Sur l'équation modulaire $ax \equiv c[b]$ avec $a \equiv \pm\frac{10}{p}[b]$ et $p \in \{1, 2, 5, 10\}$

MOHAMED Algoni

Résumé

On propose une méthode pour résoudre l'équation modulaire $ax \equiv c[b]$ où a, b et c sont des entiers naturels tel que $a \equiv \pm\frac{10}{p}[b]$ avec $p \in \{1, 2, 5, 10\}$. La méthode repose sur l'analyse des unités des produits pb et pc, que nous désignons respectivement par u et u'. Cette approche permet de simplifier et d'accélérer le processus de résolution en se concentrant sur ces unités . Elle se compose en deux étapes principales : La vérification de l'existence des solutions qui consiste à vérifier la divisibilité du PGCD de 10 et u' par le PGCD de 10 et u. Et la détermination de la solution exprimée sous la forme :

$$S = \{\pm(\frac{\varepsilon}{10} + \frac{mpb}{10 \wedge u} i^m + pbk)\},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{avec } m = |10 \wedge u - 5\lfloor\frac{10 \wedge u}{5}\rfloor - 1| \quad \text{et } i \in \{0, 1, 2, \dots, (10 \wedge u) - 1\}$$

$$\text{où} \quad \varepsilon = pc + pb(\frac{10}{10 \wedge u} q' + (-1)^n uu') \quad \text{avec } n = u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor \quad \text{et} \quad q' \in \mathbb{Z}$$

Des exemples concrets sont fournis pour illustrer l'application de cette méthode.

Principales notations

$\mathbb{N},\ \mathbb{Z}$	:	respectivement ensembles des entiers naturels et relatifs.
$\mathbb{N}^*,\ \mathbb{Z}^*$	:	respectivement ensembles des entiers naturels et relatifs différents de 0.
$\emptyset$	:	ensemble vide.
a, b et c	:	entiers naturels tel que a, b non nuls .
p	:	élément de $\{1, 2, 5, 10\}$.
d et u	:	respectivement dizaine et unité du produit pb.
d' et u'	:	respectivement dizaine et unité du produit pc.
n	:	le reste de la division euclidienne par 3 du reste de la division euclidienne de u par 5 .
ε	:	entier multiple de 10 congru à pc modulo pb .
k, k', q etq'	:	entiers relatifs.
$a \wedge b$	:	PGCD de a et b.
$\lfloor\ \ \rfloor$	:	Fonction partie entière
m	:	la valeur absolue du reste de la division euclidienne de $10 \wedge u$ par 5 moins 1 .
$\mathbb{Z}/pb\mathbb{Z}$	:	ensemble quotient $\{\ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{b-1}\ \}$.
a'	:	Quotient $\frac{a}{a \wedge b}$ lorsque $a \wedge b \neq 1$.
b'	:	Quotient $\frac{b}{a \wedge b}$ lorsque $a \wedge b \neq 1$.
c'	:	Quotient $\frac{c}{a \wedge b}$ lorsque $a \wedge b \neq 1$.
$\lfloor\ \ \rfloor$	:	Fonction partie entière

Introduction

Les équations modulaires constituent un sujet d'intérêt majeur en mathématiques, trouvant des applications dans divers domaines allant de la théorie des nombres à la cryptographie. Dans ce document, nous nous concentrons sur l'équation modulaire de la forme $ax \equiv c[b]$ avec a, b et c des entiers naturels tel que $a \equiv \pm\frac{10}{p}[b]$ avec $p \in \{1, 2, 5, 10\}$. Il s'agit d'une congruence linéaire à une inconnue dont la résolution fait intervenir le calcul de PGCD à l'aide de l'algorithme d'Euclide et l'utilisation d'un tableau à n colonnes ou l'utilisation du concept d'inverse modulo. Classiquement, cette équation se résout en deux étapes :

— Étape 1 : *Vérification de l'existence des solutions*
Pour vérifier l'existence des solutions, on détermine $a \wedge b$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide. Si $a \wedge b$ divise c, alors l'équation admet des solutions, sinon elle n'admet pas des solutions.

— Étape 2 : *Détermination de la solution de l'équation*
Pour déterminer la solution de l'équation, nous pouvons utiliser deux méthodes :

— Première méthode : On dresse un tableau à b colonnes dans lequel x parcourt l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ et on garde comme solution l'ensemble des x tels que $ax \equiv c[b]$.

$x =$	0	1	2	$\ldots$	$b-1$
$ax =$	0	a	$2a$	$\ldots$	$a(b-1)$
$r_x =$	r_0	r_1	r_2	$\ldots$	$r_{(b-1)}$

où r_x est le reste de la division euclidienne de ax par b.

— Deuxième méthode : On utilise le concept d'inverse modulo.

— Si $a \wedge b = 1$: a et b sont premiers entre eux.
$a \wedge b = 1 \Rightarrow a$ possède un inverse modulo x_0 tel que $ax_0 \equiv 1[b]$.

Multipliant par c des deux côtés, on obtient $a(cx_0) \equiv c[b]$.
On identifie alors x à cx_0 et la solution de l'équation est $\{cx_0 + bk \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

— Si $a \wedge b \neq 1$: a et b ne sont pas premiers entre eux.
On divise l'équation par $a \wedge b$.
On obtient une nouvelle équation $a'x \equiv c'[b']$ avec $a' = \frac{a}{a\wedge b}$, $b' = \frac{b}{a\wedge b}$, $c' = \frac{c}{a\wedge b}$ et $a' \wedge b' = 1$.

Il existe donc un inverse modulo de a' noté x_0' tel que $a'x_0' \equiv 1[b']$.

Multipliant par c' des deux côtés, on obtient $a'(c'x_0') \equiv c'[b']$.
On a donc $x = c'x_0'$ pour l'équation $a'x \equiv c'[b']$ et $x \in \{c'x_0' + b'k' \mid k' \in \mathbb{Z}\}$ pour l'équation $ax \equiv c[b]$.

La solution est donc l'ensemble $\{c'x_0' + b'k' + bk \mid k, k' \in \mathbb{Z}\}$.

En résumé, pour la deuxième étape, soit on dresse un tableau à n colonnes dans lequel x parcourt $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$, soit on détermine l'inverse modulo de a et on déduit la solution. La première méthode est très simple mais peut être longue pour b très grand , tandis que la deuxième méthode est plus courte mais plus complexe car il faut remonter l'algorithme d'Euclide pour déterminer l'inverse modulo de a. C'est dans cette perspective que nous introduirons une nouvelle méthode, simple comme la première et courte comme la deuxième. Cette méthode est structurée en deux étapes très simples, tenant uniquement compte des unité respectives des produits pb et pc que nous désignerons par u et u' :

— Étape 1 : *Vérification de l'existence des solutions*
Pour vérifier l'existence des solutions, on détermine $10 \wedge u$ et $10 \wedge u'$. Si $10 \wedge u$ divise $10 \wedge u'$, alors l'équation admet des solutions, sinon elle n'admet pas des solution.

