Clarification de la démonstration- de la conjecture de Syracuse

Berkouk Mohamed
décember 21, 2024

ABSTRACT

la conjecture de Collatz qui se définit par : au départ de tous entier n positif, on applique ces 2 instructions ,s'il est pair le divise par 2 , et si il est impair on le multiplie par 3 , on ajoute 1 et on divise le tout par 2 , la conjecture stipule que si on répète la transformation de n , on finit toujours par tomber sur 1 qui à son tour se trouve piégé indéfiniment dans le cycle trivial 1→4→2→1.
trois étapes ont été arrêté pour arriver à sa démonstrations, la première conduit à l'unicité du Cycle trivial qui consistait , dans la PARTIE 1 , à explorer dans le Cycle trivial d'une propriété récurrente à tous autre cycle à plus de trois termes dont il ne peuvent générer selon leur équation du Cycle , que des entiers positifs 1 , 2 ou 4 . la deuxième étape consiste à construire une équivalence directe entre la convergence de Syracuse vers 1 avec le fait que le ratio des termes impairs sur le nombre des termes pairs est coincé dans l'intervalle [0 , 0.63092975..[, et que grâce à cette proposition , nous avions pu démontrer la décroissance de tous n vers 1 , enfin la troisième étape , qui par une propriété de la moyenne démontré par récurrence l'équation qui relie les puissances de 2 avec les puissance des termes impairs à qui nous avons appliqué l'instruction –Collatz 3n +1 .

INTRODUCTION

en 2019, nous avons émis une démonstration de la suite de Collatz en trois étapes qui respectaient peu ou prou le plan Suivant :

- ∃! Cycle dans la suite de Collatz, c'est le cycle trivial 4-2-1
- ∀ n ∈ N*\ {1}, la suite de Collatz décroit vers un n' / n' < n
- ∀ n ∈ N*, la suite de Collatz, atterrit dans le cycle trivial dont 1, est le plus petit élément.

PARTIE 1 : ∃! Cycle dans la suite de Collatz, c'est le cycle trivial 4-2-1

une question s'impose :

Existent – ils d'autres x1, x2, x3définis dans N, qui forment un autre cycle avec k =3 ?*
Nous avons 3 nombres x1, x2 et x3 avec chacun 2 façons de se présenter, s'il est pair, soit en (x/2) dite A, soit en (3x+1) dite B s'il est impair, donc nous avons 2^3*= 8 cas possibles que nous allons examiner en permutant les opérations A(terme pair) et B(terme impair) par 3 :*
-1) cas : A A A ⇒ ((x/2)/2) / 2 = x ⇒ x = 0
(Après 3 opérations, il retourne à x puisque c'est un cycle, donc = x)
-2) cas : A A B ⇒ 3((x/2)/2) +1 = x ⇒ x = 4 … etc.* ; jusqu'au 8° cas dont les résultats dans le tableau qui suit :

Tableau I : configurations du Cycle de longueur k=3
détermination de l'équation du Cycle, et sa solution

A=pair B =impair		x1=A,A,A	derniere etape retourne à =x1 : Cycle (x1 correspond à la 1° A-à gauche)	solution
8 arrangements	**1° étape**	**2° étape**	**3° étape : equation du cycle**	
A,A,A	x2=x1/2	x3=x1/4	x1=x1/8	x1 =0
A,A,B	x2=x1/2	x3=(x1/4)	x1=3.(x1/4)+1	x1 =-4
A,B,A	x2=x1/2	x3=(3.(x1/2)+1)	x1=(3.(x1/2)+1)/2	x1 = 2
A,B,B	x2=x1/2	x3=3.(x1/2)+1	x1=3.(3.(x1/2)+1)+1	x1=-1,14286
B,A,A	x2=3.x1+1	x3=(3.x1+1)/2	x1=(3.x1+1)/4	x1=1
B,A,B	x2=3.x1+1	x3=3((3.x1+1)/2) +1	x1=3((3.x1+1)/2) +1	x1=0,714286
B,B,A	x2=3.x1+1	x3=3.(3.x1 +1) +1	x1=(3.(3.x1 +1) +1)/2	x1=0,571429
B,B,B	x2=3.x1+1	x3=3(3.x1+1) +1	x1=3.(3.(3.x1+1) +1)+1	x1=-0,5

quand k, le nombre de termes = 3 , l'équation du cycle donne les trois élément , nombres entiers positifs
soit le nombre 4 , 2 et 1 du cycle trivial

C'est alors que je me suis lancé à étudier, avec la même démarche, l'éventualité d'existence d'autres cycles, avec une longueur k supérieur à 3 termes en commençant par k=4, k=5, puis k =6 pour découvrir une loi récurrente dont les solutions des équations du cycle offraient tous les ingrédients pour satisfaire une démonstration rigoureuse de récurrence, de l'unicité du cycle trivial dans N*.

pour k=3, notons que parmi les 8 solutions du tableau I, il y a 3 entiers positifs (1,2,4) ,3 décimaux positifs (1.14 ,0.71 ;0.57 ;0.50) , 1 décimal négative (-1.14) , et le 0 .

il n'y a pas d'autres entiers positifs que ceux du cycle trivial.

Rappelant que dans Z*, l'ensemble des entiers relatifs, il y a trois cycles –Collatz de nombres négatifs :

1°- (-5) → -14 → -7 → -20 → -10 → longueur 5
2°- (-2) → -1 ; longueur 2
3°- (-17) → -50 → -25 → -74 → -37 → -110 → -55 → -164 → -82 → -41 → -122 → -61 → -182 → -91 → -272 → -136 → -68 → -34 ; longueur 18

Passons au Tableau II, qui a été construit selon les mêmes principes que le tableau I

Tableau II : configurations du Cycle de longueur k=4 **3**
détermination de l'équation du Cycle, et sa solution

