INDÉPENDANCE ALGÉBRIQUE DES POLYLOGARITHMES DE CARLITZ EN v-ADIQUE

DAVID ADAM ET LAURENT DENIS

Résumé. Dans cet article, nous prouvons l'indépendance algébrique des valeurs spéciales de la fonction zéta de Carlitz-Goss en une place finie. Nous caractérisons aussi l'indépendance algébrique de valeurs de polylogarithmes de Carlitz en une place finie. Pour ce faire, nous surmontons les restrictions dans la méthode de Mahler développée par la second auteur dans le cadre de la caractéristique finie. Cela nous met en position de montrer des résultats d'indépendance algébrique en caractéristique finie en des places finies que la méthode de Papanikolas ne permet pas encore d'obtenir.

1. Introduction

Soit p un nombre premier, $q = p^f$ $(f \in \mathbb{N}^*)$. Dans les années 1930, le long de plusieurs articles [6, 7, 8], Carlitz a introduit le premier exemple de module de Drinfeld, appelé maintenant *module de Carlitz*. C'est le $\mathbb{F}_q$-morphisme d'algèbre C défini par

$$C : \mathbb{F}_q[T] \to \mathrm{End}(\mathbb{G}_a);\ C_T = T + \tau.$$

Notons Ω le complété d'une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ de $\mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{T}\right)\right)$ pour la topologie induite par la valuation $-\deg$. Il existe une unique fonction entière sur Ω, appelée *exponentielle de Carlitz* et notée $\exp_C$, vérifiant les propriétés suivantes :

$$\text{pour tout } (a, z) \in \mathbb{F}_q[T] \times \Omega,\ C_a(\exp_C(z)) = \exp_C(a.z) \text{ et } \exp_C' = 1.$$

La fonction $\exp_C$ admet un factorisation de Weierstraß de la forme : pour tout $z \in \Omega$, on a

$$\exp_C(z) = \prod_{a \in \mathbb{F}_q[T]} \big(1 - \frac{t}{a\Pi}\big).$$

où $\Pi = \sqrt[q-1]{-T} \prod_{j=1}^{+\infty}(1 - T^{1-q^j})^{-1}$. L'exponentielle de Carlitz admet une fonction inverse, appelé *logarithme de Carlitz* noté Log_C, qui est défini sur $\{z \in \Omega \mid \deg(z) < \frac{q}{q-1}\}$ par

$$\mathrm{Log}_C(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{q^k}}{L_k},$$

où on a posé $L_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $L_k = \prod_{j=1}^{k}[j]$ avec $[j] = T^{q^j} - T$ $(j \in \mathbb{N}^*)$. Wade prouva un analogue du théorème de Hermite-Lindemann pour la fonction $\exp_C$ (voir [25]). Il fut plus tard capable de montrer un analogue du théorème de Gelfond-Schneider [26]. Dans les années 1990, utilisant la notion de T-modules introduite par Anderson, Yu fut capable prouver un analogue du théorème de Baker sur l'indépendance linéaire des logarithmes de Carlitz, d'abord dans le cas séparable (voir [28]) puis le cas général [29]. Le second auteur montra indépendamment le cas général en se basant sur le cas séparable obtenu par Yu [12]. Pour un entier naturel non nul, définissons le n^e *polylogarithme de Carlitz* (ou *polylogarithme de poids* n) noté $\mathrm{Log}_{n,C}$ par : pour tout $z \in \Omega$ avec $\deg(z) < \frac{nq}{q-1}$

$$\mathrm{Log}_{n,C}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{nk} \frac{z^{q^k}}{L_k^n}.$$

En 2004, le second auteur a montré l'indépendance algébrique des valeurs en des éléments de $\mathbb{F}_q(T)$ de logarithmes $\mathbb{F}_q(T)$-linéairement indépendants [15]. En 2005, Papanikolas a

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11J81, 11T55.
Key words and phrases. Transcendance, caractéristique finie.

montré un analogue pour les T-motifs d'Anderson de la conjecture de Grothendick sur l'indépendance algébriques des valeurs de périodes. Il montre de plus que les valeurs des logarithmes de Carlitz en des éléments de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ sont des périodes d'un T-motif, ce qui lui permet d'obtenir la forme optimale d'indépendance algébriques des valeurs de logarithmes en des éléments de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$:

Théorème 1. [22, Theorem 6.4.2] *Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Omega$ tels que $\exp_{\mathcal{C}}(\lambda_i) \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont $\mathbb{F}_q(T)$-linéairement indépendants, ils sont $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$-algébriquement indépendants.*

Chang et Yu ont étendu le théorème précédent au cas des polylogarithmes de Carlitz [9, Corollary 4.2]. Pellarin a alors généralisé ce résultat en considérant l'indépendance algébrique de polylogarithmes de poids différents (voir [23]).

Soit v un polynôme irréductible de $\mathbb{F}_q[T]$ de degré d, $\mathbb{F}_q(T)_v$ le complété de $\mathbb{F}_q(T)$ pour la topologie induite par la valuation $\boldsymbol{v}$ associée à v normalisée par $\boldsymbol{v}(v) = 1$. Fixons une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}_q(T)_v}$ de $\mathbb{F}_q(T)_v$ et notons Ω_v le complété de $\overline{\mathbb{F}_q(T)_v}$ pour la valuation $\boldsymbol{v}$. On notera aussi $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ la clôture algébrique de $\mathbb{F}_q(T)$ dans Ω_v et $\overline{\mathbb{F}_q}$ la clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ dans Ω_v. D'après le lemme de Hensel, il existe un unique $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q}$ de degré d sur $\mathbb{F}_q$ tel que $\boldsymbol{v}(T - \alpha) = 1$. On notera Ω_α au lieu de Ω_v. Les séries entières $\mathrm{Log}_{n,\mathcal{C}}$ définissent des fonction analytiques sur $\mathcal{D}_\alpha(0)$ où on a posé pour tout $r \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{D}_\alpha(r) = \{z \in \Omega_\alpha \mid \boldsymbol{v}(z) > r\}.$$

On note $\mathrm{Log}_{\boldsymbol{v},n,\mathcal{C}}$ ces séries entières pour insister sur le fait que les convergences seront prises dans Ω_α. Toujours dans [29], Yu a prouvé l'analogue du théorème de Baker pour le logarithme de Carlitz $\mathrm{Log}_{\boldsymbol{v},1,\mathcal{C}}$.

Jusqu'a présent, la méthode de Papanikolas n'a pas permis de prouver l'analogue v-adique du Théorème 1. Nous nous proposons dans cet article de prouver le résultat plus général suivant.

Théorème 2. *Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$, soit $\lambda_{n,1}, \cdots, \lambda_{n,g_n}$ des éléments de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ de valuation strictement positive. Si l'ensemble $\{\mathrm{Log}_{\boldsymbol{v},\mathcal{C},n}(\lambda_{n,i}) \mid n \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}, i \in [\![1, g_n]\!]\}$ est $\mathbb{F}_q(T)$-linéairement indépendant, il est $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$-algébriquement indépendant.*

Remarque 3. En fait, nous montrerons une version un peu plus générale du Théorème 2 (Théorème 17) basée sur la possibilité, observée par Chang et Mishiba [10], de prolonger analytiquement les polylogaritmes de Carlitz.

Carlitz a aussi introduit un analogue de la fonction ζ : pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\zeta_{\mathcal{C}}(s) = \sum_{a \in \mathbb{F}_q[T] \text{ unitaire}} \frac{1}{a^s}$$

qui converge dans Ω. On a une relation triviale déduite entre les valeurs de la fonction $\zeta_{\mathcal{C}}$ déduite du Frobenius : pour tout $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $\zeta_{\mathcal{C}}(np^m) = \zeta_{\mathcal{C}}^{p^m}(n)$. Soit n un entier naturel non nul. En utilisant l'étude du n^{e} produit tensoriel du module de Carlitz d'Anderson et Thakur [2], Yu a montré que $\zeta_{\mathcal{C}}(n)$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$ ainsi que $\zeta_{\mathcal{C}}(n)/\Pi_{\mathcal{C}}^n$ si $n \notin (q-1)\mathbb{N}$. Peu de temps après ces résultats furent reprouvés par diverses méthodes (automatique, méthode de Wade ; voir [4], [13]). Carlitz avait déjà montré une relation analogue à celle d'Euler pour la fonction ζ : $\zeta_{\mathcal{C}}((q-1)n)/\Pi^{(q-1)n}$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$. Chang et Yu ont déterminé toutes les relations algébriques entre les valeurs de $\zeta_{\mathcal{C}}$. Elles sont déduites du Frobenius et de l'existence de la relation d'Euler-Carlitz. En particulier, ils obtiennent le

Théorème 4. [9, Main Theorem] *Pour tout entier naturel n non nul, le degré de transcendance de corps $\mathbb{F}_q(T)(\Pi, \zeta_{\mathcal{C}}(1), \cdots, \zeta_{\mathcal{C}}(n))$ sur $\mathbb{F}_q(T)$ est de $n - [n/p] - [n/(q-1)] + [n/p(q-1)] + 1$.*

Une version faible de ce théorème, l'indépendance algébrique de $\zeta_{\mathcal{C}}(s)$ $(1 \leqslant s < p)$, avait été obtenue auparavant par le second auteur [15, Théorème 1.3].

Dans [17], Goss construit une version $\boldsymbol{v}$-adique de la fonction $\zeta_{\mathcal{C}}$: pour tout $s \in \mathbb{N}$, on pose

$$\zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{\substack{a \in \mathbb{F}_q[T] \text{ unitaire} \\ \deg(a)=k \\ (a,v)=1}} \frac{1}{a^s} \Big).$$

La fonction $\zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}$ admet des zéros : pour tout entier naturel s divisible par $q-1$, $\zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}(s) = 0$. La transcendance de $\zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}(n)$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus (q-1)\mathbb{N}$ fut prouvée par Yu de manière analogue et simultanée à celle de des valeurs aux entiers naturels de la fonction $\zeta_{\mathcal{C}}$ [28, Theorem 3.8]. En analogie avec le Théorème 4, Chang et Yu conjecturent que la relation du Frobenius et la nullité de la fonction $\zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}$ aux entiers naturels multiples de $q-1$ sont les deux seules relations algébriques possibles pour la fonction $\zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}$ [9].

Conjecture (Chang-Yu)**.** *Pour tout entier naturel n non nul, le degré de transcendance du corps $\mathbb{F}_q(T)(\zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}(1), \cdots, \zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}(n))$ sur $\mathbb{F}_q(T)$ est de $n - [n/p] - [n/(q-1)] + [n/p(q-1)]$.*

Nous montrons dans cet article que la conjecture de Chang-Yu est vraie. C'est le sujet du Corollaire 12.