Autrement dit :

$$\text{L'équation admet des solution si et seulement si } 10 \wedge u' \equiv 0[10 \wedge u]$$

— Étape 2 : *Détermination de la solution de l'équation*
Nous proposons une forme finale de la solution qui est exprimée en fonction d'un paramètre ε, dont l'existence garantie celle des solutions. ε est défini tel que $\varepsilon \equiv pc[pb] \equiv 0[10]$, et sa valeur est exprimée en fonction de pb, pc, u et u'.
Cette solution est sous la forme :

$$S = \{\pm(\frac{mpb}{10 \wedge u} i^m + \frac{\varepsilon}{10} + pbk)\}, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{avec } m = |10 \wedge u - 5\lfloor \frac{10 \wedge u}{5} \rfloor - 1| \quad \text{et } i \in \{0, 1, 2, \ldots, (10 \wedge u) - 1\}$$

$$\text{où} \quad \varepsilon = pc + pb(\frac{10}{10 \wedge u} q' + (-1)^n uu') \quad \text{avec } n = u - 5\lfloor \frac{u}{5} \rfloor - 3\lfloor \frac{u - 5\lfloor \frac{u}{5} \rfloor}{3} \rfloor \quad \text{et} \quad q' \in \mathbb{Z}$$

Dans la suite du document, nous chercherons à retrouver les deux étapes de résolution de la nouvelle méthode. Pour cela nous démontrerons d'abord que l'existence de ε garantie celle des solutions, cherchons ensuite à retrouver l'étape de vérification de l'existence des solutions ainsi que celle de la détermination de la solution de l'équation. Cette dernière fait intervenir un nouveau concept que nous introduirons, il s'agit du concept des nombres de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$. Comme dernière partie du document, nous apporterons quelques exemples concrets pour illustrer l'application de la méthode.

1 L'existence des solutions est-elle garantie par celle de ε ?

Il s'agit de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 1 : Soit ε un entier multiple de 10 congru à pc modulo pb.

$$\varepsilon \text{ existe} \Longleftrightarrow \text{L'equation } ax \equiv c[b] \text{ admet des solutions}$$

Démonstration. Soient l'équation $ax \equiv c[b]$ et $\varepsilon \in \mathbb{Z}$ tel que $\varepsilon \equiv 0[10] \equiv pc[pb]$

$\varepsilon \equiv pc[pb] \Rightarrow pc \equiv \varepsilon[pb]$ car la relation de congruence est symétrique.

— Premier sens : ε existe $\Rightarrow$ L'equation $ax \equiv c[b]$ admet des solutions
$ax \equiv c[b]$ avec $a \equiv \pm\frac{10}{p}[b]$ et $p \in \{1, 2, 5, 10\}$

$\Rightarrow \pm\frac{10}{p}x \equiv c[b]$

$\Rightarrow \pm\frac{10}{p} = c + bk$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \pm 10x = pc + pbk$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \pm 10x \equiv pc[pb]$ avec $pc \equiv \varepsilon[pb]$

$\Rightarrow \pm 10x \equiv \varepsilon[pb]$

$\Rightarrow \pm 10x - \varepsilon \equiv 0[pb]$

$\Rightarrow 10(\pm x - \frac{\varepsilon}{10}) \equiv 0[pb]$ avec $\frac{\varepsilon}{10} \in \mathbb{Z}$ car $\varepsilon \in 10\mathbb{Z}$

Posons $\pm x - \frac{\varepsilon}{10} = X$

$\Rightarrow 10X \equiv 0[pb]$

Or l'équation $10X \equiv 0[pb]$ admet des solutions quel que soit le PGCD de 10 et pb.

La solution évidente est $X = 0 + pbk$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = \pm(pbk + \frac{\varepsilon}{10})$

Ainsi ε existe $\Rightarrow$ L'equation $ax + by = c$ admet des solutions .

— Deuxième sens : L'equation $ax \equiv c[b]$ admet des solutions $\Rightarrow$ ε existe

L'equation $ax \equiv c[b]$ admet des solutions $\Rightarrow$ $\exists$ $x_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $ax_0 \equiv c[b]$

$\Rightarrow ax_0 \equiv c[b]$ avec $a \equiv \pm\frac{10}{p}[b]$ et $p \in \{1, 2, 5, 10\}$

$\Rightarrow \pm\frac{10}{p}x_0 \equiv c[b]$

$\Rightarrow \pm 10x_0 \equiv pc[pb]$

On rappelle que $\varepsilon \equiv pc[pb]$ et $\varepsilon \equiv 0[10]$, donc on identifie ε à $\pm 10x_0$

Alors ε existe et $\varepsilon = \pm 10x_0$

Donc L'equation $ax \equiv c[b]$ admet des solutions $\Rightarrow$ ε existe

D'où

$$\varepsilon \text{ existe} \iff \text{L'equation } ax \equiv c[b] \text{ admet des solutions}$$

□

Ainsi l'existence de ε garanti celle des solutions pour l'équation $ax \equiv c[b]$

2 Vérification de l'existence des solutions et détermination de la forme finale de la solution

2.1 Vérification de l'existence des solutions

Nous savons que l'existence des solutions est garantie par celle de ε, ainsi pour vérifier l'existence des solutions nous n'avons qu'à chercher les conditions d'existence de ε et le déterminer aussi .

Posons $pb = 10d + u$ et $pc = 10d' + u'$, où d et u représentent respectivement la dizaine et l'unité de pb, et d' et u' représentent respectivement la dizaine et l'unité de pc.

Nous partons de la condition

$$\varepsilon \equiv pc[pb] \equiv 0[10]$$

cela conduit à l'équation suivante :

$$\varepsilon = pc + qpb \equiv 0[10] \quad \text{où } q \in \mathbb{Z}$$

En développant cette équation, nous obtenons :

$$(10d' + u') + q(10d + u) \equiv 0[10]$$

Ce qui se simplifie en :

$$u' + q \times u \equiv 0[10]$$

Cela peut être réécrit comme :

$$q \times u \equiv -u'[10]$$

D'où :

$$(-q) \times u \equiv u'[10]$$

Ainsi $\varepsilon = pc + qpb$ existe si et seulement si l'expression suivante est vérifiée :

$$(-q) \times u \equiv u'[10]$$

Pour vérifier l'existence de ε et déterminer sa valeur, nous procédons comme suite :

- **Parcourir les valeurs de u de 0 à 9** : Pour chaque valeur de u, nous cherchons les valeurs possibles de u' telles que l'expression $(-q) \times u \equiv u'[10]$ soit valide.
- **Déterminer q** : Nous déterminons la valeur de q qui satisfait l'équation $(-q) \times u \equiv u'[10]$.
- **Calculer ε** : Une fois que nous avons la valeur de q, nous pouvons calculer $\varepsilon = pc + qpb$

— Pour $u = 0$
L'expression $(-q) \times 0 \equiv u'[10]$ n'est valide que si $u' = 0$, et elle est vérifiée quel que soit q.
Donc $\varepsilon = pc + qpb$ avec $q \in \mathbb{Z}$

