Théorie des sommes récursives et applications

MBELAWADZAI Joseph[1,2*] OUSMANOU ABDOU Mohamadou[1†] KOUAKEP TCHAPTCHIE Yannick[2,3‡]

[1]Dpt of Mathematics and computer science, The University of Ngaoundere, PO Box 454, Cameroon

[2]MATHS 237, Cameroon

[3]Dpt of SFTI, EGCIM, PO Box 454, Ngaoundere, Cameroon,

23 mars 2025

Résumé

Cet article se propose de présenter une nouvelle théorie mathématique autour du concept que nous appelons « *somme récursive* ». la notion de somme récursive à notre sens, est définie comme le processus de réduction d'un entier à un chiffre unique compris entre 0 et 9 par l'addition répétée de ses chiffres. Une fois définie, nous explorons les propriétés arithmétiques fondamentales de cette opération, notamment sa périodicité, sa relation avec la congruence modulo 9 et la congruence modulo 3 et la détermination d'un nombre premier. En outre nous définissons pour un entier a entre 0 et 9, un autre concept en relation avec la somme récursive appelée « *récursivité inverse* » définie comme l'ensemble de tous les entiers dont la somme récursive est égale à a. Nous discutons des implications théoriques de ces concepts et de leur relation avec l'arithmétique des nombres. Enfin, nous présentons des exemples pratiques illustrant l'application de cette théorie dans la résolution de problèmes mathématiques .

Mots clés : Somme, Récursive, Récursivité.

Introduction

Dans le domaine des mathématiques, les propriétés des entiers et leur manipulation jouent un rôle fondamental dans la compréhension des structures numériques. Parmi ces propriétés, la notion de somme récursive des chiffres d'un entier que nous appelons « *réduit* », induit plusieurs résultats qui méritent d'être étudiés. Dans cet article, nous introduisons notre théorie sur la somme récursive en mettant en lumière quelques propriétés arithmétiques.

*e-mail:mbelajosephalgebra@gmail.com
†e-mail:abdouousman584@gmail.com
‡e-mail:kouakep@aims-senegal.org

La somme récursive des chiffres d'un entier, également connue sous le nom de "*réduit d'un entier*", est un concept qui trouve ses racines dans la théorie des nombres et l'arithmétique modulaire [5]. Ce processus consiste à additionner les chiffres d'un nombre jusqu'à obtenir un résultat compris entre 0 et 9. Cette technique est souvent associée à la réduction numérique, une méthode utilisée en numérologie et en psychologie pour interpréter les nombres. [4]

Plusieurs études ont exploré les propriétés arithmétiques de cette opération. Par exemple, la somme des chiffres d'un nombre a été liée à sa congruence modulo 9, une propriété qui permet de déterminer si un nombre est divisible par 9. Des chercheurs comme [9] ont examiné les implications de cette relation dans le cadre des systèmes de vérification de la divisibilité.

D'autres travaux, tels que ceux de [7] ont abordé les implications combinatoires de la somme des chiffres, en se concentrant sur les distributions de ces sommes dans divers ensembles de nombres.

Cependant, malgré l'intérêt croissant pour ce concept, peu d'études se sont concentrées spécifiquement sur la notion de "*somme récursive*" telle que définie dans notre théorie [6].

Dans cet article, nous présentons une définition de deux concepts (*somme récursive et récursivité inverse*) et nous explorons outre les propriétés arithmétiques des sommes récursives, la liaison de ce concept avec la congruence modulo 3 et l'identification d'un carré ou d'un cube parfait.

Par ailleurs, l'on définit des ensembles particuliers pour les chiffres compris entre 0 et 9. Ce concept que nous désignons par "*récursivité inverse*" est définie pour un entier a compris entre 0 et 9 comme un ensemble des nombres dont la somme récursive est a. Plusieurs propriétés de ces ensembles sont étudiés et leur implications dans les calculs des puissances des nombres sont explorées.

1 Somme récursive des entiers

1.1 Définitions et notations

Définition 1.1 ***(Somme récursive d'un entier positif)***
Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle reduit *de n et on note $Sr(n)$, la somme récursive des chiffres constituant n jusqu'à l'obtention d'un entier compris entre 0 et 9.*

Définition 1.2 ***(Somme récursive d'un entier négatif)***
Soit $n \in \mathbb{Z}_{-}$, on définit le réduit de n par :

$$Sr(n) = 9 - Sr(-n)$$

Remarque : On déduit de la définition précédente que pour tout entier n, $Sr(n) + Sr(-n) = 9$

Exemple 1.1 *Calculons les réduits de 19 et -19*

❖ *Déterminons $Sr(19)$*
Par définition on a :

$$Sr(19) = Sr(1 + 9) = Sr(10) = Sr(1 + 0) = Sr(1) = 1$$

Donc $Sr(19) = 1$ *car* $0 < 1 < 9$

- ❖ *Déterminons* $Sr(-19)$
  Par définition on a

$$Sr(-19) = 9 - Sr(-(-19)) = 9 - Sr(19) = 9 - 1 = 8$$

Donc $Sr(-19) = 8$ *car* $0 < 8 < 9$

1.2 Premières propriétés

Proposition 1.1 *Le réduit d'un entier non nul est périodique de période* 9.

Preuve

Soit $n \in \mathbb{Z}^*$, montrons que $Sr(n+9) = Sr(n)$

→ Supposons dans un premier temps que n est un entier naturel
Procédons par récurrence sur n
• Pour $n = 1$, on a :
$Sr(1) = 1$
$Sr(1+9) = Sr(10) = Sr(1+0) = Sr(1) = 1$
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $Sr(n+9) = Sr(n)$. Montrons que $Sr((n+1)+9) = Sr(n+1)$
Il suffit pour cela de poser $m = n+1$ et on a :
Puisque $n \in \mathbb{N}^*, m > 1$
D'où $Sr((n+1)+9) = Sr(m+9) = Sr(m)$ d'après l'hypothèse de récurrence
D'où $Sr((n+1)+9) = Sr(n+1)$
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, Sr(n+9) = Sr(n)$
C'est à dire que Sr est périodique de période 9

→ Supposons que n est négatif
Puisque $Sr(n) = 9 - Sr(-n)$ et $-n \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\begin{aligned} Sr(n+9) &= 9 - Sr(-(n+9)) \\ &= 9 - Sr(-n-9) \\ &= 9 - Sr(-n) \quad \text{car } Sr \text{ est périodique de période 9 donc de période aussi -9} \\ &\qquad\qquad \text{dans le cas des entiers positifs} \\ &= Sr(n) \quad \text{Par définition de réduit d'un entier négatif} \end{aligned}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{Z}^*, Sr(n+9) = Sr(n)$