Les Théorèmes 1 et 4 sont obtenus en interprétant les valeurs mises en jeu comme périodes de T-motifs et en appliqueant le célèbre critère ABP d'Anderson, Brownawell et Papanikolas [3]. Comme vu précédemment, jusqu'à maintenant les résultats d'indépendance algébrique démontrés par la méthode motivique dépassaient ceux obtenus par la méthode Mahler. Cette dernière obligeait à se restreindre aux arguments rationnels (c'est-à-dire dans $\mathbb{F}_q(T)$). Cependant, très peu de résultats ont pu être prouvés par la méthode motivique dans le cadre $\boldsymbol{v}$-adique (voir cependant [11]). Dans cet article, nous éliminons la restriction sur les arguments dans la méthode de Mahler, répondant à une demande de Pellarin formulée dans [23]. Cela permet d'obtenir des résultats d'indépendance algébrique aussi définitifs que la méthode motivique tout en permettant une adaptation aisée dans le cadre $\boldsymbol{v}$-adique ; ce qui mène à des preuves du Théorème 2 et du Corollaire 12.

2. Indépendance des valeurs spéciales de la fonction $\zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}$

Notons pour tout entier naturel n non nul $\mathbb{L}_n(Z)$ la fraction rationnelle

$$\mathbb{L}_n(Z) = \prod_{u=1}^{n} (Z^{q^u} - T + \alpha^{q^u}).$$

Lemme 5. *Soit k et n des entiers naturels. La fraction rationnelle $\frac{1}{\mathbb{L}_k^n(Z)}$ admet dans $\mathbb{F}_{q^d}(T)[[Z]]$ un développement Z-adique $\sum_{j \geqslant 0} a_{j,k,n} Z^j$ avec $\boldsymbol{v}(a_{j,k,n}) \geqslant -n\frac{k}{d} - \frac{j}{q^d}$. En particulier, la fonction rationnelle $\frac{1}{\mathbb{L}_k^n(z)}$ est développable en série entiere sur $\mathcal{D}_\alpha(q^{-d})$.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathbb{L}_k^n(Z)} &= \prod_{u=1}^{k} (T - \alpha^{q^u})^{-n} \sum_{i_1=0}^{+\infty} \cdots \sum_{i_k=0}^{+\infty} \binom{-n}{i_1} \cdots \binom{-n}{i_k} \Big(\frac{Z^q}{T - \alpha^q} \Big)^{i_1} \cdots \Big(\frac{Z^{q^k}}{T - \alpha^{q^k}} \Big)^{i_k} \\
&= \prod_{u=1}^{k} (T - \alpha^{q^u})^{-n} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{(i_1, \cdots, i_k) \in \mathbb{N}^k \\ i_1 q + \cdots + i_k q^k = j}} \prod_{u=1}^{k} \binom{-n}{i_u} (T - \alpha^{q^u})^{-i_u} \right) Z^j.
\end{aligned}$$

Si $\prod_{u=1}^{k} \binom{-n}{i_u} (T - \alpha^{q^u})^{i_u}$ est non nul, sa valuation est positive et est au plus de $\left[\frac{j}{q^d}\right]$ (pour $i_d = \left[\frac{j}{q^d}\right]$), sinon elle est nulle. On obtient pour tout entier naturel j

$$\boldsymbol{v}\left(\prod_{u=1}^{k} (T - \alpha^{q^u})^{-n} \sum_{\substack{(i_1, \cdots, i_k) \in \mathbb{N}^k \\ i_1 q + \cdots + i_k q^k = j}} \prod_{u=1}^{k} \binom{-n}{i_u} (T - \alpha^{q^u})^{-i_u} \right) \geqslant -n\frac{k}{d} - \frac{j}{q^d}.$$

□

Dans [2], Anderson et Thakur ont montré que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme H_n de $(\mathbb{F}_q[T])(X)$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait

$$\sum_{\substack{a\in\mathbb{F}_q[T] \text{ unitaire} \\ \deg(a)=k}} \frac{1}{a^n} = (-1)^{kn}\frac{H_n(T^{q^k})}{(n-1)!_{\mathcal{C}} L_k^n}, \tag{1}$$

où $(n-1)!_{\mathcal{C}}$ désigne la $(n-1)^{\text{e}}$ factorielle de Carlitz, définie de manière suivante : écrivons $n-1$ sous forme q-adique $n-1 = m_0 + m_1 q + \cdots + m_s q^l$ ($m_i \in [\![0, q[\![$, $l \in \mathbb{N}$). Alors

$$(n-1)!_{\mathcal{C}} = \prod_{u=0}^{s} D_u^{m_u},$$

avec la suite $(D_n)_n$ vérifiant $D_0 = 1$ et $D_n = [n]D_{n-1}^q$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (pour les propriétés de la factorielle de Carlitz, voir [5] ou [8]). Dans la suite, nous utiliserons juste le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n!_{\mathcal{C}} \in \mathbb{F}_q[T]$. L'égalité 1 se réécrit comme

$$\sum_{\substack{a\in\mathbb{F}_q[T] \text{ unitaire} \\ \deg(a)=k}} \frac{1}{a^n} = (-1)^{kn}\frac{H_{n,k}((T-\alpha)^{q^k})}{(n-1)!_{\mathcal{C}} L_k^n}$$

où $H_{n,k}(X)$ est le polynôme $H_n(X+\alpha^{q^k})$. On obtient alors que

$$(n-1)!_{\mathcal{C}}\zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}(n) = \left(\sum_{k=0}^{d-1}(-1)^{kn}\frac{H_{n,k}((T-\alpha)^{q^k})}{L_k^n} + \sum_{k=d}^{+\infty}(-1)^{kn}\Big(\frac{H_{n,k}((T-\alpha)^{q^k})}{L_k^n} - \frac{(-1)^{nd}H_{n,k-d}((T-\alpha)^{q^{k-d}})}{v^n L_{k-d}^n}\Big)\right)$$

Soit k un entier k supérieur à d. Le polynôme $S_{n,k}(X)$ définit par

$$S_{n,k}(X) = v^n - (-1)^{nd}\prod_{u=k-d+1}^{k}(Z^{q^u} - T + \alpha^{q^u})^n$$

appartient à $Z^{q^{k-d+1}}(\mathbb{F}_{q^d}[T])[[Z]]$. Ecrivons $H_{n,k}(Z)$ sous la forme

$$H_{n,k}(Z) = \sum_{i=0}^{l} h_{n,i}Z^i$$

avec les $h_{n,i} \in \mathbb{F}_{q^d}[T]$ et $l \in \mathbb{N}$. Posons

$$W_{k,n} = \frac{H_{n,k}(Z^{q^k})}{\mathbb{L}_k^n(Z)} - \frac{(-1)^{nd}H_{n,k-d}(Z^{q^{k-d}})}{v^n\mathbb{L}_{k-d}^n(Z)} \tag{2}$$

On a alors

$$\begin{aligned} W_{k,n} &= \sum_{i=0}^{l} h_{n,i}\left(\frac{Z^{iq^k}}{\mathbb{L}_k^n(Z)} - \frac{(-1)^{nd}}{v^n}\frac{Z^{iq^{k-d}}}{\mathbb{L}_{k-d}^n(Z)}\right) \\ &= h_{n,0}\frac{S_{n,k}(Z)}{\mathbb{L}_k^n(Z)} + \sum_{i=1}^{l} h_{n,i}\left(\frac{Z^{iq^k}}{\mathbb{L}_k^n(Z)} - \frac{(-1)^{nd}}{v^n}\frac{Z^{iq^{k-d}}}{\mathbb{L}_{k-d}^n(Z)}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

et puisque $\mathbb{L}_k^n(Z)$ est inversible dans $\mathbb{F}_{q^d}(T)[[Z]]$, on en déduit que $W_{k,n}$ est de valuation Z-adique supérieure à q^{k-d}. Ainsi, la série

$$\mathcal{F}_n(Z) := \sum_{k\geqslant d}(-1)^{kn}\Big(\frac{H_{n,k}(Z^{q^k})}{\mathbb{L}_k^n(Z)} - \frac{(-1)^{nd}H_{n,k-d}(Z^{q^{k-d}})}{v^n\mathbb{L}_{k-d}^n(Z)}\Big)$$

converge dans $\mathbb{F}_{q^d}(T)[[Z]]$.

Proposition 6. *La série formelle $\mathcal{F}_n$ induit une fonction développable en série entière sur $\mathcal{D}_\alpha(q^d)$ à coefficients dans $\mathbb{F}_{q^d}(T)$.*

Démonstration. Ecrivons $\mathcal{F}_n = \sum_{j\geqslant 0} b_{j,n} Z^k$ avec les $b_{j,n}$ dans $\mathbb{F}_{q^d}(T)$. L'Égalité 3 implique que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $b_{j,n}$ est une somme de termes de la forme $u \times a_{m,k,n}$ avec $u \in \mathbb{F}_{q^d}[T]$ et $(k,m) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $j = q^{k-d} + m$. Cela entraîne que

$$\boldsymbol{v}(b_{j,n}) \geqslant \min_{\substack{(k,m)\in\mathbb{N}^2\\ q^k+m=j}} -\frac{nk}{d} - \frac{m}{q^d} \geqslant -\frac{n\log_q j}{d} - \frac{j}{q^d},$$

□

La d-périodicité de la suite $(H_{n,k})_k$ implique que $\mathcal{F}_n$ vérifie la relation

$$\mathcal{F}_n(Z^{q^d}) = (-1)^{nd}\mathbb{L}_d^n(Z)\big(\mathcal{F}_n(Z) - \mathbb{V}_n(Z)\big), \tag{4}$$

où l'on a posé

$$\mathbb{V}_n = \sum_{k=d}^{2d-1}\Big(\frac{H_{n,k}(Z^{q^k})}{\mathbb{L}_k^n(Z)} - \frac{(-1)^{nd}H_{n,k-d}(Z^{q^{k-d}})}{v^n\mathbb{L}_{k-d}^n(Z)}\Big).$$

On en déduit que $\mathcal{F}_n$ est prolongeable en une fonction méromorphe (que l'on notera encore $\mathcal{F}_n$) sur $\mathcal{A}_\alpha := \mathcal{D}_\alpha(0) \setminus \{\sqrt[q^n]{T} - \alpha \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Lemme 7. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la fonction $\mathcal{F}_n$ est algébrique sur $\Omega_\alpha(z)$, alors $\zeta_{\boldsymbol{v},C}(n) = 0$.*

Démonstration. La fonction $\mathcal{F}_n$ n'ayant qu'un nombre fini de pôles, il existe un entier naturel s_0 tel que $z_0 = \sqrt[q^{s_0 d}]{T} - \alpha$ ne soit pas un pôle de $\mathcal{F}_n$. On déduit de l'égalité valable sur $\mathcal{A}_\alpha$

$$\mathcal{F}_n(z) = \sum_{k=d}^{s_0 d-1}(-1)^{nk}\Big(\frac{H_{n,k}(z^{q^k})}{\mathbb{L}_k^n(z)} - \frac{(-1)^{nd}H_{n,k-d}(z^{q^{k-d}})}{v^n\mathbb{L}_{k-d}^n(z)}\Big) - \sum_{k=(s_0-1)d}^{s_0 d-1}(-1)^{nk}\frac{H_{n,k}(z^{q^{k-d}})}{v^n\mathbb{L}_{k-d}^n(z)} +$$
$$\frac{1}{\mathbb{L}_{s_0 d}^n}\left(\sum_{k=s_0 d}^{(s_0+1)d-1}(-1)^{nk}\frac{H_{n,k}(z^{q^k})}{\mathbb{L}_k^n(z)/\mathbb{L}_{s_0 d}^n(z)} + \sum_{k=(s_0+1)d}^{+\infty}\Big(\frac{H_{n,k}(z^{q^k})}{\mathbb{L}_k^n(z)/\mathbb{L}_{s_0 d}^n(z)} - \frac{(-1)^{nd}H_{n,k-d}(z^{q^{k-d}})}{v^n\mathbb{L}_{k-d}^n(z)/\mathbb{L}_{s_0 d}^n(z)}\Big)\right)$$

que z_0 est un zéro de la fonction

$$\sum_{k=s_0 d}^{(s_0+1)d-1}(-1)^{nk}\frac{H_{n,k}(z^{q^k})}{\mathbb{L}_k^n(z)/\mathbb{L}_{s_0 d}^n(z)} + \sum_{k=(s_0+1)d}^{+\infty}\Big(\frac{H_{n,k}(z^{q^k})}{\mathbb{L}_k^n(z)/\mathbb{L}_{s_0 d}^n(z)} - \frac{(-1)^{nd}H_{n,k-d}(z^{q^{k-d}})}{v^n\mathbb{L}_{k-d}^n(z)/\mathbb{L}_{s_0 d}^n(z)}\Big).$$