A=pair					
B=impair	x1=A , A , A , A	(x1 correspond à la 1° A-à gauche)		derniere étape retourne à =x1 : Cycle	
16 arrangements	1° étape	2° étape	3° étape	4° étape - équation du cycle	solution
A , A , A , A	x2=x1/2	x3=x1/4	x4 = x1/8	x1 = x1/16	x1=0
A , A , A , B	x2=x1/2	x3=x1/4	x4 = x1/8	x1 = 3.(x1/8) +1	x1=1,6
A , A , B , A	x2=x1/2	x3=x1/4	x4=(3.(x1/4)+1)/2	x1=(3.(x1/4)+1)/2	x1=0,8
A , A , B , B	x2=x1/2	x3=x1/4	x4=(3.(x1/4)+1)/2	x1=3.(3.(x1/4)+1) +1	x1=-3,2
A , B , A , A	x2=x1/2	x3=3(x1/2) +1	x4=(3(x1/2) +1)/2	x1=((3(x1/2) +1)/2)/2	x1=0,4
A , B , A , B	x2=x1/2	x3=3(x1/2) +1	x4=(3(x1/2) +1)/2	x1=3.(((3(x1/2) +1)/2))+1	x1=-2
A , B , B , A	x2=x1/2	x3=3(x1/2) +1	x4=3.(3(x1/2) +1)+1	x1=(3.(3(x1/2) +1)+1)/2	x1=-1,6
A , B , B , B	x2=x1/2	x3=3(x1/2) +1	x4=3.(3(x1/2) +1)+1	x1=3.(3.(3(x1/2) +1)+1)+1	x1=-1,04
B , A , A , A	x2=3.x1 +1	x3=(3.x1+1)/2	x4=((3.x1+1)/2)/2	x1=(((3.x1+1)/2)/2)/2	x1=0,2
B , A , A , B	x2=3.x1 +1	x3=(3.x1+1)/2	x4=((3.x1+1)/2)/2	x1=3.((3.x1 +1)/4)+1	x1=--1,4
B , A , B , A	x2=3.x1 +1	x3=(3.x1+1)/2	x4=3.((3.x1+1)/2)+1	x1=(3.((3.x1+1)/2)+1)/2	x1=-1
B , A , B , B	x2=3.x1 +1	x3=(3.x1+1)/2	x4=3.((3.x1+1)/2)+1	x1=3.(3.((3.x1+1)/2)+1)+1	x1=-0,68
B , B , A , A	x2=3.x1 +1	x3=3.(3.x1 +1)+1	x4=(3.(3.x1 +1)+1)+1)/2	x1=(((3.(3.x1 +1)+1)+1)/2)/2	x1=-1
B , B , A , B	x2=3.x1 +1	x3=3.(3.x1 +1)+1	x4=(3.(3.x1 +1)+1)+1)/2	x1=3.((3.(3.x1 +1)+1)+1)/2)+1	x1=-0,68
B , B , B , A	x2=3.x1 +1	x3=3.(3.x1 +1)+1	x4=3.(3.(3.x1 +1)+1)+1	x1=(3.(3.(3.x1 +1)+1)+1)/2	x1=-0,52
B , B , B , B	x2=3.x1 +1	x3=3.(3.x1 +1)+1	x4=3.(3.(3.x1 +1)+1)+1	x1=3.(3.(3.(3.x1 +1)+1)+1)+1	x1=-0,50

-2 et -1 , appartenant au cycle (-2) dans **Z***

les solutions des équations du cycle se répartissent comme suivent :

décimaux positifs = 4
décimaux négatifs =8
entiers positifs =0
entiers relatifs =3 (-1 apparu 2 fois)
Plus le zéro, soit au total 16 configurations

il n'y a pas d'entiers positifs.

