Transcrição Mecânica
da
Geodésica Canônica
do
Tensor Métrico Regular

S. A. Melo

0009-0003-2015-666X

doi: 10.5281/zenodo.14838459

9 de fevereiro de 2025

Resumo

Geodésica de uma métrica descreve o movimento de uma partícula de teste no campo gravitacional de uma massa central por uma equação diferencial de segunda ordem.

Uma resolução confere à trajetória a menor distância, demonstrada por princípios variacionais, e realiza o transporte paralelo do tensor velocidade, conforme a derivada covariante. A caracterização por princípios geométricos torna resolúvel o efeito cinemático, mas destrinçar a causa dinâmica no símbolo de Christoffel permanece intricado.

A representação canônica da equação em seu propósito geométrico, introduz termos que conturbam o entendimento mecânico.

A geodésica também aparece na derivada do invariante de Lorentz, que condiciona o transporte paralelo à conservação do módulo invariante da velocidade. A elaboração vetorial desse equacionamento envolvendo a geodésica reduz o sistema tensorial a uma sentença escalar fechada. A correspondência entre os termos pode ser inferida da reciprocidade entre o espaço e o tempo no tensor métrico pelo padrão variacional.

Considerando propriedade de isometria da covariância, estabelecemos as equivalências entre os termos da equação geodésica e expomos a dinâmica da aceleração geodésica em uma equação concisa.

Abstract

Geodesics of a metric tensor describes the motion of a test particle in the gravitational field of a central mass by a second-order differential equation.

A resolution gives the trajectory the shortest distance, demonstrated by variational principles, and carries out parallel transport of the velocity tensor, according to the covariant derivative.

The characterization by geometric principles makes the kinematic effect resolvable, but untangling the dynamic cause in Christoffel's symbol remains intricate.

The canonical representation of the equation in its geometric purpose introduces terms that disturb mechanical understanding.

Geodesics also appears in the derivative of the Lorentz invariant, which conditions parallel transport to the conservation of the invariant velocity modulus. The vectorial elaboration of this equation involving geodesics reduces the tensor system to a closed scalar sentence. The correspondence between terms can be inferred from the reciprocity between space and time in the metric tensor by the variational pattern.

Considering the covariance isometry property, we establish equivalences between the terms of the geodetic equation and expose the dynamics of geodetic acceleration in a concise equation.

1 Introdução

Na ação de um campo gravitacional, as equações do movimento devem satisfazem a equação geodésica [1].

Um caso elementar é a geodésica da métrica, em que uma partícula de teste de massa ínfima movimenta-se no campo gravitacional produzido por uma grande massa, caso que pode ser abstraído por um tensor métrico de simetria central.

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0 \tag{1.1}$$

A equação geodésica estabelece as condições necessárias a problemas geométricos gerais de transporte paralelo. No problema específico da métrica de simetria central, a equação geodésica pode ser sintetizada com o propósito de ser conveniente à descrição do fenômeno gravitação.

Pressupondo que seja possível separar a variação coordenada de velocidade da ação de campo, o termo da equação geodésica expresso pelo diferencial de segunda ordem envolve apenas variáveis coordenadas que, para os índices espaciais, seria conveniente se pudesse ser desdobrado em:

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = \gamma^4\,\mathbf{a} + \gamma^4\,\frac{\mathbf{v}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{a})}{c^2} \tag{$\star$}$$

A substituição dessa expressão na equação geodésica sugere um equacionamento similar em sua contraparte que dá condição de inércia. Presumido que $V^\mu V^\nu \Gamma^\kappa_{\mu\nu}$ possa ser transcrita nas mesmas operações elementares da expressão coordenada, a correspondência direta seria evidenciada. O desconhecimento dessa decomposição pode ser contornado observando que parcelas congruentes devem apresentar equivalência nas propriedades operativas, destacadamente a ortogonalidade.

Ainda que seja necessário apontar um equacionamento para esse propósito, a demonstração requer apresentar de como os conceitos dinâmicos são elaborados no entendimento por operações.

Geodésica é deduzida do caminho mais curto por princípios variacionais. Equivalentemente, a geodésica é deduzida do caminho em que se realiza o transporte paralelo pela derivada covariante. Ambas são condições de natureza geométrica, na concepção de que não são originadas por um invariante físico.

A vinculação cinemática está na expressão do escalar de Lorentz. Considere $V^\alpha = \gamma v^\alpha$. A expressão do escalar de Lorentz [10] resulta em um invariante.

$$V^\alpha V_\alpha = c^2 \tag{1.2}$$

A derivada dessa expressão é interpretada, em ambivalência, por uma propriedade geométrica e por um invariante físico.

$$\dot{V}^\alpha V_\alpha = 0 \tag{1.3}$$

Pelo princípio da equivalência, a aceleração gravitacional é nula. A equação é trivial e tensores nulos possuem direção indefinida. O resultado é controverso com a noção que a gravidade possui uma linha de ação com direção definida.

O indeterminismo ocorre em razão da magnitude, a equação abstrai as condições necessárias para sua resolução. O tensor velocidade possui uma ortogonal no plano de movimento, e é a direção que encaminha uma resolução, sendo necessário contornar a indeterminação.

Na resolução deve-se considerar que a base esférica é móvel, e a relação entre mobilidade e covariância desenvolvida ao longo da seção 2 . Isometria aponta como a forma paramétrica da transformação, que deve preservar a estrutura isomórfica da derivada, na seção 2.1 . As definições dos tensores e da base esférica são apresentadas na seção 2.2 , por transformação ortonormal da base fixa.

A invariância das leis físicas é obtida na propriedade covariante das transformações, entretanto a covariância não implica em um morfismo, e a generalidade abstrata da transformação covariante, embora necessária, não é suficiente. A forma paramétrica da transformação deve preservar a estrutura isomórfica da derivada. A demonstração da covariância na transformação do tensor velocidade é vista no segmento 2.3 .

Em consequência da definição dos tensores da base, a definição do tensor métrico é caracterizada como normalizada. Por essa propriedade, demonstra-se a correlação entre covariância de uma transformação ortonormal e isometria no segmento 2.4 .

O último segmento da segunda seção finaliza a apresentação da covariância na transformação ortonormal com a exposição sobre a derivada covariante. O operador deve ser capaz de representar a mobilidade da base. 2.5

A seção 3 caracteriza a geodésica como um sistema de equações diferenciais deduzidos pela derivada covariante redefinida na seção anterior.

A simetria do tensor métrico evidencia as paridades que podem ser consideradas de primeira ordem. Na geodésica, os termos são elevados à segunda ordem. Na análise das componentes geodésicas, o confronto entre relações sistêmicas das variáveis e o acoplamento promovido pelas equações diferenciais é feito na seção 3.1 , e resulta na inferência de relações implícitas com resolução temporal 3.2 , radial 3.3 e angular 3.4 .

A segmentação dos tensores constituintes da geodésica compõem-se vetorialmente e o significado físico é condicionado ao transporte paralelo, o que é demonstrado, seção 3.5 , pela condição de ortogonalidade em relação ao vetor tangente do movimento.

Tona-se notório que a ação da gravidade nem sempre se alinha com o gradiente da métrica, e as componentes espaciais e motivam a seção 4 . A decomposição vetorial revela ação induzido pela velocidade que opera em conjunto com a curvatura, e os tensores são expressos nas projeções convenientes.

O texto se encerra fazendo as considerações finais, seção 5 , na forma de sumário e conclusão.

2 Covariância

Em física, covariância concerne a transformação difeomórfica de coordenadas em concordância com invariante obtido das equações de Maxwell[12], que motiva a busca por expressões analíticas que descrevam o fenômeno da invariância da velocidade de onda de uma emissão eletromagnética a partir de um corpo em movimento no vácuo[11].

Entre referenciais separados por velocidade constante, o grupo de transformação de Lorentz satisfaz a descrição dos fenômenos eletromagnéticos, e os efeitos da velocidade no espaço e no tempo são interpretadas pela Teoria da Relatividade [4], em que a relação entre espaço e tempo é descrita por Minkowski [14] em uma geometria hiperbólica.

No movimento do corpo com velocidade constante, a relação com o invariante eletromagnético é sintetizado pela equação do escalar de Lorentz [10], em notação tensorial é complementada pela métrica de Minkowski, escreve-se como:

$$c^2 = \gamma^2 v^\mu v^\nu \eta_{\mu\nu} \tag{2.1}$$

Um grupo de transformações opera a covariância de um sistema se, pela álgebra e cálculo tensorial, a transformação preservar uma expressão que se contrai em um invariante e, além disso, for diferenciável, invertível e sua inversa diferenciável[6].

Para emprego na mecânica, a transformação covariante deve ser a mesma para todas as quantidades relacionadas pelo cálculo. O requisito implica que a transformação de velocidade segue a mesma transformação Λ^μ_α aplicada à coordenada.

$$x^\mu = \Lambda^\mu_\alpha \, x^\alpha \tag{2.2}$$
$$v^\mu = \Lambda^\mu_\alpha \, v^\alpha \tag{2.3}$$

A transformação deve atender condições de difeomorfismo no cálculo das quantidades tensoriais. Na relação entre posição e velocidade, dado que $v = \dot{x}$, a transformação Λ^μ_α satisfaz a equação:

$$\Lambda^\mu_\alpha \, v^\alpha = \frac{d}{d\tau} (\Lambda^\mu_\alpha \, x^\alpha) \tag{2.4}$$

O grupo de transformações de Lorentz é constante diante da operação de derivação, e a demonstração da propriedade algébrica da covariância é elementar.

