），没有额外机制去捕捉**时空曲率**带来的那两份贡献（时间膨胀 + 空间几何弯曲，各约 1/3）。[32]

Paul Gerber 在一篇论文（*Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation Zeitschrift für Mathematik und Physik*）写了一个公式：

$$V = \frac{GM}{r(1-\frac{1}{c}\frac{dr}{dt})^2} \tag{2.3.0}$$

但如劳厄（Max von Laue） 所说，这个公式 “Gerber 对引力势的处理方法*与有限 Ausbreitungsgeschwindigkeit 不相容。*”，也就是 Gerber 在推导中默认了引力信号的传播速度会随着观察者（水星）的运动状态而发生一种非物理的改变。【34】

Gerber (1898) 因逻辑自洽性问题在 1917 年遭到 Laue 的严厉批评。然而，Laue 的批评仅针对 Gerber 特定的势函数构造，并未否定推迟势理论本身的潜力。本文通过符合波动方程的 Heaviside-Feynman 场公式重新审视了这一课题。

Gerber 公式和 GR 及本文的理论都有一个关键不同。本文的公式（1.4）和 GR 的公式计算水星进动的速度 v 是线速度，而 Gerber 公式计算水星进动时的速度 v 是径向速度。但是，这就造成一个问题，圆轨道没有进动，因为径向速度为 0 了。但是，无论 GR 还是本文的理论，即使轨道是圆，那也一样有进动。【35】

劳厄在批评格伯的势函数时也说：随后，格伯在建立和推导运动方程时，将作为坐标原点 静止的太阳这一引力天体纳入考量。此时，无论引力的传播是否需要时间，其对应的引力场在 naturgemaß 时间维度上保持恒定。在这种情况下，行星运动的计算结果中应如何体现 Ausbreitungsgeschwindigkeit 天体的作用。

也就是，劳厄认为格伯没有考虑引力源的加速度。但是，即使格伯考虑了引力源的加速度也没有用，因为 Jefimenko 就是这样做的，但引力源的加速度在假设恒星静止时它接近于 0。但是，格伯添加的 c 实际上正好等于本文的“把行星的加速度添加了进去”，因此他算出了正确的水星进动。Gerber 势的分母 $(1-\dot{r}/c)^2$ 在低阶展开时包含 $\dot{r}/c$ 和 $(\dot{r}/c)^2$ 项。在椭圆轨道中，$\dot{r}$ 周期性变化（近日点附近 $\dot{r}$ 负且大），这个速度依赖项会产生一个**净的径向力修正**。这个修正的效应在摄动计算中类似于“有效加速度项”:

但是，Gerber 是假设引力以有限速度 c 传播（类似延迟势的想法），没有从任何场方程或延迟积分公式推导这个势——这是纯经验拟合，为了匹配水星观测值而设计的。Gerber 势在低阶可以视为延迟势的“近似模拟”（retarded potential approximation），但不是直接重释第三项。现代分析（如 MathPages）指出，Gerber 势相当于一个“反向延迟”（向外运动增强势，而标准延迟势是向内运动增强）。

Gerber 的这个式子并非完全没有逻辑。他给引力势添加这个修正系数，其类似多普勒效应系数。但是，它不完整，因为括号里的速度缺少一个场源的速度，即完整版应为：

$$V = \frac{GM}{r(\frac{c \pm \dot{r}}{c \mp \dot{r}_1})^2}$$

当然，在计算水星进动时可以假设太阳静止不动，所以，括号内分母下的 $\dot{r}_1$ 可以省略，因 为它等于 0.

前文里讲了给麦克斯韦方程组添加一个多普勒系数，以此修正相对运动对引力的影响。也就是说，我们也认为径向速度会影响引力势。在我们计算水星进动的公式(1.9)里，是忽略了水星的径向速度，也就是忽略费曼公式的第二项，把它近似为 0，只考虑水星切割太阳引力场的情况。这是因为太阳的引力场太大了，而水星在其中运动。但是，如果是两个质量相当且相互接近或远离的速度比较大时（比水星的径向速度大），费曼公式的第二项是需要考虑的，不能近似为 0. 这时问题会变得很复杂，因为两个星球质量相当，相对径向运动显著，我 们需要考虑两颗星球的径向相对速度，还要考虑它们互相切割对方的引力场。

2.4 洛伦兹力公式及它和费曼公式的关系

$$F = qE + qv \times B$$

在教材里，第二项的磁场力通常被视为磁场源产生，但是，本文却把第二项看作是由受力粒子的运动产生，它是受力粒子的加速度，为什么可以看成“受力粒子加速度”？

在 Duan 的 2020 年预印本里，在给麦克斯韦方程组添加多普勒系数时，讲到“测试粒子感受到的场强度取决于它在场里的运动速度”【36】，当你将公式在受力粒子参考系下分析，第三项可以被重写为粒子加速度贡献

因此，我们完全可以重新解释洛伦兹力，$qv \times B$ 是粒子在恒定磁场里运动的力，大部分教材认为磁场力是磁场本来就固有的，粒子只是出现在磁场里受到这个力（$qv \times B$）。我们重新解释了这个公式，这个磁场并不是原来就有的，而是因为粒子在磁场里运动产生的一个新的场，它其实应该叫“电场”。

类比到引力的问题，水星围绕太阳公转，它产生了一个引力磁场力（GEM）或质量场力（本文术语），但是，这个力并不能视为由太阳这个引力源产生的，它其实是水星运动时切割太阳的引力场而产生的。所以，$mv \times B$ 里的 v 实际上是水星的线速度，就像洛伦兹力里的 v 一样。形象地看，水星原来在匀速直线运动，却被太阳的引力俘获，于是，它变成圆周运动，这时它有了向心加速度，而水星在太阳引力场里圆周运动会切割太阳引力场，于是就产生了 GEM 所说的引力磁场，这个场不能说是太阳产生的，因为它不是引力场。这就像洛伦兹力里的 qvB 一样，不能说是由磁场产生的。

洛伦兹力和测试粒子运动的联系是常识，许多文献都有讲。在多大程度上可以使用引力电磁场来描述测试粒子的运动，使用类似于洛伦兹的力方程。*“Furthermore, we examine to what extent, starting from a given solution of Einstein’s equations, gravitoelectromagnetic fields can be used to describe the motion of test particles using a Lorentz-like force equation.”*【37】