Tableau III : configurations du Cycle de longueur k=5

détermination de l'équation du Cycle, et sa solution

	A=pair			(x1 correspond			
	B =impair		x1=A,A,A,A,A	à la 1° A- à gauche)		derniere etape retourne à =x1 : Cycle	
	32 arrangements	1° étape	2° étape	3° étape	4° étape	5° étape : equation du cycle	solution
1	A,A,A,A,A	x2=x1/2	x3=x1/4	x4 = x1/8	x5 = x1/16	x1= x1/16	x1=0
2	A,A,A,A,B	x2=x1/2	x3=x1/4	x4 = x1/8	x5=x1/16	x1=3.(x1/16) +1	x1 =1,23077
3	A,A,A,B,A	x2=x1/2	x3=x1/4	x4 = x1/8	x5=3.(x1/8)+1	x1=(3.(x1/8)+1)/2	x1 =0,61538
4	A,A,A,B,B	x2=x1/2	x3=x1/4	x4 = x1/8	x5=3.(x1/8)+1	x1=3.(3.(x1/8)+1) +1	x1=-32
5	A,A,B,A,A	x2=x1/2	x3=x1/4	x4=3.(x1/4) +1	x5=((3.(x1/4) +1)/2	x1=(((3.(x1/4) +1)/2)/2)/2	x1=0,137931
6	A,A,B,A,B	x2=x1/2	x3=x1/4	x4=3(x1/4) +1	x5=(3.(x1/4) +1)/2	x1=3.(((3.(x1/4) +1)/2)/2)+1	x1= 4
7	A,A,B,B,A	x2=x1/2	x3=x1/4	x4=3(x1/4) +1	x5=3.(3.(x1/4) +1)+1	x1=(3.(3.(x1/4) +1)+1)/2	x1=-16
8	A,A,B,B,B	x2=x1/2	x3=x1/4	x4=3.(x1/4) +1	x5=3.(3.(x1/4) +1)+1	x1=3.(3.(3.(x1/4) +1)+1)+1	x1=-2,26087
9	A,B,A,A,A	x2=x1/2	x3=3.(x1/2) +1	x4=(3.(x1/2) +1)/2	x5=((3.(x1/2) +1)/2)/2	x1=(((3.(x1/2) +1)/2)/2)/2	x1=0,153846
10	A,B,A,A,B	x2=x1/2	x3=3.(x1/2) +1	x4=(3(x1/2) +1)/2	x5=((3.(x1/2) +1)/2)/2	x1=3.(((3.(x1/2) +1)/2)/2)+1	x1=-14
11	A,B,A,B,A	x2=x1/2	x3=3.(x1/2) +1	x4=(3(x1/2) +1)/2	x5=3.((3(x1/2) +1)/2)+1	x1=(3.((3(x1/2) +1)/2)+1)/2	x1=-10
12	A,B,A,B,B	x2=x1/2	x3=3.(x1/2) +1	x4=(3(x1/2) +1)/2	x5=3.((3(x1/2) +1)/2)+1	x1=3.(3.((3(x1/2) +1)/2)+1)+1	x1=-1,47826
13	A,B,B,A,A	x2=x1/2	x3=3.(x1/2) +1	x4=3.(3.(x1/2) +1)+1	x5=(3.(3.(x1/2) +1)+1)/2	x1=((3.(3.(x1/2) +1)+1)/2)/2	x1=-8
14	A,B,B,A,B	x2=x1/2	x3=3.(x1/2) +1	x4=3.(3.(x1/2) +1)+1	x5=(3.(3.(x1/2) +1)+1)/2	x1=3.(3.(3.(x1/2) +1)+1)/2))+1	x1=-1,21739
15	A,B,B,B,A	x2=x1/2	x3=3.(x1/2) +1	x4=3.(3.(x1/2) +1)+1	x5=3.(3.(3.(x1/2) +1)+1)+1	x1=((3.(3.(3.(x1/2) +1)+1)+1)+1)/2	x1=-1,21739
16	A,B,B,B,B	x2=x1/2	x3=3.(x1/2) +1	x4=3.(3.(x1/2) +1)+1	x5=3.(3.(3.(x1/2) +1)+1)+1	x1=3.(3.(3.(3.(x1/2) +1)+1)+1)+1	x1=-1,01266
17	B,A,A,A,A	x2=3.x1 +1	x3=(3.x1+1)/2	x4=((3.x1+1)/2)/2	x5=(((3.x1+1)/2)/2)/2	x1=((((3.x1+1)/2)/2)/2)/2	x1=0,769231
18	B,A,A,A,B	x2=3.x1 +1	x3=(3.x1+1)/2	x4=((3.x1+1)/2)/2	x5=(((3.x1+1)/2)/2)/2	x1=3.((((3.x1+1)/2)/2)/2)+1	x1=-11
19	B,A,A,B,A	x2=3.x1 +1	x3=(3.x1+1)/2	x4=((3.x1+1)/2)/2	x5=3.(((3.x1+1)/2)/2)+1	x1=(3.(((3.x1+1)/2)/2)+1)/2	x1=-7
20	B,A,A,B,B	x2=3.x1 +1	x3=(3.x1+1)/2	x4=((3.x1+1)/2)/2	x5=3.(((3.x1+1)/2)/2)+1	x1=3.(3.(((3.x1+1)/2)/2)+1)+1	x1=-0,8696
21	B,A,B,A,A	x2=3.x1 +1	x3=(3.x1+1)/2	x4=3.((3.x1+1)/2)+1	x5=(3.((3.x1+1)/2)+1)/2	x1=((3.((3.x1+1)/2)+1)/2)/2	x1=-5
22	B,A,B,A,B	x2=3.x1 +1	x3=(3.x1+1)/2	x4=3.((3.x1+1)/2)+1	x5=(3.((3.x1+1)/2)+1)/2	x1=3.((3.((3.x1+1)/2)+1)/2)+1	x1=-0,826087
23	B,A,B,B,A	x2=3.x1 +1	x3=(3.x1+1)/2	x4=3.((3.x1+1)/2)+1	x5=3.(3.((3.x1+1)/2)+1)+1	x1=(3.(3.((3.x1+1)/2)+1)+1)/2	x1=-0,78913
24	B,A,B,B,B	x2=3.x1 +1	x3=(3.x1+1)/2	x4=3.((3.x1+1)/2)+1	x5=3.(3.((3.x1+1)/2)+1)+1	x1=3.(3.(3.((3.x1+1)/2)+1)+1)+1	x1=-0,670886
25	B,B,A,A,A	x2=3.x1 +1	x3=3.(3.x1+1)+1	x4=(3.(3.x1+1)+1)/2	x5=((3.(3.x1+1)+1)/2)/2	x1=(((3.(3.x1+1)+1)/2)/2)/2	x1=-4
26	B,B,A,A,B	x2=3.x1 +1	x3=3.(3.x1+1)+1	x4=(3.(3.x1+1)+1)/2	x5=((3.(3.x1+1)+1)/2)/2	x1=3.(((3.(3.x1+1)+1)/2)/2)+1	x1=-0,695652
27	B,B,A,B,A	x2=3.x1 +1	x3=3.(3.x1+1)+1	x4=(3.(3.x1+1)+1)/2	x5=3.((3.(3.x1+1)+1)/2)+1	x1=(3.((3.(3.x1+1)+1)/2)+1)/2	x1=-0,608696
28	B,B,A,B,B	x2=3.x1 +1	x3=3.(3.x1+1)+1	x4=(3.(3.x1+1)+1)/2	x5=3.((3.(3.x1+1)+1)/2)+1	x1=3.(3.((3.(3.x1+1)+1)/2)+1)+1	x1=-0,556962
29	B,B,B,A,A	x2=3.x1 +1	x3=3.(3.x1+1)+1	x4=3.(3.(3.x1+1)+1)+1	x5=(3.(3.(3.x1+1)+1)+1)/2	x1=((3.((3.(3.x1+1)+1))+1)/2)/2	x1=0,565217
30	B,B,B,A,B	x2=3.x1 +1	x3=3.(3.x1+1)+1	x4=3.(3.(3.x1+1)+1)+1	x5=(3.(3.(3.x1+1)+1)+1)/2	x1=3.((3.((3.(3.x1+1)+1))+1)/2)+1	x1=-0,518987
31	B,B,B,B,A	x2=3.x1 +1	x3=3.(3.x1+1)+1	x4=3.(3.(3.x1+1)+1)+1	x5=3.(3.(3.(3.x1+1)+1)+1)+1	x1=(3.(3.(3.(3.x1+1)+1)+1)+1)/2	x1=-0,506329
32	B,B,B,B,B	x2=3.x1 +1	x3=3.(3.x1+1)+1	x4=3.(3.(3.x1+1)+1)+1	x5=3.(3.(3.(3.x1+1)+1)+1)+1	x1=3.(3.(3.(3.(3.x1+1)+1)+1)+1)+1	x1=-0,5

-2 → **-1** du cycle (-2) dans **Z*** **4 du cycle T**

-14 ,-10 ,-7 , -5 du cycle (-5) dans **Z***

les solutions des équations du cycle se répartissent comme suivent :

décimaux positifs = 7

décimaux négatifs =14

entiers positifs =1 (4 ,du cycle trivial)

entiers relatifs =9 (-14 , -10,-7,-5, du cycle (-5) dans Z* ,-11,-4,-8,-16,et -32)

plus le zéro, soit au total 32 configurations

il n'y a pas d'autres entiers positifs que ceux du cycle trivial.

Tableau IV : configurations du Cycle de longueur k=6
détermination de l’équation du Cycle, et sa solution