— Pour $u = 1$
L'expression $(-q) \times 1 \equiv u'[10]$ est vérifiée quel que soit u' .
$(-q) \times 1 \equiv u'[10]$
$\Rightarrow q \equiv -u'[10]$
$\Rightarrow q = 10q' - u'$
Donc $\varepsilon = pc + pb(10q' - u')$ avec $q' \in \mathbb{Z}$

— Pour $u = 2$
L'expression $(-q) \times 2 \equiv u'[10]$ n'est vérifiée que si u' est paire, i.e. $u' \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.
$(-q) \times 2 \equiv u'[10]$
$\Rightarrow 2q \equiv -u'[10]$
$\Rightarrow q \equiv -\frac{u'}{2}[5]$
$\Rightarrow q \equiv (4)\frac{u'}{2}[5]$
$\Rightarrow q \equiv 2u'[5]$
$\Rightarrow q = 5q' + 2u'$
Donc $\varepsilon = pc + pb(5q' + 2u')$ avec $q' \in \mathbb{Z}$

— Pour $u = 3$
L'expression $(-q) \times 3 \equiv u'[10]$ est vérifiée quel que soit u' .
$(-q) \times 3 \equiv u'[10]$
$\Rightarrow -3q \equiv u'[10]$, on multiplie par 3
$\Rightarrow -9q \equiv 3u'[10]$
$\Rightarrow q \equiv 3u'[10]$
$\Rightarrow q = 10q' + 3u'$
Donc $\varepsilon = pc + pb(10q' + 3u')$ avec $q' \in \mathbb{Z}$

— Pour $u = 4$
L'expression $(-q) \times 4 \equiv u'[10]$ n'est vérifiée que si u' est paire, i.e. $u' \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.
$(-q) \times 4 \equiv u'[10]$
$\Rightarrow -4q \equiv u'[10]$, On multiplie par -3
$\Rightarrow 12q \equiv -3u'[10]$
$\Rightarrow 2q \equiv -3u'[10]$
$\Rightarrow q \equiv -3 \times \frac{u'}{2}[5]$
$\Rightarrow q \equiv -(8) \times \frac{u'}{2}[5]$
$\Rightarrow q \equiv -4u'[5]$
$\Rightarrow q = 5q' - 4u'$
Donc $\varepsilon = pc + pb(5q' - 4u')$ avec $q' \in \mathbb{Z}$

— Pour $u = 5$
L'expression $(-q) \times 5 \equiv u'[10]$ n'est vérifiée que si $u' \in \{0, 5\}$.
$(-q) \times 5 \equiv u'[10]$
$\Rightarrow -5q \equiv u'[10]$
$\Rightarrow 5q \equiv u'[10]$
$\Rightarrow q \equiv \frac{u'}{5}[2]$
$\Rightarrow q \equiv u'[2]$
$\Rightarrow q \equiv (5)u'[2]$
$\Rightarrow q = 2q' + 5u'$
Donc $\varepsilon = pc + pb(2q' + 5u')$ avec $q' \in \mathbb{Z}$

— Pour $u = 6$
L'expression $(-q) \times 6 \equiv u'[10]$ n'est vérifiée que si u' est paire, i.e. $u' \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.
$(-q) \times 6 \equiv u'[10]$
$\Rightarrow -6q \equiv u'[10]$, On multiplie par 3
$\Rightarrow -18q \equiv 3u'[10]$
$\Rightarrow 2q \equiv 3u'[10]$
$\Rightarrow q \equiv 3 \times \frac{u'}{2}[5]$
$\Rightarrow q \equiv (-12)\frac{u'}{2}[5]$
$\Rightarrow q \equiv -6u'[5]$
$\Rightarrow q = 5q' - 6u'$

Donc $\varepsilon = pc + pb(5q' - 6u')$ avec $q' \in \mathbb{Z}$

— Pour $u = 7$
L'expression $(-q) \times 7 \equiv u'[10]$ est vérifiée quel que soit u' .
$(-q) \times 7 \equiv u'[10]$
$\Rightarrow -7q \equiv u'[10]$ On multiplie par 7
$\Rightarrow -49q \equiv 7u'[10]$
$\Rightarrow q \equiv 7u'[10] \Rightarrow q = 10q' + 7u'$
Donc $\varepsilon = pc + pb(10q' + 7u')$ avec $q' \in \mathbb{Z}$

— Pour $u = 8$
L'expression $(-q) \times 8 \equiv u'[10]$ n'est vérifiée que si u' est paire, i.e. $u' \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.
$(-q) \times 8 \equiv u'[10]$
$\Rightarrow -8q \equiv u'[10]$
$\Rightarrow 2q \equiv u'[10]$
$\Rightarrow q \equiv \frac{u'}{2}[5]$
$\Rightarrow q \equiv \frac{u'}{2}[5]$
$\Rightarrow q \equiv \frac{16u'}{2}[5]$
$\Rightarrow q \equiv 8u'[5]$
$\Rightarrow q = 5q' + 8u'$
Donc $\varepsilon = pc + pb(5q' + 8u')$ avec $q' \in \mathbb{Z}$

— Pour $u = 9$
L'expression $(-q) \times 9 \equiv u'[10]$ est vérifiée quel que soit u' .
$(-q) \times 9 \equiv u'[10]$
$\Rightarrow -9q \equiv u'[10]$ On multiplie par -9
$\Rightarrow 81q \equiv -9u'[10]$
$\Rightarrow q \equiv -9u'[10]$
$\Rightarrow q = 10q' - 9u'$
Donc $\varepsilon = pc + pb(10q' - 9u')$ avec $q' \in \mathbb{Z}$

Ainsi nous pouvons résumer comme suite :

— Pour la vérification de l'existence de ε :
ε existe si et seulement si $10 \wedge u' \equiv 0[10 \wedge u]$, alors l'équation $ax \equiv c[b]$ admet des solutions pour les mêmes conditions.
— Pour la valeur de ε :

$$\varepsilon = pc + pb(\frac{10}{10 \wedge u}q' + (-1)^n uu') \quad \text{avec } n = u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor \quad \text{et } q' \in \mathbb{Z}$$

2.2 Détermination de la forme de la solution

2.2.1 Concept des nombres de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$

Soient p, b, d et u trois entiers naturels tels que $pb = 10d + u$ avec d et u respectivement la dizaine et l'unité du produit pb.

pb est un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A} \Longleftrightarrow \forall\ r \in \{1, 2, 3, \ldots, pb - 1\}$, on a $10r \not\equiv 0[pb]$.

Propriété . – Tous les entiers impairs non multiples de 5 strictement supérieurs à 1 sont des nombres de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$.

Démonstration. La démonstration est longue mais simple, on cherche juste les entiers pb pour lesquels il existe un entier r élément de $\{1, 2, 3, \ldots, pb-1\}$ tel que $10r \equiv 0[pb]$, on les qualifie comme n'étant pas des nombres de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$ et on qualifie comme étant nombres de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$ les entiers pour lesquels ce r n'existe pas .