A observação empírica do fenômeno da invariância da velocidade nas ondas eletromagnéticas emitidas não se restringe a corpos com velocidade constante. Covariância geral é uma discussão em aberto [15]. Delimitamos a abrangência do assunto identificando como sistema covariante aquele que possui um invariante de movimento e ao menos um grupo transformação que opera a covariância. Nessa definição enquadra-se a descrição analítica de sistema em que a velocidade seja variável, como encontrada na gravitação.

A covariância é recepcionada como princípio na formulação do movimento produzido por gravitação. Relatividade Geral [5] propõe descrever o movimento de corpos sobre influência gravitacional que atendam ao invariante de Lorentz. A teoria ainda enuncia o Princípio da Equivalência, que atribui estado inercial ao movimento, e aceita covariância das transformações de Lorentz para referenciais inerciais instantaneamente comóveis [9].

A teoria demonstra que é possível equaciona um tensor métrico pelo potencial gravitacional como consequência da relação que a curvatura produzida pela métrica possui com a distribuição de energia-massa em uma trajetória geodésica [7]. A resolução para o tensor métrico é obtida por Schwarzschild [18]. Entretanto, aqui será empregado o tensor métrico regular[13] para representar a curvatura do espaço-tempo.

Existe uma métrica $g_{\mu\nu}$ que atende as condições de campo tal que torna válido o invariante de Lorentz:

$$c^2 = \gamma^2 v^\mu v^\nu g_{\mu\nu} \tag{2.5}$$

2.1 Isometria da Base

Pela simetria central da influência gravitacional, o tensor métrico é descrito coordenadas esféricas. A mudança entre sistemas de coordenadas cartesiano-esférico não possui significado físico, o que implica que não entram na composição do movimento.

Covariância refere-se também às transformações de coordenadas que não se relacionam com o estado de movimento. Mudanças entre sistemas de coordenadas são transformações passivas, não envolvem translação de posição[2][19], e resume-se em satisfazer a covariância na arbitrariedade da escolha de um sistema de coordenadas. Embora o significado físico seja diferente, a álgebra tensorial da mudança de coordenada é similar ao que é visto na covariância da mudança de referenciais.

Na mudança de coordenadas, é esperado que se preserve a norma do vetor, o que na aplicação mecânica do formalismo tensorial resulta em um invariante físico. Em entendimento matemático, o conceito se confunde com isometria. [1]

Seja $g_{\mu\nu} = J^\kappa_\mu J^\lambda_\nu g_{\kappa\lambda}$, a transformação esférico-cartesiano, a mesma norma é obtida nos dois sistemas de coordenadas.

$$v^\mu v^\nu g_{\mu\nu} = v^\kappa v^\lambda g_{\kappa\lambda} \tag{2.6}$$

A mesma isometria deveria ocorre nos tensores da base para mudança de coordenada, entretanto, pela sua natureza covariante, a base não se contrai

[1]Similaridade puramente algébrica

em um invariante, e é improdutivo fabricar um tensor unitário. A base não possui medida para cada elemento, porém um invariante relacionado à base é definida pelo determinante da métrica, que, em certo sentido, metrifica si mesma. Denomina-se, aqui, isometria da base diante de uma transformação quanto essa operação resultar na propriedade da métrica com determinante invariante constante.

A isometria nos vetores da base estende a mesma transformação entre sistemas de coordenadas a todos os vetores de uma mesma posição. O que está implícito na generalização tensorial é a forma paramétrica da transformação, que deve preservar a estrutura isomórfica da derivada.

Para o propósito do texto, isometria um tipo especial de covariância, e os termos serão empregados de forma intercambiável. Para denotar a transformação entre sistema de coordenadas, adotamos a convenção notacional de indicar a distinção entre os sistemas pelas letras dos alfabetos latino e grego aplicado aos índices.

$$x^\mu = J^\mu_m \, x^m \tag{2.7}$$

$$v^\mu = J^\mu_m \, v^m \tag{2.8}$$

A transformação entre sistemas de coordenadas resulta na mesma velocidade sobre variáveis diferentes. O quadro está completo observando que a velocidade é variável da gravitação, e sua derivada resulta na equação geodésica.

$$a^\mu = J^\mu_m \, a^m \tag{2.9}$$

Pretende-se estabelecer que a transformação covariante entre coordenadas J^μ_m, a sua inversa e respectivas derivadas, satisfazem a álgebra da transformação:

$$J^\mu_m \, a^m = \frac{d}{d\tau}(J^\mu_m)\,\gamma v^m + J^\mu_m \, \frac{d}{d\tau}(\gamma v^m) \tag{2.10}$$

Isolando a^m na equação, e sabendo que o primeiro termo da soma torna-se nulo e o sistema é reduzido à diferencial ordinária $d(\gamma v^m)/d\tau = 0$.

A resolução de uma transformação J^μ_m para a equação pode ser dividida em duas partes. Uma solução candidata, não trivial, é dada por:

$$J^m_\mu \frac{d}{d\tau}(J^\mu_m) = 0^m_m \tag{2.11}$$

O zero não trivial implica ortogonalidade. A segunda parte, a operação diferencial pela derivada covariante deve transigir as propriedades da transformação covariante J^μ_m encontrada entre os diferentes operandos. No caso da resolução, uma equação concorrente é:

$$\frac{d}{d\tau} v^m = \frac{d}{d\tau}(J^m_\mu \, v^\mu) \tag{2.12}$$

A derivada introduzida por Ricci e Levi-Civita [17] generaliza a noção de derivada direcional incluindo na definição da operação o símbolo de Christoffel.

O tratamento intrínseco satisfaz a geometria não-euclidiana de Riemann, recebendo a denominação covariante pela propriedade do tensor derivado seguir a mesma variância do tensor primitivo na transformação de variáveis.

O operador é definido pela relação com a variação dos tensores da base, entretanto a derivada covariante não faz distinção entre variação intrínseca do espaço, que é variação exclusiva da métrica, e a variação paramétrica, que ocorre pela sua dependência funcional. Uma base fixa de tensores independentes varia apenas pela métrica, enquanto uma base móvel inclui também a variação pelos parâmetros que descrevem a mobilidade.

O símbolo Christoffel é definido como a derivada parcial do tensor da base. A transformação de coordenadas é contravariante à transformação do tensor da base. A variação de um vetor móvel é dada por:

$$\partial_\lambda \hat{e}_\mu = J^m_{\mu\lambda} \hat{e}_m + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \hat{e}_\alpha \tag{2.13}$$

A derivada parcial do tensor da base $\partial_\lambda \hat{e}_\mu$ torna-se o símbolo de Christoffel acrescida do termo $J^m_{\mu\lambda}$, correspondente à variação paramétrica. Esse termo extra permitirá redefinir o operador diferencial.

A transformação do símbolo Christoffel entre dois sistemas de coordenadas.

$$\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} = J^\alpha_a (J^\ell_\lambda J^m_\mu \Gamma^a_{m\ell} + J^\ell_\lambda \partial_\ell (J^a_\mu)) \tag{2.14}$$

Uma consequência interessante da transformação é que o símbolo Christoffel torna-se covariante somente se:

$$J^\ell_\lambda \partial_\ell (J^a_\mu)) = 0^a_{\mu\lambda} \tag{2.15}$$

A equação é trivial para transformação entre duas bases fixas. Entre uma base fixa e outra móvel a transformação ortonormal produz o mesmo resultado.

Recobrando que a mudança de coordenadas não possui significado físico, é esperado que a transformação incorra no rearranjo dos índices, correspondente a mudança de base. O termo extra em $\partial_\lambda \hat{e}_\mu$ permite separar a variação paramétrica da variação intrínseca na definição da operação de derivação. A condição de covariância da transformação entre coordenadas está ligada a ortonormalidade.

2.2 Base Esférica Normalizada

O movimento de um corpo somente pode ser descrito em relação a outros corpos[16].

Coordenadas curvilíneas são descritas por bases móveis e implica que esse movimento deve ser definido parametricamente a partir de uma direção fixa.

Apontar para uma direção considerada fixa é um problema externo ao sistema. Adota-se o critério que a consistência da demonstração está condicionada na premissa que o observador consiga identificar direções fixas.

A métrica de simetria central presume a inércia do corpo central em consequência do campo ínfimo da partícula de teste. O sistema consiste em localizar a partícula de teste em relação à localização do corpo de massa central, sendo possível apontar para pontos de referência distantes o suficiente para não serem influenciados pela massa central e considerados imóveis diante da escala de tempo do movimento do corpo de teste.

Os tensores da base esférica são parametrizados pelos ângulos coordenados, enquanto os ângulos coordenados são orientados pela posição da mesma base esférica: a circularidade é resolvida pela referência a uma base cartesiana.