Proposition 1.2 *Soient* $a, b \in \mathbb{Z}^*, n \in \mathbb{N}^*$

1) $Sr(a+b) = Sr(Sr(a) + Sr(b))$

2) $Sr(a \times b) = Sr(Sr(a) \times Sr(b))$

3) $Sr(a^n) = Sr((Sr(a))^n)$

Preuve

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*, n \in \mathbb{N}^*$

1) Montrons que $Sr(a+b) = Sr(Sr(a) + Sr(b))$

   Par définition, on a :

   $0 \leq Sr(a) \leq 9$ et $0 \leq Sr(b) \leq 9$

   D'où

$$\begin{aligned}
a &\equiv Sr(a)[9] \\
b &\equiv Sr(b)[9] \\
\Longrightarrow a+b &\equiv Sr(a) + Sr(b)[9] \\
\Longrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} :\ a+b &= Sr(a) + Sr(b) + 9k \\
\Longrightarrow Sr(a+b) &= Sr(Sr(a) + Sr(b) + 9k) \\
&= Sr(Sr(a) + Sr(b)) \quad \textbf{car Sr est périodique de période 9}
\end{aligned}$$

   D'où $Sr(a+b) = Sr(Sr(a) + Sr(b))$

2) Montrons que $Sr(a \times b) = Sr(Sr(a) \times Sr(b))$

   De même, puisque $0 \leq Sr(a) \leq 9$ et $0 \leq Sr(b) \leq 9$

   On a

$$\begin{aligned}
a &\equiv Sr(a)[9] \\
b &\equiv Sr(b)[9] \\
\Longrightarrow a \times b &\equiv Sr(a) \times Sr(b)[9] \\
\Longrightarrow \exists\, k' \in \mathbb{Z} :\ a \times b &= Sr(a) \times Sr(b) + 9k' \\
\Longrightarrow Sr(a \times b) &= Sr(Sr(a) \times Sr(b) + 9k) \\
&= Sr(Sr(a) \times Sr(b)) \quad \textbf{car Sr est périodique de période 9}
\end{aligned}$$

   D'où $Sr(a \times b) = Sr(Sr(a) \times Sr(b))$

3) Montrons que $Sr(a^n) = Sr((Sr(a))^n)$

   Procédons par récurrence

   • Pour $n = 0$ on a $Sr(a^0) = Sr(1) = 1$ et $Sr((Sr(a))^0) = Sr(1) = 1$

   • Supposons que $\forall\, n \in \mathbb{N}, Sr(a^n) = Sr((Sr(a))^n)$

Montrons que $Sr(a^{n+1}) = Sr((Sr(a))^{n+1})$. On a

$$\begin{aligned} Sr(a^{n+1}) &= Sr(a \times a^n) \\ &= Sr(Sr(a) \times Sr(a^n)) \quad \text{d'après 2} \\ &= Sr(Sr(a) \times Sr((Sr(a))^n) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= Sr(Sr(Sr(a)) \times Sr((Sr(a))^n)) \quad \text{car } Sr(Sr(a)) = Sr(a) \\ &= Sr(Sr((Sra) \times (Sr(a))^n)) \\ &= Sr(Sr((Sr(a))^{n+1})) \\ &= Sr((Sr(a))^{n+1}) \end{aligned}$$

D'où $Sr(a^n) = Sr((Sr(a))^n)$

Proposition 1.3 ***Généralisation***
Soit $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ une famille d'entiers relatifs. Alors

1) $Sr\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) = Sr\left(\sum_{i=0}^{n} Sr(a_i)\right)$

2) $Sr\left(\prod_{i=0}^{n} a_i\right) = Sr\left(\prod_{i=0}^{n} Sr(a_i)\right)$

Preuve
Soit $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ une famille d'entiers relatifs.

1) Montrons que $Sr\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) = Sr\left(\sum_{i=0}^{n} Sr(a_i)\right)$
Procédons par récurrence
• Pour $n = 2$, c'est la propriété $1)$ de la proposition 1.2.
• Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Supposons que $Sr\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) = Sr\left(\sum_{i=0}^{n} Sr(a_i)\right)$
Montrons que $Sr\left(\sum_{i=0}^{n+1} a_i\right) = Sr\left(\sum_{i=0}^{n+1} Sr(a_i)\right)$

On a

$$\begin{aligned}
Sr\left(\sum_{i=0}^{n+1} a_i\right) &= Sr\left(\sum_{i=0}^{n} a_i + a_{n+1}\right)\\
&= Sr\left(Sr\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) + Sr(a_{n+1})\right) \quad \textbf{d'après la proposition 1.2}\\
&= Sr\left(Sr\left(\sum_{i=0}^{n} Sr(a_i)\right) + Sr(a_{n+1})\right) \quad \textbf{d'après l'hypothèse de récurrence}\\
&= Sr\left(Sr\left(\sum_{i=0}^{n} Sr(a_i)\right) + Sr(Sr(a_{n+1}))\right) \quad \textbf{car } Sr(Sr(a)) = Sr(a)\\
&= Sr\left(\sum_{i=0}^{n} Sr(a_i) + Sr(a_{n+1})\right) \quad \textbf{d'après la proposition 1.2}\\
&= Sr\left(\sum_{i=0}^{n+1} Sr(a_i)\right)
\end{aligned}$$

2) Montrons que $Sr\left(\prod_{i=0}^{n} a_i\right) = Sr\left(\prod_{i=0}^{n} Sr(a_i)\right)$

Procédons une fois encore par récurrence

• Pour $n = 2$, c'est la propriété $2)$ de la proposition 1.2.

• Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Supposons que $Sr\left(\prod_{i=0}^{n} a_i\right) = Sr\left(\prod_{i=0}^{n} Sr(a_i)\right)$

Montrons que $Sr\left(\prod_{i=0}^{n+1} a_i\right) = Sr\left(\prod_{i=0}^{n+1} Sr(a_i)\right)$

On a

$$\begin{aligned}
Sr\left(\prod_{i=0}^{n+1} a_i\right) &= Sr\left(\prod_{i=0}^{n} a_i \times a_{n+1}\right)\\
&= Sr\left(Sr\left(\prod_{i=0}^{n} a_i\right) \times Sr(a_{n+1})\right) \quad \textbf{d'après la proposition 1.2}\\
&= Sr\left(Sr\left(\prod_{i=0}^{n} Sr(a_i)\right) \times Sr(a_{n+1})\right) \quad \textbf{d'après l'hypothèse de récurrence}\\
&= Sr\left(Sr\left(\prod_{i=0}^{n} Sr(a_i)\right) \times Sr(Sr(a_{n+1}))\right) \quad \textbf{car } Sr(Sr(a)) = Sr(a)\\
&= Sr\left(\prod_{i=0}^{n} Sr(a_i) \times Sr(a_{n+1})\right) \quad \textbf{d'après la proposition 1.2}\\
&= Sr\left(\prod_{i=0}^{n+1} Sr(a_i)\right)
\end{aligned}$$