Supposons que pb n'est pas un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$, Alors il existe un entier r élément appartenant à $\{1, 2, 3, \ldots, pb-1\}$ tel que $10p \equiv 0[pb]$

$$\begin{aligned}
& 10p \equiv 0[pb] \\
\implies & 10r = k \times pb \qquad \text{avec } k \in \mathbb{N}^* \text{ , car } r \in \mathbb{N}^* \\
\implies & r = \frac{k \times pb}{10}
\end{aligned}$$

Or $\quad pb = 10d + u$

$$\begin{aligned}
\implies & r = \frac{k \times (10d + u)}{10} \\
\implies & r = k \times d + \frac{k \times u}{10}
\end{aligned}$$

Alors $10r \equiv 0[pb]$ si et seulement si $r = k \times d + \frac{k \times u}{10}$.

Cependant r est un entier si et seulement si le terme $\frac{k \times u}{10}$ l'est aussi.

On souhaite maintenant déterminer u et k . u désigne l'unité de pb , donc u est élément de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Quant à k, il est défini tel que $10r = k(pb)$.

$$\begin{aligned}
& \text{On a } r \in \{1, 2, \ldots, pb-1\} \\
\implies & r \leq pb - 1 \\
\implies & r < pb \\
\implies & 10r < 10pb \quad avec \quad 10r = k(pb) \\
\implies & k(pb) < 10pb \\
\implies & k < 10 \\
\implies & k \leq 9 \\
& de \quad plus \quad k \in \mathbb{N}^* \\
\implies & k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant identifier tous les entiers $pb \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ pour lesquels le terme $\frac{k \times u}{10} \in \mathbb{N}$ en procédant unité par unité (i.e. en allant de $u = 0$ à $u = 9$), ces entiers seront désignés comme n'étant pas des nombres de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$. En revanche ceux pour lesquels le terme $\frac{k \times u}{10} \notin \mathbb{N}$ seront qualifiés nombres de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$.

-**Pour** $u = 0$: $pb = 10d$, Il s'agit des multiples de 10
$k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$\Rightarrow k \times u = 0$
$\Rightarrow \frac{k \times u}{10} = 0$
$\Rightarrow \frac{k \times u}{10} \in \mathbb{N}$

Alors aucun multiple de 10 n'est un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$ car $\frac{k \times u}{10} \in \mathbb{N}$ quelque soit k .

Determinons r :
$r = k \times d + \frac{k \times u}{10} \quad$ avec $\quad u = 0$

$\Rightarrow r = k \times d$
On a aussi $\quad k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$\Rightarrow k \times d \in \{d, 2d, 3d, 4d, 5d, 6d, 7d, 8d, 9d\}$
$\Rightarrow r \in \{d, 2d, 3d, 4d, 5d, 6d, 7d, 8d, 9d\}$
$\Rightarrow r \in \{i \times d\}$ avec $i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$

de plus $d = \frac{pb}{10}$

$\Rightarrow r \in \{i \times \frac{pb}{10}\}$ avec $i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$

-**Pour** $u = 1$: $pb = 10d + 1$, Il s'agit des nombres ayant pour unité 1
$k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
$\Rightarrow k \times u \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
$\Rightarrow \frac{k \times u}{10} \in \{\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}\}$
$\Rightarrow \frac{k \times u}{10} \notin \mathbb{N}$

Alors tous les nombres ayant pour unité 1 sont des nombres de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$, car $\frac{k \times u}{10} \notin \mathbb{N}$.

-**Pour** $u = 2$: $pb = 10d + 2$, Il s'agit des nombres ayant pour unité 2
$k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
$\Rightarrow k \times u \in \{2,4,6,8,10,12,14,16,18\}$
$\Rightarrow \frac{k \times u}{10} \in \{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}\}$
$\Rightarrow \frac{k \times u}{10} \in \mathbb{N}$ si $k = 5$

Alors aucun nombre ayant pour unité 2 n'est un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$ car $\frac{k \times u}{10} \in \mathbb{N}$ pour $k = 5$.

Determinons r :
$r = k \times d + \frac{k \times u}{10}$ avec $u = 2$ et $k = 5$
$\Rightarrow r = 5d + 1 = \frac{10d+2}{2}$
$\Rightarrow r = \frac{pb}{2}$

-**Pour** $u = 3$: $pb = 10d + 3$, Il s'agit des nombres ayant pour unité 3
$k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
$\Rightarrow k \times u \in \{3,6,9,12,15,18,21,24,27\}$
$\Rightarrow \frac{k \times u}{10} \in \{\frac{3}{10}, \frac{6}{10}, \frac{9}{10}, \frac{12}{10}, \frac{15}{10}, \frac{18}{10}, \frac{21}{10}, \frac{24}{10}, \frac{27}{10}\}$
$\Rightarrow \frac{k \times u}{10} \notin \mathbb{N}$

Alors tous les nombres ayant pour unité 3 sont des nombres de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$, car $\frac{k \times u}{10} \notin \mathbb{N}$.

-**Pour** $u = 4$: $pb = 10d + 4$, Il s'agit des nombres ayant pour unité 4
$k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
$\Rightarrow k \times u \in \{4,8,12,16,20,24,28,32,36\}$
$\Rightarrow \frac{k \times u}{10} \in \{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{8}{5}, 2, \frac{12}{5}, \frac{14}{5}, \frac{16}{5}, \frac{18}{5}\}$
$\Rightarrow \frac{k \times u}{10} \in \mathbb{N}$ si $k = 5$

Alors aucun nombre ayant pour unité 4 n'est un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$ car $\frac{k \times u}{10} \in \mathbb{N}$ pour $k = 5$.

Determinons r :
$r = k \times d + \frac{k \times u}{10}$ avec $u = 4$ et $k = 5$
$\Rightarrow r = 5d + 2 = \frac{10d+4}{2}$

$\Rightarrow r = \frac{pb}{2}$

-**Pour** $\underline{u = 5}$: $pb = 10d + 5$, Il s'agit des nombres ayant pour unité 5

$k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$\Rightarrow k \times u \in \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45\}$
$\Rightarrow \frac{k \times u}{10} \in \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}\}$
$\Rightarrow \frac{k \times u}{10} \in \mathbb{N}$ si $k \in \{2, 4, 6, 8\}$

Alors aucun nombre ayant pour unité 5 n'est un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$ car $\frac{k \times u}{10} \in \mathbb{N}$ pour $k \in \{2, 4, 6, 8\}$

Determinons r :

$r = k \times d + \frac{k \times u}{10}$ avec $u = 5$ et $k \in \{2, 4, 6, 8\}$
$\Rightarrow r \in \{2d + 1, 4d + 2, 6d + 3, 8d + 4\}$
$\Rightarrow r \in \{i \times (2d + 1)\}$ avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

de plus $2d + 1 = \frac{pb}{5}$

$\Rightarrow r \in \{i \times \frac{pb}{5}\}$ avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

-**Pour** $\underline{u = 6}$: $pb = 10d + 6$, Il s'agit des nombres ayant pour unité 6

$k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$\Rightarrow k \times u \in \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54\}$
$\Rightarrow \frac{k \times u}{10} \in \{\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5}, \frac{12}{5}, 3, \frac{18}{5}, \frac{21}{5}, \frac{24}{5}, \frac{27}{5}\}$
$\Rightarrow \frac{k \times u}{10} \in \mathbb{N}$ si $k = 5$

Alors aucun nombre ayant pour unité 6 n'est un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$ car $\frac{k \times u}{10} \in \mathbb{N}$ pour $k = 5$.