Base cartesiana é independente do movimento e, em uma transformação com a base esférica, é necessário que definição demonstre não haja introdução de dependência na base cartesiana, e que seja concomitante com a resolução da circularidade nas variáveis esféricas.

Conceitualmente deve-se fazer considerações sobre o acoplamento implícito entre base e coordenadas.

Em coordenadas curvilíneas, os vetores da base podem ser matematicamente dados por uma definição holonômica da base.

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \Big/ \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \right\| \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \Big/ \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\| \qquad \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \Big/ \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right\| \tag{2.16}$$

Na resolução analítica de um sistema, essa definição matemática existe para satisfazer a trajetória, o que implica que não faz distinção entre trajetória ser geodésica ou não, a complicação está em definir como isso deve ser tratado diante do fato que o tensor da base entra na definição da métrica. Se a trajetória não for geodésica, então não é um resultado de campo, e coloca em dúvida se a métrica relacionada com a base atende à realidade física ou satisfaz uma condição puramente matemática.

Outra definição de transformação é dada na matriz jacobiana, o que recai no mesmo problema de vínculo com variáveis de trajetória. A transformação entre coordenadas por uma matriz jacobiana recupera a transformação da mudança de base pela reciprocidade que faz com a mudança de coordenada.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \rho} \tag{2.17}$$

É oportuno apontar aqui que a definição holonômica da base sugere um módulo normalizado, mas obter um valor unitário é conflitante com a definição do produto interno pela métrica. O fato será retomado adiante.

2.2.1 Base

A base esférica será definida pelas propriedades pretendidas na conversão cartesiano esférico. Especificamente, a independência de qualquer consideração sobre o movimento ou deslocamento infinitesimal, e requer uma definição que seja produto da álgebra, e não que seja um resultado do cálculo.

O movimento da base esférica é resultado da reorientação e sua dependência paramétrica circular, resolvida pela referência a uma base cartesiana. Será apresentado a definição feita por operações vetoriais, que são redutíveis a uma identidade vetorial.

Seja a decomposição do vetor em uma parcela projetada no eixo radial e outra parcela o rejeito da operação de projeção.

$$\hat{\mathbf{x}} = (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}})\hat{\boldsymbol{\rho}} - \hat{\boldsymbol{\rho}} \times (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{x}}) \tag{2.18}$$

A parcela de rejeição pode novamente ser decomposta em outros dois vetores ortogonais.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}})\hat{\boldsymbol{\rho}} - [\hat{\boldsymbol{\rho}} \times (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{x}})] \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} - [\hat{\boldsymbol{\rho}} \times (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{x}})] \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} && (2.19) \\ &= (\sin\theta\cos\varphi)\hat{\boldsymbol{\rho}} - (-\cos\theta\cos\varphi)\hat{\boldsymbol{\theta}} - (\sin\phi)\hat{\boldsymbol{\varphi}} && (2.20) \end{aligned}$$

A definição não altera a natureza fixa do vetor $\hat{\mathbf{x}}$, mesmo que os vetores da base esférica possuam dependência paramétrica, pois decomposição é uma identidade vetorial, o que também pode ser observada na forma escalar.

Completa-se a definição repetindo a operação para os vetores $\hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}) & -\hat{\boldsymbol{\rho}} \times (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{x}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} & -\hat{\boldsymbol{\rho}} \times (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{x}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}) & -\hat{\boldsymbol{\rho}} \times (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{y}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} & -\hat{\boldsymbol{\rho}} \times (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{y}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}) & -\hat{\boldsymbol{\rho}} \times (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{z}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} & -\hat{\boldsymbol{\rho}} \times (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{z}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

A matriz pode ser simplificada para reduzir o número de operações, e resulta em escalares e introduz variáveis paramétricas. Na forma apresentada, a base cartesiana não possui dependência paramétrica em razão da redução à identidade vetorial, enquanto a inversão apresenta dependência funcional da base esférica.

A duplicidade do vetor $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ é redundante para o resultado escalar.

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{x}} &= 0\hat{\boldsymbol{\rho}} + (\cos\theta\cos\phi)\hat{\boldsymbol{\phi}} + (-\sin\phi)(-\hat{\boldsymbol{\theta}}) && (2.22) \\ -\hat{\boldsymbol{\rho}} \times (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{x}}) &= 0\hat{\boldsymbol{\rho}} + (\cos\theta\cos\phi)\hat{\boldsymbol{\theta}} + (-\sin\phi)\hat{\boldsymbol{\phi}} && (2.23) \end{aligned}$$

Substituindo os termos similares.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}) & (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{x}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} & (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{x}}) \cdot (-\hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}) & (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{y}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} & (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{y}}) \cdot (-\hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}) & (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{z}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} & (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{z}}) \cdot (-\hat{\boldsymbol{\theta}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

A base esférica está definida como a transformação da base cartesiana pela matriz ortogonal J^{μ}_{m}, que representa a rotação por dois parâmetros angulares.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{t}} \\ \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{t}} \\ \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

A transformação inversa em cartesianas é apresentada adiante, onde torna se oportuno após a exposição de coordenadas.

2.2.2 Coordenadas

A transformação de coordenadas segue demonstração distinta da base. Conhecida a posição $\{x, y, z\}$ cartesiana, pode-se descrever pelas variáveis esféricas pelas relações trigonométricas.

$$
\begin{aligned}
x =& \rho \sin\theta \cos\varphi && (2.26)\\
y =& \rho \sin\theta \sin\varphi && (2.27)\\
z =& \rho \cos\theta && (2.28)
\end{aligned}
$$

A posição pode ser descrita pelo tensor:

$$\mathbf{r} = ct\ \hat{\mathbf{t}} + \rho \sin\theta \cos\varphi\ \hat{\mathbf{x}} + \rho \sin\theta \sin\varphi\ \hat{\mathbf{y}} + \rho \cos\theta\ \hat{\mathbf{z}} \tag{2.29}$$

O tensor posição em coordenadas esféricas possui particularidade que é interessante ser ressaltada. Diferente da base fixa, os vetores da base esférica somente são conhecidos em conjunto com as variáveis de coordenada, ou seja, a base está conjugada à coordenada.

Podemos compor o vetor unitário:

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}(\theta, \varphi) = \sin\theta \cos\varphi\ \hat{\mathbf{x}} + \sin\theta \sin\varphi\ \hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\ \hat{\mathbf{z}} \tag{2.30}$$

Os ângulos θ e φ, apesar de não serem nulos, não participam das coordenadas em razão da ausência dos vetores $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ no vetor posição.

$$\begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} ct \\ \rho \sin\theta \cos\varphi \\ \rho \sin\theta \sin\varphi \\ \rho \cos\theta \end{bmatrix}^T = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta \cos\varphi & \cos\theta \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \sin\varphi & \cos\varphi \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ \rho \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^T \tag{2.31}$$

A transformação dos vetores da base pode ser entendida com rotação dos eixos pelos ângulos polar e azimutal, e as amplitudes angulares se anulam nas coordenas frente a nova configuração. Denominamos autorrotação quando os vetores transformados também operam como parâmetros de transformação.

Ângulos não são transformados linearmente. Ao considerar o mapeamento inverso, observa-se que θ e φ somente existem como parâmetro de $\hat{\boldsymbol{\rho}}$. A definição da transformação reversa recai na escolha dos eixos fixo e em relações trigonométricas suplementares a transformação.

Invertendo a direção de transformação na equação matricial de coordenadas, tem-se na última linha a equação.

$$-x \sin\varphi + y \cos\varphi = 0 \tag{2.32}$$

Considerando propriedades trigonométricas apropriadas, chega-se ao valor de φ expresso pelas cartesianas:

$$y/x = \tan\varphi \tag{2.33}$$

O valor obtido pode ser substituído na equação obtida da segunda linha da transformação inversa.

$$x \cos\theta \cos\phi + y \cos\theta \sin\phi - z \sin\theta = 0 \tag{2.34}$$

Duas substituições, em que é possível separa cartesianas de esféricas, são possíveis, o que resulta nas equações intermediárias:

$$x/z = \tan\theta \cos\varphi \tag{2.35}$$
$$y/z = \tan\phi \tan\theta \cos\varphi \tag{2.36}$$

As variáveis x e y podem ser substituídas na primeira linha equação do sistema inverso dado abaixo:

$$x \sin\theta \cos\phi + y \sin\theta \sin\phi - z \cos\theta = 0 \tag{2.37}$$

A substituição das expressões conhecidas resulta na expressão em θ:

$$z = \rho \cos\theta \tag{2.38}$$

A transformação inversa dos tensores da base, ao contrário do que é observado para coordenadas, pode ser dado pela matriz inversa.