	A=pair B =impair	derniere etape retourne à =x1 : Cycle			A=pair B =impair	derniere etape retourne à =x1 : Cycle	
	128arrangements	6° étape : equation du cycle	solution		128arrangements	6° étape : equation du cycle	solution
1	A,A,A,A,A,A	x1= (x1/16)/2	x1=0	33	B,A,A,A,A,A	x1=((((3.x1+1)/2)/2)/2)/2)/2	x1=-0,344828
2	A,A,A,A,A,B	x1=3.(x1/16) +1	x1= 1,23077	34	B,A,A,A,A,B	x1=3.(((((3.x1+1)/2)/2)/2)/2)+1	x1=2,71429
3	A,A,A,A,B,A	x1=(3.(x1/16) +1)/2	x1=0,551724	35	B,A,A,A,B,A	x1=(3.((((3.x1+1)/2)/2)/2)+1)/2	x1=1,57143
4	A,A,A,A,B,B	x1=3.(3.(x1/16)+1) +1	x1=9,14286	36	B,A,A,A,B,B	x1=3.(3.((((3.x1+1)/2)/2)/2)+1)+1	x1=-2,15789
5	A,A,A,B,A,A	x1=((3.(x1/8)+1)/2)/2	x1=0,275862	37	B,A,A,B,A,A	x1=((3.(((3.x1+1)/2)/2)+1)/2)/2	x1=1
6	A,A,A,B,A,B	x1=3.(3.(x1/8)+1)/2) +1	x1=-2,66667	38	B,A,A,B,A,B	x1=3.((3.(((3.x1+1)/2)/2)+1)/2)+1	x1=-1,52632
7	A,A,A,B,B,A	x1=(3.(3.(x1/8)+1) +1)/2	x1=4,57143	39	B,A,A,B,B,A	x1=(3.(3.(((3.x1+1)/2)/2)+1)+1)/2	x1=-1,31579
8	A,A,A,B,B,B	x1=3.(3.(3.(x1/8)+1) +1)+1	x1=-5,47368	40	B,A,A,B,B,B	x1=3.(3.(3.(((3.x1+1)/2)/2)+1)+1)+1	x1=-1,02597
9	A,A,B,A,A,A	x1=((((3.(x1/4) +1)/2)/2)/2)/2	x1= 0,0655738	41	B,A,B,A,A,A	x1=(((3.((3.x1+1)/2)+1)/2)/2)/2	x1=0,714286
10	A,A,B,A,A,B	x1=3.(((3.(x1/4) +1)/2)/2/2)+1	x1= -20	42	B,A,B,A,A,B	x1=3.(((3.((3.x1+1)/2)+1)/2)/2)+1	x1=-1,21053
11	A,A,B,A,B,A	x1=(3.(((3.(x1/4) +1)/2)/2)+1)/2	x1= 1,21739	43	B,A,B,A,B,A	x1=(3.((3.((3.x1+1)/2)+1)/2)+1)/2	x1=-1
12	A,A,B,A,B,B	x1=3.(3.(((3.(x1/4) +1)/2)/2)+1)+1	x1= -9,09091	44	B,A,B,A,B,B	x1=3.(3.((3.((3.x1+1)/2)+1)/2)+1)+1	x1=-0,792208
13	A,A,B,B,A,A	x1=((3.(3.(x1/4) +1)+1)/2)/2	x1= 2,28571	45	B,A,B,B,A,A	x1=((3.(3.((3.x1+1)/2)+1)+1)/2)/2	x1=-0,894737
14	A,A,B,B,A,B	x1=3.((3.(3.(x1/4) +1)+1)/2)+1	x1=-2,94737	46	B,A,B,B,A,B	x1=3.((3.(3.((3.x1+1)/2)+1)+1)/2)+1	x1=-0,714286
15	A,A,B,B,B,A	x1=(3.(3.(3.(x1/4) +1)+1)+1)/2	x1=-0,273684	47	B,A,B,B,B,A	x1=(3.(3.(3.((3.x1+1)/2)+1)+1)+1)/2	x1=-0,688312
16	A,A,B,B,B,B	x1=3.(3.(3.(3.(x1/4) +1)+1)+1)+1	x1=-207792	48	B,A,B,B,B,B	x1=3.(3.(3.(3.((3.x1+1)/2)+1)+1)+1)+1	x1=-0,66805
17	A,B,A,A,A,A	x1=((((3.(x1/2) +1)/2)/2)/2)/2	x1=0,0689655	49	B,B,A,A,A,A	x1=((((3.(3.x1+1)+1)/2)/2)/2)/2	x1=0,571429
18	A,B,A,A,A,B	x1=3.((((3.(x1/2) +1)/2)/2)/2)+1	x1=3,14286	50	B,B,A,A,A,B	x1=3.((((3.(3.x1+1)+1)/2)/2)/2)+1	x1=-1,05263
19	A,B,A,A,B,A	x1=(3.(((3.(x1/2) +1)/2)/2)+1)/2	x1=2	51	B,B,A,A,B,A	x1=(3.(((3.(3.x1+1)+1)/2)/2)+1)/2	x1=-0,842105
20	A,B,A,A,B,B	x1=3.(3.(((3.(x1/2) +1)/2)/2)+1)+1	x1=-2,63158	52	B,B,A,A,B,B	x1=3.(3.(((3.(3.x1+1)+1)/2)/2)+1)+1	x1=-0,675325
21	A,B,A,B,A,A	x1=((3.((3(x1/2) +1)/2)+1)/2)/2	x1=1,42857	53	B,B,A,B,A,A	x1=((3.((3.(3.x1+1)+1)/2)+1)/2)/2	x1=-0,736842
22	A,B,A,B,A,B	x1=3.((3.((3(x1/2) +1)/2)+1)/2)+1	x1=-2	54	B,B,A,B,A,B	x1=3.((3.((3.(3.x1+1)+1)/2)+1)/2)+1	x1=-0,597403
23	A,B,A,B,B,A	x1=(3.(3.((3(x1/2) +1)/2)+1)+1)/2	x1=-1,78947	55	B,B,A,B,B,A	x1=(3.(3.((3.(3.x1+1)+1)/2)+1)+1)/2	x1=-0,571429
24	A,B,A,B,B,B	x1=3.(3.(3.((3(x1/2) +1)/2)+1)+1)+1	x1=-1,37662	56	B,B,A,B,B,B	x1=3.(3.(3.((3.(3.x1+1)+1)/2)+1)+1)+1	x1=-0,576017
25	A,B,B,A,A,A	x1=(((3.(3.(x1/2) +1)+1)/2)/2)/2	x1=1,14286	57	B,B,B,A,A,A	x1=(((3.((3.(3.x1+1)+1))+1)/2)/2)/2	x1=-0,684211
26	A,B,B,A,A,B	x1=3.(((3.(3.(x1/2) +1)+1)/2)/2)+1	x1=-1,68421	58	B,B,B,A,A,B	x1=3.(((3.((3.(3.x1+1)+1))+1)/2)/2)+1	x1=-0,558442
27	A,B,B,A,B,A	x1=(3.((3.(3.(x1/2) +1)+1)/2)+1)/2	x1=-1,47368	59	B,B,B,A,B,A	x1=(3.((3.((3.(3.x1+1)+1))+1)/2)+1)/2	x1=-0,532468
28	A,B,B,A,B,B	x1=3.(3.((3.(3.(x1/2) +1)+1)/2)+1)+1	x1=-1,14286	60	B,B,B,A,B,B	x1=3.(3.((3.((3.(3.x1+1)+1))+1)/2)+1)+1	x1=-0,518672
29	A,B,B,B,A,A	x1=((3.(3.(3.(x1/2)+1)+1)+1)/2)/2	x1= -1,36842	61	B,B,B,B,A,A	x1=((3.(3.(3.(3.x1+1)+1)+1)+1)/2)/2	x1=-0,519481
30	A,B,B,B,A,B	x1=3.((3.(3.(3.(x1/2)+1)+1)+1)/2)+1	x1= -1,06494	62	B,B,B,B,A,B	x1=3.((3.(3.(3.(3.x1+1)+1)+1)+1)/2)+1	x1=-0,506224
31	A,B,B,B,B,A	x1=(3.(3.(3.(3.(x1/2) +1)+1)+1)+1)/2	x1=-0,3896	63	B,B,B,B,B,A	x1=(3.(3.(3.(3.(3.x1+1)+1)+1)+1)+1)/2	x1=-0,502075
32	A,B,B,B,B,B	x1=3.(3.(3.(3.(3.(x1/2) +1)+1)+1)+1)+1	x1=-1,00415	64	B,B,B,B,B,B	x1=3.(3.(3.(3.(3.(3.x1+1)+1)+1)+1)+1)+1	x1=-0,5