但是，这些作者的观点依旧是“磁场由源产生”。

相对论也认为磁力本质上是电场力的相对论效应。Purcell (1963Electricity and Magnetism 作者：Edward M. Purcell 第一版：1963 年) 与 Griffiths (1999) 早已明确指出磁力本质上是电场力的相对论效应，而非独立存在的实体场。

在相对论没有出现之前，发电机的原理一直有两种理论解释，一种是洛伦兹力，一种是法拉第电磁学。

在洛伦兹力公式里，磁场项的 v 是测试粒子的速度，而不是场源的运动速度（虽然是粒子的速度，但是，教科书里的洛伦兹力磁场项依旧被视为是磁场源产生的）。这个时候，以实验室为参考系，磁铁是不动的，这时发电机的电流是用洛伦兹力解释的。

在法拉第感应电流的解释中，导线不动，而磁铁在动，磁铁运动，然后在导线里产生感生电动势（法拉第）。

但是，这两种解释被相对论统一。（爱因斯坦，1905）

其实，这个问题正是狭义相对论诞生的火花之一。

爱因斯坦在 1905 年的论文《论动体的电动力学》开头就提到了这个“磁铁与导体”的问题。他发现：

无论谁动，产生的电流大小是一模一样的。

但在经典物理里，我们要么解释为“磁力”，要么解释为“电场力”，这在理论描述上不统一。

最终结论：磁场和电场本质上是同一个东西（电磁场）在不同参考系下的不同表现。

如果线圈动，你看到的是磁力在推电子。

如果磁铁动，你看到的是电场力在推电子

爱因斯坦在他 1905 年发表狭义相对论的那篇著名论文里，开篇第一段就写到了这个发电机（磁铁与导体）的不对称问题。

他说：

“大家知道，麦克斯韦的电动力学——像现在通常理解的那样——应用到动体时，会导致一些不对称性，而这些不对称性似乎并不是现象本身所固有的。”

爱因斯坦提出了狭义相对论，证明了电场和磁场是同一件东西在不同参考系下的表现。他在《论动体的电动力学》的开头就讨论了磁铁与导体相对运动的问题。他明确指出，观察到的现象只取决于相对运动。

爱因斯坦指出，当磁铁运动时，它产生电场；当磁铁静止而导体运动时，没有电场，但导体中产生了电动势。他写道：“此类例子……暗示了电动力学现象并不具有与绝对静止概念相对应的性质。”

既然电磁力的形式取决于相对运动，那么引力磁力（GEM）也应当被视为一种由于天体（水星）相对于场源（太阳）的运动而激发的力，而非场源固有的属性。

我们在处理发电机的工作原理时，也可以认为两种情况下都是线圈在运动，这只是参考系的选择而已。当大型发电机的磁铁在运动时，导线静止。但是，它可以看作是磁铁没有运动而导线相对磁铁在运动。所以，这依旧是导线在切割磁场，依旧是洛伦兹力公式的磁场项。所以，磁场项可以解释为是测试粒子在磁场中的运动产生的，而不是因为磁铁的旋转产生的。这种视角和相对论也是一样的，这也体现本文这个理论确实和相对论在某些方面等价。

类比电磁学，引力磁力（GEM）并非由引力源（如太阳）主动发出的独立场，而是由于受力天体（如水星）在线速度运动过程中‘切割’静态引力势场而涌现的动力学修正。正如磁力在电荷静止系中消失一样，这种质量场力也仅在天体相对于场源运动时显现，这完美解释了为何该力正比于行星公转的线速度。

教材为了计算方便，把 $v \times B$ 归结为场 B 的属性。但正如相对论所揭示的，如果没有 V，就没有这个力。这意味着力的“能量”或“机制”来源于物体的运动状态，而非源的辐射。【38】（爱因斯坦，1915）

尽管 Purcell（1963Electricity and Magnetism 早已明确指出磁力本质上是电场力的相对论效应，而非独立存在的实体场，但当代引力磁性（GEM）的研究者仍普遍陷于‘场源决定论’的误区，试图寻找由大质量天体主动激发的‘引力磁场’。 Purcell 认为，在电荷静止系里，磁场 B 消失，力完全来自电场 E。【39】磁力不是“源独立产生的实体场”，而是运动电荷在电场里的相对论修正。 这其实和我们所说的一样（当然，我们没有弯曲时空）：质量场力（引力磁力）也不是源独立产生的实体场，而是测试粒子在背景推迟引力势里的相对论切割效应。

本文认为，这种努力方向在逻辑上是冗余的。类比洛伦兹力的生成机制，水星进动所需的额外偏转力并不源于太阳的某种神秘辐射，而是水星公转运动对背景引力场进行‘相对论切割’的动力学涌现。正如 Purcell 所言，磁力在受力粒子的静止系中消失，这一事实暗示了 GEM 项的运动学本质。这一视角的转变，使得我们无需引入复杂的弯曲时空度规，仅凭平直时空下的推迟势即可完美重建水星轨道的动力学图景

如果要类比的话，洛伦兹公式右边第一项的电场项实际上是才是磁铁产生磁场，或者说是导线产生的磁场，而第二项实际上是测试粒子运动产生的效应。

或者说：

洛伦兹力第一项对应的是源在该参考系下产生的“场作用”；

第二项对应的是测试粒子由于自身运动而激活的动力学效应。

把洛伦兹力和费曼公式比较：

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{e_{r'}}{r'^2}+\frac{r'}{c}\frac{d}{dt}(\frac{e_{r'}}{r'^2})+\frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}er'\right]$$

当费曼公式第二项近似为 0，也就是源和场点之间没有相对速度时，这个公式其实就是洛伦兹力，费曼的公式在将第二项视为 0 之后，它其实是库伦力的修正（公式 2.1）：

$$\phi=\frac{\mathrm{kQ}}{4\pi\varepsilon_0}(1+\frac{v^2}{c^2}) \tag{2.4.0}$$

而把这个公式拆开，并变成力：

$$\mathrm{F}=\frac{\mathrm{kqQ}}{r^r}+\frac{kqQ}{r^2}\frac{v^2}{c^2}$$

这个公式右边两项就对应洛伦兹力：

$$F=q\mathrm{E}+qv\times\mathrm{B}$$

这可以验证，把两个公式右边第二项相等：

$$\frac{\mathrm{k}qQ}{r^2}\frac{v^2}{c^2}=qv\times B$$

得到：

$$\frac{\mathrm{k}Q}{r^2}=E$$

$$\frac{v}{c^2}E=B \qquad (2.4.1)$$

这正好符合电磁场里电场和磁场的关系，由此，可以确定，洛伦兹力其实是麦克斯韦方程组的一个解，即它就是简化的费曼电磁场公式。

Zinoviev 视角（源产生论）： 速度相关项（类似 v × B_g）是源（太阳）产生的引力磁场，测试粒子（水星）只是感受到它。 就像教科书说“q v × B 中的 B 是磁铁产生的”。