On conclut grâce à l'égalité $z^{q^{s_0 d}} = T - \alpha$ et au changement d'indices $j = k - s_0 d$. □

On pose $\mathfrak{V} = \bigcup_{h\in\mathbb{N}}\overline{\mathbb{F}_q}(T^{1/p^h})$ et pour une indéterminée X, $\mathfrak{U}_X$ le corps $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathfrak{V}((X^{1/p^k}))$. Tout élément $\mathcal{H}$ de $\mathfrak{U}_X$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\mathcal{H} = \sum_{i\geqslant i_0}\hbar_i X^{i/p^k} \tag{$\heartsuit$}$$

où $k \in \mathbb{N}$ est minimal, $i_0 \in \mathbb{Z}$ et les $\hbar_i$ sont des éléments de $\mathfrak{V}$ avec la propriété que $\hbar_{i_0} \neq 0$. Le rationnel i/p^k s'appelle l'ordre en 0 de $\mathcal{H}$ et on le note $\mathrm{ord}_0(\mathcal{H})$. La fonction ord_0 définit sur $\mathfrak{U}$ une valuation qui en fait un corps complet pour la topologie induite. On note $\mathfrak{u}_X$ la clôture algébrique de $\mathfrak{V}(X)$ dans $\mathfrak{U}$.

Lemme 8. *Soit $f \in \mathfrak{u}$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Soit P une série formelle de $\mathfrak{V}[[X]]$. On suppose que f satisfait à l'une des deux relations fonctionnelles*

$$f(X^{q^r}) = P(X)f(X) \text{ ou } f(X) = P(X)f(X^{q^r}).$$

Si P est constant, alors f appartient à $\mathfrak{V}$. Si $P(0) \notin \{0,1\}$, alors f est nulle.

Démonstration. On suppose que f satisfait à la relation $f(X^{q^r}) = P(X)f(X)$. La première assertion découle immédiatement de l'unicité de la représentation de f sous la forme ($\heartsuit$).

Supposons maintenant que $P(0) \notin \{0,1\}$ et f non nulle. Nécessairement, f est d'ordre 0 puisque $\mathrm{ord}(P)=0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$f(X^{q^{kr}}) = f(X)\prod_{j=0}^{k-1} P(X^{q^{jr}}).$$

Puisque la suite $(f(X^{q^{kr}}))_k$ converge vers $f(0)$ dans $\mathfrak{U}$ et il en de même pour la suite $(\prod_{j=0}^{k} P(X^{q^{jr}}))_k$. Par conséquent, la suite $(P(X^{q^{jr}}))_j$ converge vers 1 et le terme constant de P est 1 aussi. Dans le cas de la seconde relation fonctionnelle, il suffit de considérer la fonction $g = 1/f$. □

Proposition 9. *Les séries formelles $\mathcal{F}_n$ $(n \in (\mathbb{N} \setminus (p\mathbb{N} \cup (q-1)\mathbb{N}))$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathfrak{U}_X$.*

Démonstration. Soit n_0 minimal tel que $\mathcal{F}_{n_0}$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)(X)\big(\{\mathcal{F}_n(X) \mid n \in [\![1, n_0[\![\}\big)$. Il existe un polynôme $P \in (\overline{\mathbb{F}_q}(T))(X)[X_1, \cdots, X_{n_0}]$ tel que

$$P(\mathcal{F}_1(X), \cdots, \mathcal{F}_{n_0}(X)) = 0.$$

et qui engendre les relations algébriques entre les $\mathcal{F}_n$ $(n \in [\![1, n_0[\![)$. Comme

$$P(X^{q^d})(\mathcal{F}_1(X^{q^d}), \cdots, \mathcal{F}_{n_0}(X^{q^d})) = 0,$$

par les relations fonctionnelles 4, on a

$$\begin{aligned} P(X^{q^d})((-1)^d\mathbb{L}_d(X)(X_1 - \mathbb{V}_1(X)), \cdots, (-1)^{n_0 d}\mathbb{L}_d^{n_0}(X)(X_{n_0} - \mathbb{V}_{n_0}(X))) = \\ R(X)P(X)(X_1 \cdots, X_{n_0}) \qquad , \end{aligned}$$

avec $R(X) \in \mathfrak{u}_X$. Il existe un polynôme Q de degré total en les X_n $(n \in [\![1, n_0]\!])$ minimal non nul dans l'ensemble $\mathcal{S}$ des polynômes $(Q(X))(X_1, \cdots, X_{n_0})$ de $\mathfrak{u}_X[X_1, \cdots, X_{n_0}]$ vérifiant la relation fonctionnelle

$$\begin{aligned} Q(X^{q^d})((-1)^d\mathbb{L}_d(X)(X_1 - \mathbb{V}_1(X)), \cdots, (-1)^{n_0 d}\mathbb{L}_d^{n_0}(X)(X_{n_0} - \mathbb{V}_{n_0}(X))) = \\ R_Q(X)Q(X)(X_1 \cdots, X_{n_0}) \qquad (\star) \end{aligned}$$

avec $R_Q(X) \in \mathfrak{u}$. On remarque, en dérivant la relation $(\star)$, que $\frac{\partial Q}{\partial X_j}$ est un élément de $\mathcal{S}$ pour tout $j \in [\![1, n_0]\!]$. Puisque $\frac{\partial Q}{\partial X_j}$ est de degré total strictement plus petit que celui de Q, c'est un élément de $\mathfrak{U}_X$. On en déduit que

$$Q(X)(X_1, \cdots, X_n) = \sum_{j=1}^{n_0} \eta_j X_j + \sum_{\underline{i}=(i_1,\cdots,i_{n_0}) \in \mathcal{I}} d_{\underline{i}} \prod_{u=1}^{n_0} X_u^{p i_u},$$

où $\mathcal{I}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^{n_0}$, les η_n $(n \in [\![1, n_0]\!])$ et les $d_{\underline{i}}$ $(\underline{i} \in \mathcal{I})$ sont des éléments de $\mathfrak{V}(X)$. Il existe $m \in [\![1, n_0]\!]$ tel que η_m est non nul car sinon, $\sqrt[p]{Q}$ serait un polynôme de S de degré total non nul et strictement plus petit que celui de Q. En réinjectant dans la relation $(\star)$, on obtient que pour tout $n \in [\![1, n_0]\!]$

$$\eta_n(X^{q^d})\mathbb{L}_d^n(X) = R_Q(X)\eta_n(X)$$

et

$$d_{\underline{I}}(X^{q^d})\mathbb{L}_d^{p(i_1+\cdots+i_{n_0})}(X) = R_Q(X)d_{\underline{I}}(X)$$

où $\underline{I} = (i_1, \cdots, i_{n_0}) \in \mathcal{I}$ est tel que $\prod_{j=1}^{n_0} X_j^{p i_j}$ est de degré total maximal non nul. Il vient que

$$\left(\frac{\eta_n}{\eta_m}\right)(X^{q^d}) = \mathbb{L}_d^{n-m}(X)\left(\frac{\eta_n}{\eta_m}\right)(X)$$

et

$$\left(\frac{d_{\underline{I}}}{\eta_m}\right)(X^{q^d}) = \mathbb{L}_d^{p(i_1+\cdots+i_{n_0})-m}(X)\left(\frac{d_{\underline{I}}}{\eta_m}\right)(X).$$

Le Lemme 8 implique que $\eta_n = d_{\underline{I}} = 0$ (pour $d_{\underline{I}}$, cela provient du fait que m n'est pas divisible par p). On obtient que

$$Q(X)(X_1, \cdots, X_{n_0}) = \nu(X) + \eta_m(X)X_m,$$

où $\nu \in \mathfrak{u}$. Comme Q est un polynôme de $\mathcal{S}$, le polynôme $\widetilde{Q} := \eta_m^{-1} Q$ l'est aussi. En posant $\widetilde{\nu} = \eta_m^{-1}\nu$, la relation $(\star)$ pour $\widetilde{Q}$ impose que $R_{\widetilde{Q}} = (-1)^m \mathbb{L}_d^m$ et

$$\widetilde{\nu}(X^{q^d}) - (-1)^{md}\mathbb{L}_d^m(X)\mathbb{V}_m(X) = (-1)^m \mathbb{L}_d^m(X)\widetilde{\nu}(X).$$

Il s'en suit par récurrence sur k que

$$\frac{\widetilde{\nu}(X^{q^{kd}})}{\mathbb{L}_{kd}^m(X)} = \sum_{l=1}^{k}(-1)^{lmd}\frac{\mathbb{V}_m(X^{q^{(l-1)d}})}{\mathbb{L}_{ld}^m(X)} + (-1)^{kmd}\widetilde{\nu}(X).$$

L'Égalité 4 et une récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ donnent

$$\frac{\mathcal{F}_m(X^{q^{kd}})}{\mathbb{L}_{kd}^m(X)} = \sum_{l=1}^{k}(-1)^{lmd}\frac{\mathbb{V}_m(X^{q^{(l-1)d}})}{\mathbb{L}_{ld}^m(X)} + (-1)^{kmd}\mathcal{F}_m(X).$$

Comme $\mathcal{F}_m$ est de valuation strictement positive et que $\mathbb{L}_{kd}^m$ est inversible dans $\mathfrak{U}_X$, la suite $\left((-1)^{kmd}\sum_{l=1}^{k}(-1)^{lmd}\frac{\mathbb{V}_m(X^{q^{(l-1)d}})}{\mathbb{L}_{ld}^m(X)}\right)_k$ converge vers $\mathcal{F}_m$ dans $\mathfrak{U}_X$. On en déduit que la suite $\left(\widetilde{\nu}(X) - (-1)^{kmd}\frac{\widetilde{\nu}(X^{q^{kd}})}{\mathbb{L}_{kd}^m(X)}\right)_k$ converge aussi dans $\mathfrak{U}_X$ vers $\mathcal{F}_m$. Cela oblige $\widetilde{\nu}$ d'être de valuation positive. Le cas d'une valuation nulle est impossible puisque la suite $(\mathbb{L}_{kd}^m)_k$ ne converge pas dans $\mathfrak{U}_X$ et que le suite $\widetilde{\nu}(X^{q^{ld}}))_k$ convergerait vers un élément non nul. Ainsi ν est de valuation strictement positive et la suite $\left((-1)^{kmd}\frac{\widetilde{\nu}(X^{q^{kd}})}{\mathbb{L}_{kd}^m(X)}\right)_k$ converge vers 0. Ainsi, $\mathcal{F}_m = \widetilde{\nu}$ et est donc algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)(X)$. Par le Lemme 7, $\zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}(m) = 0$. Mais ceci est impossible puisque $q-1$ ne divise pas m. □

Posons $\mathcal{G} = \mathbb{N} \setminus (p\mathbb{N} \cup (q-1)\mathbb{N})$.