-2 -→ -1 du cycle (-2) dans **Z*** ; 1 et 2, du cycle Trivial

-20 du cycle (-5) dans **Z***

les solutions des équations du cycle se répartissent comme suivent :

décimaux positifs = 16
décimaux négatifs =42
entiers positifs =2 (1 et 2 ,du cycle trivial)
entiers relatifs =3 (-20 du cycle (-5) et -1,-2 du cycle (-2) dans Z*)
plus le zéro, soit au total 64 configurations

il n’y a pas d’autres entiers positifs que ceux du cycle trivial.

k, étant le nombre de termes d'un éventuel cycle trivial , de la suite de Syracuse, A étant 1 nombre pair impliquant l'instruction de le diviser par 2 ;
B étant un nombre impair impliquant l'instruction de le multiplier par 3, en ajoutant 1, puis en divisant le tout par 2.

Seul , quand k=3 , le cycle trivial a lieu ; entre k =3 et k=6 , nous constations une propriété P(k) à savoir qu' à chaque passage au k suivant :

1°-le nombre de ligne qui porte un arrangement possible se duplique en 2 en raison du passage de 2^k à 2^k+1 (= donc à 2 x 2^k)

2°- le dernier arrangement avec k est identique aux autres jusqu'à (k-1) éme colonne, elle se dédouble pour accueillir les deux instructions Collatz A ou B.

3° -ce dédoublement permet la déduction de la dernière colonne de l'arrangement (k+1) qui hébergera l'instruction A, et la suivante porte l'instruction B ,ainsi que l'équation du cycle.

4° - on assiste à ce que le cycle trivial a lieu quand k=3 (1, 2, ou 4, les seuls entiers positifs qui apparaissent ensemble dans la série de configuration à k= 3).

nous émettons l'hypothèse que les éléments 1,2 et 4, du cycle trivial n'apparaissent ensembles que dans les solutions des équations des cycles que quand k = 3
d'où l'autre versant de l'hypothèse :

pour tout ensemble de configurations du cycle à k termes / k > 3, il n'y a aucun entier positif appartenant à N \ {1;2;4}.

d'où la propriété P(k).

5°- dans un second temps, nous allons démontrer, qu'en raison d'une propriété remarquable à partir de 1°, 2° et 3° ; cette propriété défini pour P(k), est valable pout P(k+1) en raison d'une récurrence évidente, pour aboutir à l'unicité du cycle trivial .

<-----------------------------initialisation---><--------récurrence --->

k = 3		k = 4		k = 5		k=6		k > 6		(k +1)
8 arrangements		16 arrangements		32 arrangements		64 arrangements		2^k arrangements		2^{k+1}arrangements
A,A,A		A,A,A,A		A,A,A,A,A		A,A,A,A,A,A		x1,x2,x3,…xk \xk = A		x1,x2,x3,…xk, x(k+1) \ x(k+1) = A
A,A,B	(n =2^4)	A,A,A,B	(n =2^5)	A,A,A,A,B	(n =2^6)	A,A,A,A,A,B		x1,x2,x3,…xk \xk = B		x1,x2,x3,…xk , x(k+1) \ x(k+1) = B
A,B,A		A,A,B,A		",",",",		",",",",		",",",",		",",",",
A,B,B	→ n	A,A,B,B	→ n	",",",",	→ n	",",",",	→	",",",",	→ n	",",",",
B,A,A		A,B,A,A		",",",",		",",",",		",",",",		",",",",
B,A,B		A,B,A,B		",",",",		",",",",		",",",",		",",",",
B,B,A		A,B,B,A		",",",",		",",",",		x1,x2,x3,…xk \xk = A		",",",",
B,B,B		A,B,B,B		",",",",		",",",",		x1,x2,x3,…xk \xk = B		",",",",
		B,A,A,A				",",",",				",",",",
(n =2^3)		B,A,A,B		",",",",		",",",",				",",",",
		B,A,B,A		",",",",		",",",",				",",",",
		B,A,B,B		",",",",		",",",",				",",",",
		B,B,A,A		B,B,B,A,A		B,B,B,B,A,A				",",",",
		B,B,A,B		B,B,B,A,B		B,B,B,B,A,B				",",",",
		B,B,B,A		B,B,B,B,A		B,B,B,B,B,A				x1,x2,x3,…xk, x(k+1) \ x(k+1) = A
		B,B,B,B		B,B,B,B,B		B,B,B,B,B,B				x1,x2,x3,…xk , x(k+1) \ x(k+1) = B

1°- Initialisation

prenant le premier exemple , celui du passage des 8 configurations d'un cycle avec k = 3 , à celui avec k =4

en ce qui concerne l'équation du cycle et sa solution, qui nous intéresse :

cycle k=3		cycle k=4	
x1=x1/8		x1 = x1/16	
		x1 = 3.(x1/8) +1	
x1=3.(x1/4)+1	4	x1=(3.(x1/4)+1)/2	3
		x1=3.(3.(x1/4)+1) +1	4
x1=(3.(x1/2)+1)/2	2	x1=((3(x1/2) +1)/2)/2	5
		x1=3.(((3(x1/2) +1)/2))+1	6
x1=3.(3.(x1/2)+1)+1		x1=(3.(3(x1/2) +1)+1)/2	
		x1=3.(3.(3(x1/2) +1)+1)+1	
x1=(3.x1+1)/4	1	x1=(((3.x1+1)/2)/2)/2	9
		x1=3.((3.x1 +1)/4)+1	10
x1=3((3.x1+1)/2) +1		x1=(3.((3.x1+1)/2)+1)/2	
		x1=3.(3.((3.x1+1)/2)+1)+1	
x1=(3.(3.x1 +1) +1)/2		x1=(((3.(3.x1 +1)+1)+1)/2)/2	
		x1=3.((3.(3.x1 +1)+1)+1)/2)+1	
x1=3.(3.(3.x1+1) +1)+1		x1=(3.(3.(3.x1 +1)+1)+1)/2	
		x1=3.(3.(3.(3.x1 +1)+1)+1)+1	

nous voyons que chaque ligne T1 du Cycle-k=3 est à l'origine de deux lignes L1 et L2 ,chez le Cycle-k=4 , la première est généré par l'instruction A ,du Syracuse par la relation L1=T1/2 ; et la deuxième ligne est généré par l'instruction-Syracuse B ,à savoir L2= (3.T1 +1) .pour que L1 ou L2 soient des entiers positifs dans le Cycle-k=4 , il faut qu'il soient divisibles par 2 ,d'où cette nouvelle contrainte ajouté à la relation observée à savoir la vérification de de la divisibilité par 2 de L2 par (3T1+1)/2 pour la génerescence de tous les entiers positifs selon bien entendu de la solution de l'équation du cycle