2 Calcul des sommes récursives

On présente dans cette section, quelques propriétés permettant de déterminer plus simplement la somme récursive d'un entier

Proposition 2.1 *Pour tout entier relatif a, on a :*

1) Si $Sr(a^2) = 4$ alors $Sr(a) = 7$ ou bien $Sr(a) = 2$

2) Si $Sr(a^2) = 7$ alors $Sr(a) = 5$ ou bien $Sr(a) = 4$

3) Si $Sr(a^2) = 1$ alors $Sr(a) = 1$ ou bien $Sr(a) = 8$

Preuve

Soit $a \in \mathbb{Z}$

1) Supposons que $Sr(a^2) = 4$
Montrons que $Sr(a) = 7$ ou bien $Sr(a) = 2$
Procédons par absurde. Supposons que $Sr(a) \notin \{2, 7\}$
Alors

$$
\begin{aligned}
&(Sr(a))^2 \notin \{4, 49\} \\
\Longrightarrow &Sr((Sr(a))^2) \notin \{4\} \\
\Longrightarrow &Sr((Sr(a))^2) \neq 4 \\
\Longrightarrow &Sr(a^2) \neq 4 \\
&\text{Ce qui absurde car contredit l'hypothèse}
\end{aligned}
$$

D'où $Sr(a) = 2$ ou $Sr(a) = 7$

2) similaire à $1)$

3) similaire à $1)$

Proposition 2.2 *Soit $a \in \mathbb{Z}$*
a est un multiple de 9 si et seulement si $Sr(a) = 9$ ou $Sr(a) = 0$

Preuve

Soit $a \in \mathbb{Z}$
$(\Longrightarrow)$ Supposons que a est un multiple de 9.
Montrons que $Sr(a) = 9$ ou $Sr(a) = 0$

1) supposons que a est un multiple positif de 9

$$\begin{aligned}
& a \text{ est un multiple positif de } 9 \\
\Longrightarrow & \exists\, k \in \mathbb{N}^*/a = 9k \\
\Longrightarrow & \exists\, k \in \mathbb{N}^*/Sr(a) = Sr(9k) \\
\Longrightarrow & \exists\, k \in \mathbb{N}^*/Sr(a) = Sr(Sr(9) \times Sr(k)) \\
\Longrightarrow & \exists\, k \in \mathbb{N}^*/Sr(a) = Sr(9 \times Sr(k)) \\
& \text{Or } Sr(k) \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\} \\
\Longrightarrow & 9 \times Sr(k) \in \{9, 18, 27, \ldots, 81\} \\
\Longrightarrow & Sr(9 \times Sr(k)) \in \{9\} \\
\Longrightarrow & Sr(9 \times Sr(k)) = 9
\end{aligned}$$

D'où $\exists\, k \in \mathbb{N}^*/Sr(9 \times Sr(k)) = 9$

2) Supposons que a est un multiple négatif de 9.
Montrons que $Sr(a) = 0$

$$\begin{aligned}
a \text{ est un multiple négatif de } 9 & \Longrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^*/a = -9k \\
& \Longrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^*/Sr(a) = Sr(-9k) \\
& \Longrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^*/Sr(a) = 9 - Sr(9k) \\
& \Longrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^*/Sr(a) = 9 - 9 \quad \text{d'après 1} \\
& \Longrightarrow Sr(a) = 0
\end{aligned}$$

$(\Longleftarrow)$ Supposons que $Sr(a) = 9$ ou $Sr(a) = 0$. Montrons que a est un multiple de 9
Puisque $a \equiv Sr(a)[9]$ alors $\exists\, k \in \mathbb{Z}/a = Sr(a) + 9k$
C'est à dire $\exists\, k \in \mathbb{Z}/a = 9 + 9k$ ou $a = 0 + 9k$
D'où $\exists\, k \in \mathbb{Z}/a = 9(1 + k)$ ou $a = 9k$
Donc $\exists\, k' = 1 + k \; ou \; k' = k \in \mathbb{Z}/a = 9k'$
D'où a est un multiple de 9

Remarque

La proposition 2.2 précédente donne une condition nécessaire et suffisante pour déterminer les multiples de 9. En effet pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$, la proposition 2.2 indique que si $Sr(a) \notin \{0, 9\}$ alors a n'est pas multiple de 9.

3 Utilisation des sommes récursives en arithmétique

3.1 Détermination d'un carré parfait et d'un cube parfait

Proposition 3.1 *Soit* $a \in \mathbb{N}^*$

1) Si a est un carré parfait alors $Sr(a) \in \{1,4,7,9\}$

2) Si a est un cube parfait alors $Sr(a) \in \{1,8,9\}$

Preuve

Soit $a \in \mathbb{N}^*$

1) Supposons que a est un carré parfait.
   Montrons que $Sr(a) \in \{1,4,7,9\}$

$$\begin{aligned}
a \text{ est un carré parfait non nul } &\Longrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^*/a = k^2 \\
&\Longrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^*/Sr(a) = Sr(k^2) \\
&\Longrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^*/Sr(a) = Sr(Sr(k)^2) \\
\text{Or } Sr(k) \in \{1,2,\ldots,9\} &\Longrightarrow (Sr(k))^2 \in \{1,4,\ldots,81\} \\
&\Longrightarrow Sr(a) = Sr((Sr(k))^2) \in \{1,4,7,9\}
\end{aligned}$$

2) Supposons que a est un cube parfait.
   Montrons que $Sr(a) \in \{1,8,9\}$

$$\begin{aligned}
a \text{ est un cube parfait non nul } &\Longrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^*/a = k^3 \\
&\Longrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^*/Sr(a) = Sr(k^3) \\
&\Longrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^*/Sr(a) = Sr(Sr(k)^3) \\
\text{Or } Sr(k) \in \{1,2,\ldots,9\} &\Longrightarrow (Sr(k))^3 \in \{1,8,27,\ldots,729\} \\
&\Longrightarrow Sr(a) = Sr((Sr(k))^3) \in \{1,8,9\}
\end{aligned}$$

Remarque

1) Les réciproques des deux propriétés de la proposition 3.1 sont fausses.

2) La proposition 3.1 précédente permet de montrer qu'un nombre n'est pas un carré ou un cube parfait.
   En effet pour $a \in \mathbb{Z}$, si $Sr(a) \notin \{1,4,7,8,9\}$ alors il ne peut être un carré ou un cube parfait.

3.2 Congruence modulo 3

Proposition 3.2 *Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ / $Sr(a) = Sr(b)$ alors pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers naturels de même parité, on a : $a^m \equiv b^n[3]$*

Preuve

Considérons $a, b \in \mathbb{Z}$ / $Sr(a) = Sr(b)$

Montrons que $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers naturels de même parité, on a : $a^m \equiv b^n[3]$.