当前理论将这一完全相同的相对论视角应用于引力研究：速度相关的质量场力并非由中心天体产生的独立“引力磁场”（如齐诺维耶夫）【40】，而是测试天体在背景延迟引力势场中轨道运动所产生的动力学修正项。方程的形式结构得以保持，而物理起源从源中心论转向测试天体涌现论，这与相对论中电磁力统一理论的框架高度契合。

我们的观点： 质量场力（类似 q v × B_g）不是源独立产生的“引力磁场”，而是水星运动切割太阳背景推迟引力势时涌现的一个新的动力学修正。

Dodig 也曾提出类似的思想【41】：

“麦克斯韦方程组 + 洛伦兹力”并非两个独立公设，而是可以从更底层的两个假设统一推导出来：

(a) 库仑定律（静态电相互作用）

(b) 相互作用以光速传播（即存在推迟势）

所以，Dodig 认为场（Maxwell）与力（Lorentz）是同一物理根源（推迟的静电作用）的两种表现，**二者统一于因果传播原理**。

当前理论重构在 Dodig 的最新研究中获得了强有力的独立支持[《数学》2021 年第 9 卷第 237 页]。Dodig 证明，通过仅引入时间延迟这一物理原理，无需借助狭义相对论或洛伦兹变换，就能直接从库仑定律推导出完整的麦克斯韦方程组及

完整的洛伦兹力（包含速度相关项 qv×B）。这表明电磁学的动力学特征源自单一统一根源：库仑定律与有限传播速度。通过精确类比，本理论揭示引力学中速度相关的“质量场力”同样具有统一起源——即延迟引力势能。当费曼式表达式中的加速度项被重新分配给测试体而非源时，这种关联性便得以显现。由此推导出的质量场力与早期引力磁学理论（GEM）中长期寻求的类洛伦兹引力场力之间的形式对应关系并非偶然，而是电磁学与引力学共有的基于时间延迟基础的直接结果。这种相互强化效应强烈表明，当前理论框架所揭示的统一性比广义相对论的标准几何方法更具深度与基础性。

在引力场的问题里：

$$\frac{GMm}{r^2}\frac{v^2}{c^2}=mv\times B$$

也就是：

$$\frac{GM}{r^2}\frac{v^2}{c^2}=v\times B$$

在这个式子左边这一项里，把引力场和电磁场类比，那么，引力场强就对应于电场强度，即：

$$\frac{GM}{r^2}=E$$

所以，有：

$$\frac{v}{c^2}E=B \tag{2.4.2}$$

其中 E 是引力场强， B 是质量场强度。

Dodig 说洛伦兹力和麦氏方程组都可以通过更底层的库伦定律和推迟势推导出来，而我们是说因为类比费曼公式的引力公式可以得到一个和洛伦兹力形式一样的修正万有引力公式，所以，从中反推洛伦兹力和麦氏方程组可以统一，因为我们所依赖的费曼公式是从麦氏方程组添加推迟势来的。

把洛伦兹力的磁场力看作是粒子运动产生的是很自然的，因为 qvB 里的测试粒子的，v 是测试粒子的速度，而根据整个公式结构，这是一个力的公式，第一项就是库伦力，而磁场项也是力，那什么什么对象和 m 相乘是力呢？显然 vB 是个加速度，那它是谁的加速度，m 是测试粒子的，v 是测试粒子的，那 vB 只可能是测试粒子的加速度，它不可能是源的加速度，它不可能是施力物体的加速度。你对一个物体施力，物体获得一个加速度，但没有人说这个加速度应该是手的加速度吧？ 引力 F=mg 也是，g 引力场里自由下落的物体的，没有人说这个 g 是地球的加速度（当然，其实许多人确实这么说，但这是不准确的，地球这时是默认静止的，它没有运动，它哪来的加速度？）也就是说，加速度是受力物体的。那么，费曼公式里，第三项是加速度，而测试粒子是受力物体，所以，这个加速度理应是测试粒子的，源的电场对它作用，那么它就有了向心加速度。

所以，在费曼公式里，尽管在实验室参考系看来，是源电荷在运动，但是，我们不能选实验室参考系判断谁在运动，加速度是在源电荷和测试粒子之间发生的，是测试粒子相对源电荷的场发生了相对运动。用实验室来判断哪个在运动没有意义，因为测试粒子不是和实验室发了作用，源电荷也不是和实验室在发生作用，发生力的作用是源电荷和测试粒子之间。如果用实验室或者第三方观察者作为参考系，那么如果实验室或观察者不是同一个，有各种运动速度的观察者或者各种速度运动的实验室，那这些观察者或实验室看到的源电荷和测试粒子的运动都不相同，这显然违背物理规律和参考系应无关的观点。

3 电场和磁场的修正因子

在几年前，段贤香有一篇论文已经提出了“电磁场里的粒子所受到的场强和它的运动速度有关”[36]的观点。

前文的多普勒效应解释太阳和水星的关系时，是太阳的整体作用，它并不是我们通常所说的多普勒效应，它不是典型的多普勒效应。但是，太阳体积庞大，它不是只有那一个点，它对水星的作用是整体，也就是水星在受到那个点的引力作用的同时，还受到从太阳其他点来的引力的作用。类比到这里的图 4，场点 p 既同时受到水平线来的电场，也来自斜线方向来的场。P 点一边受到 t 时刻前斜线来的场，一边受到 $\bar{t}$ 时刻前的水平方向来的场，它实际所受到的场是这些场的和，这种是质量场力效应。但是，在一个时间段内，对水星作用的不仅仅是整个太阳，还有太阳的某个部分（同一个位置，无限小的一个点发出的一根引力线。）对水星的持续的引力，这个引力会因为太阳或水星的相对运动而发生变化。这时，有相对速度，这个是典型多普勒效应，也是我们通常所说的多普勒效应，这个场强变化和前文的多普勒效应影响的势并不一样。此时体现在类费曼公式（1.4.1）里就是第二项，即相对径向速度。