Determinons r :

$r = k \times d + \frac{k \times u}{10}$ avec $u = 6$ et $k = 5$
$\Rightarrow r = 5d + 3 = \frac{10d + 6}{2}$
$\Rightarrow r = \frac{pb}{2}$

-**Pour** $\underline{u = 7}$: $pb = 10d + 7$, Il s'agit des nombres ayant pour unité 7

$k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$\Rightarrow k \times u \in \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63\}$
$\Rightarrow \frac{k \times u}{10} \in \{\frac{7}{10}, \frac{14}{10}, \frac{21}{10}, \frac{28}{10}, \frac{35}{10}, \frac{42}{10}, \frac{49}{10}, \frac{56}{10}, \frac{63}{10}\}$

$\Rightarrow \frac{k \times u}{10} \notin \mathbb{N}$

Alors tous les nombres ayant pour unité 7 sont des nombres de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$, car $\frac{k \times u}{10} \notin \mathbb{N}$.

Pour $\underline{u = 8}$: $pb = 10d + 8$, Il s'agit des nombres ayant pour unité 8

$k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$\Rightarrow k \times u \in \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72\}$
$\Rightarrow \frac{k \times u}{10} \in \{\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \frac{12}{5}, \frac{16}{5}, 4, \frac{24}{5}, \frac{28}{5}, \frac{32}{5}, \frac{36}{5}\}$
$\Rightarrow \frac{k \times u}{10} \in \mathbb{N}$ si $k = 5$

Alors aucun nombre ayant pour unité 8 n'est un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$ car $\frac{k \times u}{10} \in \mathbb{N}$ pour $k = 5$.

Determinons r :

$r = k \times d + \frac{k \times u}{10}$ avec $u = 8$ et $k = 5$
$\Rightarrow r = 5d + 4 = \frac{10d + 8}{2}$

$\Rightarrow r = \frac{pb}{2}$

-**Pour** $u = 9$: $pb = 10d + 9$, Il s'agit des nombres ayant pour unité 9

$k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$\Rightarrow k \times u \in \{9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81\}$

$\Rightarrow \frac{k \times u}{10} \in \left\{\frac{9}{10}, \frac{18}{10}, \frac{27}{10}, \frac{36}{10}, \frac{45}{10}, \frac{54}{10}, \frac{63}{10}, \frac{72}{10}, \frac{81}{10}\right\}$

Alors tous les nombres ayant pour unité 9 sont des nombres de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$, car $\frac{k \times u}{10} \notin \mathbb{N}$.

Tableau récapitulatif

pb	**Valeur de r dans $\{1, 2, 3, \ldots, pb - 1\}$ tel que $10r \equiv 0[pb]$**	**Qualification de pb**
$pb \equiv 0[10]$	$r \in \left\{i \times \frac{pb}{10}\right\}$ avec $i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$	pb n'est pas un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$
$pb \equiv 1[10]$		pb est un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$
$pb \equiv 2[10]$	$r = \frac{pb}{2}$	pb n'est pas un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$
$pb \equiv 3[10]$		pb est un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$
$pb \equiv 4[10]$	$r = \frac{pb}{2}$	pb n 'est pas un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$
$pb \equiv 5[10]$	$r \in \left\{i \times \frac{pb}{5}\right\}$ avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$	pb n'est pas un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$
$pb \equiv 6[10]$	$r = \frac{pb}{2}$	pb n 'est pas un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$
$pb \equiv 7[10]$		pb est un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$
$pb \equiv 8[10]$	$r = \frac{pb}{2}$	pb n 'est pas un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$
$pb \equiv 9[10]$		pb est un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$

Figure 1

On en conclut donc que tous les entiers impairs non multiples de 5 (excepté 1) sont des nombres de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$. □

2.2.2 Recherche de la solution

$ax \equiv c[b]$ avec $a \equiv \pm\frac{10}{p}[b]$ et $p \in \{1, 2, 5, 10\}$

$\Rightarrow \pm\frac{10}{p}x \equiv c[b]$

$\Rightarrow \pm\frac{10}{p} = c + bk$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \pm 10x = pc + pbk$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \pm 10x \equiv pc[pb]$ avec $pc \equiv \varepsilon[pb]$

$\Rightarrow \pm 10x \equiv \varepsilon[pb]$

$\Rightarrow \pm 10x - \varepsilon \equiv 0[pb]$

$\Rightarrow 10(\pm x - \frac{\varepsilon}{10}) \equiv 0[pb]$ avec $\frac{\varepsilon}{10} \in \mathbb{Z}$ car $\varepsilon \in 10\mathbb{Z}$

Posons $\pm x - \frac{\varepsilon}{10} = X$

$\Rightarrow 10X \equiv 0[pb]$

- **<u>On résous $10X \equiv 0[pb]$ dans $\mathbb{Z}/pb\mathbb{Z}$ et on explicite x</u>**

On rappelle que $\mathbb{Z}/pb\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{pb-1}\} = \{\overline{0}\} \cap \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{pb-1}\}$

Donc $\mathbb{Z}/pb\mathbb{Z} = \{\overline{0}\} \cap \mathbb{Z}/pb\mathbb{Z}^*$

2.2.3 Solution évidente

$$10X \equiv 0[pb]$$

la solution évidente est la classe de congruence modulo 0 .

$\Rightarrow X \in \overline{0}$

$\Rightarrow X \in \{pbk\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \pm x - \frac{\varepsilon}{10} \in \{pbk\}$

$\Rightarrow \pm x \in \{\frac{\varepsilon}{10} + pbk\}$

$\Rightarrow x \in \{\pm(\frac{\varepsilon}{10} + pbk)\}$

Ainsi la solution évidente est :

$$S_e = \{\pm(\frac{\varepsilon}{10} + pbk)\} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

2.2.4 Solution particulière

Nous résoudrons maintenant $10X \equiv 0[pb]$ dans $\mathbb{Z}/pb\mathbb{Z}^*$ à l'aide du concept de nombres de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$.