Substituímos os elementos da primeira coluna da matriz de transformação pelos valores:

$$x/\rho = \sin\theta \cos\varphi \tag{2.39}$$
$$y/\rho = \sin\theta \sin\varphi \tag{2.40}$$
$$z/\rho = \cos\theta \tag{2.41}$$

A segunda coluna vem das operações entre os valores conhecidos:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2\theta \tag{2.42}$$
$$(x^2 + y^2) + z^2 = \rho^2 \sin^2\theta + \rho^2 \cos^2\theta \tag{2.43}$$

A terceira coluna vem das relações:

$$x/\sqrt{x^2 + y^2} = \cos\phi \tag{2.44}$$
$$y/\sqrt{x^2 + y^2} = \sin\phi \tag{2.45}$$

Como o determinante é unitário, a inversa é dada pela transformação de linhas em colunas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{x}{\rho} & \dfrac{y}{\rho} & \dfrac{z}{\rho} \\ 0 & \dfrac{xz}{\rho^2\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{yz}{\rho^2\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{-\left(x^2+y^2\right)}{\rho^2\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 & \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

2.2.3 Normalidade

A normalidade do tensor é geralmente associada à magnitude unitária. Nesta definição ocorre o mesmo conflito mencionado anteriormente na definição holonômica. A norma do tensor está sujeita à variação do tensor métrico e entra em desacordo com a magnitude unitária geral.

A normalidade singular de cada tensor da base não pode ser estabelecida. Entretanto, pode-se aplicar o conceito à base em conjunto.

Entendido que a norma é o fator de escala que pondera a participação da base no resultado de uma combinação linear, podemos entender que a métrica assume essa função.

Na normalidade dada pela métrica, o tensor da base é unidade de direção do espaço, mas não é unitário. Transposição da magnitude em unidade é feita pela métrica.

A consistência da magnitude dos tensores da base se faz por isometria. Ortonormalidade é importante para definir a unidade da base em relação a outra base. Unidade na comparação entre bases, a métrica é normal se define o volume unitário na referência na transformação com outras métricas.

No conceito convencional de normalidade, a propriedade é individual de cada tensor da base. No conceito reformulado para métrica variável, o tensor é normal pela participação na definição uma base com essa propriedade.

A explanação da normalidade do tensor métrico será apresentada adiante.

2.3 Velocidade

O tensor velocidade, em coordenadas esféricas, pode ser obtido diretamente da derivada ordinária tensor posição.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \gamma c\ \hat{\boldsymbol{t}} + \gamma\dot{\rho}\ \hat{\boldsymbol{\rho}} + \gamma\rho\dot{\theta}\ \hat{\boldsymbol{\theta}} + \gamma\rho\dot{\varphi}\sin\theta\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{2.47}$$

Para ser covariante, é necessário demonstrar que a velocidade acompanha o tensor de coordenadas na transformação cartesiano-esférico.

$$v^{\mu} = J^{\mu}_{m} v^{m} \tag{2.48}$$

A derivada do tensor $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ produz velocidades pela variação paramétrica, que está associado à derivada da transformação $\dot{J}^{\mu}_{m}$. Destaca-se que as velocidades não equivalem à variação canônica dos parâmetros nas direções respectivas a $\dot{\theta}$ e $\dot{\varphi}$. Abstratamente tem-se $\dot{x}^{\mu} \neq J^{\mu}_{m}\dot{x}^{m}$, com isso uma demonstração da transformação somente pode ser feita após a substituição das variáveis pelas expressões particulares do problema.

Considere a equação de transformação entre velocidades:

$$\dot{x}^{m} = J^{m}_{\mu}\dot{x}^{\mu} + (\dot{x}^{\lambda} J^{m}_{\mu\lambda})x^{\mu}$$

Substituindo as variáveis para o índice da primeira componente cartesiana.

$$
\begin{aligned}
\dot{x} =& \dot{r}\sin\theta\cos\phi + 0\cos\theta\cos\phi - 0\sin\phi \\
&+ \dot{r}[\ r\,\partial_r(\sin\theta\cos\varphi) + 0\,\partial_r(\cos\theta\cos\varphi) + 0\,\partial_r(-\sin\varphi)\ ] \\
&+ \dot{\theta}[\ r\,\partial_\theta(\sin\theta\cos\varphi) + 0\,\partial_\theta(\cos\theta\cos\varphi) + 0\,\partial_\theta(-\sin\varphi)\ ] \\
&+ \dot{\phi}[\ r\,\partial_\varphi(\sin\theta\cos\varphi) + 0\,\partial_\varphi(\cos\theta\cos\varphi) + 0\,\partial_\varphi(-\sin\varphi)\ ]
\end{aligned} \tag{2.49}
$$

Faz-se notar que as coordenadas esperadas nas posições θ e φ são nulas em razão das variáveis não se apresentarem na tupla do respectivo tensor, enquanto as derivadas das mesmas variáveis aparecem em $\dot{J}^m_\mu = \dot{x}^\alpha \partial_\alpha J^m_\mu$ como velocidades angulares $\dot{\theta}$ e $\dot{\varphi}$.

Abaixo, o resultado das substituições de todas as direções: $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$.

$$\dot{x} = \dot{\rho}\sin\theta\cos\varphi + \rho\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - \rho\dot{\phi}\sin\theta\sin\varphi \tag{2.50}$$

$$\dot{y} = \dot{\rho}\sin\theta\sin\varphi + \rho\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \rho\dot{\phi}\sin\theta\cos\varphi \tag{2.51}$$

$$\dot{z} = \dot{\rho}\cos\theta - \rho\dot{\theta}\sin\theta \tag{2.52}$$

Organizando em um arranjo matricial, obtemos a relação entre as velocidades por meio da transformação:

$$
\begin{bmatrix} c \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}^T = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \\ \rho\dot{\phi}\sin\theta \end{bmatrix} \right)^T \tag{2.53}
$$

2.4 Tensor Métrico Normalizado

Motivado pela covariância nas transformações entre sistemas de coordenadas, chega-se à condição de ortonormalidade das transformações, que influencia a escolha da base móvel, que por sua vez define o tensor métrico.

A transformação entre coordenadas deve ser isométrica, ou seja, preserva a norma.

$$v^\mu v^\nu g_{\mu\nu} = v^m v^n g_{mn} \tag{2.54}$$

Da igualdade dos produtos, pode-se deduzir a transformação entre métricas:

$$g_{\mu\nu} = J^m_\mu J^n_\nu g_{mn} \tag{2.55}$$

Na condução do produto por operações matriciais, as transformações assumem a forma do produto $(J^m_\mu)^T(J^n_\nu)$. O determinante da transformação resulta na comparação direta entre os dois tensores métricos pelos respectivos determinantes.

$$\det(g_{\mu\nu}) = \det(g_{mn}) \tag{2.56}$$

Embora uma métrica particular seja parametrizada pelas variáveis do sistema coordenado correspondente, o determinante é comum entre os sistemas que se transformam de modo covariante entre si, sendo, portanto, independente de qualquer sistema. A definição do determinante opera a contração de índices, o escalar resultante é invariante.

$$\det(g_{\mu\nu}) = \frac{1}{\varepsilon^{\mu_0 \cdots \mu_3}\varepsilon_{\nu_0 \cdots \nu_3}} \varepsilon^{\mu_0 \cdots \mu_3}\varepsilon^{\nu_0 \cdots \nu_3} g_{\mu_0\nu_0} \cdots g_{\mu_3\nu_3} \tag{2.57}$$

Denominamos tensor métrico normalizado aquele que o determinante seja unitário. O valor unitário corresponde diretamente à reciprocidade entre os componentes da métrica, mas também ao fator de escala entre os tensores da base e tensores que podem ser obtidos por combinação linear.

Podemos escrever o invariante de Lorentz para coordenadas esféricas.

$$c^2 = \gamma^2 \begin{bmatrix} ct \\ \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \\ \rho\dot{\varphi}\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{00} & & & \\ & g_{11} & & \\ & & g_{22} & \\ & & & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \\ \rho\dot{\varphi}\sin\theta \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

Assinatura é $(+,+,+,+)$, o sinal é incorporado à métrica e aparecem nas substituições por valores conhecidos da métrica regular[13].

$$g_{00} = \left(1 + \frac{GM}{c^2 r}\right)^{-1} \delta_{00} \tag{2.59}$$

$$g_{11} = -\left(1 + \frac{GM}{c^2 r}\right) \delta_{11} \tag{2.60}$$

$$g_{22} = -1\delta_{22} \tag{2.61}$$

$$g_{33} = -1\delta_{33} \tag{2.62}$$

Para curvatura de simetria central, em razão do determinante unitário, a forma esférica do tensor expõem uma condição notável, que pode ser generalizadas para as formas transformadas: a componente temporal está sempre em reciprocidade com restante do determinante.

O arranjo pode ser resumido enunciando a existência de duas curvaturas cardinais: uma temporal e outra espacial. A natureza direcional da “aceleração” alinha-se curvatura espacial. A direção nem sempre pode ser expressa por um único vetor da base, em consideração à mudança que essa base pode sofrer, e distingue-se essa direção espacial pela denominação de diretrix.