由于公式（1.4.1）的第二项 vj/c 里的 vj 是径向速度，所以，第一项和第二项可以提取出一个式子（这时忽略第三项）：

$$1+\frac{v_j}{c}$$

也就是：

$$\frac{c+v_j}{c} \tag{3.0}$$

vj 对应图 1 斜线路径的速度，其实，这是源和场点接近的情况，源和场点远离时，如果全部考虑，有两个速度，场源和自身的场的相对速度，以及场点和源的场的相对速度，即：

$$\frac{c\pm v_j}{c\mp v_c} \tag{3.1}$$

现在，考虑最简单的情况公式，场点远离源的情况，vj 是场点的径向速度，这时：

$$\frac{c-v_j}{c} \tag{3.2}$$

那么 c-vj 就是场点和场的相对速度，它也是场点现在这个时刻感受到的波速，设为 v_b：

$$c-v_j=v_{\mathrm{b}} \tag{3.3}$$

因为源发射的波是圆形，所以，从源发射的波速本来是 c，无论在斜线还是水平线方向上都是 c，但是，因为测试粒子或水星横向垂直于水平线运动，因此，引力波（或电磁波）为了击中测试粒子，它的速度必须分解为沿弦方向 v_b 和垂直于弦方向 v，即：

$$c^2 = v_b^2 + v^2$$

这相当于光速和测试粒子运动速度的平方差：

$$\sqrt{c^2 - v^2} = v_b \tag{3.4}$$

把公式 3.4 代入 3.3 和 3.2，公式 3.2 变成：

$$\frac{c - v_j}{c} = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{3.5}$$

把此式代入公式（1.4.1），并不考虑第三项，则有：

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{e_{r'}}{r'^2} + \frac{r'}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{e_{r'}}{r'^2}\right)\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e_{r'}}{r'^2}\left[1 + \frac{v_j}{c}\right]$$

这是源和场点接近的情况，考虑源和场点远离的情况，就是：

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e_{r'}}{r'^2}\left[1 - \frac{v_j}{c}\right]$$

把公式（3.5）代入上式：

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e_{r'}}{r'^2}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{3.6}$$

同样，可以得到磁场的修正公式：

$$B = \frac{u_0 I_0}{2\pi}\frac{ct}{s}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\hat{\Phi} \tag{3.7}$$

其中，$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ 是电场和磁场的修正因子。其中，v 是水星的横向线速度。

所以，我们的“费曼公式”（1.4.1）的第二项其实就是修正电场和磁场强度的另一个因子，即伽马因子，也说明公式也可以推导一个和相对论一样的伽马因子。而这里之所以没有平方，是因为，修正的是某一根电场线或者引力线，在太阳和水星的例子里，它修正的是来自太阳的某一根引力线，它是一维的，这和频率的特征一样，这个问题不是雨线例子里的二维平面，它不是切割平面上的一组引力线或电场线。而是，这个速度影响的只是某一根引力线的长度，只有一根引力线的长度在发生变化，所以，这里的修正不需要平方。

这个和相对论的伽马因子一样：

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

在计算 GPS 和粒子加速器里的时间膨胀时，这个 v 都是取横向速度，拆开这个式子：

$$\gamma = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

这个分母就是公式（3.4）的 v_b 。

从公式（3.3）和（3.4）来看，电场和磁场的修正因子似乎是减弱场强。而在前文，在解释水星进动时，水星的运动增加一个力，看起来似乎是矛盾的。但是，其实在水星进动的问题里，万有引力修正或推迟势的影响是水星和太阳引力场的相互作用，是另外增加一个场（质量场），或者如洛伦兹力公式，测试粒子运动增加一个磁场力。但是，在这里，受力卫星感受到的场强变弱，是引力场变弱，它不是引力磁场或质量场变弱，而是引力场变弱，它感受到的太阳的引力场的场强也会减弱，这是因为它在远离地球。在格里菲斯的推迟势例题里，也是电场减弱。这是因为场源（引力源或电磁场源）发射场时，第一个时间发出一个场，但当它旋转时，它的表面旋转到下一个位置再发出一个引力场，但是，这些场的速度并未变，因此，你能看到上面的式子里，光波走斜边和直边的光速一样，而所用时间 z/c 和 s/c 并不一样，这和前文所说的水星和雨线的例子并不同。

以上是用多普勒效应推导的电场和磁场强度修正因子（即伽马因子），我们也可以用推迟势的方式得到这个因子。

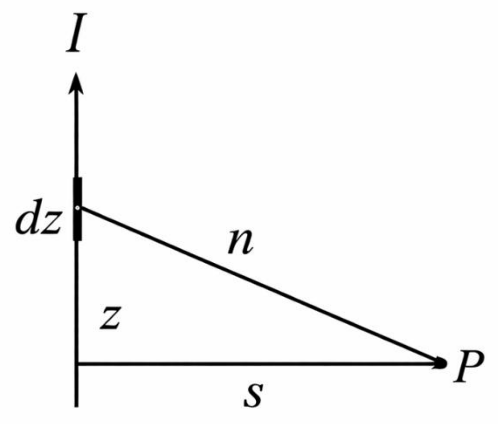

图 2

Griffiths 的《电动力学导论》第 10 章的例题 10.2（Griffiths，2013），图 10.4【42】。图里的导线是无限长的，这正好可以用来类比 GPS 卫星的运动。GPS 卫星围绕地球运动，地球表面是弯曲的，但是，就像微积分一样，在无限小的距离，地球表面可以看作是平直的，那卫星在地面上的投影也可心看作是直线。而且，因为卫星围绕地球运动，没有开始和结束，那么卫星这时就相当于无限长的导线，那地球就是无限长导线旁边的那个粒子。GPS 卫星和地面存在相对运动，这就相当于导线里的电荷在运动，图 10.4（即这里和图 2）的 P 点就相当于 GPS 卫星。地球所含有的物质成分的质量就相当于带电导线的电荷，即 m 类比于 q。

但是，格里菲斯的书在这里有错误，延迟距离并不是 r，r 是瞬时距离，也就是现在这个时刻源和场点的距离，但是，可以把电流的方向反过来，这样，r 就变成了延迟距离，此

时，数学推导不变。

例题 10.2 给出了电场和磁场的公式：

$$E=-\frac{\partial A}{\partial t}=-\frac{u_0 I_0 c}{2\pi\sqrt{(ct)^2-s^2}}\hat{z} \tag{3.4}$$

$$B=\nabla\times A=\frac{u_0 I_0}{2\pi s\sqrt{(ct)^2-s^2}}\hat{\Phi} \tag{3.5}$$

公式 1.0 可以变为：

$$E=-\frac{\partial A}{\partial t}=-\frac{u_0 I_0 c}{2\pi s\sqrt{\frac{(ct)^2}{s^2}-1}}\hat{z}=\frac{u_0 I_0 c}{2\pi s\sqrt{1-\frac{t^2}{\bar{t}^2}}}\hat{z} \tag{3.6}$$