Si pb est un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$

Nous savons que

$$(pb \text{ est un nombre de } \mathcal{M}.\mathcal{A}) \Leftrightarrow (\forall\ r \in \{1, 2, 3, \ldots, pb-1\}, 10r \not\equiv 0[pb]\ )$$

Donc $1, 2, 3, \ldots, (pb-1)$ ne vérifient pas l'équation $10X \equiv 0[pb]$

- 1 ne vérifie pas $10X \equiv 0[pb]$ $\Rightarrow 10X \equiv 0[pb]$ n'a pas de solution dans $\overline{1}$
- 2 ne vérifie pas $10X \equiv 0[pb]$ $\Rightarrow 10X \equiv 0[pb]$ n'a pas de solution dans $\overline{2}$
- 3 ne vérifie pas $10X \equiv 0[pb]$ $\Rightarrow 10X \equiv 0[pb]$ n'a pas de solution dans $\overline{3}$
- $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$
- $(pb-1)$ ne vérifie pas $10X \equiv 0[pb] \Rightarrow 10X \equiv 0[pb]$ n'a pas de solution dans $\overline{(pb-1)}$

Alors $10X \equiv 0[pb]$ n'a pas de solution dans $\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{pb-1}\}$.
Donc $10X \equiv 0[pb]$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}/pb\mathbb{Z}^*$.
D'où $10X \equiv 0[pb]$ n'a pas de solution particulière

Par conséquent $ax \equiv c[b]$ n'a pas de solution particulière non plus.

Ainsi, la solution particulière de l'équation est :

$$S_0 = \emptyset$$

Si pb n'est pas un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$

Si pb n'est pas un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$ alors il existe r élément de $\{1, 2, 3, \ldots, pb-1\}$ tel que $10r \equiv 0[pb]$. On identifie donc X à r .
On rappelle que les entiers qui ne sont pas nombres de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$ sont les nombres pairs et ceux ayant pour unité 5.
Nous allons donc utiliser la **Figure 1** pour identifier les valeurs X vérifiant $10X \equiv 0[pb]$ en fonction de l'unité de pb.

— <u>Pour $u = 0$</u>
On a $X \in \{i \times \frac{pb}{10}\}$ avec $i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$
donc $X \in \{\frac{pb}{10}, \frac{pb}{5}, \frac{3pb}{10}, \frac{2pb}{5}, \frac{pb}{2}, \frac{3pb}{5}, \frac{7pb}{10}, \frac{4pb}{5}, \frac{9pb}{10}\}$

Alors les éléments de l'ensemble $\{\frac{pb}{10}, \frac{pb}{5}, \frac{3pb}{10}, \frac{2pb}{5}, \frac{pb}{2}, \frac{3pb}{5}, \frac{7pb}{10}, \frac{4pb}{5}, \frac{9pb}{10}\}$ vérifient $10X \equiv 0[pb]$

$\Rightarrow$ tous les éléments de leurs classes de congruence modulo pb respectifs vérifient $10X \equiv 0[pb]$

$\Rightarrow X \in \{ \overline{\frac{pb}{10}}, \overline{\frac{pb}{5}}, \overline{\frac{3pb}{10}}, \overline{\frac{2pb}{5}}, \overline{\frac{pb}{2}}, \overline{\frac{3pb}{5}}, \overline{\frac{7pb}{10}}, \overline{\frac{4pb}{5}}, \overline{\frac{9pb}{10}} \}$

$\Rightarrow \pm x - \frac{\varepsilon}{10} \in \{ \overline{\frac{pb}{10}}, \overline{\frac{pb}{5}}, \overline{\frac{3pb}{10}}, \overline{\frac{2pb}{5}}, \overline{\frac{pb}{2}}, \overline{\frac{3pb}{5}}, \overline{\frac{7pb}{10}}, \overline{\frac{4pb}{5}}, \overline{\frac{9pb}{10}} \}$

$\Rightarrow \pm x - \frac{\varepsilon}{10} \in \{ \overline{i \times \frac{pb}{10}} \}$ avec $i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$

$\Rightarrow \pm x \in \{ \overline{i \times \frac{pb}{10}} + \frac{\varepsilon}{10} \}$ avec $i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$

$\Rightarrow \pm x \in \{ i \times \frac{pb}{10} + \frac{\varepsilon}{10} + pbk \}$ avec $i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ et $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x \in \{ \pm(i \times \frac{pb}{10} + \frac{\varepsilon}{10} + pbk) \}$ avec $i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ et $k \in \mathbb{Z}$

On a donc :

$$S_0 = \{ \pm(i \times \frac{pb}{10} + \frac{\varepsilon}{10} + pbk) \} \text{ avec } i \in \{1, 2, \ldots, 9\} \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

— Pour $u \in \{2, 4, 6, 8\}$

On a $X = \frac{pb}{2}$

Alors $\frac{pb}{2}$ vérifie $10X \equiv 0[pb]$

$\Rightarrow$ tous les élément de $\overline{\frac{pb}{2}}$ vérifient $10X \equiv 0[pb]$

$\Rightarrow X \ \in \overline{\frac{pb}{2}}$

$\Rightarrow X \ \in \{\frac{pb}{2} + pbk\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \pm x - \frac{\varepsilon}{10} \in \{\frac{pb}{2} + pbk\}$

$\Rightarrow \pm x \in \{\frac{pb}{2} + \frac{\varepsilon}{10} + pbk\}$

$\Rightarrow x \in \{\pm(\frac{pb}{2} + \frac{\varepsilon}{10} + pbk)\}$

On a donc :

$S_0 = \{\pm(\frac{pb}{2} + \frac{\varepsilon}{10} + pbk)\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

— Pour $u = 5$

On a $X \in \{i \times \frac{pb}{5}\}$ avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

donc $X \ \in \{\frac{pb}{5}, \frac{2pb}{5}, \frac{3pb}{5}, \frac{4pb}{5}\}$

Alors les éléments de l'ensemble $\{\frac{pb}{5}, \frac{2pb}{5}, \frac{3pb}{5}, \frac{4pb}{5}\}$ vérifient $10X \equiv 0[pb]$

$\Rightarrow$ tous les éléments de leurs classes de congruence modulo b respectifs vérifient $10X \equiv 0[pb]$

$\Rightarrow X \ \in \{ \ \overline{\frac{pb}{5}}, \overline{\frac{2pb}{5}}, \overline{\frac{3pb}{5}}, \overline{\frac{4pb}{5}} \ \}$

$\Rightarrow \pm x - \frac{\varepsilon}{10} \ \in \{ \ \overline{\frac{pb}{5}}, \overline{\frac{2pb}{5}}, \overline{\frac{3pb}{5}}, \overline{\frac{4pb}{5}} \ \}$

$\Rightarrow \pm x - \frac{\varepsilon}{10} \ \in \{\overline{i \times \frac{pb}{5}}\}$ avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$\Rightarrow \pm x \ \in \{ \ \overline{i \times \frac{pb}{5}} \ + \frac{\varepsilon}{10} \ \}$ avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$\Rightarrow \pm x \ \in \{ \ i \times \frac{pb}{5} \ + \frac{\varepsilon}{10} + pbk \ \}$ avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ et$k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x \ \in \{ \ \pm(i \times \frac{pb}{5} \ + \frac{\varepsilon}{10} + pbk)\}$ avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $k \in \mathbb{Z}$

On a donc :

$S_0 = \{ \ \pm(i \times \frac{pb}{5} \ + \frac{\varepsilon}{10} + pbk) \ \}$ avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $k \in \mathbb{Z}$

2.2.5 Solution générale

La solution générale contient la solution évidente S_e et la solution générale S_0, donc $S = \{S_e, S_0\}$.