A métrica e o determinante são regulares, estão definidas em todo o espaço. A normalidade evita indefinições transientes, como em $\sin\theta = 0$ (singularidade polar é removível, porém inconveniente.) Também traz como benefício, o número reduzido de símbolos de Christoffel

$$\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{01} = \tfrac{1}{2} g^{00}\partial_1 g_{00} \tag{2.63}$$

$$\Gamma^1_{00} = -\tfrac{1}{2} g^{11}\partial_1 g_{00} \tag{2.64}$$

$$\Gamma^1_{11} = \tfrac{1}{2} g^{11}\partial_1 g_{11} \tag{2.65}$$

No esforço de preservar os índices, produz-se o tensor $\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 = \delta_{11}$

$$\partial_1 g_{11} = \frac{GM}{r^2}\delta_{11}\|\hat{\mathbf{u}}_1\| \tag{2.66}$$

A condição de covariância foi considerada por Einstein e Hilbert privadamente [3] e depois abertamente [7]. Entretanto, deixa de ser comentada após instrução de Hilbert sobre a métrica de Schwarzschild [8].

2.5 Derivada Covariante-Paramétrica

Um tensor obtido pela derivada direcional de Ricci transforma-se covariante com a mudança de coordenadas, ou seja, é linear. O fato de os símbolos de Christoffel não serem covariante, mas satisfazerem a linearidade na operação é demonstrável para qualquer transformação de coordenadas [6].

$$\nabla_\lambda T^\mu = J^\lambda_\ell J^\mu_m \nabla_\ell T^m \tag{2.67}$$

O operador pode ser definido abstratamente, sem a presença do tensor métrico, e consequentemente sem quaisquer considerações sobre as propriedades métricas.

Ocorre que nem toda transformação é isométrica, condição que foi obtida ao representar parametricamente a mobilidade de uma base em relação a outra.

Considere que a transformação entre tensores de base $\hat{e}_\mu = J^m_\mu \hat{e}_m$ represente dependência paramétrica de uma base para com a outra, ou seja, $J^m_{\mu\lambda} \neq 0$. As variações dos vetores da base pelo podem ser escritas por:

$$\partial_\lambda \hat{e}_\mu = J^m_{\mu\lambda}\hat{e}_m + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda}\hat{e}_\alpha \tag{2.68}$$

O resultado pode ser interpretado como sendo a soma da variação intrínseca com a variação paramétrica. A definição da derivada de Ricci e Levi-Civita incorpora toda a variação do tensor da base ao operador. Para a redefinição da operação, incorporamos apenas a variação do tensor da base de referência, que contém somente a variação intrínseca do espaço.

$$\nabla_\lambda \hat{e}_\mu = \partial_\lambda \hat{e}_\mu - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda}\hat{e}_\alpha = J^m_{\mu\lambda}\hat{e}_m \tag{2.69}$$

O operador resultante corresponde na derivada covariante acrescida de um termo paramétrico.

$$\nabla_\lambda \mathbf{V} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda}\hat{e}_\mu + V^\mu \frac{\partial \hat{e}_\mu}{\partial x^\lambda} \tag{2.70}$$

$$= \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda}\hat{e}_\mu + V^\mu \left(\Gamma^\alpha_{\mu\lambda}\hat{e}_\alpha + J^m_{\mu\lambda}\hat{e}_m\right) \tag{2.71}$$

Repare que não é possível agrupar os índices do símbolo Christoffel e os índices dos termos de conversão ao mesmo tempo. Um reagrupamento por direção é necessário para esse propósito.

$$\nabla_b \mathbf{V} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda}\hat{e}_\mu + V^\alpha \Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\hat{e}_\mu + V^\mu J^m_{\mu\lambda}\hat{e}_m \tag{2.72}$$

Para métrica normal e transformação ortonormal a expressão é derivada isométrica.

3 Gravitação

A equação geodésica um é sistema de equações diferenciais onde as variáveis estão acopladas. Sendo assim, as variáveis devem ser resolvidas simultaneamente ou, quando a alternativa se apresente, a resolução de uma variável deve permitir a substituição reversa na outra sucessivamente.

A resolução onde equação do movimento é solução particular para uma condição de movimento conhecida, mas a expressão pode ser simplificada conhecendo-se algumas propriedades são conhecidas das definições que antecedem a geodésica. Concomitante ao acoplamento, as variáveis relacionam-se implicitamente pelas relações métricas e temos uma vinculação entre as componentes do tensor métrico.

A equação geodésica, deduzida pela derivada covariante, é o caminho por onde ser realiza o transporte paralelo. Conjuga-se a isso, pelo mesmo operador, a invariância do módulo.

3.1 Geodésica

A equação geodésica é deduzida pela derivada covariante-paramétrica do tensor velocidade. O operador diferencial atua na base móvel pela variação paramétrica, o que impede suprimir a base da notação.

A derivada da velocidade radial resulta em cinco termos e, entre esses, três permanecem na mesma direção, um devido à variação de coordenada e os outros dois produzidos pela curvatura. Os dois termos angulares são devido à variação paramétrica, como resultado da rotação da base.

$$\frac{d}{d\tau}(\gamma\dot{\rho}\ \hat{\boldsymbol{\rho}}) = \frac{d}{d\tau}(\gamma\dot{\rho})\ \hat{\boldsymbol{\rho}} + \gamma^2\dot{r}\left[\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\phi}\sin\theta\ \hat{\boldsymbol{\phi}}\right] + \gamma^2\left[c^2\Gamma^1_{00}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \dot{r}^2\Gamma^1_{11}\hat{\boldsymbol{\rho}}\right] \tag{3.1}$$

No operando, a componente contravariante é sempre acompanhada da base covariante, por conta da definição do operador, uma simplificação notacional comprometeria a clareza da mobilidade paramétrica da base. No resultado, o mesmo padrão notacional permite distinguir as varição do tensor em direções distintas.

É impróprio atribuir o resultado acima a uma variável pontuada $\dot{V}^1\hat{\boldsymbol{e}}_1$ em razão da heterogeneidade de tensores base do resultado. Consequentemente, não é possível equacionar diretamente a equação geodésica $A^1 = 0^1$ sem que haja reagrupamento.

A derivada das velocidades nas direções angulares não possuem termos da curvatura, em razão da normalização. Em compensação, a variação paramétrica resulta em termos nas direções complementares. Para a velocidade na direção polar.

$$\frac{d}{d\tau}(\gamma\rho\dot{\theta}\ \hat{\boldsymbol{\theta}})) = \frac{d}{d\tau}(\gamma\rho\dot{\theta})\ \hat{\boldsymbol{\theta}} + \gamma^2\rho\dot{\theta}\left[-\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\varphi}\cos\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right] \tag{3.2}$$

Assim como no caso anterior, não temos $\dot{V}^2\hat{\boldsymbol{e}}_2$
A derivada para a velocidade na direção azimutal.

$$\frac{d}{d\tau}(\gamma\rho\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}}) = \gamma\dot{\gamma}\rho\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \gamma^2\dot{\rho}\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \gamma^2\rho\ddot{\varphi}\sin\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \gamma^2\rho\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{3.3}$$

$$+ \gamma^2\rho\dot{\varphi}\sin\theta\left[-\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\boldsymbol{\rho}} - \dot{\varphi}\cos\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right] \tag{3.4}$$

Recombinar os resultados por direção equivale ao reagrupamento dos índices tensoriais.
Os termos espaciais são:

$$A^1 = \gamma\dot{\gamma}\dot{\rho} + \gamma^2\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 - \rho\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) + \gamma^2\left(c^2\Gamma^1_{00} + \dot{\rho}^2\Gamma^1_{11}\right) \tag{3.5}$$

$$A^2 = \gamma\dot{\gamma}\rho\dot{\theta} + \gamma^2\left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} - \rho\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right) \tag{3.6}$$

$$A^3 = \gamma\dot{\gamma}\rho\dot{\varphi}\sin\theta + \gamma^2\left(\rho\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\sin\theta + 2\rho\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right) \tag{3.7}$$

O temo da variação temporal possui apenas variação devido à curvatura do tempo.

$$A^0 = \gamma\dot{\gamma}c + 2\gamma^2 c\dot{\rho}\Gamma^0_{10} \tag{3.8}$$

O equacionamento $A^\mu = 0^\mu$ é a equação geodésica em coordenadas esféricas. A covariância pode ser demonstrada similar ao que foi feito na seção que trata da velocidade, mas com derivação operando pela derivada covariante-paramérica.

$$A^\mu = J^\mu_m A^m \tag{3.9}$$

3.2 Componente Temporal

Os termos espacial e radial no tensor métrico regular esférico são únicos a conter curvatura e os valores recíprocos indicam a vinculação entre as curvaturas. As variáveis contravariantes são afetadas por essa reciprocidade.

O acoplamento entre as variáveis, dado no equacionamento diferencial, permite supor um termo de "aceleração" radial na equação de índice temporal. Entretanto, na equação, o termo radial não se expressa diretamente, restando pressupor que a contraparte é implícita por alguma relação mediada pela métrica.

Seguindo com a demonstração, a assinatura $(+,+,+,+)$ é empregada nos cálculos.

Para a componente temporal, isola-se $\dot{\gamma}$ e substitui-se o símbolo de Christoffel Γ^0_{10} pela expressão nos termos do tensor métrico.