Théorème 10. *L'ensemble $\{\zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}(n) \mid n \in \mathcal{G}\}$ est algébriquement indépendant sur $\mathbb{F}_q(T)$.*

Démonstration. D'après la Proposition 9, les fonctions $\mathcal{F}_n$ $(n \in \mathcal{G})$ sont algébriquement indépendantes sur $(\mathbb{F}_q(T))(X)$ et sont égales à leur développement de Taylor sur $\mathcal{D}_\alpha(q^d)$. Comme pour tout $n \in \mathcal{G}$, $\mathcal{F}_n((T-\alpha)^{q^d}) = \zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}(n) + \beta_n$ avec $\beta_n \in \mathbb{F}_{q^d}(T)$, la version $\boldsymbol{v}$-adique du théorème de Nishioka (voir [1] ou l'Appendice de cet article) appliquée aux $\mathcal{F}_n((T-\alpha)^{q^d})$ implique l'indépendance algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$ de l'ensemble $\{\zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}(n) \mid n \in \mathcal{G}\}$. □

Remarque 11. Pour démontrer ce théorème, on peut se contenter d'utiliser la version $\boldsymbol{v}$-adique de [14, Théorème 2] du second auteur.

En se souvenant que $\zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}((q-1)m) = 0$ et $\zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}(m^p) = \zeta_{\boldsymbol{v}}^p(m)$ pour tout entier naturel non nul m, le principe d'inclusion-exclusion et le théorème précédent permet de confirmer la conjecture de Chang-Yu :

Corollaire 12. *Le degré de transcendance sur $\mathbb{F}_q(T)$ de l'ensemble $\{\zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}(n) \mid n \in [\![1,n]\!]\}$ est $n - [n/p] - [n/(q-1)] + [n/p(q-1)]$.*

3. Indépendance algébrique des polylogarithmes de Carlitz

Jusqu'à présent, la méthode de Mahler utilisée dans les problèmes de transcendance ou d'indépendance algébrique en caractéristique finie était restreinte à des valeurs de la variables appartenant au complété du corps $\mathbb{F}_q(T)$. La proposition suivante permet de surpasser ce problème. Rappelons que $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q}$ est défini de sorte que $T-\alpha$ est une uniformisante de $\mathbb{F}_q(T)_{\boldsymbol{v}}$.

Proposition 13. *Soit $\beta_1, \cdots, \beta_n$ des éléments algébriques sur $\mathbb{F}_q(T)$ de valuation strictement positive. Il existe $u \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$ de valuation strictement positive et $\delta \in \overline{\mathbb{F}_q}$ tels que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, β_i appartient à $u\mathbb{F}_q(\alpha,\delta)[[u]]$.*

Démonstration. Notons K le corps $\mathbb{F}_q(T, \beta_1, \cdots, \beta_n)$, $\mathcal{O} = \{s \in K \mid \boldsymbol{v}(s) \geqslant 0\}$ l'anneau de valuation discrète de K associé à $\boldsymbol{v}$, $\mathfrak{M}$ son idéal maximal et u un paramètre de $\mathcal{O}$. En particulier, u est de valuation strictement positive. Le complété $\hat{K}$ de K pour la topologie $\boldsymbol{v}$-adique est une extension finie de $\mathbb{F}_q(T)_{\boldsymbol{v}}$, donc est un corps local. Son corps résiduel k est (à isomorphisme près) une extension finie de $\mathbb{F}_q(\alpha)$. Soit $\delta \in \hat{K} \cap \overline{\mathbb{F}_q}$ tel que $k = \mathbb{F}_q(\alpha)(\delta)$. L'anneau de valuation $\hat{\mathcal{O}}$ de $\hat{K}$ est le complété de $\mathcal{O}$ (voir [20]), c'est-à-dire $\mathbb{F}_q(\alpha,\delta)[[u]]$. Ceci conclut la preuve puisque que les β_i ($i \in [\![1,n]\!]$) appartiennent à $\mathfrak{M} \subset u\mathcal{O}$. $\square$

Dans [10, Section 4], Chang et Mishiba fournissent un prolongement continu des fonctions polylogarithmes de Carlitz sur $\mathcal{O}_\alpha = \{z \in \Omega_\alpha \mid \boldsymbol{v}(u) \geqslant 0\}$. Décrivons brièvement ce prolongement. Soit N un entier naturel non nul. On appelle N^e puissance tensorielle du module de Carlitz la donnée du couple $E = (G_a^N, \Phi_N))$ où G_a^N désigne le groupe additif de dimension N et Φ_N l' homomorphisme injectif d'anneau de $\mathbb{F}_q[T]$ dans l'anneau $\mathbb{W}_\alpha[[F]]$ des endomorphismes de G_a^N vérifiant :

$$\Phi_N(T) = A\tau^0 + E\tau$$

où A et E sont les matrices de taille N définies par

$$A = \begin{pmatrix} T & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & T & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & T & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & T \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et τ est l'endomorphisme de Frobenius sur G_a^N, c'est-à-dire l'élévation à la puissance q. Il existe une unique série

$$\log_{\otimes^N} = \sum_{n\geqslant 0} P_i\tau^i \qquad (P_i \in \mathcal{M}_N(\mathbb{W}))$$

telle que

$$P_0 = I_N$$
$$\operatorname{Log}_{\otimes^N}(A + E\tau) = A\operatorname{Log}_N .$$

Soit $u \in \mathcal{O}_\alpha$. On pose

$$\operatorname{Log}_{\boldsymbol{v},N,\mathcal{C}}(u) = -\frac{1}{v-1} \times \text{la } N^{\text{e}} \text{ coordonnée de } \operatorname{Log}_{\otimes^N}\big(\big(\Phi_N(v-1)\big)^t(0,\cdots,0,u)\big).$$

Un calcul élémentaire montre que la dernière coordonnée de $\operatorname{Log}_{\otimes^N}\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix}$ est la série entière

$$g_N(z_1,\cdots,z_N) = \sum_{i=1}^{N}(-1)^{N-i}\sum_{n\geqslant 0}\frac{[n]^{N-i}}{L_n^N}z_i^{q^n}.$$

Soit n un entier naturel non nul et $u_{1,n},\cdots,u_{\mu_n,n}$ des éléments algébriques sur $\mathbb{F}_q(T)$ de valuation positive. Pour tout $i \in [\![1,\mu_n]\!]$, il existe donc des éléments $\boldsymbol{u}_{i,1,n},\cdots,\boldsymbol{u}_{i,n,n}$ algébriques sur $\mathbb{F}_q(T)$ de valuation strictement positive tels que

$$\operatorname{Log}_{\boldsymbol{v},n,\mathcal{C}}(u_{i,n}) = g_N(\boldsymbol{u}_{i,1,n},\cdots,\boldsymbol{u}_{i,n,n}).$$

D'après la Proposition 13, il existe $\boldsymbol{u} \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$ de valuation strictement positive, δ algébrique sur $\mathbb{F}_q$ tels que $T-\alpha$ et $\boldsymbol{u}_{i,j,n}$ (où on a écrit $\widetilde{\mathbb{F}_q} = \mathbb{F}_q(\alpha,\delta)$) appartiennent à $\boldsymbol{u}\widetilde{\mathbb{F}_q}[[\boldsymbol{u}]]$ pour tous $n \in [\![1,N]\!]$ et $(i,j) \in [\![1,\mu_n]\!] \times [\![1,n]\!]$. Notons $T-\alpha = \boldsymbol{l}(\boldsymbol{u})$ et $\boldsymbol{u}_{i,j,n} = \boldsymbol{l}_{i,j,n}(\boldsymbol{u})$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la série $\sum_{k\geqslant 0}\frac{(\boldsymbol{l}^k(Z)-T+\alpha^{q^k})^{n-j}}{\mathbb{L}_k^n(\boldsymbol{l}(Z))}\boldsymbol{l}_{i,j,n}^{q^k}(Z)$ converge dans $\widetilde{\mathbb{F}_q}(T)[[Z]]$. On pose

$$\mathcal{G}_{i,n}(Z) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\sum_{k\geqslant 0}\frac{(\boldsymbol{l}^{q^k}(Z)-T+\alpha^{q^k})^{n-j}}{\mathbb{L}_k^n(\boldsymbol{l}(Z))}\boldsymbol{l}_{i,j,n}^{q^k}(Z).$$

Il est facile de vérifier que la série formelle $\mathcal{G}_{i,n}(Z)$ induit une fonction définie sur $\mathcal{D}_\alpha(0)$.

Proposition 14. *La série formelle $\mathcal{G}_{i,n}$ induit une fonction développable en série entière sur $\mathcal{D}_\alpha(q^{-d})$ à coefficients dans $\widetilde{\mathbb{F}_q}(T)$.*

Démonstration. La preuve est identique à celle de la Proposition 6. □

L'entier $\widetilde{d} = [\widetilde{\mathbb{F}_q} : \mathbb{F}_q]$ est un multiple de d. La série formelle $\mathcal{G}_{i,n}$ vérifie la relation

$$\mathcal{G}_{n,i}(Z^{q^{\widetilde{d}}}) = \mathbb{L}_{\widetilde{d}}^{n}(\boldsymbol{l}(Z))\big(\mathcal{G}_{i,n}(Z) - \mathbb{M}_{i,n}(Z)\big), \tag{5}$$

où l'on a posé

$$\mathbb{M}_{i,n} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\sum_{k=0}^{\widetilde{d}-1}\Big(\frac{(\boldsymbol{l}^{q^k}(Z) - T + \alpha^{q^k})^{n-j}}{\mathbb{L}_k^n(\boldsymbol{l}(Z))}\boldsymbol{l}_{i,j,n}^{q^k}(Z)\Big).$$

On munit l'ensemble $I = \{(i,n) \mid i \in [\![1, \mu_n]\!] \times \mathbb{N}\}$ de l'ordre lexicographique $\prec$.