c'est que nous appelons : la relation complète des Cycles-k . (d'ailleurs, suite à la transformation-Collatz (3T1+1) est appelé après à être divisé par 2) 7
dans l'exemple ci –dessus : T1= l'équation du cycle x1=x1/8 donne L1 = (x1/8) /2 = x1/16 donc l'équation : x1=x1/16 . de même qu'il donne L2=(3.(x1/8) +1) , soit l'équation x1=3(x1/8) +1 …ainsi que T2,T3,T4,T5,T6,T7,T8 . et de L1 à L16 pour le cycle –k=4 .
nous vérifions par le même principe, le passage du Cycle-k=4 au Cycle –k=5 ; ainsi que celui du passage du Cycle-k=5 à celui de k =6 dont les détails se trouvent au Tableaux I , II , III et IV
.

2°-Hypothèses et formulation

notation des cycles :

- Soit un Cycle-k défini comme un ensemble **Ck** contenant les k entiers positifs apparaissant dans un cycle.
- Le Cycle-(k+1) est défini comme l'ensemble **C(k+1) ,** contenant les k+1 entiers positifs apparaissant dans le cycle suivant.

Le **cycle trivial** fait référence aux entiers {1,2,4}

formulation de la propriété :

Pour tous k>3, aucun entier positif n'apparaît dans **C(k+1)** , à l'exception de ceux qui appartiennent au cycle trivial. Cela peut être exprimé ainsi :

$$\forall k>3,\ C(k+1) \subseteq \{1,2,4\}$$

ce qui annonce l'unicité du Cycle trivial, mais vu que ses termes 1,2 4 sont aussi lié par la relation complète des Ck , et de la récurrence décrite , nous devrions alors élucider ce cas de base :

Étape 1 : Cas de base

d'après notre hypothèse, seul **C3** génère l'ensemble {1, 2,4}.entiers positifs, voyons à leur tour s'il génèrent d'autre entiers positifs en dehors de 1,2 et 4 :n

1. Pour T5 =1 : (voir **tableau I** ; n= ligne 5 pour **C3** , 1 du cycle trivial)
   - L9(1)=3·1+1/2 =2
   - L10(2)=1/2 (non entier). (voir **tableau I** ; m= ligne 9 & 10 pour **C4**)

   donc L5=2.
2. Pour T3 : =2: (voir **tableau I** ; n= ligne 3 pour **C3**, 2 du cycle trivial)
   - L5(1)=3·2+1/2 (non entier),
   - L6(2)=2/2=1 (voir **tableau I** ; m = ligne 5 & 6 pour **C4**)

Donc L10(2) =1.

3. Pour T2 =4 : (voir **tableau I** ; n= ligne 2 pour **C3** , 4 du cycle trivial)
   - L3(1)=3·4+1//2=6.5 (non entier),
   - L4(2)=4/2=2. (voir **tableau I** ; m = ligne 3 & 4 pour **C4**)

Donc L4(2)=2.

Conclusion pour le cas de base : À partir de {1, 2,4} dans le **C3**, les seuls entiers positifs possibles, dans **C4**, sont ceux du cycle trivial .une propriété qu'on peut généraliser par :

$$\forall k>3,\ C(k+1) \subseteq \{1,2,4\}$$

ce qui se traduit par la vérification de la propriété P(k+1) ,suivante :

soient n : n° ligne de T dans Ck , et m : n° ligne de L dans C(k+1)

1 Pour Tn =1 : 8

- Lm =3·1+1/2 =2
- L(m+1) =1/2 (non entier).

Donc Lm =2.

4. Pour Tn : =2:
   - Lm =3·2+1/2 (non entier),
   - L(m+1) =2/2=1

Donc L(m+1) =1.

5. Pour Tn =4 :
   - Lm =3·4+1//2=6.5 (non entier),
   - L(m+1) =4/2=2.

Donc L(m+1) =2.

3°-preuve de la récurrence

récapitulation :

* seuls les entiers positifs du cycle trivial apparaissent dans les configurations

répartition des nombres dans les Cycles-k , k de 3 ç6

	k=3	k=4	k=5	k=6
décimaux positifs	3	4	7	16
décimaux négatifs	1	8	14	42
entiers positifs (*)	3	0	1	2
entiers relatifs	0	3	9	3
zéro	1	1	1	1
	8	**16**	**32**	**64**

a) les nombres décimaux positifs :

soit d , une solution de l'équation du cycle de **Ck** générant par le biais de la relation complète, deux valeurs $\frac{d}{2}$ et ($\frac{3d+1}{2}$pour C(k+1) .

- d , est décimale ➔ $\frac{d}{2}$ est décimale , ce qui est évident.
- d , est décimale ➔ $\frac{3d+1}{2}$ est décimale si le produit 3d est décimale

Un nombre d est **décimal** s'il peut s'écrire sous la forme : d = $\frac{a}{10^n}$; où a ∈ Z (un entier relatif) et n≥0 (un entier non négatif).

produit d'un nombre décimal d par 3 :

Si d = $\frac{a}{10^n}$, alors le produit de d par 3 est donné par : 3d = $\frac{3a}{10^n}$.

analyse du produit 3a :

3a est un entier relatif (car a ∈ Z).

Le dénominateur 10^n reste une puissance de 10, donc $\frac{3a}{10^n}$ reste un **nombre décimal**, car il est écrit comme un entier divisé par une puissance de 10 ;

cas spécifique de 3d, d=0.333333… :

3d = 3* 0.333333… =0.999999…

Preuve que 0.999999…=1
Soit x=0.999999…, Alors : 10x=10*0.999999….= 9.999999….
En soustrayant x des deux côtés :
10x−x=9.999999…− x => 9x=9..999999 -0.999999. => 9x = 9
En divisant par 9 x=1 Ainsi, 0.999999…=1
nous déduisons que si d=0.333333…., d/2=1.66666 ; et 3d+1/2 = 3* 0.333333 +1/2 = 1+1/2 = 1

1 est un élément du cycle trivial et ne contredit pas notre hypothèse :

$$\forall k>3,\ C(k+1) \subseteq \{1,2,4\}$$

b) les nombres décimaux négatifs

nous avons vu qu'un décimal d = $\frac{3a}{10^n}$, avec a ∈ Z
nous avons $\frac{d}{2}$ est également négatif
pour $\frac{3d+1}{2}$: quelques exemples, si d= - 0.333333… alors $\frac{3d+1}{2}$ =0 qui correspond à une solution nulle comme dans T1, 1ère ligne de tout Ck.
les décimaux négatifs différent de -0.333333…, donne 3d+1/2, négatif ou positif, le résultat est un décimal aussi.