O equacionamento $A^\mu = 0^\mu$ para o índice 0 resulta em:

$$\dot{\gamma} = -\gamma g^{00}\dot{x}^1\partial_1 g_{00} \tag{3.10}$$

Ao de substituir derivada do componente métrico $\partial_1 g_{00}$ pela expressão correspondente do tensor métrico regular, obtemos:

$$\partial_1 g_{00} = g^{11}g^{11}\frac{GM}{r^2}\delta_{11}\|\hat{\mathbf{u}}_1\| \tag{3.11}$$

Identifica-se o resultado como uma parcela da aceleração radial, realizando a vinculação pelo acoplamento pressuposto.

A variação componente temporal da métrica experimentada na direção radial guarda semelhança com ∇U, sendo diferente pela convenção do sinal e pela existência termos $g^{11}g^{11}$. Os termos quadráticos, tanto da métrica quanto do parâmetro radial, tornam $\partial_1 g_{00} > 0$, com isso a variação é $\dot{\gamma} < 0$ para $\dot{x} > 0$, o seja o sinal de $\dot{\gamma}$ é dado pelo sinal oposto da velocidade $\dot{x}$.

A origem da similaridade com o potencial está na resolução da métrica, mas também é possível apontar que o valor de $\partial_1 g_{00}$ converge, em módulo, ao gradiente ∇U à medida que $g^{11}g^{11}$ se aproxima de 1.

O gradiente da métrica está definido em um contexto temporal, seguindo o índice da geodésica, enquanto o gradiente do potencial é definição espacial. A oposição do sinal sugere que, além da assinatura da métrica, há a assinatura da tupla, por exemplo, $(-ct, x, y, z)$.

A discussão prossegue com a definição do vetor tridimensional

$$\mathbf{f} = \frac{GM}{r^2}\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{3.12}$$

A intenção é expressar o escalar $\dot{\gamma}$ por meio de operações vetoriais. Considerando que a componente radial da velocidade é composta exclusivamente pela derivada da coordenada na mesma direção, ou seja, $\dot{x}^1 = v^1$, então o produto em $\dot{\gamma}$ pode ser expresso pelo produto escalar.

Como resultado, a expressão da derivada do fator de Lorentz é definida por:

$$\dot{\gamma} = \gamma\frac{(g^{11}g^{11}\mathbf{f}) \cdot (v^1\hat{\mathbf{e}}_1)}{c^2}\delta_{11}\delta_{11} \tag{3.13}$$

A eliminação do elemento $-g^{00}g^{11}$ da métrica corresponde ao produto escalar, na operação entre $g^{11}g^{11}\mathbf{f}$ pela velocidade $\dot{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}$ mediado por g_{11}. O resultado é negativo, observando que $g^{11} < 0$.

Em refutação à expressão ser apresentada como resultado do produto escalar, poder-se-ia argumentar que os termos das outras direções estão omissas, e torna o resultado indistinto do produto entre dois escalares. Porém, a caracterização como produto escalar também ocorre em razão dos símbolos de Christoffel Γ^0_{0k}, em que os termos omissos são nulos para índices correspondentes. A estrutura algébrica é consistente com a transformação da base. Considerando que fosse feito em cartesianas e retrocedendo a definição da componente temporal da equação geodésica:

$$v^0 v^k \Gamma^0_{0k} = (v^1, v^2, v^3) \cdot (v^0\Gamma^0_{01}, v^0\Gamma^0_{02}, v^0\Gamma^0_{03}) \tag{3.14}$$

Assim, podemos anotar todas as direções do vetor velocidade:

$$\dot{\gamma} = \gamma \frac{(g^{11} g^{11} \mathbf{f}) \cdot \mathbf{v}}{c^2} \delta_{11}\delta_{11} \tag{3.15}$$

Observa-se a participação da direção radial e a neutralidade das direções angulares torna-se importante na resolução das componentes subsequentes.

3.3 Componente Radial

A componente radial da equação geodésica compõem sistematicamente com a componente temporal, e a presença de $\dot{\gamma}$ é a contraparte temporal na equação espacial.

Na equação de índice radial, além da presença de termos fracionários, a resolução exige uma elaboração sobre a coerência das quantidades e ponderação sobre assinatura da tupla.

Uma vez que a expressão de $\dot{\gamma}$ é conhecida da equação temporal, deve haver um oposto para que se chegue em $A^\mu = 0^\mu$ no índice $\mu = 1$. A métrica não varia no tempo e $\dot{\gamma}$ foi definido por vinculação. É conveniente expressar $\dot{\gamma}$ em uma forma alternativa, empregando os mesmos tensores de A^1. Sabendo que $\partial_1(g_{00}g_{11}) = 0$, podemos chegar à $\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11} = 0$, e assim:

$$\dot{\gamma} = \gamma g^{11} \dot{\rho} \partial_1 g_{11} \tag{3.16}$$

Substituindo os símbolos de Christoffel na equação de índice radial:

$$A^1 = \gamma\dot{\gamma}\dot{\rho} + \gamma^2 \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 - \rho\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right) + \gamma^2 \left(-c^2 \tfrac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{00} + \dot{\rho}^2 \tfrac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{11}\right) \tag{3.17}$$

Considere a expressão Q, que destaca os termos provenientes da curvatura:

$$Q = \left(-c^2 \tfrac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{00} + \dot{\rho}^2 \tfrac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{11}\right) \tag{3.18}$$

O fracionamento dos termos pode ser resolvido somando-se:

$$\left(-\dot{\rho}^2 g^{11} \partial_1 g_{11} + \dot{\rho}^2 g^{11} \partial_1 g_{11}\right) \tag{3.19}$$

A expressão pode ser dada na seguinte distribuição.

$$Q = -\tfrac{1}{2} g^{11} \left(c^2 \partial_1 g_{00} + \dot{\rho}^2 \partial_1 g_{11}\right) + \left(\dot{\rho}^2 g^{11} \partial_1 g_{11}\right) \tag{3.20}$$

O primeiro termo do lado direito da equação se relaciona com a derivada parcial do fator de Lorentz na direção radial, sendo que, por nulidade, as componentes angulares estão ausentes.

$$\partial_1\gamma = -\frac{\gamma^3}{2c^2}(c^2\partial_1 g_{00} + \dot\rho^2\partial_1 g_{11}) \tag{3.21}$$

Por coerência, a "aceleração" radial deve ser a mesma daquela que possa ser fatorada da forma vetorial em $\dot\gamma$.

Para expressar em operações, é preciso vincular a variação coordenada no tempo com a variação métrica no espaço. Denotamos na forma $D_t\gamma$ pela expressão:

$$D_t\gamma = \dot x^1\partial_1\gamma \tag{3.22}$$

A notação não define um operador, mas sugere relação com $\dot\gamma$. Destaca-se que γ não se ocupa das variáveis de índices angulares.

Denominamos compatibilidade variacional a equivalência $D_t\gamma = \dot\gamma$ pela variação efetiva. Ocorre a vinculação da variação no tempo com variação no espaço do fator Lorentz. A demonstração da equivalência será apresentada posteriormente na satisfação da condição invariante pela derivada covariante.

A exposição conclui que:

$$\left(\ddot\rho - \rho\dot\theta^2 - \rho\dot\varphi^2\sin^2\theta\right) = \frac{c^2}{\dot x^1\gamma^3}\dot x^1\partial_1\gamma = \frac{c^2}{\dot x^1\gamma^3}\dot\gamma \tag{3.23}$$

Para chegamos a $A^1 = 0$, devemos ter:

$$\gamma\dot\rho\dot\gamma = -\gamma^2 g^{11}(\dot\rho\partial_1 g_{11})\dot r \tag{3.24}$$

O valor tem o sinal invertido ao pressuposto inicial, obtido na equação de índice temporal. A substituição entre termos das equações temporal e radial é satisfeita ao fazer $(-ct, x, y, z)$, o que indica que, além da assinatura da métrica, há a assinatura da tupla.

3.4 Componentes Angulares

A métrica define duas curvaturas principais e a curvatura espacial pode ser projetada em uma única direção espacial. Em Coordenadas esféricas, apenas a direção radial sofre os efeitos da curvatura. Como resultado, as componentes angulares não possuem termos relacionados com a variação da métrica. A ausência é destacada na expressão de $\dot\gamma$ e na definição $D_t\gamma$. As equações de índices angulares apresentam a contraparte dessa sistemática.

$$A^2 = \gamma\dot\gamma\rho\dot\theta + \gamma^2\left(\rho\ddot\theta + 2\dot\rho\dot\theta - \rho\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta\right) \tag{3.25}$$

$$A^3 = \gamma\dot\gamma\rho\dot\varphi\sin\theta + \gamma^2\left(\rho\ddot\varphi\sin\theta + 2\dot\rho\dot\varphi\sin\theta + 2\rho\dot\varphi\dot\theta\cos\theta\right) \tag{3.26}$$

A presença de uma velocidade perimetral implica na presença de uma aceleração coordenada.

No análogo newtoniano para força central, aceleração expressa a mudança de direção que produz velocidade perimetral constante, enquanto na componente temporal da geodésica, apresenta-se que a aceleração perimetral é nula no entendimento que não produz alteração interna no fator de Lorentz γ. Não participam da variação da definição de $\dot{\gamma}$, mas reagem a essa variação.