1.4.3.1 Si pb est un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$

$S_e = \{\pm(\frac{\varepsilon}{10} + pbk)\}$ et $S_0 = \emptyset$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc $S = S_e = \{\pm(\frac{\varepsilon}{10} + pbk)\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{S=\{\pm(\tfrac{\varepsilon}{10}+pbk)\} \text{ avec } k\in\mathbb{Z}}$$

Si pb n'est pas un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$

— Pour $u=0$

$S_e=\{\pm(\frac{\varepsilon}{10}+pbk)\}$ et $S_0=\{\ \pm(i\times\frac{pb}{10}\ +\frac{\varepsilon}{10}+pbk)\ \}$ avec $i\in\{1,2,\ldots,9\}$ et $k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow S=\{\pm(\frac{\varepsilon}{10}+pbk),\pm(i\times\frac{pb}{10}\ +\frac{\varepsilon}{10}+pbk)\}$ avec $i\in\{1,2,\ldots,9\}$ et $k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow S=\{\pm(i\times\frac{pb}{10}\ +\frac{\varepsilon}{10}+pbk)\}$ avec $i\in\{0,1,2,\ldots,9\}$ et $k\in\mathbb{Z}$

$$\boxed{S=\{\pm(i\times\tfrac{pb}{10}\ +\tfrac{\varepsilon}{10}+pbk)\} \text{ avec } i\in\{0,1,2,\ldots,9\} \text{ et } k\in\mathbb{Z}}$$

— Pour $u\in\{2,4,6,8\}$

$S_e=\{\pm(\frac{\varepsilon}{10}+pbk)\}$ et $S_0=\{\ \pm(\frac{pb}{2}+\frac{\varepsilon}{10}+pbk)\ \}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow S=\{\pm(\frac{\varepsilon}{10}+pbk)\ ,\ \pm(\frac{pb}{2}+\frac{\varepsilon}{10}+pbk)\}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$$\boxed{S=\{\pm(\tfrac{\varepsilon}{10}+pbk)\ ,\ \pm(\tfrac{pb}{2}+\tfrac{\varepsilon}{10}+pbk)\} \text{ avec } k\in\mathbb{Z}}$$

— Pour $u=5$

$S_e=\{\pm(\frac{\varepsilon}{10}+pbk)\}$ et $S_0=\{\ \pm(i\times\frac{pb}{5}\ +\frac{\varepsilon}{10}+pbk)\ \}$ avec $i\in\{1,2,3,4\}$ et $k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow S=\{\pm(\frac{\varepsilon}{10}+pbk),\pm(i\times\frac{pb}{5}\ +\frac{\varepsilon}{10}+pbk)\}$ avec $i\in\{1,2,3,4\}$ et $k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow S=\{\pm(i\times\frac{pb}{5}\ +\frac{\varepsilon}{10}+pbk)\ \}$ avec $i\in\{0,1,2,3,4\}$ et $k\in\mathbb{Z}$

$$\boxed{S=\{\pm(i\times\tfrac{pb}{5}\ +\tfrac{\varepsilon}{10}+pbk)\ \} \text{ avec } i\in\{0,1,2,3,4\} \text{ et } k\in\mathbb{Z}}$$

La solution peut donc être écrite sous la forme :

$$\boxed{\begin{array}{c} S=\{\pm(\dfrac{mpb}{10\wedge u}i^m+\dfrac{\varepsilon}{10}+pbk)\},\ k\in\mathbb{Z} \\ \text{avec } m=|10\wedge u-5\lfloor\dfrac{10\wedge u}{5}\rfloor-1| \ \text{ et } i\in\{0,1,2,\ldots,(10\wedge u)-1\} \\ \\ \text{où} \quad \varepsilon=pc+pb(\dfrac{10}{10\wedge u}q'+(-1)^n uu') \quad \text{avec } n=u-5\lfloor\dfrac{u}{5}\rfloor-3\lfloor\dfrac{u-5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor \quad \text{et} \quad q'\in\mathbb{Z} \end{array}}$$

3 Exemples de résolution

1. $1231x \equiv 83[137]$ **2.** $730x \equiv 8[144]$

3. $24001x \equiv 37[3428]$ **4.** $199x \equiv 12[27]$

— Pour l'équation $1231x \equiv 83[137]$

$1231 \equiv -2[137] \Rightarrow p = 5 \Rightarrow pb = 685 \equiv 5[10]$ et $pc = 415 \equiv 5[10] \Rightarrow u = 5$ et $u' = 5$

Comme $10 \wedge u = 5$ divise $10 \wedge u' = 5$, alors l'équation $1231x \equiv 83[137]$ admet des solutions.

$S = \{-(\frac{mpb}{10\wedge u}i^m + \frac{\varepsilon}{10} + pbk)\},\ k \in \mathbb{Z}$

avec $m = |10 \wedge u - 5\lfloor\frac{10\wedge u}{5}\rfloor - 1|$ et $i \in \{0, 1, 2, \ldots, (10 \wedge u) - 1\}$

où $\varepsilon = pc + pb(\frac{10}{10\wedge u}q' + (-1)^n uu')$ avec $n = u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{u-5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor$ et $q' \in \mathbb{Z}$

$m = |5 - 5\lfloor\frac{5}{5}\rfloor - 1| = 1$ et $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

$n = u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{u-5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor = 5 - 5\lfloor\frac{5}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{5-5\lfloor\frac{5}{5}\rfloor}{3}\rfloor = 0$

$\varepsilon = pc + pb(\frac{10}{10\wedge u}q' + uu') = 415 + 685(\frac{10}{10\wedge 5}q' + 5 \times 5) = 415 + 685(2q' + 25)$ avec $q' \in \mathbb{Z}$

Prenons $q' = -12$

$\varepsilon = 1100$

$$\boxed{S = \{-(137i + 110 + 685k)\} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}}$$

— Pour l'équation $730x \equiv 8[144]$

$730 \equiv 10[144] \Rightarrow p = 1 \Rightarrow pb = 144 \equiv 4[10]$ et $pc = 8 \equiv 8[10] \Rightarrow u = 4$ et $u' = 8$

Comme $10 \wedge u = 2$ divise $10 \wedge u' = 2$, alors l'équation $730x \equiv 8[144]$ admet des solutions.

$S = \{\frac{mpb}{10\wedge u}i^m + \frac{\varepsilon}{10} + pbk\},\ k \in \mathbb{Z}$

avec $m = |10 \wedge u - 5\lfloor\frac{10\wedge u}{5}\rfloor - 1|$ et $i \in \{0, 1, 2, \ldots, (10 \wedge u) - 1\}$

où $\varepsilon = pc + pb(\frac{10}{10\wedge u}q' + (-1)^n uu')$ avec $n = u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{u-5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor$ et $q' \in \mathbb{Z}$

$m = |2 - 5\lfloor\frac{2}{5}\rfloor - 1| = 1$ et $i \in \{0, 1\}$.