Soient $m, n \in \mathbb{N}$

• Supposons que m, n sont pairs

Alors $\exists\, p,q \in \mathbb{N}/ m = 2p,\ n = 2q$
Ainsi $a^m - b^n = a^{2p} - b^{2q}$
Puisque, par hypothèse $Sr(a) = Sr(b),\ \exists\, k \in \mathbb{Z}^*/\ a = b + 9k$

$$\begin{aligned}\text{D'où } a^m - b^n &= (b+9k)^{2p} - b^{2q}\\ &= b^{2p} - b^{2q} + 9k' \quad k' \in \mathbb{Z}\\ &= (b^2)^p - (b^2)^q + 9k' \quad k' \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Or

$$\begin{cases} b^2 \equiv 1[3] & \text{D'après la petit théorème de Fermat}\\ \text{Ou} & \\ b^2 \equiv 0[3] & \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} (b^2)^p \equiv 1[3]\\ \text{Ou}\\ (b^2)^p \equiv 0[3] \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} a^m - b^n \equiv 1 - 1 + 0[3]\\ \text{Ou}\\ a^m - b^n \equiv 0 - 0 + 0[3] \end{cases}$$

Finalement

$$a^m - b^n \equiv 0[3]$$

C'est à dire

$$a^m \equiv b^n[3]$$

• Supposons que m,n sont impairs
Alors $\exists\, p,q \in \mathbb{N}/ m = 2p+1,\ n = 2q+1$
Ainsi $a^m - b^n = a^{2p+1} - b^{2q+1}$
Puisque, par hypothèse $Sr(a) = Sr(b),\ \exists\, k \in \mathbb{Z}^*/\ a = b + 9k$

$$\begin{aligned}\text{D'où } a^m - b^n &= (b+9k)^{2p+1} - b^{2q+1}\\ &= b^{2p+1} - b^{2q+1} + 9k' \quad k' \in \mathbb{Z}\\ &= b(b^{2p} - b^{2q}) + 9k' \quad k' \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Or d'après ce qui précède,

$$b^{2p} - b^{2q} \equiv 0[3]$$

D'où
$$b(b^{2p} - b^{2q}) \equiv 0[3]$$
Donc
$$a^m - b^n \equiv 0[3]$$

C'est à dire
$$a^m \equiv b^n[3]$$

3.3 Somme récursive et exposants

Proposition 3.3 *Soit a un entier relatif qui n'est pas multiple de 3. Alors pour tout entier naturel m S'il existe $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $m = 6n + k$ alors $Sr(a^m) = Sr(a^k)$*

Preuve

Soient a un entier relatif qui n'est pas multiple de 3, m entier naturel.
Supposons qu'il existe $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $m = 6n + k$.
Montrons que $Sr(a^m) = Sr(a^k)$.
Puisque a n'est pas multiple de 3 alors $a = 3p + 1$ ou $a = 3q + 2, \quad p, q \in \mathbb{Z}$

→ Supposons que $a = 3p + 1$, on a

$$\begin{aligned}
Sr(a^m) &= Sr\left((a)^{6n+k}\right) \\
&= Sr\left(Sr(a^{6n}) \times Sr(a^k)\right) \\
&= Sr\left(Sr((3p+1)^{6n}) \times Sr(a^k)\right) \\
&= Sr(Sr((3p)^{6n} + C_{6n}^1(3p)^{6n-1} + C_{6n}^2(3p)^{6n-2} + \cdots + C_{6n}^{6n-1}(3p) + 1) \times Sr(a^k)) \\
&= Sr(Sr((3p)^{6n} + C_{6n}^1(3p)^{6n-1} + C_{6n}^2(3p)^{6n-2} + \cdots + C_{6n}^{6n-1}(3p) + 1) \times Sr(a^k)) \\
&= Sr(Sr(9\lambda + 1) \times Sr((a)^k)) \\
&= Sr(1 \times Sr(a^k)) \\
&= Sr(Sr(a^k)) \\
&= Sr(a^k)
\end{aligned}$$

→ Supposons que $a = 3p + 2$, on a

$$\begin{aligned}
Sr(a^m) &= Sr\left((a)^{6n+k}\right) \\
&= Sr\left(Sr(a^{6n}) \times Sr(a^k)\right) \\
&= Sr\left(Sr((3p+2)^{6n}) \times Sr(a^k)\right) \\
&= Sr(Sr((3p)^{6n} + C_{6n}^1(3p)^{6n-1} \times 2 + C_{6n}^2(3p)^{6n-2} \times 2^2 + \cdots + C_{6n}^{6n-1}(3p) \times 2^{6n-1} + 2^{6n}) \\
&\qquad \times Sr(a^k)) \\
&= Sr(Sr(9\lambda' + 2^{6n}) \times Sr((a)^k)) \\
&= Sr(2^{6n} \times Sr(a^k)) \\
&= Sr(Sr(Sr(2^6))^n) \times Sr(a^k)) \\
&= Sr((Sr(Sr(64))^n) \times Sr(a^k)) \\
&= Sr((Sr(1))^n \times Sr(a^k)) \\
&= Sr(1 \times Sr(a^k)) \\
&= Sr(Sr(a^k)) \\
&= Sr(a^k)
\end{aligned}$$

D'où $Sr(a^m) = Sr(a^k)$ pour tout a entier relatif non multiple de 3.

Application : ***Détermination de la somme récursive d'une expression des nombres entiers***
Soit l'entier relatif $M = 21 \times q^m + 9k + 17$ avec $q, k \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$
Déterminons $Sr(M^{6n+1})$.
On a

$$\begin{aligned}
M &= 21 \times q^n + 9k + 17 \\
&= 3 \times 7 \times q^n + 9k + 15 + 2 \\
&= 3(7q^n + 3k + 5) + 2 \\
&= 3\lambda + 2 \quad \text{avec } \lambda = 7q^n + 3k + 5
\end{aligned}$$

Ainsi M n'est pas un multiple de 3.
D'après la proposition précédente on donc

$$\begin{aligned}
Sr(M^{6n+1}) &= Sr(M^1) \\
&= Sr(3\lambda + 2) \\
&= Sr(Sr(3\lambda) + Sr(2)) \\
&= Sr(Sr(3\lambda) + 2)
\end{aligned}$$

Or $Sr(3\lambda) \in \{0,3,6,9\}$
D'où $Sr(3\lambda)+2 \in \{2,5,8,11\}$
Et donc $Sr(Sr(3\lambda)) \in \{2,5,8\}$
Donc $Sr(M^{6n+1}) \in \{2,5,8\}$

Corollaire 3.1 *Pour tout entier relatif a non multiple de 3 on a $Sr(a^{6n}) = 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$*