A variação do fator de Lorentz é definida na equação temporal e está relacionado com a dilatação temporal, que afeta como as velocidades atravessam o espaço. A aceleração perimetral coordenada é a acomodação à redefinição do espaço.

A definição de uma expressão para aceleração coordenada e a ausência dos termos correspondentes no produto escalar com a velocidade em $\dot{\gamma}$ é melhor demonstrado por ortogonalidade. O assunto é retomado mais adiante.

3.5 Invariante

O vetor "aceleração" na composição de $\dot{\gamma}$ foi inferido para equacionar o acoplamento das componentes espaciais. Outra substituição proposta ocorre na compatibilidade variacional no termo radial. Essas substituições oferecem um entendimento sistêmico da contribuição individual de cada variável.

Um ponto crítico é demonstrar que a redução do sistema converge para uma solução, e ainda, apontar se a abrangência da solução é parcial ou geral. Uma demonstração deduzida por operações não é possível em razão das relações indiretas e vinculações propostas.

O padrão de acoplamento entre variáveis foi apresentado por ortogonalidade, que também ocorre na derivada da equação do escalar de Lorentz. Fazendo $V^\mu = \gamma v^\mu$.

$$V^\mu V_\mu = c^2 \tag{3.27}$$

A derivada do invariante da velocidade resulta em outro invariante para a aceleração. Sabido que a resolução da equação $A^\mu = 0^\mu$ representa o caminho em que ocorre transporte paralelo, entendimento que se faz é que o invariante da aceleração representa uma condição mais restrita ao sistema: transporte paralelo com módulo invariante.

$$A^\mu V_\mu = 0 \tag{3.28}$$

A igualdade é uma equação diferencial. Entretanto se ignorar a vinculação entre os fatores, tem-se o tensor A^μ nulo e a equação trivial não apresenta propriedade de proveito. A direção de um vetor nulo é indefinida, e indica que é insuficiente na resolução de uma direção.

A aceleração se acomoda sobre uma direção, mas possui magnitude nula. O modulo resultante vem da oposição entre termos que expressam a variação de coordenadas e os termos decorrentes da curvatura. A separação desses constituintes origina dois novos tensores.

$$A^\mu = \mathcal{A}^\mu + \mathcal{F}^\mu \tag{3.29}$$

Pela ortogonalidade, os tensores se transportam conjuntamente ao vetor tangente.

A composição espacial da geodésica é segmentada em dois novos tensores. O tensor segmentário *Factio* representa feição da magnitude que a gravidade assume em um posição-velocidade. Tensor dinâmico, ou tensor de gravitação, o termo $\mathcal{F}^\mu$ da geodésica é constituído dos símbolos decorrentes do tensor métrico.

$$\mathcal{F}^\mu = \begin{bmatrix} \gamma^2 \dfrac{g^{11} g^{11} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{c} \\ \\ g^{11} g^{11} \mathbf{f} + \gamma^2 \dfrac{(g^{11} g^{11} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v})}{c^2} \mathbf{v} \end{bmatrix} \delta_{11} \delta_{11} \tag{3.30}$$

O tensor segmentário *Affectus* representa a alteração do vetor tangente por coordenada geodésicas. Tensor cinemático, ou tensor do movimento, o termo $\mathcal{A}^\mu$ da geodésica é constituído pelas variáveis coordenadas.

$$\mathcal{A}^\mu = \begin{bmatrix} \gamma^4 \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{c} \\ \\ \gamma^2 \mathbf{a} + \gamma^4 \dfrac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})}{c^2} \mathbf{v} \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

Onde os tensores internos são tridimensionais e operam pela métrica.

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 - \rho \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) \hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{3.32}$$

$$+ \left(\rho \ddot{\theta} + 2 \dot{\rho} \dot{\theta} - \rho \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{3.33}$$

$$+ \left(\rho \ddot{\varphi} \sin \theta + 2 \dot{\rho} \dot{\varphi} \sin \theta + 2 \rho \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \right) \hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{3.34}$$

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\ \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho \dot{\theta}\ \hat{\boldsymbol{\theta}} + \rho \dot{\varphi} \sin \theta\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{3.35}$$

Os valores da aceleração na direção angular foram apresentados por A^2 e A^3 rendem valor nulo por ortogonalidade na participação do produto $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})$ em $\dot{\gamma}$. A separação de um termo ortogonal à velocidade é assunto da próxima seção.

Na igualdade $\mathcal{A}^1 = -\mathcal{F}^1$, as componentes radiais dos dois tensores se comparam termo-a-termo, enquanto o análogo para as componentes angulares não é possível.

A segmentação em tensores constituintes da geodésica devem ser solucionada no transporte paralelo com módulo invariante. As componentes dos tensores segmentares não possuem valor constante e a nulidade do produto por cada um deles dada por ortogonalidade. A operação faz analogia a aceleração que altera somente a direção da velocidade, ou ainda ser entendida por rotação hiperbólica

Como resultado, um invariante é estabelecido para cada tensor segmentar da geodésica. Operando o produto $\mathcal{F}^\mu V_\mu$ temos:

$$\mathcal{F}^0 V^0 g_{00} = \gamma^2 [g^{11} g^{11} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}] g_{00} \tag{3.36}$$

$$\mathcal{F}^i V^j g_{ij} = g^{11} g^{11} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \gamma^2 \frac{(g^{11} g^{11} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v})}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \tag{3.37}$$

O produto $\mathcal{A}^\mu V_\mu$ é feito de modo análogo. Ambos os produtos tensoriais são nulos, satisfazendo o invariante. O resultado obtido encaminha a conclusão que o invariante da aceleração somente pode ser satisfeito para as inferências de $\dot{\gamma}$ apresentadas na seção anterior.

4 Vis-Radix, Vis-Redux

O gradiente do campo métrico é causa da variação do movimento um corpo. Entretanto, a cinemática resultante não se restringe à direção de ação do gradiente. Além do impulso promovido pelo campo, a direção de movimento é condicionada pela conformidade entre as variações espaciais e temporal do fator de Lorentz.

Na equação geodésica de índice temporal, o movimento temporal é associado à dilatação tempo. Considerando fenômeno da dilatação gravitacional do tempo, a participação da métrica pode abstrair esse efeito em um novo fator:

$$g^{11}g^{11}\delta_{11}\delta_{11} = \gamma_r^{-4} \tag{4.1}$$

.

A variação $\dot{\gamma}$ do fator é definida na equação temporal da geodésica e ocorre na proporção da velocidade que se projeta sobre o gradiente da métrica.

$$\dot{\gamma} = \frac{\gamma^2}{\gamma_r^4}\frac{\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}}{c} \tag{4.2}$$

Importante observar que o resultado não é considerado uma propriedade do espaço e também não pode ser determinado apenas pela velocidade. O produto escalar $\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}$ torna a expressão em um valor peculiar à trajetória. Os dois tensores devem solucionar o mesmo caminho geodésico.

Considere o caso em que um corpo transponha o espaço em direção oblíqua ao gradiente da métrica. Na composição espacial do segmento gravitacional da geodésica, é interessante admitir o tensor $\mathcal{F}^k$ como a resultante da soma dada por outros dois tensores:

$$\mathcal{F}^k = \frac{1}{\gamma_r^4}\mathbf{f} + \frac{\gamma^2}{\gamma_r^4}\frac{(\mathbf{f}\cdot\mathbf{v})}{c^2}\mathbf{v} \tag{4.3}$$

O primeiro termo assume a direção do gradiente da métrica, enquanto o segundo termo da expressão pode ser entendido como um campo vetorial. O campo proposto é autoinduzido pela variação fator de Lorentz e ocorre em todas as direções definidas no tensor velocidade $\mathbf{v}$.

Ponderando que a dilatação do tempo tem contraparte na definição de espaço, a variação do fator de Lorentz pode ser entendida pela consequente transmutação do espaço. A “força” é induzida por essa redefinição do espaço e o campo é vetorial no sentido em que cada ponto da trajetória geodésica define um vetor.

O campo é induzido para fazer a variação da velocidade condizer espacialmente com a expressão de $\dot{\gamma}$, o que pode ser concluído do invariante da aceleração, mas pela própria definição de $\dot{\gamma}$ ocorre que nem todas as direções do são absorvidas em razão da direção do gradiente ser distinta da direção do tensor induzido. Parte é rejeitada.