这里，电场走斜边和直边速度都是一样的，都是 c。t 是电场走勾股的斜边 r 的时间，$\bar{t}$ 是电场走路径 s 的时间，这两个时间都是真实的时间，因为电场速度一样，但是，路径长度不同，因此，这两个时间并不相等，这和前文的雨线例子有所区别。

所以，公式 1.3 可以变形为：

$$E=\frac{u_0 I_0 c}{2\pi s\sqrt{1-\frac{t^2}{\bar{t}^2}}}\hat{z}=\frac{u_0 I_0 c}{2\pi s\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.7}$$

其中，v 是导线中电荷的运动速度，类比引力场，v 就是 GPS 卫星相对于地面的运动速度。这里的“伽马因子”会增加电场强度，类比到引力场，在近日点时，可以 GPS 卫星受到的地球的引力场的强度也是这样减小的。但是，请注意，这里所说的引力场强度减小是 GPS 卫星感受到的引力场强度，它并不是地球引力场强度本身减小。

在(3.6)和(3.7)的公式变形里，只是在根号外添加 s 等，这看起来是数学游戏，但是，我们可以从费曼物理学讲义里有类似的做法，在后文的公式 4.1.1 里。

当然，推迟势里预设了光速为 c 的前提，但是，这并不是说它就是相对论，或者说推迟势依旧是用相对论推导出来的。我们计算的是 p 点所受的场强，而到达 p 点的势我们积分的是同一个时刻的势，不必管它是什么时刻从导线出发的，很显然沿斜线路径和水平线 s 来的势经历的时间不同（如果到达 p 点是同时的话），但计算 p 点某个时刻的势其实不必管势的出发的时刻。换句话说，p 点所接收到的某个时刻的电势来自导线里的电荷不同时刻的发出的电场势。再换句话说，推迟势可以看作是场点在某一时刻接受的处于导线各处的不同位置的电荷发出的电势，这时，其实导线里的电荷可以看作是静止的，电势积分是各个位置的电荷和 P 点在静止状态时的电势积分，也就是，运动的情况被转换成了静止的情况进行处理。

这种处理方法和上面多普勒效应推导场强修正因子不同，但是，是有趣的不同。多普勒效应的方式是“把势积分看作是同一根电场线的持续作用”，所以，它是一个时间段的势的积分，但是，是来自同一根电场线，影响积分的是因为 p 点在运动（或者导线里的电荷在运动），因为 P 点运动，多普勒效应起作用（当然，是一维的）。但是，推迟势的方法是不同的电荷对 p 点的作用。一种方法是同一个电荷的持续作用（方向会变，电荷和 p 点的相对速度也在持续变化），另一种方法是不同的电荷的集体作用，方向不同，但是，电荷和 P 点的相对速度都是光速。

前面推导修正因子 v 平方/c 平方用的是多普勒效应，这同样可以用推迟势来看。场点受到的力可以看作是同一个电荷一个时间间隔内所有瞬时的时刻发出的电场势的积分，在引力

场里，就是水星接受来自同一个太阳的某个部分的引力势在一个时间段内的作用的积分，而这个积分是同一个太阳部位的持续作用，把时间段切成一个个小片，也就是分割成一个个静止的瞬时片段，和上面修正场强一样，在每一个瞬时，引力源和场点之间都可以看作是静止的，而静止时，引力场或电场速度不变，所以，推迟势这时依旧保持“光速不变”。这其实是微积分，就是“飞矢不动”的原理。这种“每一瞬时的微元”对应相对论的局域惯性系，而光速不变也正好是在这种参考系下才能成立，而推迟势也正好存在这种“光速不变”。

4. 相对论的逻辑

4.1 费曼的讲义

在费曼的物理学讲义第 2 卷第 21 章里，在 21-6 节，他用李纳.维谢尔势推导出一个公式（费曼物理学讲义）：

$$\phi\text{（}x,y,z,t\text{）}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x-vt)^2+(1-\frac{v^2}{c^2})(y^2+z^2)}} \quad \textbf{(4.1.0)}$$

在这个公式里，x 并没有像相对论里那样被洛伦兹变换，但是，费曼紧接着又把公式变形为（即公式 21.39）：

$$\phi\text{（}x,y,z,t\text{）}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{1}{\sqrt{(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}})^2+y^2+z^2}} \quad (4.1.1)$$

在这里，公式已经被乘以了伽马因子，这时坐标 x 被费曼用洛伦兹变换改变了，这体现了 sR 对坐标（即空间）的改变。然后，他在第 2 卷 25-5 章里，用相对论的坐标系变换方法推导出来一个相同的公式，即公式 25.27：

$$\phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{1}{\sqrt{(\frac{x-vt}{1-v^2})^2+y^2+Z^2}} \quad (4.1.2)$$

这里 c 是 1.

公式 4.1.1 和 4.1.2 完全一样。但是，公式 4.1.1 是用李纳.维谢尔势推导的，而公式 4.1.2 是用相对论的坐标系变换推导的。而用推迟势推导并没有改变时空，它没有显式地含有伽马因子。在公式 4.1.0 里，我们看不出来空间和时间被改变，而在公式 4.1.1 里，经过费曼对公式的变形，公式体现了时间和空间的改变，但是，在数学上，公式 4.1.0 和公式 4.1.1 却是等价的。

这说明：相对论和推迟势是等价的，它们在数学上是等价的。只是，它们考虑问题的角度不同，推迟势里的“距离”和“时间”是真实的，比如在 25-5 章里，有一个 25-2 的图。相对论的逻辑是把 r 和 r' 看作是不同的坐标系的“空间矢量”，r 和 r' 是不同参考系的矢量，它们之间需要度规转换。但是，如果用推迟势的逻辑，r 和 r' 却只是引力传播的距离的不同，因为引力的延迟，所以，有两个不同的距离。时间也是一样，相对论把两个时间看作是两个坐标系的，然后这两个时间之间需要度规转换。但是，如果用推迟势的逻辑来看，时间只是因为延迟而变得不同，如果引力是瞬时传递的不需要时间，那么，自然只有一个时间，但是，引力波有速度，那么就会出现“延迟的时间”和“不需要延迟的时间”。