Preuve
D'après la proposition 3.3, $Sr(a^{6n}) = Sr(a^{6n+0}) = Sr(a^0) = 1$

3.4 Tableaux de Calcul de réduits des nombres particuliers

3.4.1 Nombre de la forme $(9k+2)^n$

En utilisant la proposition 3.3, l'on peut déterminer le réduit de plusieurs nombres écris en exposant. Un exemple de ces tableaux est le tableau 1 ci-dessous

TABLEAU 1 – Tableau de réduit des nombres de la forme $(9k+2)^n$

n	$Sr((9k+2)^n)$
$6q$	1
$6q+1$	2
$6q+2$	4
$6q+3$	8
$6q+4$	7
$6q+5$	5

3.4.2 Nombre de la forme $(9k+4)^n$

Grâce à la formule du biôme de Newton, Le calcul des réduits de plusieurs nombres est facilité. Ainsi, le réduit des nombres de la forme $(9k+4)^n$ est donné par tableau 2 ci-dessous

TABLEAU 2 – Tableau de réduit des nombres de la forme $(9k+4)^n$

n	$Sr((9k+4)^n)$
$3q$	1
$3q+1$	4
$3q+2$	7

Preuve
Il suffit de montrer que $Sr((9k+4)^{3q+m}) = Sr(4^m), \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$

Soient $m, q \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}
Sr((9k+4)^{3q+m}) &= Sr(9\lambda + 4^{3q+m}) \quad \text{Par la formule du binôme de Newton} \\
&= Sr(4^{3q+m}) \quad \text{Grâce à la périodicité de } Sr \\
&= Sr(Sr(4^{3q}) \times Sr(4^m)) \quad \text{D'après la proposition 1.2} \\
&= Sr(Sr((Sr(4^3))^k) \times Sr(4^m)) \\
&= Sr(Sr((Sr(64))^k) \times Sr(4^m)) \\
&= Sr(Sr(1^k) \times Sr(4^m)) \\
&= Sr(1 \times Sr(4^m)) \\
&= Sr(Sr(4^m)) \\
&= Sr(4^m)
\end{aligned}$$

Ainsi on en faisant varier $m \in \{0, 1, 2\}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
Sr((9k+4)^{3q}) &= Sr(4^0) = Sr(1) = 1 \\
Sr((9k+4)^{3q+1}) &= Sr(4^1) = Sr(4) = 4 \\
Sr((9k+4)^{3q+2}) &= Sr(4^2) = Sr(16) = Sr(1+6) = Sr(7) = 7
\end{aligned}$$

3.4.3 Nombre de la forme $(9k + 5)^n$

Le réduit des nombres de la forme $(9k+5)^n$ est donné par tableau 3 ci-dessous

TABLEAU 3 – Tableau de réduit des nombres de la forme $(9k+5)^n$

n	$Sr((9k+5)^n)$
$6q$	1
$6q+1$	5
$6q+2$	7
$6q+3$	8
$6q+4$	4
$6q+5$	2

Preuve

De même, Il suffit de montrer que $Sr((9k+5)^{6q+m}) = Sr(5^m), \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Soient $m, q \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}
Sr((9k+5)^{6q+m}) &= Sr(Sr(9k+5)^{6q+m} \times Sr(9k+5)^{m}) \quad \text{D'après la proposition 1.2} \\
&= Sr(Sr(9\lambda+5^{6q}) \times Sr(9\lambda'+5^{m})) \quad \text{D'après la formule du binôme de Newton} \\
&= Sr(Sr(5^{6q}) \times Sr(5^{m})) \quad \text{Grâce à la périodicité de } Sr \\
&= Sr(Sr((Sr(5^{6}))^{k}) \times Sr(5^{m})) \\
&= Sr(Sr((Sr(15625))^{k}) \times Sr(5^{m})) \\
&= Sr(Sr(1^{k}) \times Sr(5^{m})) \\
&= Sr(1 \times Sr(5^{m})) \\
&= Sr(Sr(5^{m})) \\
&= Sr(5^{m})
\end{aligned}$$

Ainsi on en faisant varier $m \in \{0,1,2,3,4,5\}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
Sr((9k+5)^{6q}) &= Sr(5^{0}) = Sr(1) = 1 \\
Sr((9k+5)^{6q+1}) &= Sr(5^{1}) = Sr(5) = 5 \\
Sr((9k+5)^{6q+2}) &= Sr(5^{2}) = Sr(25) = Sr(2+5) = Sr(7) = 7 \\
Sr((9k+5)^{6q+3}) &= Sr(5^{3}) = Sr(125) = Sr(1+2+5) = Sr(8) = 8 \\
Sr((9k+5)^{6q+4}) &= Sr(5^{4}) = Sr(625) = Sr(6+2+5) = Sr(13) = Sr(1+3) = Sr(4) = 4 \\
Sr((9k+5)^{6q+5}) &= Sr(5^{5}) = Sr(3125) = Sr(3+6+2+5) = Sr(11) = Sr(1+1) = Sr(2) = 2
\end{aligned}$$

3.4.4 Nombre de la forme $(\mathbf{9k+7})^{\mathbf{n}}$

Le réduit des nombres de la forme $(9k+7)^{n}$ est donné par tableau 4 ci-dessous

TABLEAU 4 – Tableau de réduit des nombres de la forme $(9k+7)^{n}$

n	$Sr((9k+7)^{n})$
$3q$	1
$3q+1$	7
$3q+2$	4

Preuve

Similaire aux cas précédents

3.4.5 Nombre de la forme $(\mathbf{9k+8})^{\mathbf{n}}$

Le réduit des nombres de la forme $(9k+8)^{n}$ est donné par tableau 5 ci-dessous

TABLEAU 5 – Tableau de réduit des nombres de la forme $(9k+8)^n$

n	$Sr((9k+8)^n)$
$2q$	1
$2q+1$	8

Preuve

Similaire aux cas précédents

Proposition 3.4 *Soient a et b deux entiers naturels de même parité tels que $Sr(a) = Sr(b)$. Alors* $\forall\, x \in \mathbb{Z}, \quad Sr(x^a) = Sr(x^b)$

Preuve

Soient a et b deux entiers naturels de même parité tels que $Sr(a) = Sr(b)$.
Montrons que $\forall\, x \in \mathbb{Z}, \quad Sr(x^a) = Sr(x^b)$
Supposons d'abord que a, b pairs.
• Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que x non multiple de 3
Puisque a, b pairs, $\exists\, p, q \in \mathbb{N}/a = 2p, b = 2q$
Puisque $Sr(a) = Sr(b)$ alors il existe $k \in \mathbb{N}/a = 9k + b$
Ainsi $a = 9k + b = 2p$ et $b = 2q$
En remplaçant b dans a on a donc $a = 9k + 2q = 2p$
Or $9k + 2q$ est pair si et seulement si k est pair.
Ainsi $\exists\, k' \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2k'$
Finalement $a = 9(2k') + 2q = 18k' + 2q = 6(3k') + 2q$
Donc $Sr(x^a) = Sr(x^{6(3k')+2q}) = Sr(x^{2q}) = Sr(x^b)$ D'après la proposition 3.3
• Maintenant si $x = 3\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} Sr(x^a) &= Sr((3\alpha)^{18k'+2q}) \\ &= Sr((3\alpha)^{2(9k'+q)}) \\ &= Sr((3\alpha)^{2m}) \quad m = 9k' + q \\ &= Sr(3^{2m} \times \alpha^{2m}) \\ &= Sr(9^m \times \alpha^{2m}) \end{aligned}$$