Proposition 15. *Si les séries formelles $\mathcal{G}_{n,i}$ ($n \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$ et $i \in [\![1, \mu_n]\!]$) sont algébriquement dépendantes sur $\mathfrak{U}_X$, alors il existe un $N_0 \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$ tel que la famille $\{\mathrm{Log}_{\boldsymbol{v},N_0,\mathcal{C}}(u_{i,N_0}) \mid i \in [\![1, \mu_{N_0}]\!]\}$ est $\mathbb{F}_q(T)$-linéairement dépendante.*

Démonstration. La preuve étant similaire à celle de la Proposition 9, nous serons succints sur certains passages. Soit (i_0, n_0) minimal pour $\prec$ et que tel que $\mathcal{G}_{i_0,n_0}$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)(X)\big(\{\mathcal{G}_{i,n}(X) \mid (i,n) \precneq (i_0,n_0)\}\big)$. On note I_0 l'ensemble des éléments de I plus petit que (i_0, n_0) pour $\prec$. Il existe un polynôme $P \in (\overline{\mathbb{F}_q}(T))(X)[(X_{i,n})_{(i,n)\in I_0}]$ tel que

$$P((\mathcal{G}_{i,n}(X))_{(i,n)\in I_0}) = 0.$$

et qui engendre les relations algébriques entre les $\mathcal{G}_{(i,n)}$ $((i,n) \in I_0))$. Puisque $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{u})$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(\boldsymbol{u})$ et que $\boldsymbol{u}$ est transcendant sur $\overline{\mathbb{F}_q}$, $\boldsymbol{l}(X)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(X)$ et donc aussi $\mathbb{L}_{\widetilde{d}}(\boldsymbol{l}(X))$. Comme

$$P(X^{q^{\widetilde{d}}})((\mathcal{G}_{i,n}(X^{q^{\widetilde{d}}}))_{(i,n)\in I_0}) = 0,$$

par les relations fonctionnelles 5, on a

$$P(X^{q^{\widetilde{d}}})\big((\mathbb{L}_{\widetilde{d}}^{n}(\boldsymbol{l}(X))(X_{i,n} - \mathbb{M}_{i,n}(X)))_{(i,n)\in I_0}\big) = R(X)P(X)((X_{i,n})_{(i,n)\in I_0})),$$

avec $R(X) \in \mathfrak{u}_X$. Il existe un polynôme Q de degré total en les $X_{(i,n)}$ $((i,n) \in I_0)$ minimal non nul dans l'ensemble $\mathcal{S}$ des polynômes $(Q(X))((X_{(i,n)})_{(i,n)\in I_0}))$ de $\mathfrak{u}[(X_{(i,n)})_{(i,n)\in I_0}]$ vérifiant la relation fonctionnelle

$$Q(X^{q^{\widetilde{d}}})\big((\mathbb{L}_{\widetilde{d}}^{n}(\boldsymbol{l}(X))(X_{i,n} - \mathbb{M}_{i,n}(X)))_{(i,n)\in I_0}\big) = R_Q(X)Q(X)((X_{i,n})_{(i,n)\in I_0})), \tag{$\star\star$}$$

avec $R_Q(X) \in \mathfrak{u}$. Raisonnant comme dans la Proposition 9, on obtient que

$$Q(X)((X_{(i,n)})_{(i,n)\in I_0})) = \sum_{u\in I_0}\eta_u X_u + \sum_{\mathcal{J}\ni \underline{j}=(j_u)_{u\in I_0}} d_{\underline{j}} \prod_{u\in I_0} X_u^{pj_u},$$

où $\mathcal{J}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^{\mathrm{Card}(I_0)}$, les η_u et les $d_{\underline{j}}$ sont des éléments de $\mathfrak{V}(X)$. Il existe $u_1 = (i_1, n_1) \in I_0$ tel que η_{u_1} est non nul. Soit $\mathcal{J} \ni \underline{J} = (j_u)_{u\in I_0}$ tel que $\prod_{u\in I_0} X_u^{pj_u}$ est de degré total maximal non nul. On obtient les relations : pour tout $u = (i,n) \in I_0$

$$\left(\frac{\eta_{u_1}}{\eta_u}\right)(X^{q^{\widetilde{d}}}) = \mathbb{L}_{\widetilde{d}}^{n-n_1}(\boldsymbol{l}(X))\left(\frac{\eta_{u_1}}{\eta_u}\right)(X)$$

et

$$\left(\frac{d_{\underline{J}}}{\eta_{u_1}}\right)(X^{q^{\widetilde{d}}}) = (\mathbb{L}_{\widetilde{d}}(\boldsymbol{l}(X)))^{p(\sum_{u\in I_0} j_u)-n_1}\left(\frac{d_{\underline{J}}}{\eta_{u_1}}\right)(X).$$

Le Lemme 8 implique que $d_{\underline{J}} = 0$, $\eta_u = 0$ si $u = (i,n) \in I_0$ avec $n \neq n_1$ et pour tout $u = (i, n_1) \in I_0$, on a $\eta_u = \widetilde{\eta_u}\eta_{u_1}(X)$ avec $\widetilde{\eta_u} \in \mathfrak{V}$. On obtient que

$$Q(X)((X_u)_{u\in\mathbb{I}_0}) = \nu(X) + \eta_{u_1}(X)\sum_{\substack{u=(i,n)\in I_0\\ n=n_1}}\widetilde{\eta_u}X_u,$$

où $\nu \in \mathfrak{u}_X$. La relation $(\star\star)$ impose que $R_Q = \mathbb{L}_{\widetilde{d}}^{n_1}(\boldsymbol{l}(X))$. Par conséquence, il existe $\widetilde{\nu} \in \mathfrak{u}_X$ tel que

$$\widetilde{\nu}(X^{q^{\widetilde{d}}}) - \mathbb{L}_{\widetilde{d}}^{n_1}(\boldsymbol{l}(X))\sum_{(i,n_1)\in I_0}\widetilde{\nu_{i,n_1}}\mathbb{M}_{i,n_1}(X) = \mathbb{L}_{\widetilde{d}}^{n_1}(\boldsymbol{l}(X))\widetilde{\nu}(X).$$

Il s'en suit par récurrence sur k que

$$\frac{\widetilde{\nu}(X^{q^{k\tilde{d}}})}{\mathbb{L}_{k\tilde{d}}^{n_1}(\boldsymbol{l}(X))}=\sum_{l=1}^{k}\sum_{(i,n_1)\in I_0}\widetilde{\eta_{(i,n_1)}}\frac{\mathbb{M}_{i,n_1}(X^{q^{(l-1)\tilde{d}}})}{\mathbb{L}_{l\tilde{d}}^{n_1}(\boldsymbol{l}(X))}+\widetilde{\nu}(X).$$

Cela permet de prouver que $\sum_{(i,n_1)\in I_0}\widetilde{\eta_{(i,n_1)}}\mathcal{G}_{i,n_1}(X)\in\mathfrak{u}_X$. Il existe un entier naturel j et des polynômes non tous nuls $\kappa_{(i,n_1)}$ $(i\in[\![1,\mu_{n_1}]\!])$ de $\overline{\mathbb{F}_q}[T]$ tels que

$$\sum_{(i,n_1)\in I_0}\kappa_{(i,n_1)}\mathcal{G}_{i,n_1}^{p^j}(X)\in\mathfrak{u}_X.$$

Notons j_0 le plus petit entier naturel tel qu'il existe des polynômes non tous nuls $\lambda_{(i,n_1)}$ $(i\in[\![1,\mu_{n_1}]\!])$ de $\overline{\mathbb{F}_q}[T]$ tels que

$$\sum_{(i,n_1)\in I_0}\lambda_{(i,n_1)}\mathcal{G}_{i,n_1}^{p^{j_0}}(X)\in\mathfrak{u}_X.$$

On munit l'ensemble $(\overline{\mathbb{F}_q}[T])^{I_0}$ de l'ordre partiel $\prec_{I_0}$ défini par :

$$(P_{(i,n)})_{(i,n)\in I_0}\prec_{I_0}(Q_{(i,n)})_{(i,n)\in I_0}\iff\forall(i,n)\in I_0\ \deg(P_{(i,n)})\leqslant\deg(Q_{(i,n)})$$

Considérons un élément non nul $(\widetilde{\kappa_{(i,n_1)}})_{(i,n_1)\in I_0}$ de $(\overline{\mathbb{F}_q}[T])^{I_0}$ minimal pour $\prec_{I_0}$ tel que

$$\mathcal{G}(X):=\sum_{(i,n_1)\in I_0}\widetilde{\kappa_{(i,n_1)}}\mathcal{G}_{i,n_1}^{p^{j_0}}(X)\in\mathfrak{u}_X. \qquad (\spadesuit)$$

Un tel élément existe d'après la discussion ci-dessus. Il existe des polynômes $A_i(X)$ $(i\in[\![1,s]\!])$ de $\mathbb{F}_q(T)[X]$ avec $A_0\neq 0$ tels que

$$\sum_{i=1}^{s}A_i(X)\mathcal{G}^{q^i}(X)=0.$$

Notons $P_{\mathcal{G}}(Y)$ le polynome $\sum_{i=0}^{s}A_iY^{q^i}$. La dérivation par rapport à T étant continue sur la clôture séparable de $\mathbb{F}_q(T)_v$ dans Ω_α, on en déduit que pour tout entier k suffisamment grand que

$$A_0((T-\alpha)^{1+pk})\frac{d}{dT}\widetilde{\mathcal{G}_k}+(T-\alpha)^{pk}P_{\mathcal{G},X}(\widetilde{\mathcal{G}_k})+P_{\mathcal{G},T}(\widetilde{\mathcal{G}_k})=0,$$

où $P_{\mathcal{G},X}$ désigine la dérivée partielle de $P_{\mathcal{G}}$ par rapport à X, l'analogue pour T et $\mathcal{G}_k=\mathcal{G}((T-\alpha)^{1+pk})$. On obtient que

$$\sum_{(i,n_1)\in I_0}\frac{d}{dT}\big(\widetilde{\kappa_{(i,n_1)}}\big)\mathcal{G}_{i,n_1}^{p^{j_0}}((T-\alpha)^{1+pk})=-\frac{(T-\alpha)^{pk}P_{\mathcal{G},X}(\widetilde{\mathcal{G}_k})+P_{\mathcal{G},T}(\widetilde{\mathcal{G}_k})}{(T-\alpha)A_0((T-\alpha)^{1+pk})}.$$

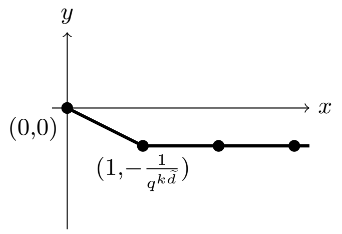
Par conséquent, on a l'égalité des fonctions

$$\sum_{(i,n_1)\in I_0}\frac{d}{dT}\big(\widetilde{\kappa_{(i,n_1)}}\big)\mathcal{G}_{i,n_1}^{p^{j_0}}(X)=-\frac{XP_{\mathcal{G},X}(\mathcal{G}(X))+(T-\alpha)P_{\mathcal{G},T}(\mathcal{G}(X))}{(T-\alpha)A_0(X)}.$$