也就是说 ，相对论和推迟势只是对同一个问题采取不同的处理方式，前者是用坐标系

变换的方法，后者是用“引力延迟”，在数学上它们等价，公式可以通过变形变得一样，但是，物理逻辑不同。

这也是为什么这篇文章里用推迟势推导出一样的能量守恒方程 1.1。因为相对论的两个参考系的空间和时间不同就对应于推迟势的两个“距离”和“时间”，在推迟势理论里，一个“距离”是“延迟的距离”，一个是不需要“延迟的距离”，一个是需要延迟的“时间”，一个是不需要延迟的“时间”。

当然，公式 4.1.0 和公式 4.1.1 说的是匀速运动情况，但是，如费曼在 26-1 章里所说，“事实上，如果做一个附加假设，即假定那些势仅取决于在推迟时刻的位置和速度，那么式 26-1 便是以任意方式运动的电荷的势的完整公式。”，所说，这两个公式也是任意运动包括加速度运动的公式。

4.2 相对论的数学推导

在相对论的方程推导中（沈贤勇 2023 破解引力，附录），有这样几个中间方程：

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}=-\frac{GM}{r^2}(1+\frac{2\phi}{c^2})(\frac{dt}{d\tau})^2+\frac{GM}{c^2r^2}(1+\frac{2\phi}{c^2})^{-1}(\frac{dr}{d\tau})^2+r(1+\frac{2\phi}{c^2})(\frac{d\varphi}{d\tau})^2 \quad (4.2.0)$$

$$\frac{d^2r}{d\tau}=-\frac{GM}{r^2}(1+\frac{2\phi}{c^2})^{-1}(\frac{E}{c^2})^2+\frac{GM}{r^2c^2}(1+\frac{2\phi}{c^2})^{-1}(\frac{dr}{d\tau})^2+r(1+\frac{2\phi}{c^2})(\frac{L}{r^2})^2 \quad (4.2.1)$$

$$(1+\frac{2\phi}{c^2})^{-1}(\frac{dr}{d\tau})^2=(\frac{E}{c^2})^2c^2(1+\frac{2\phi}{c^2})^{-1}-\frac{L^2}{r^2}-C_2 \quad (4.2.2)$$

$$E=-\frac{GM}{r}-\frac{L^2}{r^2}\frac{GM}{c^2r}+\frac{1}{2}[(\frac{dr}{d\tau})^2+(r\frac{d\varphi}{d\tau})^2] \quad (4.2.3)$$

我们可以看到，在公式（4.2.0）时，它是测地线方程，此时公式里有克氏符。在这里，克氏符是用来改变 $d\tau$ 、dr 、$d\varphi$ ，也就是用来改变时间和空间的。到公式（4.2.1）时，依旧可以看到克氏符还在对 r 起作用，但对 t 的作用已不明显，公式通过变形改变了物理意义。

到公式(4.2.2)时，依旧能看到克氏符对 r 起作用。但是，当把公式 4.2.2 两边都乘以 $1+\frac{2\phi}{c^2}$ 时，发生了什么？它变成了公式 4.2.3。注意：相对论在计算水星进动时，把这里的 $d\tau$ 近似看作是 dt 。这时，度规消失了，克氏符看不见了，在这个公式里，我们看不到空间 r 和时间 t 被改变，因为相对论计算时把 $d\tau$ 近似看作是 dt 。空间和时间在最后并没有克氏符作为系数，“度规的作用”变成了公式 4.2.3 右边第二项（$-\frac{L^2}{r^2}\frac{GM}{c^2r}$），而这一项是公式（1.6）的质量场力。也就是说，在这个推导过程中，通过一系列的数学变形,但是，最后，时间和空间的改变却消失了，它们变成了质量场力，因为 r 和 t 依旧是牛顿的。

所以，从这个推导可以看出，相对论的时空弯曲造成的结果是一个质量场力。从公式（4.2.0）到（4.2.3），在这一系列的数学变形中，公式的物理意义其实变了。和公式（4.1.0）、公式（4.1.1）一样，虽然只是数学变形，呈现的物理意义却不一样。

在牛顿力学里，我们把时间和空间看作不会变化的，然后在其中发现“力”。但是，相对论的逻辑是相反的，它把时间和空间看作变化的，那么，“力”就消失了，取代它们的是“时空弯曲”。所以，我想说的是，这两种处理方式结果是等价的，它们只是看待问题的角

度不同。

其实在公式 4.2.0 里，我们换个角度看待公式，也可以看作“dr 等改变了引力势”，而相对论看到的是“引力势改变了 dr 等”。前一个视角是推迟势的视角，也就是因为延迟作用，dr 的长度变得不同，而相对论的视角是因为引力的存在改变了 dr。但是，这两种看待问题的视角反应在数学公式上却一样。所以，相对论的坐标变换和推迟势在数学上是等价的，只是它们处理问题的逻辑是相反的。

结论

从推迟势出发可以推导出公式费曼的电磁场公式，然后利用这个公式类比得到天体力学的第三个积分，再计算出水星进动和星光弯曲。用“无限长导线的电场”类比 GPS 卫星和回旋加速器，这样得到修正引力场强和电场强度等公式，再用这些公式计算 GPS 时差和回旋加速器里的粒子运动周期等。

介质理论和相对论是“走不同的路到达相同的目的地”，二者在公式 1.5 和 1.6 这里显示出区别。在介质理论里，不能把公式 1.5 变形为公式 1.6，因为虽然电场势没有变，但是，在局部，x 分量等却变了。介质理论是从推迟势开始推导出公式，然后计算水星进动、GPS 等，而相对论是从洛伦兹变换和度规开始，这两种理论的道路不同，但它们到达了同样的目的地：它们用于计算水星进动、GPS 时间差等问题的公式都是一样的。因此，它们在数学上是等价的，但是，二者的物理逻辑不同。

预言和猜想：

1. 是否存在奇点？

2. 本文认为存在引力子这类粒子，所以，在物理上，不存在无限小的粒子，引力势里的 r 不可能为无限小。而且因为存在斥力（牛顿第二定律就是斥力），物质不可能无限小，即便引力再强也不可能，引力子在引力大到一定程度时极可能会被破坏，这样，引力理论就不能描述它。