c) les entiers positifs

selon notre hypothèse : ∀k>3, C(k+1) ⊆ {1,2,4} , voyons ce que donnent les résultats

le C3 , le seul à contenir dans ses 8 configurations la totalité du cycle trivial 1 ,2 et 4
le C4 , ne contient aucun élément du cycle trivial parmi ses 16 configurations
le C5 , contient l'élément deux parmi ses 32 configurations (1,2)
le c6 , contient l'élément un parmi ses 64 configurations (4)

démontrons par récurrence que : ∀k>3, C(k+1)⊆{1,2,4},

Par hypothèse, Ck contient exactement 3 éléments positifs pour k>3 correspondant aux éléments du cycle trivial {1,2,4}

Appliquons les transformations de la conjecture de Collatz sur {1,2,4}
- T(1)=4,
- T(2)=1
- T(4)=2

Les transformations de ces éléments produisent uniquement les mêmes éléments {1,2,4}
Ainsi, pour k=4, Ck+1={1,2,4}, et l'hypothèse Ck+1⊆{1,2,4}est vérifiée.

Supposons que pour un k≥3, Ck⊆{1,2,4}. Cela signifie que tous les éléments de Ck sont uniquement {1,2,4}

Nous devons montrer que Ck+1⊆{1,2,4}

À chaque étape, les éléments de Ck+1 dépendent uniquement des transformations Collatz appliquées aux éléments de Ck. Ces transformations sont :

1. T(n)=3n+1/2 si n est impair,
2. T(n)=n/2, si n est pair.

Considérons les éléments de Ck={1,2,4} :

- Pour 1, T(1)=4
- Pour 2, T(2)=1
- Pour 4, T(4)=2

Ainsi, les éléments de C(k+1) sont générés uniquement par {1,2,4} et ne peuvent pas produire de nouveaux entiers positifs en dehors de cet ensemble.

Par conséquent, par récurrence, nous avons démontré que : ∀k>3, Ck ⊆{1,2,4} .
Ainsi, l'hypothèse est vraie. Le cycle ne contient que les éléments du cycle trivial {1, 2,4}

d) les entiers relatifs
ils existent parmi les solutions des équations du cycle que ce soit des nombres entiers relatif

- qui ne peuvent donner lieu aucun cycle comme -32,-16,-8,-4, -11
- -1 et -2 du cycle dans **Z*** **(-2)**
- -14,-7 , -10 ,-5 du cycle dans **Z*** **(-5)**

Aucun élément n'est apparu appartenant au cycle dans **Z*** **(-17)**
vérifiant la transformation de tous entier négatif par la relation complète des cycles
∀ n ∈ **Z* , n/2 et 3n+1/2 sont négatifs ,**
pour un **Ck** donné, les solutions des équations du cycle de valeurs entiers négatifs génèrent dans C(k+1) des solutions négatifs ;

IV -conclusion

1°- selon la transformation de la conjecture de Syracuse , partant d'un entier n ,si , il est pair(A), on le divise par 2 ; si il est impair(B), on le multiplie par 3 ,on ajoute 1 . on aboutit au cycle trivial (4,2,1) dont le nombre de termes k = 3 .
en généralisant : un cycle de Syracuse à k termes, k ≥ 3

- Soit un Cycle-k défini comme un ensemble **Ck** contenant les k entiers positifs apparaissant dans un cycle.
- Le Cycle-(k+1) est défini comme l'ensemble **C(k+1) ,** contenant les k+1 entiers positifs apparaissant dans le cycle suivant.

l'ensemble Ck , est l'ensemble des arrangements possibles des termes du cycle ,au nombre de 2^{k} (ou 2^{k+1} pour C(k+1)) .

2°- selon les solutions des équations du cycle et l'analyse des différents types de nombres de ses valeurs

L'Hypothèse **∀k>3, C(k+1)⊆{1,2,4}** est donc vrai , d'où **l'unicité du Cycle trivial.**

avant de commencer cette partie, clarifions comment on est arrivé à cette proposition IV :

∀ n ∈ N* ; la suite de Collatz atterri de n vers 1 ⟺ ($2^h > 3^m$ et $\frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$)

1°- implication directe (C⇒ A) :

soit l'assertion « **la suite de Collatz atterri de n vers 1 » = C**
et l'assertion « ($2^h > 3^m$ et $\frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$) » = (A et B) , d'où la proposition : C ⟺ A et B,
puisque A = B , on peut remplacer A et B par A (A et A =A) ; dont **A= «** $\frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$ »
la proposition IV peut être reformulé par :
∀ n ∈ N* ; la suite de Collatz atterri de n vers 1 ⟺ $\frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$) [8]
Démonstration :

soit la suite Soit N = U(0), U(1), ..., U(p)=l , il contient h étapes ou un nombre est divisé par 2 (étapes pairs) et m étapes ou un nombre est transformé par l'instruction 3n+1 (étapes impaires) .
Posons la suite de simplification pour N =$(\frac{U(0)}{U(1)}).(\frac{U(1)}{U(2)}).(\frac{U(2)}{U(3)})......(\frac{U(p-1)}{U(p)})$
qui peut être en terme de : log (N) = $\sum_{i=0}^{p-1} \log(\frac{Ui}{U(i+1)})$
Lorsque i est une étape paire on a : log $(\frac{U(i)}{U(i+1)})$= log $(\frac{U(i)}{U(i)}*2))$ = log 2
Lorsque i est une étape impaire on a :
Log $(\frac{U(i)}{U(i+1)})$ = log $(\frac{U(i)}{3*U(i)+1})$ = log $(\frac{1}{3+\frac{1}{U(i)}})$ = - log $(3+\frac{1}{U(i)})$

⇒ log (N) = h.log(2) - log $(3+\frac{1}{U(i)})$ qui est < h.log(2) -m.log(3) puisque N converge vers 1
⇒ h.log(2) – m.log(3) > 0

$$\Rightarrow \frac{m}{h} < \frac{\log(2)}{\log(3)} \qquad \text{CQFD}$$

d'où l'assertion **[8] :** **C⇒ A**

2°- implication réciproque (A⇒ C)
пппNous savons que la contraposé de A ⇒ C ≡ ¬C ⇒ ¬A
C ⇒ A dont l'application réciproque A ⇒ C se traduit par :
A ⇒ C ≡ ¬C ⇒ ¬A avec
¬ C = « ∃n ∈N / la suite de Collatz n'atterri pas de n vers **1**»* qui se traduit à son tour ,par un « Produit des termes de cette suite dont n atterrit vers un entier différent de 1. » et
¬ A = «$\frac{m}{h} \geqslant \frac{\log 2}{\log 3}$»