Or · Si $m = 0$ alors $k' = 0, q = 0$ et $a = 18k' + 2q = 0,\ b = 2q = 0$
D'où $Sr(x^a) = Sr(x^0) = 1 = Sr(x^b)$
· Si $m \in \mathbb{N}^*$ alors On a $Sr(x^a) = Sr(9^m \times \alpha^{2m}) = 9$ Car $9^m \times \alpha^{2m}$ est un multiple positif de 9.
De même $Sr((3\alpha)^b) = Sr(3^{2q} \times \alpha^{2q}) = Sr(9^q \times \alpha^{2q}) = 9$ Car $9^q \times \alpha^{2q}$ est un multiple positif de 9.
D'où $Sr(x^a) = Sr(x^b)$

Supposons cette fois que a et b sont impairs
Alors $\exists\, p, q \in \mathbb{N}/a = 2p + 1,\ b = 2q + 1$
Puisque $Sr(a) = Sr(b)$ alors il existe $k \in \mathbb{N}/a = 9k + b$

Ainsi $a = 9k + b = 2p + 1$ et $b = 2q + 1$
En remplaçant b dans a on a donc $a = 9k + 2q + 1 = 2p + 1$
Or $9k + 2q + 1$ est impair si et seulement si k est pair.
Ainsi $\exists\, k' \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2k'$
Finalement $a = 9(2k') + 2q + 1 = 18k' + 2q + 1$ et $b = 2q + 1$
• Si x n'est pas multiple de 3, on a :

$$\begin{aligned} Sr(x^a) &= Sr(x^{18k'+2q+1}) \\ &= Sr(x^{6(3k')+2q+1}) \\ &= Sr(x^{2q+1}) \quad \text{d'après la proposition 3.3} \\ &= Sr(x^b) \end{aligned}$$

D'où $Sr(x^a) = Sr(x^b)$ pour $x \neq 3\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}$
• Supposons que x est un multiple de 3 alors $\exists\, \lambda \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 3\lambda$
Et

$$\begin{aligned} Sr(x^a) &= Sr((3\lambda)^{18k'+2q+1}) \\ &= Sr(9^{9k'} \times (3)^{2q+1} \times \lambda^{18k'+2q+1}) \\ &= \begin{cases} 0 & si\ \lambda \leq 0 \\ 9 & si\ \lambda > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} Sr(x^b) &= Sr((3\lambda)^{2q+1}) \\ &= Sr(9^q \times (3)^1 \times \lambda^{2q+1}) \\ &= \begin{cases} 0 & si\ \lambda \leq 0 \\ 9 & si\ \lambda > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

4 Somme récursive et nombres premiers

Dans cette section, l'on utilise les sommes récursives pour savoir si un nombre entier est premier ou pas.

4.1 Propriétés préliminaires

Les propriétés suivantes sont admises.

Proposition 4.1

→ *Tout entier naturel n s'écrit comme produit de deux autres entiers naturels a et b ;*

→ *Tout nombre premier strictement supérieur à 2 est impair ;*

→ *Le produit de deux entiers a et b est impair si et seulement si a et b sont tous deux impairs ;*

→ *Si $n = a \times b$ alors a/n et b/n ;*

→ *La somme deux entiers naturels a et b est impair si et seulement si a et b sont de parité différente. c'est à dire soit a est pair et b impair ou bien a est impair et b est pair.*

4.2 Détermination d'un nombre premier en utilisant les sommes récursives

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 2.
D'après la proposition 4.1 précédente, $\exists\, a, b \in \mathbb{N}$ tel que $n = a \times b$.
$n = a \times b \Longrightarrow Sr(n) = Sr(a \times b) = Sr(Sr(a) \times Sr(b))$.
Or $a = 9p + Sr(a)$ et $b = 9q + Sr(b)$
Puisque $n = a \times b$, les valeurs de p sont telles que

$$\frac{n}{a} = k, k \in \mathbb{R}$$

.

Ainsi, l'on cherche les valeurs de $p \in \left\{0, 1, 2, \ldots, \frac{n - Sr(n)}{9}\right\}$ telles que

$$\frac{n}{a} = k, k \in \mathbb{N}$$

et on a les critères de vérification suivantes ;

→ S'il existe $p \in \left\{0, 1, 2, \ldots, \frac{n - Sr(n)}{9}\right\}$ tel que $\frac{n}{a} = k, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ alors n n'est pas premier.

→ Si $\forall\, p \in \left\{0, 1, 2, \ldots, \frac{n - Sr(n)}{9}\right\}$, $\frac{n}{a} = k, k \notin \mathbb{N} \setminus \{1\}$ alors, n est un nombre premier.

Remarque

L'on ne connait pas à priori, dans l'écriture $n = a \times b$ les valeurs de a et b. Mais on sait que $Sr(a), Sr(b) \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Le calcul de $Sr(Sr(a) \times Sr(b))$ $Sr(a)$ est donc facilité par les tableaux ci-dessous dits « tableaux de réduit ».

TABLEAU 6 – Tableau de réduit de $Sr(a \times b)$ en supposant que $Sr(a) = 1$

$Sr(b)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Sr(a) \times Sr(b)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Sr(a \times b)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TABLEAU 7 – Tableau de réduit de $Sr(a \times b)$ en supposant que $Sr(a) = 2$

$Sr(b)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Sr(a) \times Sr(b)$	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$Sr(a \times b)$	2	4	6	8	1	3	5	7	9

TABLEAU 8 – Tableau de réduit de $Sr(a \times b)$ en supposant que $Sr(a) = 3$

$Sr(b)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Sr(a) \times Sr(b)$	3	6	9	12	15	18	21	24	27
$Sr(a \times b)$	3	6	9	3	6	9	3	6	9

TABLEAU 9 – Tableau de réduit de $Sr(a \times b)$ en supposant que $Sr(a) = 4$

$Sr(b)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Sr(a) \times Sr(b)$	4	8	12	16	20	24	28	32	36
$Sr(a \times b)$	4	8	3	7	2	6	1	5	9