3. 这里讨论一些猜想，以帮助解释奇点不存在的预言。量子是相对稳定的一个结构，就像行星，它是一个个的，它不是最小结构，它只是一个相对稳定的状态。但是，它依旧可分，比如光子和引力子，光子应该也可分，但是光子之所以有光子的特性，就是因为它的稳定结构，一旦这种结构被破坏，那它就不是光子了，引力子是一个相对稳定的物质状态，结构被破坏也一样。但是，这些稳定状态并非不可打破，就像原子也可以被撞碎一样。原子曾经被认为是基本的，后来发现由质子/电子组成；质子曾经被认为是基本的，后来发现由夸克组成。因此，无限小的粒子是不存在的，量子永远可以分解成更小的量子，物质无限可分，但是，每分一次，它就变了，它不再是原来的量子了。引力子可以再分，但是，再分解，它就不是引力子了，而是一种新的东西组成的东西，那时候这个引力理论就不能解释它，我们需要新的理论解释。

4. 因此，我们认为不存在奇点，因为不存在无限小的物理实体，引力子也不是无限小的。黑洞可能存在，而且阴影部分就是黑洞本身，视界就是黑洞的大小边界。

5. 以太是否存在？

6. 我们的理论需要以太作为引力和电磁场的传播介质，因为这个理论并不认为时间和空间真实存在，所以，无法像相对论那样解释引力作用，它需要物理实体解释引力及电磁场的传播。不用以太这个东西作为参考系无法解释地球自转，因为萨格纳克干涉仪无法测量自转，没有以太，干涉仪和什么作用发生干涉条纹变化呢？需要一个物理实体和干涉仪相互作用解释地球自转，以太就是这个物理实体，它是参考系。

7. 那么，以太是否存在？在 Duan 以前的预印本里，D uan 提出了一个以太模型，以太就像大气，每一个星球都有自己辐射的以太场，这些以太场和这个星球相对静止。（Duan，2020），但是，现在这个模型需要修改，因为萨格纳克效应测到了地球的自转，所以，地球产生的以太场不能跟随它自转，但却能跟着它平动，这样就能同时解释 M M 实验和萨格纳克效应。但是，为什么以太场平动时可以跟地球运动，而自转时不行呢？这回到了牛顿力学。

8.　　从引力源出发的以太场粒子，因为惯性，它无论在引力源的哪个方向，它都是跟着引力源运动，虽然有相对速度。但是，以太粒子在各个方向上都随引力源运动，在这里，以太场和声波不同，声波源不会发射“声子”，但是，引力源会发射以太粒子，且粒子有惯性，以太场和空气不一样。地球平动可以带着以太一起飞奔，因为这是直线运动，以太也有惯性，以太就跟着地球运动，因为那本来就是它的运动方向。但是，自转呢？也是因为惯性，因为以太需要保持自己直线向前运动状态，而地球却转起弯来，它就把以太场甩掉了，以太场无法跟着地球自转。

9.　　所以，MM 实验是测不到以太风的。这就像在敞篷巴士上扔苹果，无论向哪个方向扔，它都会随巴士运动，虽然因为“扔”这个力，苹果会和巴士产生相对速度。但是，它依旧带有惯性，因为我们在车厢向前跳跃，我们不会跳出车外，因为我们和车一起都有惯性。

10.　　萨格纳克效应是因为地球在自转，但地球发出的以太保持惯性运动，而地球在转弯，所以以太被甩出去，这就测到了自转。那以太为什么有惯性呢？因为斥力，以太因为斥力从源辐射，是斥力从引力源里推出以太，在以太离开引力源之后，它就有惯性，所以，惯性是斥力产生的。不是以太产生惯性，而是斥力产生惯性，而以太是被斥力推出引力源的东西。斥力是牛顿第二定律，它怎么来的呢？引力转化的，引力源因为引力收缩，于是挤出来“以太”，而这个“挤”，就是斥力。这一切的原因是物质既有引力又有保持原样的倾向，所以，引力和斥力是相伴相生的。

11.　　所以，斥力才是更底层，而不是以太。以太和引力源之间也是斥力的关系，因为以太从地球出发后，随地球平动但不随地球自转，所以才有萨格纳克效应和 MM 零结果。因此，惯性是斥力造成的，其实，惯性也由引力制造，比如自由落体，它也是惯性。

12.　　引力场和以太场应该不是同一个东西，引力场和电磁场及声波可能更相似，但是，以太场和这几个场可能不一样了。这也说明，类比不能完全照搬，类比有尽头，以太场粒子应不会像“声子”那样没有惯性。这可能因为以太粒子才是构成引力场的介质，就像空气是声波的介质，引力场是声波，而以太是空气。

13.　　由马赫原理，牛顿水桶是相对于宇宙旋转，所以，似乎存在一个绝对参考系。而且，本文前文所说的牛顿第二定律的加速度是相对加速度并不准确，准确的是说受力物体相对于施力物体的以太场的相对速度，而不是相对于这个物体的相对速度，但是，为了简略和描述方便，本文前面近似的说成是两个物体之间的相对速度。

14.　　牛顿的绝对参考系是数学的，马赫原理（ 马赫，）等于把这个参考系定义为遥远的宇宙，而本文认同马赫的这种做法，但是，我们补充以太作为更准确的参考系载体，这是更严谨的做法（当然，还需要实验检测以太的存在），不是把星球本身作为参考系，而是把星球激发的以太场作为参考系。但是，这是更严格的处理，在本文里，是把引力源近似作为参考系来计算。

15.　　马赫说：

16.　　“水不是相对于‘绝对空间’旋转，而是相对于宇宙中所有遥远星体旋转。

17.　　如果把水桶放在空无一物的宇宙中，旋转将不会导致水面凹陷。（马赫，）

18.　　因为斥力的存在（牛顿第二定律就是斥力，Duan,2023)，我们的理论似乎和马赫的这些话不太一样。因为，即使没有宇宙，水桶里的水面一样凹陷，因为水桶和水之间，以及水分子和水分子之间会产生斥力。即使宇宙突然消失，只要还有桶和水，那么，它们旋转时，水分子之间就会有斥力，有斥力就有惯性，水分子会试图保持直线运动，这样，它就会撞到桶壁，桶壁和水之间就会有斥力，所以水的四周会隆起，水面就会凹陷。

19.　　但是，我们在讨论水桶实验时忘了一件事：宇宙不存在时，还有一个东西存在，观察者，转动水桶的人，给水桶第一个推动力的人。如果观察者不去转动水桶，水桶自己会转动吗？那水面会发生凹陷吗？不会。所以，马赫是对的，整个宇宙消失，只剩水桶和水，那真的水面真的不会凹陷。