Ceci permet d'affirmer que la fonction $\sum_{(i,n_1)\in I_0}\frac{d}{dT}\big(\widetilde{\kappa_{(i,n_1)}}\big)\mathcal{G}_{i,n_1}^{p^{j_0}}(X)$ appartient à $\mathfrak{u}_X$. Par minimalié de $(\widetilde{\kappa_{(i,n_1)}})_{(i,n_1)\in I_0}$, on a pour tout $(i,n_1)\in I_0$, $\frac{d}{dT}\big(\widetilde{\kappa_{(i,n_1)}}\big)=0$ et donc $\widetilde{\kappa_{(i,n_1)}}\in\overline{\mathbb{F}_q}[T^p]$. En extrayant une racine p^{e} de l'Appartenance $\spadesuit$, on contredit la minimalité de j_0. Ainsi $j_0=0$. Considérons l'endomorphisme σ de $\mathfrak{U}_X$ défini par $\sigma(x)=x^q$ si $x\in\overline{\mathbb{F}_q}$, $\sigma(T)=T$ et $\sigma(X)=X^q$. On a $\mathcal{G}-\sigma(\mathcal{G})\in\mathfrak{u}_X$. De nouveau, la minimalité de $(\widetilde{\kappa_{(i,n_1)}})_{(i,n_1)\in I_0}$ implique que pour tout $(i,n_1)\in I_0$, $\widetilde{\kappa_{(i,n_1)}}=\sigma(\widetilde{\kappa_{(i,n_1)}})$, c'est-à-dire que $\widetilde{\kappa_{(i,n_1)}}$ appartient à $\mathbb{F}_q[T]$. On conclut avec le Lemme 16 ci-dessous. $\square$

Lemme 16. *Soit $n\in\mathbb{N}$ et $\lambda_{i,n}$ $(i\in[\![1,\mu_n]\!])$ des éléments de $\mathbb{F}_q(T)$. On suppose que la fonction $\sum_{i\in[\![1,\mu_n]\!]}\lambda_{(i,n)}\mathcal{G}_{i,n}(z)$ est algébrique sur $\Omega_\alpha(z)$. Alors la famille $\{\mathrm{Log}_{\boldsymbol{v},n,\mathcal{C}}(u_{i,n})\mid i\in[\![1,\mu_n]\!]\}$ est $\mathbb{F}_q(T)$-linéairement indépendante.*

Démonstration. Notons $\mathcal{G}_n$ la fonction $\sum_{i\in[\![1,\mu_n]\!]}\lambda_{(i,n)}\mathcal{G}_{i,n}(z)$. Soit k un entier naturel. On remarque que le polygone de Newton de la fonction $1-\frac{1}{\sqrt[q^{k\tilde{d}}]{T-\alpha}}\boldsymbol{l}(z)$ est de la forme



D'après [18, Proposition 2.9], il existe un unique $z_k \in \mathcal{A}_\alpha$ tel que $\boldsymbol{l}(z_k) = \sqrt[q^{k\tilde{d}}]{T} - \alpha$. La fonction $\mathcal{G}_n$ étant algébrique sur $\Omega_\alpha(X)$, elle admet un nombre fini de pôles. Par conséquent, il existe $s_0 \in \mathbb{N}$ tel que z_{s_0} ne soit pas un pôle de $\mathcal{G}_n$. On déduit de l'égalité valable sur $\mathcal{A}_\alpha$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_n(z) = &\sum_{i\in[\![1,\mu_n]\!]} \lambda_{(i,n)} \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j} \sum_{k=0}^{s_0\tilde{d}-1} \frac{(\boldsymbol{l}^{q^k}(z) - T + \alpha^{q^k})^{n-j}}{\mathbb{L}_k^n(\boldsymbol{l}(z))} \boldsymbol{l}_{i,j,n}^{q^k}(z) \\ &+ \frac{1}{\mathbb{L}_{s_0\tilde{d}}^n(\boldsymbol{l}(z))} \sum_{i\in[\![1,\mu_n]\!]} \lambda_{(i,n)} \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j} \sum_{k=s_0\tilde{d}}^{+\infty} \frac{(\boldsymbol{l}^{q^k}(z) - T + \alpha^{q^k})^{n-j}}{\mathbb{L}_k^n(\boldsymbol{l}(z))/\mathbb{L}_{s_0\tilde{d}}^n(\boldsymbol{l}(z))} \boldsymbol{l}_{i,j,n}^{q^k}(z)\end{aligned}$$

que z_{s_0} est un zéro de la fonction

$$\sum_{i\in[\![1,\mu_n]\!]} \lambda_{(i,n)} \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j} \sum_{k=s_0\tilde{d}}^{+\infty} \frac{(\boldsymbol{l}^{q^k}(z) - T + \alpha^{q^k})^{n-j}}{\mathbb{L}_k^n(\boldsymbol{l}(z))/\mathbb{L}_{s_0\tilde{d}}^n(\boldsymbol{l}(z))} \boldsymbol{l}_{i,j,n}^{q^k}(z).$$

On conclut grâce au changement d'indices $j = k - s_0\tilde{d}$ et aux égalités $\boldsymbol{l}(z^{q^{s_0\tilde{d}}}) = \boldsymbol{l}^{q^{s_0\tilde{d}}}(z_{s_0}) = T - \alpha$. ☐

Nous sommes en mesure de prouver le

Théorème 17. *Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$, soit $u_{1,n}, \cdots, u_{\mu_n,n}$ des éléments de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ de valuation positive. La famille $\{\mathrm{Log}_{\boldsymbol{v},n,\mathcal{C}}(u_{i,n}) \mid n \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N},\, i \in [\![1,\mu_n]\!]\}$ est algébriquement dépendante sur $\mathbb{F}_q(T)$, si et seulement s'il existe $N_0 \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$ tel que la famille $\{\mathrm{Log}_{\boldsymbol{v},n,\mathcal{C}}(u_{i,N_0}) \mid i \in [\![1,\mu_{N_0}]\!]\}$ est $\mathbb{F}_q(T)$-linéairement dépendante.*

Démonstration. Soit k un entier tel que $\boldsymbol{u}^{k\tilde{d}}$ soit dans le disque de convergence des séries entières $\mathcal{G}_{i,n}$. La famille $\{\mathrm{Log}_{\boldsymbol{v},n,\mathcal{C}}(u_{i,n}) \mid n \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N},\, i \in [\![1,\mu_n]\!]\}$ est algébriquement indépendante sur $\mathbb{F}_q(T)$ si et seulement si la famille $\{\mathcal{G}_{i,n}(\boldsymbol{u}^{kd}) \mid n \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N},\, i \in [\![1,\mu_n]\!]\}$ l'est. Si pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$ la famille $\{\mathrm{Log}_{\boldsymbol{v},n,\mathcal{C}}(u_{i,N}) \mid i \in [\![1,\mu_{N_0}]\!]\}$ est $\mathbb{F}_q(T)$-linéairement indépendante, la famille $\{\mathcal{G}_{i,n}(X) \mid n \in [\![1,M]\!], p \nmid n,\, i \in [\![1,\mu_n]\!]\}$ est algébriquement indépendante sur $\mathbb{F}_q(T)(X)$ d'après la Proposition 15. Par l'extension du théorème de Nishioka (Théorème 19), la famille $\{\mathcal{G}_{i,n}(\boldsymbol{u}^{k\tilde{d}}) \mid n \in [\![1,M]\!], p \nmid n,\, i \in [\![1,\mu_n]\!]\}$ est $\mathbb{F}_q(T)$-algébriquement indépendante pour tout entier $M \geqslant 1$. Ce qui prouve le théorème. ☐

4. Extension du théorème de Nishioka

On considère une norme $|.|$ sur $\mathbb{F}_q(T)$, $\mathbb{W}$ le complété d'une clôture algébrique du complété de $\mathbb{F}_q(T)$ par la topologie induite par $|.|$. On note $\mathbb{K}$ une extension finie de $\mathbb{F}_q(T)$ dans $\mathbb{W}$ et pour un réel r positif, $\mathcal{D}_{\mathbb{W}}(r) = \{z \in \mathbb{W} \mid |z| < r\}$.

Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$. La *maison* de α est le rationnel $\overline{|\alpha|}$ défini comme le maximum des degrés de ses conjugués :

$$\overline{|\alpha|} = \max_{\sigma\in\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_q(T)(\alpha),\mathbb{W})} \deg(\sigma(\alpha)).$$

Pour une famille $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$, on appelle *dénominateur* de $\mathcal{F}$ tout polynôme $\mathcal{D}$ non nul de $\mathbb{F}_q[T]$ tel que $\mathcal{D}\alpha_j$ ($j \in [\![1,k]\!]$) soit entier sur $\mathbb{F}_q(T)$, c'est-à-dire appartient à la clôture intégrale de $\mathbb{F}_q(T)$ dans $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$. On définit la *taille* $t(\alpha)$ de α par

$$t(\alpha) = \max(\overline{|\alpha|}, \deg(\boldsymbol{\delta}))$$

où $\boldsymbol{\delta}$ est le dénominateur unitaire de α de degré minimal. On a la majoration triviale

$$t(\alpha) \leqslant \max(\overline{|\alpha|}, \deg(\mathscr{D})),$$

où $\mathscr{D}$ est un dénominateur de α. La taille de α est liée à sa hauteur logarithmique de Weil $h(\alpha)$ (voir [19, Chapter 3]) par la majoration évidente

$$h(\alpha) \leqslant 4t(\alpha). \tag{6}$$

Remarque 18. (1) Dans le cas de la caractéristique nulle, d'après [27], on peut remplacer la constante 4 par 2. Les auteurs ne savent pas si cela persiste en caractéristique non nulle.

(2) Une minoration de $h(\alpha)$ en fonction de $t(\alpha)$ peut être donnée, mais nous ne nous en servirons pas dans la suite.

On fixe un réel r, $0 < r < 1$. Dorénavant, on supposera que $\alpha \in \mathscr{D}_{\mathbb{W}}(r)$. Soit n un entier naturel non nul et $\boldsymbol{g}_{i,j}$ $((i,j) \in [\![1,n]\!]^2)$ des applications de $\mathfrak{U}$, vérifiant les propriétés suivantes :

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\boldsymbol{g}_{i,j}(\alpha^{d^k})$ est défini ;
- il existe une extension finie $\widetilde{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{F}_q(T)$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{g}_{i,j}(\alpha^{d^k}) \in \widetilde{\mathbb{K}}$;
- il existe $\mathfrak{c}_0$ tel que tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $\mathscr{F}_k = \{\boldsymbol{g}_{i,j}(\alpha^{d^k}) \mid (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\}$ admet un dénominateur $\mathscr{D}_k$ de degré inférieur à $\mathfrak{c}_0 d^k$;
- il existe $\mathfrak{c}_1$ tel que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait $t(\boldsymbol{g}_{i,j}(\alpha^{d^k})) \leqslant \mathfrak{c}_1 d^k$.

On note $A(z)$ la matrice

$$A(z) = \Big(\boldsymbol{g}_{i,j}(z)\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Soit $f_1, \cdots, f_n$ des séries formelles de $\mathbb{K}[[X]]$ induisnat des fonctions entières de $\mathbb{K}[[x]]$ de rayon de convergence inférieur à r. Nous montrerons cette extension du théorème de Nishioka en caractéristique finie :

Théorème 19. *Soit d un entier supérieur à 2. On suppose que la matrice $A(z)$ appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathfrak{u}_X)$ et que les fonctions $f_1, \cdots, f_n$ sont solutions du système fonctionnel :*

$$\begin{pmatrix} f_1(X^d) \\ \vdots \\ f_n(X^d) \end{pmatrix} = A(Z) \begin{pmatrix} f_1(X) \\ \vdots \\ f_n(X) \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\operatorname{degtr}_{\mathbb{K}}\{f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha)\} = \operatorname{degtr}_{\mathbb{K}(X)}\{f_1(X), \cdots, f_n(X)\}. \tag{7}$$

Il est bien connu (voir [16]) que le cas où les f_i $(i \in [\![1,n]\!])$ sont solutions d'un système non-homogène se ramène au cas d'un sytème homogène. Commençons par montrer que le Théorème 19 est bien une extension de [21, Theorem 4.2.1] dans le cas de la caractéristique non nulle.