É útil reescrever o termo da indução em projeção e rejeição.

$$\mathbf{a} = \mathrm{Proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) + \mathrm{Rej}_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) \tag{4.4}$$

Na projeção, tomamos uma proporção do vetor na direção pretendida.

$$\mathrm{Proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \frac{a^i v^i g_{ii}}{v^k v^k g_{kk}} \mathbf{v} \tag{4.5}$$

Rejeição se faz pela diferença $\mathrm{Rej}_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} - \mathrm{Proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$

$$\mathrm{Rej}_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \frac{v^k v^k g_{kk}}{v^k v^k g_{kk}} \mathbf{a} - \frac{a^i v^i g_{ii}}{v^k v^k g_{kk}} \mathbf{v} \tag{4.6}$$

Contraindo a métrica e reagrupando os índices dos numeradores na expressão, chega-se à operação:

$$[\![v; v, a]\!] = \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{k\ell m} v_j v^\ell a^m \tag{4.7}$$

A operação é ternária e no restante do texto empregamos notação infixa que corresponde à identidade de Grassmann para representar permutação de índices no lugar do símbolo de Levi-Civita.

$$\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{a}) = \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \tag{4.8}$$

Os dois símbolos operam em conjunto como uma única operação. Contrário ao que poderia sugerir a presença do produto escalar, não fazemos o emprego isolado e denotamos isso com circunscrevendo o operador. Não temos a definição do produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{v}$ pelo tensor métrico que possa ser combinado para o resultado.

A expressão é reformulada para:

$$\mathcal{F}^\mu = \frac{\gamma^2}{\gamma_r^4} \mathbf{f} + \frac{\gamma^2}{\gamma_r^4} \frac{\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{f})}{c^2} \tag{4.9}$$

Na expressão reformada, o primeiro termo é denominado vis-radix. O termo que se resolve na identidade de Grassmann é denominado vis-redux

Vis-radix está na direção definida pelo gradiente de campo, destacando-se por ser raiz na projeção em $\dot{\gamma}$ e parcela principal no equacionamento $\mathcal{F}^\mu V_\mu = 0$. Distingue-se também por ser o termo de geometria isotrópica em relação à velocidade.

Vis-redux é complementar nas propriedades enumeradas, restando caracterizar a direção. O tensor tem direção normal à tangente da velocidade, sentido oposto ao ponto contrapedal, e a projeção radial está em repulsão ao gradiente.

O movimento é acompanhado pelo tensor de segmento coordenada da geodésica, obtido por procedimento similar.

$$\mathcal{A}^k = \gamma^4 \, \mathbf{a} + \gamma^4 \, \frac{\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{a})}{c^2} \tag{4.10}$$

5 Considerações Finais

A seção encaminha o encerramento do texto. Em atenção a demanda de destacar as contribuições inéditas, pareceu apropriado que estivessem contemplados em sua menção no sumário.

O texto se encerra com a seção de conclusão.

5.1 Sumário

A transcrição mecânica da equação geodésica em uma representação apropriada ao fenômeno gravitacional inicia-se na relação entre mobilidade e covariância, desenvolvida ao longo da seção 2 .

Coordenadas curvilíneas possuem a base móvel, entretanto pela arbitrariedade da escolha, não devem introduzir significado mecânico. A neutralidade da base é obtida por isometria, na seção 2.1 , que especifica como transformação paramétrica preservar a estrutura isomórfica da derivada, e a relação com ortonormalidade.

A definição dos tensores e da base esférica é apresentada, na seção 2.2 , por transformação ortonormal da base fixa. A dependência paramétrica é desfeita na transformação pela forma que passa a ser definida por operações vetoriais que se reduzem em identidade vetorial, seção 2.2.1 . A aplicação da nova base às coordenadas é feita na seção 2.2.2 .

Uma ponderação sobre normalidade dos vetores da base é feita em 2.2.3 , a proposição de normalidade do tensor definida pela participação na constituição uma base com essa propriedade. A base será considerada normalizada se o tensor for normalizado.

A demonstração da covariância na transformação do tensor velocidade no segmento 2.3 , em que a forma paramétrica da transformação preserva a estrutura isomórfica da derivada.

A escolha da base móvel, em condição de ortonormalidade das transformações, define o tensor métrico normalizado na seção 2.4 .

Nessa métrica, a componente temporal está em reciprocidade as das componentes espaciais, o que caracteriza a existência de duas curvaturas cardinais, sendo possível discriminar a curvatura espacial em uma única direção denominada diretrix.

A seção 2.5 chega a definição de um operador diferencial em extensão à derivada de Ricci. O operador covariante-paramétrico é capaz de representar o isomorfismo na mobilidade da base.

A geodésica pelo tensor normalizado é vista na seção 3 , em sua expansão derivada covariante-paramétrica é feita em 3.1 .

A componente de curvatura temporal faz a vinculação da taxa de variação do fator gama com o deslocamento pela diretrix 3.2 .

A componente radial, responsável por toda curvatura espacial, expõem a compatibilidade variacional na vinculação da variação do fator gama no tempo.

Enquanto a componente temporal tem contraparte na componente espacial na variação do fator gama, a participação sistêmica das componentes angulares, seção 3.4 , é restrita à proporção que da velocidade perimetral na velocidade total.

A segmentação dos tensores constituintes da geodésica em composição vetorial que atendem ao transporte paralelo pela condição de ortogonalidade e que este se realiza com módulo invariante é demonstrado, seção 3.5 . Os vetores atribuem estado inercial ao movimento quando variação do vetor tangente sobre o espaço somente é resultado dos vínculos espaço-tempo, o que é observado na rotação hiperbólica.

A decomposição das componentes espaciais pela projeção na diretrix, resulta em: vis-radix, o termo participação na variação do fator gama; e vis-redux, o termo induzido pela velocidade, na seção 4 .

5.2 Conclusão

Conclui-se que é possível abstrair a mecânica da ação gravitacional pela igualdade vetorial que o vetor da aceleração canônica faz com o vetor tridimensional:

$$\mathbf{F} = \frac{\gamma_v^2}{\gamma_r^4}\left[\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{v} \otimes \left(\mathbf{v} \otimes \frac{GM}{c^2 r^2}\hat{\mathbf{r}}\right)\right] \tag{5.1}$$

Destaca-se a ação induzida, vis-redux, e as reações do campo à velocidade em γ_v e autorreação à intensidade em γ_r na preservação do invariante de velocidade

6 Agradecimentos

Agradecemos aos apoiadores do autor pela chave Pix: **samelo**

7 Referencias

Referências

[1] Ronald Adler, Maurice Bazin, Menahem Schiffer, and Jacques E Romain. *Introduction to general relativity.* American Institute of Physics, 1965.

[2] Valentin Bargmann. Relativity. *Reviews of Modern Physics*, 29(2):161, 1957.
`https://doi.org/10.1103/RevModPhys.29.161`.

[3] Albert Einstein. *The Collected Papers of Albert Einstein, Volume 8: The Berlin Years: Correspondence, 1914-1918.*

[4] Albert Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der physik*, 4, 1905.
`https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol2-doc/311`.

[5] Albert Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie Annalen der Physik, 49. *Reprinted in English translation in The Principle of Relativity.(1952) Dover Publications Inc, New York*, 1916.
`https://doi.org/10.1002/andp.19163540702`.

[6] Pavel Grinfeld. *Introduction to tensor analysis and the calculus of moving surfaces.* Springer, jan 2013.
`http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-7867-6`.

[7] David Hilbert. Die Grundlagen der Physik. (Erste Mitteilung). *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1915:vol. 3 pp. 395–407., November 1915.
https://eudml.org/doc/58946.

[8] David Hilbert. Die Grundlagen der Physik. (Zweite Mitteilung). *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pages 53–76, 1917.
http://eudml.org/doc/58973.

[9] Sergei Kopeikin, Michael Efroimsky, and George Kaplan. *Relativistic celestial mechanics of the solar system*. John Wiley & Sons, 2011.
http://dx.doi.org/10.1002/9783527634569.

[10] Evgeny Mikhailovich Lifshitz Lev Davidovich Landau. *The Classical Theory of Fields*, volume 2. Butterworth-Heinemann, 1975.

[11] Hendrik Antoon Lorentz. *La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants*, volume 25. EJ Brill, 1892.
https://books.google.com.br/books?id=skPxW38yqPYC.

[12] James Clerk Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism*, volume 1, 2. Clarendon press, 1873.
https://books.google.com.br/books?id=92QSAAAAIAAJ,
https://books.google.com.br/books?id=OcS4BEiMNwoC.

[13] Sergio de Azevedo Melo. Tensor métrico regular para campo gravitacional relativístico. 2025.
https://zenodo.org/doi/10.5281/zenodo.14750315.

[14] Hermann Minkowski. Raum und Zeit. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 18:75–88, 1909.
http://eudml.org/doc/145167.

[15] John D Norton. General covariance and the foundations of general relativity: eight decades of dispute. *Reports on Progress in Physics*, 56(7):791–858, jul 1993.
https://doi.org/10.1088/0034-4885/56/7/001.

[16] John D Norton. *Mach's principle: from Newton's bucket to quantum gravity*, volume 6. Springer Science & Business Media, 1995.
https://sites.pitt.edu/~jdnorton/papers/MachPrinciple.pdf.

[17] MMG Ricci and Tullio Levi-Civita. Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. *Mathematische Annalen*, 54(1):125–201, March 1900.
https://doi.org/10.1007/BF01454201.

[18] Karl Schwarzschild. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 189–196, 1916.
https://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/1916SPAW.......189S.

[19] Eric W. Weisstein. "Alias Transformation." From MathWorld–A Wolfram Web Resource.
https://mathworld.wolfram.com/AliasTransformation.html.