20.　　在地球例子里，确定自转确实不用宇宙以太场，但是，地球的公转却需要，没有背景以太场，地球向谁平动？所以，绝对参考系似乎是不必要，但是，还是需要优先参考系。不存在绝对的、唯一的、全宇宙通用的“绝对参考系”（牛顿的绝对空间），但存在“优先参考系”。

现实印证：CMB 就是“以太指纹”

我们观测到 CMB 偶极各向异性 → 太阳系以 368 km/s 相对于 CMB 静止系运动；在我们的理论中：CMB 静止系 = 宇宙以太的平均静止系；因为 CMB 光子是在宇宙物质退耦时释放的，而物质正是以太的源。

检测以太需要一个实验：让干涉仪相对地球的以太场高速运动，这样检测以太风，但是，因为以太不随引力源自转，那么，需要在考虑这个情况下让干涉仪相对以太高速运动。但是，要匀速直线运动，因为相对论的光速不变只在惯性系成立。

参考文献

[1] 梁灿彬. 微分几何与广义相对论[M]. 第二版. 北京: 北京科学出版社, 2006: 第七章 7.1 节.
[2] H.邦迪. 广义相对论中的负质量[J]. 1957 年 7 月.
[3] 段献祥. 类似于相对论的介质理论[M]. 2023 年 6 月版. https://doi.org/10.31219/osf.io/x2vzf; DOI: 10.17605/OSF.IO/JPW2R.
[4] B.黎曼. 论几何学的基本假设[M]. 陈惠勇译. 第一版. 北京: 科学出版社, 2021: 第 2 章第 2.1 节.
[5] M.L.鲁杰罗. 引力电磁类比研究札记[J]. 收稿日期：2021 年 9 月 29 日.
[6] O.亥维赛. 引力与电磁类比[J]. 1893 年.
[7] H.蒂林. 物理杂志[J]. 1918, 19: 33.
[8] J.伦斯, H.蒂林. 物理杂志 Z 辑[J]. 1918, 19: 156.
[9] H.蒂林. 物理杂志[J]. 1921, 22: 29.
[10] S.保罗. 引力电磁学：表述[J]. 理论物理学高级研究, 2015, 9(16): 787-793.
[11] B.希尔斯. 引力电磁学：迈向质量起源统一理论的又一步[J]. 2012 年 1 月.
[12] 季诺维也夫. arXiv:0801.0957[预印本]. 2008 年.
[14] 乌马里诺, 加拉拉蒂. 《弱静引力场中的超导体》一文中引力电磁学与其他版本的评述[J]. 2017 年 12 月.
[15] B.希尔斯. 引力电磁学：迈向质量起源统一理论的又一步[J]. 2012 年.
[16] 《弱静引力场中的超导体》一文中引力电磁学与其他版本的评述[J]. 欧洲物理杂志 C 辑, 2017 年 12 月.
[17] S.乌里希. 复克利福德代数中的引力电磁学[J]. 2005 年 12 月 10 日.
[18] E.M.珀塞尔. 电磁学[M]. 第一版. 1963 年.
[19] D.J.格里菲斯. 电动力学导论[M]. 1999 年版.
[20] V.B.贝泽拉, A.巴罗斯, C.罗梅罗. 标量-张量引力理论中引力磁效应的若干问题研究[J]. 收稿日期：2005 年 10 月 23 日.
[21] B.黎曼. 电动力学研究[J]. 物理学年鉴, 1867, 207: 237；哲学杂志, 1867, 34: 368. http://kirkmcd.princeton.edu/examples/E
[22] L.洛伦兹. 均匀弹性体的弹性常数理论研究[J]. 纯粹与应用数学杂志, 1861, 58: 329. http://kirkmcd.princeton.edu/examples/mechanics/lorenz_j
[23] G.佩罗萨, S.迪·米特里, W.A.巴莱塔等. 电动力学推迟势中的多普勒特征[J]. 物理学开放期刊, 2023, 14.
[24] Y.V.切斯诺科夫. 基于完整麦克斯韦方程组的多普勒效应分析[J]. 2022 年 2 月 16 日.
[25] M.L.鲁杰罗, D.阿斯特夏诺. 类比的故事：引力磁效应、旋转源、观测者及相关问题综述[J]. 物理学通讯期刊, 2023 年.
[26] J.M.蒙特斯. 韦伯电动力学的现代化研究[J]. 收稿日期：2023 年 3 月 19 日.
[27] P.格伯. 引力的空间与时间传播[J]. 数学与物理杂志, 1898, 43: 93-104.
[28] V.H.扎维里. 周期相对论：平直时空下的引力理论[J]. 日期：2025 年 1 月 11

日.
[29] N.V.米茨基耶维奇. 李纳-维谢尔解再探讨[J]. 2011 年 1 月: 1-20.
[30] 段献祥. 类似于相对论的介质理论[M]. https://doi.org/10.31219/osf.io/x2vzf; DOI: 10.17605/OSF.IO/JPW2R.
[31] 段献祥. 类费曼电磁场公式：一种新的引力场公式[J]. DOI: 10.13140/RG.2.2.27402.79041.
[32] H.贝赫拉. Ummarino 和 Gallerati 在《弱静引力场中的超导体》中关于引力电磁学的论述与其他版本的比较[J].
[33] P.格伯. 引力的传播速度[J]. 数学与物理杂志, 1898, 43: 93–104.
[34] M·冯·劳厄. 引力的传播速度：对 P·格伯论文的评述[J]. 物理学年鉴, 1917, 358(13): 214–216.
[35] 沈贤勇. 破解引力[M]. 北京: 化学工业出版社, 2023 年 11 月.
[36] 段献祥. 类似于相对论的介质理论[M]. 2020 年 6 月 21 版. https://doi.org/10.31219/osf.io/x2vzf; DOI: 10.17605/OSF.IO/JPW2R.
[37] M.L.鲁杰罗. 引力电磁类比研究札记[J]. 2021 年 9 月 29 日.
[39] E.M.珀塞尔. 电磁学[M]. 第一版. 1963 年.
[40] 季诺维也夫. 如 arXiv:0801.0957 等对称性理论所述.
[41] H.多迪格. 从库仑定律直接推导李纳-维谢尔势、麦克斯韦方程组和洛伦兹力[J]. 数学, 2021, 9: 237.
[42] D.J.格里菲斯. 电动力学导论[M]. 2013 年版: 第 10 章例题 10.2, 图 10.4.
[43] R.P.费曼. 费曼物理学讲义[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2020 年 3 月: 第 21 章.
[2]