Déomnstration de [21, Theorem 4.2.1]. On suppose donc que les fonctions $\boldsymbol{g}_{i,j}$ sont des fonctions rationnelles. Quitte à étendre $\mathbb{K}$, on peut supposer que $\boldsymbol{g}_{i,j}$ est une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(z)$. Ecrivons $\boldsymbol{g}_{i,j}$ sous la forme

$$\boldsymbol{g}_{i,j}(z) = \frac{\boldsymbol{a}_{i,j}(z)}{\boldsymbol{b}_{i,j}(z)}$$

où $\boldsymbol{a}_{i,j}$ et $\boldsymbol{b}_{i,j}$ sont des polynômes de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$ où $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ désigne l'anneau des entiers de $\mathbb{K}$. Notons $\sigma_{\boldsymbol{a}_{i,j}}$ et $\sigma_{\boldsymbol{b}_{i,j}}$ leur degré, $\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{a}_{i,j})$ et $\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{b}_{i,j})$ le maximum des maisons de leurs coefficients et $\boldsymbol{\delta}_\alpha$ le dénominateur de α. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\delta}^{d^k}$ est un dénominateur de $\boldsymbol{a}_{i,j}(\alpha^{d^k})$ et $\boldsymbol{b}_{i,j}(\alpha^{d^k})$ et on a

$$\left|\overline{\boldsymbol{a}_{i,j}(\alpha^{d^k})}\right| \leqslant \widetilde{\sigma}(\boldsymbol{a}_{i,j}) + \sigma_{\boldsymbol{a}_{i,j}} d^k \max(0, \overline{|\alpha|}) \text{ et } \left|\overline{\boldsymbol{b}_{i,j}(\beta^{d^k})}\right| \leqslant \widetilde{\sigma}(\boldsymbol{b}_{i,j}) + \sigma_{\boldsymbol{b}_{i,j}} d^k \max(0, \overline{|\alpha|}).$$

On en déduit qu'il existe une constante $\mathfrak{c}_{i,j}$ ne dépendant que de i et j telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$t(\boldsymbol{a}_{i,j}(\alpha^{d^k})) \leqslant d^k \mathfrak{c}_{i,j} \text{ et } t(\boldsymbol{b}_{i,j}(\alpha^{d^k})) \leqslant d^k \mathfrak{c}_{i,j}.$$

En utilisant la majoraton (voir [21, Lemma 2.10.2] pour une preuve en caractéristique nulle) $t(1/\boldsymbol{b}_{i,j}(\alpha^{d^k})) \leqslant 2d_{\mathbb{K}} t(\boldsymbol{b}_{i,j}(\alpha^{d^k}))$, où $d_{\mathbb{K}} = [\mathbb{K} : \mathbb{F}_q(T)]$, on obtient que

$$t(\boldsymbol{g}_{i,j}(\alpha^{d^k})) \leqslant d^k \mathfrak{c}_{i,j}(1 + 2d_{\mathbb{K}}) \leqslant d^k \mathfrak{c}_1,$$

avec $\mathfrak{c}_1 = (1+2d_{\mathbb{K}}) \max_{(u,v)\in[\![1,n]\!]^2} \mathfrak{c}_{u,v}$. Notons $\boldsymbol{B} = \prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} \boldsymbol{b}_{i,j}$ et $\boldsymbol{\gamma} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \deg(\boldsymbol{a}_{i,j})$. La famille $\{\boldsymbol{g}_{i,j}(\alpha^{d^k} \mid 1 \leqslant i,j \leqslant n\}$ admet $\boldsymbol{\delta}^{(\boldsymbol{\gamma}+d_{\mathbb{K}}\deg(\boldsymbol{B}))d^k} N_{\mathbb{K}/\mathbb{F}_q(T)}(\boldsymbol{B}(\alpha^{d^k}))$ comme dénominateur. On conclut en remarquent que

$$\deg\left(N_{\mathbb{K}/\mathbb{F}_q(T)}(\boldsymbol{B}(\alpha^{d^k}))\right) \leqslant d_{\mathbb{K}}(\overline{\lceil \boldsymbol{B} \rceil} + d^k \deg(\boldsymbol{B}) \max(0, \overline{\lceil \alpha \rceil}))$$

où $\overline{\lceil \boldsymbol{B} \rceil}$ désigne le maximum des maisons des coefficients de $\boldsymbol{B}$. □

Dans [24], Philippon a montré un critère très général d'indépendance algébrique. Fernandes en a déduit le corollaire suivant.

Corollaire 20. [16, Corollaire 3.2] *Soient $\boldsymbol{\omega} = (1, \omega_1, \cdots, \omega_n) \in \mathbb{W}^{n+1}$, $s \in \{0, \cdots, n\}$ et $(n(N))_{N\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres entiers pour laquelle il existe une constante c_2 indépendante de N telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$:*

$$n(N) \geqslant c_2 N^{s+1}. \tag{8}$$

Supposons que pour tous $N, k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme homogène $P_{N,k} \in \mathbb{K}[X_0, \cdots, X_n]$ tel que :

$$\deg(P_{N,k}) \leqslant c_3 N, \ \ h(P_{N,k}) \leqslant c_4 d^k N, \tag{9}$$

$$-c_5 d^k n(N) \leqslant \log |P_{N,k}(\boldsymbol{\omega})| \leqslant -c_6 d^k n(N), \tag{10}$$

où les c_i sont des constantes strictement positives indépendantes de N et de k. Alors :

$$\mathrm{degtr}_{\mathbb{K}}\{\omega_1, \cdots, \omega_n\} \geqslant s.$$

Démonstration du Théorème 19. Nous adaptons la preuve présentée par Fernandes. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathbb{K}$ contient tous les $\boldsymbol{g}_{i,j}(\alpha^{d^k})$ ($(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $k \in \mathbb{N}$) et tous les coefficients des séries entières f_i ($i \in [\![1,n]\!]$). Notons $l = \mathrm{degtr}_{\mathbb{K}}(f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha))$ et $l = \mathrm{degtr}_{\mathbb{K}(z)}(f_1(z), \cdots, f_n(z))$. Il suffit de prouver que $l \geqslant l'$. On peut supposer que $l' \geqslant 1$. Quitte à renuméroter, on peut supposer que $f_1, \cdots, f_{l'}$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{K}(z)$. Pour un polynôme $R \in \mathfrak{U}_z[X_1, \cdots, X_n]$, on note $\deg_{\boldsymbol{X}}(R)$ le degré total de R en les variables $X_1, \cdots, X_n$ en tant que polynôme de $\mathfrak{U}_z[X_1, \cdots, X_n]$.

Lemme 21. *Il existe alors un polynôme non nul $R_N(z, X_1, \cdots, X_{l'}) \in (\mathbb{K}[z])[X_1, \cdots, X_{l'}]$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) $\deg_z(R_N) \leqslant N$ *;*

(2) $\deg_{\boldsymbol{X}}(R_N) \leqslant N$ *;*

(3) $n(N) := \mathrm{ord}_0\, R(z, f_1(z), \cdots, f_{l'}(z)) \geqslant \frac{N^{l'+1}}{l'!} := c_1 N^{l'+1}$.

Démonstration. Cela revient à résoudre un système d'équations linéaires ayant strictement plus d'inconnues que d'équations. □

La fonction

$$E_N(z) = R_N(z, f_1(z), \cdots, f_{l'}(z)) = \sum_{j=n(N)}^{+\infty} a_j z^j \quad (a_j \in \mathbb{K}).$$

n'est pas identiquement nulle puisque les f_i ($1 \in [\![1,l']\!]$) sont algébriquement indépendants. Soit $R_{N,0}(z, X_0, \cdots, X_n) \in \mathfrak{U}_z[X_0, \cdots, X_n]$ le polynôme homogène de degré N en $X_0, \cdots, X_n$ vérifiant :

$$R_{N,0}(z, 1, X_1, \cdots, X_n) = R_N(z, X_1, \cdots, X_{l'}). \tag{11}$$

En notant $A_i(z)$ la i^{e} ligne de la matrice $A(z)$ et $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathfrak{U}^n$, on peut écrire :

$$R_{N,0}(z^d, 1, f_1(z^d), \cdots, f_n(z^d)) = R_{N,0}(z^d, 1, < A_1(z), \overline{f}(z) >, \cdots, < A_n(z), \overline{f}(z) >),$$

avex $\overline{f} = {}^t(f_1(z), \cdots, f_n(z))$. On définit alors pour tout $k \geqslant 1$ le polynôme $R_{N,k}(z, X_0, X_1, \cdots, X_n)$ par :

$$R_{N,k}(z, X_0, X_1, \cdots, X_n) = R_{k-1}(z^d, X_0, \langle A_1(z), \overline{X} \rangle, \cdots, \langle A_n(z), \overline{X} \rangle), \tag{$\diamond$}$$

où $\overline{X} = {}^t(X_1, \cdots, X_n)$. Puisque la matrice A est inversible, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $R_{N,k}$ est un polynôme homogène de degré N en $X_0, \cdots, X_n$. Par récurrence sur k, on obtient que :

$$R_{N,k}(z, 1, f_1(z), \cdots, f_n(z)) = E_N(z^{d^k}). \tag{12}$$

Nous estimons maintenant $E_N(\alpha^{d^k})$.

Lemme 22. *Il existe une constante $c_0(N)$ telle que pour tout entier $k \geqslant c_0(N)$, on a*

$$E_N(\alpha^{d^k}) \neq 0, \tag{13}$$

et

$$-c_7 d^k n(N) \leqslant \log |E_N(\alpha^{d^k})| \leqslant -c_8 d^k n(N). \tag{14}$$

Démonstration. Comme les fonctions f_i $(i \in [\![1, l']\!])$ sont définies sur $\mathcal{D}_{\mathbb{W}}(r)$, il existe un rationnel r' vérfiant $0 < \alpha < r' < r$ tel que $\lim_{j \to +\infty} a_j r'^j = 0$. Soit $z_0 \in \mathbb{W}$ de norme r' et $N' = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant n(N), a_n \neq 0\}$. L'estimation

$$\Big| \sum_{j=N'}^{+\infty} a_j z_0^j \frac{\alpha^{jd^k}}{z_0^j} \Big| \leqslant \sum_{j=N'+1}^{+\infty} |a_j| r'^j$$

couplée avec l'égalité

$$\frac{E_N(\alpha^{d^k})}{a_{N'} \alpha^{n(N)d^k}} - 1 = \alpha^{-N'd^k} \sum_{j=N'+1}^{+\infty} a_j z_0^j \frac{\alpha^{jd^k}}{z_0^j}$$

mène à $|E_N(\alpha^{d^k})| \underset{k \to +\infty}{\sim} |a_{N'} \alpha^{N'd^k}|$. □

Le lemme suivant permet d'exprimer $R_{N,k}$ en fonction de $R_{N,0}$.