TABLEAU 10 – Tableau de réduit de $Sr(a \times b)$ en supposant que $Sr(a) = 5$

$Sr(b)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Sr(a) \times Sr(b)$	5	10	15	20	25	30	35	40	45
$Sr(a \times b)$	5	1	6	2	7	3	8	4	9

TABLEAU 11 – Tableau de réduit de $Sr(a \times b)$ en supposant que $Sr(a) = 6$

$Sr(b)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Sr(a) \times Sr(b)$	6	12	18	24	30	36	42	48	54
$Sr(a \times b)$	6	3	9	6	3	9	6	3	9

TABLEAU 12 – Tableau de réduit de $Sr(a \times b)$ en supposant que $Sr(a) = 7$

$Sr(b)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Sr(a) \times Sr(b)$	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$Sr(a \times b)$	7	5	3	1	8	6	4	2	9

TABLEAU 13 – Tableau de réduit de $Sr(a \times b)$ en supposant que $Sr(a) = 8$

$Sr(b)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Sr(a) \times Sr(b)$	8	16	24	32	40	48	56	64	72
$Sr(a \times b)$	8	7	6	5	4	3	2	1	9

TABLEAU 14 – Tableau de réduit de $Sr(a \times b)$ en supposant que $Sr(a) = 9$

$Sr(b)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Sr(a) \times Sr(b)$	9	18	27	36	45	54	63	72	81
$Sr(a \times b)$	9	9	9	9	9	9	9	9	9

Ces différents tableaux sont utiles pour déterminer la forme d'écriture des entiers a et b et ainsi rechercher les valeurs possibles de p ou q.

Exemple 4.1 *Vérifions si* 149 *est un nombre premier ou non.*
149 *étant un entier naturel,* $\exists\, a, b \in \mathbb{N}$ *tels que* $149 = a \times b$*.*
Or $Sr(149) = Sr(1+4+9) = Sr(14) = Sr(1+4) = Sr(5) = 5$*.*
Ainsi a *et* b *sont tels que* $Sr(a \times b) = Sr(Sr(a) \times Sr(b)) = 5$*.*
En utilisant donc les tableaux de réduits précédents, on remarque les tableaux où l'on trouve $Sr(a \times b) = 5$ *sont les tableaux 6, 7, 9, 10,12, et 13.*
On déduit donc que a *et* b *sont de la forme* [1]

$$\begin{cases} a &= 9p+1 \\ b &= 9q+5 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} a &= 9p+2 \\ b &= 9q+7 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} a &= 9p+4 \\ b &= 9q+8 \end{cases}$$

Selon les valeurs de $p \in \{0, 1, 2, \ldots, 16\}$*, on a les tableaux de division de* 149 *par* a *suivant :*

TABLEAU 15 – Tableau de division de 149 par a selon les valeurs de p

p	1	3	5	7	9	11	13	15
$a = 9p+4$	13	31	49	67	85	103	121	139
$a = 9p+2$	11	29	47	65	83	101	119	137
$\frac{149}{9p+4}$	$11,46$	$4,8$	$3,04$	$2,22$	$1,73$	$\times$	$\times$	$\times$
$\frac{149}{9p+2}$	$13,54$	$5,13$	$3,17$	$2,29$	$1,75$	$\times$	$\times$	$\times$

TABLEAU 16 – Tableau de division de 149 par a selon les valeurs de p

p	2	4	6	8	10	12	14	16
$a = 9p+5$	23	41	59	77	95	113	131	149
$\frac{149}{9p+5}$	$6,47$	$3,63$	$2,5$	$1,93$	$1,73$	$\times$	$\times$	1

Les tableaux 15 et 16 permettent de voir que la seule valeur de a *diviseur de* 149 *est* $a = 149$ *et donc* $b = 1$*.* ***D'où** $\mathbf{149}$ **est un nombre premier***

1. En tenant compte du fait que a et b jouent des rôles symétriques

5 Récursivité inverse d'un entier naturel (compris entre 0 et 9)

5.1 Définition de la récursivité inverse

Soient a un entier naturel compris entre 0 et 9, n un entier relatif.
On pose $P_a(n) = 9n + a$, on alors $Sr(P_a(n)) = a$.
Ainsi $P_a(n)$ est l'ensemble des entiers ayant pour réduit l'entier naturel a.

Définition 5.1 $P_a(n)$ *est appelé récursivité inverse de* a

5.2 Propriétés

Proposition 5.1 *Soient* $b \in \mathbb{N} \cap [0, 9]$ *et* $\lambda \in \mathbb{Z}$*. On a*
Si $Sr(\lambda) = b$ *alors* $\exists\, m, n \in \mathbb{Z}/\ P_b(n) = 9m + \lambda$

Preuve
Soient $b \in \mathbb{N} \cap [0, 9]$ et $\lambda \in \mathbb{Z}$. Supposons que $Sr(\lambda) = b$
montrons que $\exists\, m, n \in \mathbb{Z}/\ P_b(n) = 9m + \lambda$
Puisque, par hypothèse $Sr(\lambda) = b$

$$\begin{aligned}
& \exists\, k \in \mathbb{Z}/\lambda = 9k + b \\
\Longrightarrow & \exists\, k \in \mathbb{Z}/\lambda = P_b(k) \\
\Longrightarrow & \exists\, k \in \mathbb{Z}/9k' + \lambda = 9k' + P_b(k) \quad \forall\, k' \in \mathbb{Z} \\
\Longrightarrow & \exists\, k \in \mathbb{Z}/9k' + \lambda = 9k' + 9k + b \quad \forall\, k' \in \mathbb{Z} \\
\Longrightarrow & \exists\, k \in \mathbb{Z}/9k' + \lambda = 9(k' + k)' + b \quad \forall\, k' \in \mathbb{Z} \\
\Longrightarrow & \exists\, k \in \mathbb{Z}/9k' + \lambda = P_b(k + k') \quad \forall\, k' \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Il suffit ainsi de prendre $m = k'$ et $n = k + k'$

Proposition 5.2 *Soit* $a \in \mathbb{Z}$*, alors*

$$\forall\, m, n \in \mathbb{Z}, P_{9-Sr(a)}(m) + P_{Sr(a)}(n) = 9(m + n + 1)$$

Preuve
Soients $a, m, n \in \mathbb{Z}$
$P_{9-Sr(a)}(m) + P_{Sr(a)}(n) = 9(m + n + 1) = 9m + 9 - Sr(a) + 9n + Sr(a) = 9(m + n + 1)$

Proposition 5.3 *Soient* $a, b \in \mathbb{N} \cap [0, 9]$*, pour tout* $n \in \mathbb{Z}$