$n = u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{u-5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor = 4 - 5\lfloor\frac{4}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{4-5\lfloor\frac{4}{5}\rfloor}{3}\rfloor = 1$

$\varepsilon = pc + pb(\frac{10}{10\wedge u}q' - uu') = 8 + 144(\frac{10}{10\wedge 4}q' - 4 \times 8) = 8 + 144(5q' - 32)$ avec $q' \in \mathbb{Z}$

Prenons $q' = 7$

$\varepsilon = 440$

$$\boxed{S = \{72i + 44 + 144k)\} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } i \in \{0,1\}}$$

— Pour l'équation $24001x \equiv 37[3428]$

$24001 \equiv 5[3428] \Rightarrow p = 2 \Rightarrow pb = 6856 \equiv 6[10]$ et $pc = 74 \equiv 4[10] \Rightarrow u = 6$ et $u' = 4$

Comme $10 \wedge u = 2$ divise $10 \wedge u' = 2$, alors l'équation $240001x \equiv 37[3428]$ admet des solutions.

$S = \{\frac{mpb}{10\wedge u} i^m + \frac{\varepsilon}{10} + pbk\},\ k \in \mathbb{Z}$

avec $m = |10 \wedge u - 5\lfloor \frac{10\wedge u}{5} \rfloor - 1|$ et $i \in \{0, 1, 2, \ldots, (10 \wedge u) - 1\}$

où $\quad \varepsilon = pc + pb(\frac{10}{10\wedge u} q' + (-1)^n uu') \quad$ avec $n = u - 5\lfloor \frac{u}{5} \rfloor - 3\lfloor \frac{u - 5\lfloor \frac{u}{5} \rfloor}{3} \rfloor \quad$ et $\quad q' \in \mathbb{Z}$

$m = |2 - 5\lfloor \frac{2}{5} \rfloor - 1| = 1$ et $i \in \{0, 1\}$.

$n = u - 5\lfloor \frac{u}{5} \rfloor - 3\lfloor \frac{u - 5\lfloor \frac{u}{5} \rfloor}{3} \rfloor = 6 - 5\lfloor \frac{6}{5} \rfloor - 3\lfloor \frac{6 - 5\lfloor \frac{6}{5} \rfloor}{3} \rfloor = 1$

$\varepsilon = pc + pb(\frac{10}{10\wedge u} q' - uu') = 74 + 6856(\frac{10}{10\wedge 2} q' - 6 \times 4) = 74 + 6856(5q' - 24) \quad$ avec $\quad q' \in \mathbb{Z}$

Prenons $q' = 5$

$\varepsilon = 6930$

$$\boxed{S = \{3428i + 693 + 6856k\} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } i \in \{0,1\}}$$

— Pour l'équation $199x \equiv 12[27]$

$199 \equiv 10[27] \Rightarrow p = 1 \Rightarrow pb = 27 \equiv 7[10]$ et $pc = 12 \equiv 2[10] \Rightarrow u = 7$ et $u' = 2$

Comme $10 \wedge u = 1$ divise $10 \wedge u' = 2$, alors l'équation $199x \equiv 12[27]$ admet des solutions.

$S = \{\frac{mpb}{10\wedge u} i^m + \frac{\varepsilon}{10} + pbk\},\ k \in \mathbb{Z}$

avec $m = |10 \wedge u - 5\lfloor \frac{10\wedge u}{5} \rfloor - 1|$ et $i \in \{0, 1, 2, \ldots, (10 \wedge u) - 1\}$

où $\quad \varepsilon = pc + pb(\frac{10}{10\wedge u} q' + (-1)^n uu') \quad$ avec $n = u - 5\lfloor \frac{u}{5} \rfloor - 3\lfloor \frac{u - 5\lfloor \frac{u}{5} \rfloor}{3} \rfloor \quad$ et $\quad q' \in \mathbb{Z}$

$m = |1 - 5\lfloor \frac{1}{5} \rfloor - 1| = 0$ et $i = 0$.

$n = u - 5\lfloor \frac{u}{5} \rfloor - 3\lfloor \frac{u - 5\lfloor \frac{u}{5} \rfloor}{3} \rfloor = 7 - 5\lfloor \frac{7}{5} \rfloor - 3\lfloor \frac{7 - 5\lfloor \frac{7}{5} \rfloor}{3} \rfloor = 2$

$\varepsilon = pc + pb(\frac{10}{10 \wedge u}q' + uu') = 12 + 27(\frac{10}{10 \wedge 7}q' + 7 \times 2) = 12 + 27(10q' + 14) \quad \text{avec} \quad q' \in \mathbb{Z}$

Prenons $q' = -1$

$\varepsilon = 120$

$$\boxed{S = \{12 + 27k\} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}}$$

Conclusion

Dans ce document, nous avons proposé une nouvelle méthode pour résoudre une classe particulière d'équations modulaires de la forme $ax \equiv c[b]$, où a, b, et c sont des entiers naturels tels que $a \equiv \pm\frac{10}{p}[b]$, avec $p \in \{1, 2, 5, 10\}$. Cette approche novatrice repose sur l'analyse des unités des produits pb et pc, désignées respectivement par u et u', et offre une alternative simplifiée aux méthodes classiques.

Nous avons structuré la résolution en deux étapes : Vérification de l'existence des solutions, basée sur la divisibilité du PGCD de 10 et u' par le PGCD de 10 et u. Détermination explicite des solutions, exprimées en fonction d'un paramètre ε, calculé à partir des valeurs de pb, pc, u, et u'.

Cette méthode se distingue par sa simplicité et sa rapidité, tout en fournissant des solutions sous une forme explicite et facilement applicable. Les exemples concrets présentés dans ce document illustrent la pertinence et l'efficacité de cette approche.

Références

[Alg24] Mohamed Algoni, *Sur l'équation diophantienne diophantienne $ax + by = c$ avec $a \equiv \pm\frac{10}{p}[b]$ et $p \in \{1, 2, 5, 10\}$*, http://vixra.org/abs/2412.0169?ref=16748650, December 2024.

[Kou17] Dimitris Koukoulopoulos, *Introduction à la théorie des nombres*, 2017, P.116-117 https://dms.umontreal.ca/~koukoulo/documents/notes/theorie_des_nombres.pdf.

[Moh24] Algoni Mohamed, *Ruban de pascal décalé*, 8–15, http://hal.science/hal-04589810v2.

[Sup11] MPSI Sup, *Cours de mathématiques*, 2011, P.748-755 http://les.mathematiques.free.fr/pdf/livre.pdf.

[Vin09] Valentin Vinoles, *Cours élémentaire d'arithmétique*, P.17 http://www.maths-mancini.fr/wp-content/uploads/2016/07/cours_arithmetique-ts.pdf.