Définition 23. (1) On dit qu'un polynôme $R \in \mathbb{W}[X_1, \cdots, X_n]$ est libre de puissance si les seules puissances des indéterminées apparaisant dans les monômes de R sont 0 ou 1.

(2) Soit $l_0 \in \mathbb{N}$ et $Y_{i,j,l}$ des indéterminées $((i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $l \in [\![0, l_0]\!])$. On dit qu'un polynôme $R \in \mathfrak{U}_z[(Y_{i,j,l}, (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, l \in [\![0, l_0]\!]]$ est échelonné (suivant l) si pour tout $l \in [\![0, l_0]\!]$ et tout monôme de R, il existe au plus une indéterminée ayant pour troisième indice l.

Lemme 24. *Soit k et j deux entiers naturels avec $0 \leqslant j <$. Il existe des formes linéaires $U_{k,j,i}(z)$ en les $X_1, \cdots, X_n$:*

$$U_{k,j,i}(z) = \sum_{m=1}^{n} S_{k,j,i,m}(z) X_m,$$

où les $S_{k,j,i,m}$ sont des polynômes homogènes à coefficients unitaires de degré au plus j, libre de puissance et échelonnés en les $\boldsymbol{g}_{\mu,\nu}(z^{d^l})$ $((\mu,\nu) \in [\![1, n]\!]^2$, $l \in [\![0, j-1]\!])$ telles que

$$R_{N,k}(z, X_0, X_1, \cdots, X_n) = R_{N,k-j}(z^{d^j}, X_0, U_{k,j,1}(z), \cdots, U_{k,j,n}(z)).$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur j. Le cas $j = 1$ n'est juste qu'une réécriture de la relation de définition $\diamond$ de $R_{N,k}$. Posons $\widetilde{U_{k,j}} = {}^t(U_{k,j,1}(z), \cdots, U_{k,j,n}(z))$. On a

$$\begin{aligned} R_{N,k}(z, X_0, X_1, \cdots, X_n) &= R_{N,k-j}(z^{d^j}, X_0, U_{k,j,1}(z), \cdots, U_{k,j,n}(z)) \\ &= R_{N,k-j-1}(z^{d^{j+1}}, X_0, \langle A_1(z), \widetilde{U_{k,j}}(z^d) \rangle, \cdots, \langle A_n(z), \widetilde{U_{k,j}}(z^d) \rangle). \end{aligned}$$

Puisque pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, les $U_{k,j,i}(z^d)$ sont des formes linéaires en $X_1, \cdots, X_n$ avec des coefficients des polynômes homogènes à coefficients unitaires de degré au plus $j-1$, libre de puissance et échelonnés en les $\boldsymbol{g}_{\mu,\nu}(z^{d^l})$ $((\mu,\nu) \in [\![1,n]\!]^2,\ l \in [\![1,j]\!])$, il vient que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\langle A_i(z), \widetilde{U_{k,j}}(z^d)\rangle$ est une forme linéaire en $X_1, \cdots, X_n$ avec des coefficients des polynômes homogènes à coeffcients unitaires de degré au plus j, libre de puissance et échelonnés en les $\boldsymbol{g}_{\mu,\nu}(z^{d^l})$ $((\mu,\nu) \in [\![1,n]\!]^2,\ l \in [\![0,j]\!])$. $\square$

On pose $P_{N,k}(X_0, X_1, \cdots, X_n) = R_{N,k}(\alpha, X_0, X_1, \cdots, X_n)$.

Lemme 25. *Il existe $c_1(N)$ telle que pour tout $k \geq c_1(N)$ on ait $h(P_{N,k}) \leqslant c_9 N d^k$.*

Démonstration. D'après le lemme précédent, on a

$$P_{N,k}(X_0, X_1, \cdots, X_n) = R_{N,k}(\alpha, X_0, X_1, \cdots, X_n) = R_{N,0}(\alpha^{d^k}, X_0, U_{k,k,1}(\alpha), \cdots, U_{k,k,n}(\alpha)).$$

Soit $(i,m) \in [\![1,n]\!]^2$. Puisque $S_{k,k,i,m}$ est un polynôme homogène à coefficients unitaires de degré au plus k, libre de puissance et échelonnés en les $\boldsymbol{g}_{\mu,\nu}(z^{d^l})$, $\widetilde{\mathcal{D}_k} := \prod_{u=0}^{k-1} \mathcal{D}_u$ est un dénominateur de $S_{k,k,i,m}$ qui est de degré inférieur à

$$\sum_{u=0}^{k-1} \mathfrak{c}_0 d^u \leqslant c_6 d^k$$

et on a

$$\overline{|S_{k,k,i,m}|} \leqslant \sum_{u=0}^{k-1} \mathfrak{c}_1 d^u \leqslant c_7 d^k.$$

Ecrivons

$$R_{N,k}(z, X_1, \cdots, X_n) = \sum_{\substack{\underline{i}=(i_1,\cdots,i_n)\in\mathbb{N}^n \\ i_1+\cdots+i_n=N}} \boldsymbol{b}_{\underline{i}}(z) X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}.$$

où les $\boldsymbol{b}_{\underline{i}}$ appartiennent à $\mathbb{K}[z]$ et sont de degré inférieur à N. Posons M_R le maximum des maisons des coefficients de tous les polynômes $\boldsymbol{b}_{\underline{i}}$ et $\mathcal{D}_R$ un dénominateur de tous ces coefficients. Alors, pour tout $\underline{i}$

$$\overline{|\boldsymbol{b}_{\underline{i}}(\alpha^{d^k})|} \leqslant M_R + N d^k \max(0, \overline{|\alpha|})$$

et $\mathcal{D}_\alpha^{q^k} \mathcal{D}_R$ est un dénominateur de tous les $\boldsymbol{b}_{\underline{i}}(\alpha^{d^k})$. En raison du fait que $P_{N,k}(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ est une somme de monômes de degré N en $X_0, \cdots, X_n$ avec des coefficients de la forme

$$\boldsymbol{b}_{\underline{i}} S_{k,k,i_1,m_1}^{u_1} \cdots S_{k,k,i_n,m_n}^{u_n}$$

avec $u_1 + \cdots + u_n = N$, on en déduit que $P_{N,k}(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ admet $(\mathcal{D}_\alpha^{d^k} \mathcal{D}_R \widetilde{D}_k)^N$ comme dénominateur et tous ses coefficients ont une maison inférieure à

$$N \times c_7 d^k + M_R + N d^k \max(0, \overline{|\alpha|}) \leqslant c_8 d^k.$$

Par conséquent, $P_{N,k}(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ a des coeffcients de taille inférieur à $c_4 N d^k$. Ce qui termine la preuve du lemme grâce à l'Inégalité 6. $\square$

On achève la preuve du Théorème 19 en appliquant le Corollaire 20 aux polynômes $P_{N,k}$. $\square$

Références

[1] D. Adam, *Transcendance des factorielles de Carlitz-Goss aux places finies*, manuscrit.

[2] G. W. Anderson, D. Thakur, *Tensor powers of the Carlitz module and zeta values*, Ann. Math. **132.1** (1990), 159–191.

[3] G. W. Anderson, W. D. Brownawell, M. A. Papanikolas, *Determination of the algebraic relations among special Γ-values*, Ann. Math. **160.2** (2004), 237–313.

[4] V. Berthe, *De nouvelles preuves « automatiques »de transcendance pour la fonction zêta de Carlitz*, Astérisque **209** (1992), 159–168.

[5] P.J. Cahen, J.L. Chabert, *Old problems and new questions around integer-valued polynomials and factorial sequences*, Multiplicative Ideal Theory in Commutative Algebra, Springer (2006), 89–108.

[6] L. Carlitz, *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke Mathematical Journal **1** (1935), 137–168.

[7] L. Carlitz, *An analogue of the von Staudt-Clausen theorem*, Duke Mathematical Journal **3.3** (1937), 503–517.

[8] L. Carlitz, *A set of polynomials*, Duke Mathematical Journal, **6.2** (1940), 486–504.

[9] C.Y. Chang, J. Yu, *Determination of algebraic relations among special zeta values in positive characteristic*, Adv. Math. **216** (2007), 321–345.

[10] C.Y. Chang, Y. Mishiba, *On multiple polylogarithms in characteristic p : v-adic vanishing versus ∞-Eulerianness*, International Mathematics Research Notices**2019.3** (2019), 923–947.

[11] C.Y. Chang, F.T. Wei, J. Yu, *v-adic periods of Carlitz motives and Chowla-Selberg formula revisited*, prépublication ARXIV.

[12] L. Denis, *Baker Theorem and Drinfeld Modules*, J. Number Theo. **43.2** (1993), 203–215.

[13] G. Damamme, Y. Hellegouarch, *Transcendence of the values of the Carlitz zeta function by Wade's method*, J. Number Theo. **39.3** (1991), 257–278.

[14] L Denis, *Indépendance algébrique des dérivées d'une période du module de Carlitz*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **69.1** (2000), 8–18.

[15] L. Denis, *Indépendance algébrique de logarithmes en caractéristique p*, Bull. Austral. Math. Soc. **74.3** (2006), 461–470.

[16] G. Fernandes, *Méthode de Mahler en caractéristique non nulle : un analogue du théorème de Ku. Nishioka*, Ann. Inst. Fourier **68.6** (2018), 2553–2580.

[17] D. Goss, *v-adic zeta functions, L-series and measures for function fields*, Invent Math **55** (1979), 107–116.

[18] D. Goss, *Basic Structures of Function Field Arithmetic*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, **35**, Springer Berlin (1996).

[19] S. Lang, *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer (1983) (1997), 396–402.

[20] J. Neukirch, *Algebraic number theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Springer (1995).

[21] Ku. Nishioka, *Mahler functions and transcendence*, Lecture Notes in Mathematics **1631** (1996).

[22] M.A. Papanikolas, *Tannakian duality for Anderson–Drinfeld motives and algebraic independence of Carlitz logarithms* , Invent. math. **171** (2008), 123–174.

[23] F. Pellarin, *An introduction to Mahler's method for transcendence and algebraic independence*, t-Motives : Hodge structures, transcendence and other motivic aspects, European Math. Soc. pub. (2020), 297–349.

[24] P. Philippon, *Critères pour l'indépendance algébrique dans les anneaux diophantiens*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **315.5** (1992), 511–515.

[25] L.I. Wade, *Certain quantities transcendental over $GF(p^n, x)$*, Duke Math. J. **8.4** (1941), 701–720.

[26] L.I. Wade, *Certain quantities transcendental over $GF(p^n, x)$, II*, Duke Math. J. **10** (1943), 587–594.

[27] M. Waldschmidt, *Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **326** (2000) Springer.

[28] J. Yu, *Transcendence and special zeta values in characteristic p*, Annals Math. **134.1** (1991), 1–23.

[29] J. Yu, *Analytic homomorphisms into Drinfeld modules*, Ann. of Math. *145.2* (1997), 215–233.

Tahiti, France
Email address: david.adam.tahiti@outlook.fr

Laboratoire Paul Painlevé UMR CNRS 8524, Université des Sciences et Technologies de Lille1, 59665 Villeneuve d'Ascq, France
Email address: laurent.denis@univ.lille1.fr