1) $\exists\, m \in \mathbb{Z} : P_a(n) + P_b(n) = P_{Sr(a+b)}(m)$

2) $\exists\, p \in \mathbb{Z} : P_a(n) \times P_b(n) = P_{Sr(a\times b)}(p)$

Preuve
Soient $a, b \in \mathbb{N} \cap [0, 9]$ et $n \in \mathbb{Z}$

1) Cherchons $m \in \mathbb{Z} : P_a(n) + P_b(n) = P_{Sr(a+b)}(m)$
On a

$$\begin{aligned}
P_a(n) + P_b(n) &= 9n + a + 9n + b \\
&= 9(2n) + a + b \\
&= 9(2n) + Sr(a+b) + 9k \quad k \in \mathbb{Z} \\
&= 9(2n+k) + Sr(a+b) \quad k \in \mathbb{Z} \\
P_a(n) + P_b(n) &= P_{Sr(a+b)}(2n+k)
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $m = 2n + k, \quad k \in \mathbb{Z}$

2) De même, cherchons $p \in \mathbb{Z} : P_a(n) \times P_b(n) = P_{Sr(a\times b)}(p)$

$$\begin{aligned}
P_a(n) \times p_b(n) &= (9n + a) \times (9n + b) \\
&= 9(nb + an + 9n^2) + a \times b \\
&= 9(nb + an + 9n^2) + Sr(a \times b) + 9k \quad k \in \mathbb{Z} \\
&= 9(nb + an + 9n^2 + k) + Sr(a \times b) \quad k \in \mathbb{Z} \\
P_a(n) \times P_b(n) &= P_{Sr(a\times b)}(nb + an + 9n^2 + k)
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $p = nb + an + 9n^2 + k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Proposition 5.4 *Soient* $a, b \in \mathbb{N} \cap [0, 9]$
Si $a \equiv b[c]$ *alors* $P_a(n) \equiv P_b(n)[c], \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$

Preuve
Soient $a, b \in \mathbb{N} \cap [0, 9]$
Supposons que $a \equiv b[c]$ et Montrons que $P_a(n) \equiv P_b(n)[c], \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$
Puisque, par hypothèse $a \equiv b[c]$, $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + ck$
Ainsi $\exists\, k \in \mathbb{Z}/a + 9n = b + 9n + ck, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$
C'est à dire $\exists\, k \in \mathbb{Z}/P_a(n) = P_b(n) + ck \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$
D'où $P_a(n) \equiv P_b(n)[c] \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$

6 Discussion

La théorie des sommes récursives que nous avons développée repose sur deux concepts fondamentaux : *le réduit d'un entier et la récursivité inverse d'un entier*. Ces notions nous ont permis d'explorer les propriétés arithmétiques des entiers d'une manière nouvelle et enrichissante.

Le concept de "*réduit d'un entier*" correspond à la somme récursive des chiffres d'un entier, simplifiée jusqu'à obtenir un chiffre unique compris entre 0 et 9. Ce processus est similaire à la réduction modulo 9, qui a été largement étudiée dans la littérature mathématique. Cependant, notre approche met l'accent sur

les propriétés nouvelles, sur la récursivité et l'itération des opérations de somme.
Nos résultats concernant la condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre soit multiple de 9 s'inscrivent dans le cadre des travaux antérieurs, notamment ceux de [10], qui a exploré la congruence modulo 9. Toutefois, notre démonstration apporte une perspective différente en reliant directement cette condition à la notion de somme récursive, renforçant ainsi l'intuition derrière la divisibilité par 9.

La récursivité inverse d'un entier, définie comme l'ensemble de tous les nombres dont la somme récursive est égale à un chiffre, ouvre de nouvelles perspectives sur la structure des entiers. Bien que des travaux antérieurs aient abordé des concepts similaires, tels que les classes d'équivalence en arithmétique ([2]), notre approche systématique permet une classification plus fine et une exploration des relations entre les différents ensembles.

Nous avons également établi un lien entre la somme récursive et la congruence modulo 3. Alors que les résultats dans la littérature se concentraient principalement sur la congruence modulo 9, notre travail montre comment cette relation s'étend aux multiples de 3. Cette généralisation est particulièrement pertinente dans le contexte de l'arithmétique modulaire et pourrait avoir des applications dans le domaine de la théorie des nombres.

Un autre résultat significatif de notre théorie est l'établissement de critères pour identifier les carrés parfaits et les cubes parfaits. Bien que des travaux antérieurs aient exploré les propriétés des carrés et cubes parfaits ([1]), notre approche axée sur la somme récursive offre une méthode systématique qui pourrait simplifier les vérifications dans ce domaine.

Nous avons démontré que la somme récursive de la somme et du produit d'une famille d'entiers suit certaines propriétés prévisibles. Ce résultat s'inscrit dans la lignée des travaux de [3] sur les propriétés additives des entiers, mais notre approche récursive apporte une nouvelle dimension à ces résultats en élucidant les mécanismes sous-jacents

Enfin, notre exploration de la liaison entre somme récursive et nombres en exposant constitue une contribution à la théorie des nombres. Bien que certains résultats aient été obtenus dans ce domaine par des auteurs comme [8], notre perspective basée sur les sommes récursives permet une meilleure compréhension des relations entre les puissances et leurs représentations numériques.

Conclusion

En définitive, notre théorie des sommes récursives non seulement s'inscrit dans un cadre mathématique déjà riche, mais elle apporte également des perspectives nouvelles et intéressantes sur des concepts bien établis. Les résultats que nous avons obtenus offrent des outils supplémentaires pour l'analyse arithmétique et ouvrent la voie à de futures recherches dans le domaine. Dans cette perspective, d'autres recherches peuvent explorer ces idées et poursuivre l'étude des propriétés fascinantes des entiers à travers le prisme des sommes récursives.

Références

[1] T Bisztriczky. Richard guy et la géométrie. *Bienvenue au numéro de septembre 2020des Notes de la SMC*, page 2009, 2020.

[2] PM Cohn and PM Cohn. Algebraic structures. *Universal Algebra*, pages 41–107, 1981.

[3] Pál Erdős. ... *Quelques problèmes de la théorie des nombres*. L'Enseignement Mathématique, 1963.

[4] Paul Erdős. A survey of problems in combinatorial number theory. *Annals of Discrete Mathematics*, 6 :89–115, 1980.

[5] Evariste Galois. Concepts de base et démontration des propirétés des chiffres. -, 1930.

[6] Donald Ervin Knuth. *The art of computer programming*, volume 3. Pearson Education, 1997.

[7] Alfred J Menezes, Paul C Van Oorschot, and Scott A Vanstone. *Handbook of applied cryptography*. CRC press, 2018.

[8] Jean-Louis Nicolas. Nombres hautement composés. *Acta Arithmetica*, 49(4) :395–412, 1988.

[9] Ivan Niven. *Mathematics of Choice : Or, How to Count Without Counting*, volume 15. MAA, 1965.

[10] Donald R Smith and James T Palmer. Universal fixed messages and the rivest-shamir-adleman cryptosystem. *Mathematika*, 26(1) :44–52, 1979.