Soit **P = (3a1+1). (3a2+1)…. (3am+1). (b1)/2. (b2)/2… (bh)/2. ≠ 1**

$$\Rightarrow \frac{3^m}{2^h} \text{ (a1+}\tfrac{1}{3}\text{). (a2+}\tfrac{1}{3}\text{)… . (am+}\tfrac{1}{3}\text{). (b1). (b2) … . (bh)} \neq \mathbf{1}$$

Posons Q1=(a1+$\frac{1}{3}$). (a2+$\frac{1}{3}$)… . (am+$\frac{1}{3}$).=$\prod$ $(am+\frac{1}{3})$.
& Q2=(b1). (b2) …. (bh) = $\prod$ (bh).
⇒ P = $\frac{3^m}{2^h}$**.Q1.Q2≠ 1**
comme les produits **Q1.Q2** pairs & impairs sont toujours **> 1 et que si P doit être ≠ 1 , forcément** **(** $\frac{3^m}{2^h}$ **) devra ⩾ 1 ou** $\frac{m}{h} \geqslant \frac{\log 2}{\log 3}$ **(=¬A)**

Ce qui vérifie que $\neg C \Rightarrow \neg A \equiv A \Rightarrow C$ est Vraie également. Sachant par l'assertion [8] que l'implication $C \Rightarrow A$ est vraie aussi : 12

conclusion :

∀ n ∈ N* ; la suite de Collatz atterri de n vers 1 $\Leftrightarrow \frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$

Nous avons défini la **borne supérieure** ou tous ratio $\frac{m}{h}$ appartenant à la suite de Collatz ,est inférieur à la constante $\frac{\log 2}{\log 3}$ **=0.63092975…**explorons la borne inférieure de ce ratio

la borne inférieure :

Pour opérer les calculs selon la suite de Collatz sur les termes *c1, c2, c3, c4,…ck*
Nous devrions connaitre leur parité. Or tout ce que nous savons par notre proposition I ci-dessus, c'est que ck, le plus petit élément est impair. Quant aux autres termes, soit en procédant théoriquement par un tri des termes du cycle suivant la parité ; indépendamment de l'indice et de sa position exacte dans la suite, puisqu' on l'ignore.
Nous posions ensuite le produit de ces k termes, qu'on appellera *P*.(la commutativité du produit nous dispense de la position des vrais indice du cycle)
En posant d'abord, en les triant par parité, puis en spécifiant les termes impairs par a, les termes pairs par b ; puis en désignant par m le nombre de termes (ou cardinal) impairs, et h le nombre de termes pairs (m & h ∈ N*)

exprimant maintenant chaque terme par sa valeur puisque nous avions défini sa parité en le multipliant par3x+1 s'il impair et en le multipliant par x/2 s'il est pair :

on obtient : **P1 =(a1. a2 ….a m). (b1.b2 ….bh)** [2]

$\Rightarrow$ **P2 =** $(3a2+1)\ldots.(3am+1).\left(\frac{b1}{2}\right).\left(\frac{b2}{2}\right)\ldots\left(\frac{bh}{2}\right)$

Soit l'équation qui relie les deux formes du produit sous sa forme brute :

On a, $(a1.\ a2 \ldots.a\ m).\ (b1.\ b2 \ldots.bh) = \frac{(3a1+1).(3a2+1)\ldots.(3am+1).\ (b1).(b2)\ldots(bh))}{2\hat{}h}$

$\Rightarrow$ $2^h.\ (a1.\ a2 \ldots.a\ m).(b1.\ b2 \ldots.bh) = (3a2+1)\ldots.(3am+1).\ (b1).(b2)\ldots\ (bh)$

Simplifions l'équation :

$\Rightarrow$ $2^h(a1.\ a2 \ldots.a\ m\ ) = (3a1+1).(3a2+1)\ldots.(3am+1)$

$\Rightarrow$ $2^h = \frac{(3a1+1)}{a1}.\frac{(3a2+1)}{a2}\ldots.\frac{(3am+1)}{am}$

d'ou $2^h = (3+\frac{1}{a1}).\left(3+\frac{1}{a2}\right)\ldots.\left(3+\frac{1}{am}\right)$ [4]

soit am , le plus petit élément impair de la suite du Collatz => $\left(3+\frac{1}{am}\right)$ est le grand terme de la suite ; si on prend seulement les puissance de 3 en négligeant d'additionner les inverses de am , on peut alors construire cette double inéquation :

$$2^h > 3^m < (3 + \frac{1}{am})^m$$

si am =1 ,dans ce cas $\left(3 + \frac{1}{am}\right)$ sera le plus grand terme impair =4 ,l'inéquation devient :

$$3^m < 2^h < 4^m \quad [5]$$

Vérifions cette inéquation :

en introduisant les logarithme, la première inéquation peut être simplifiée :

$3^m < 2^h \equiv$ *m.log(3) < h.log(2* $\equiv \frac{m}{h} < \frac{log(2)}{log(3)} \equiv \frac{m}{h} <$ *0.63092975…*

en la deuxième inéquation est : $2^h < 4^m \equiv$ *h.log(2) < m.2.log(2)* $\equiv \frac{1}{2} < \frac{m}{h}$

=> $\frac{m}{h} \in$ [0.5000000 , 0.63092975 [, l'intervalle semi-ouvert pour tous trajectoire de Collatz

Mais les contres exemples ne manquent pas : m/h $< \frac{1}{2}$

	q=impairs	p=pairs	q/p
8--->4--->2--->1	1	3	0,333333
12--->6--->3--->10--->5--->16--->8--->4--->2---1	2	7	0,285714
13--->40--->20--->10--->5--->16--->8--->4--->2--->1	3	7	0,428571
17--->52--->26--->13--->40--->20--->10--->5--->16--->8--->4--->2--->1	4	9	0,444444
512--->256--->128--->64--->32--->16--->8--->4--->2--->1	1	9	0,111111

donc la borne inférieure est limitée par 0 , la trajectoire-Syracuse de tous nombre puissance de 2 soit 2^p contient un seul terme impair c'est 1 + p fois nombres pairs , et la limite du ratio m/h= 1/ *p* quand p tend ver l'infini , le ratio tend vers 0

=> $\frac{m}{h} \in$ [0 , 0.63092975 [, L'intervalle semi-ouvert pour tous trajectoire de Collatz

=> ∀ n ∈ N* ; la suite de Collatz atterri de n vers 1 ⟺ $\frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$ **[8]**

explorons comment cette assertion **[8]** va nous « aider » à clôturer l'assertion que nous avions posé comme 2° étape dans la démonstration de Syracuse à savoir :

∀ n ∈ N*\{1}, la suite de Collatz décroit vers un n' / n' < n

Récapitulation :

- le nombre 4k+4 décr**oît** à k+1 au bout de 1 étape , la suite dépend de la parité de k
- le nombre 4k+2 décr**oît** à 3k+2 au bout de 2 étapes, la suite dépend de la parité de k
- le nombre 4k+1 décr**oît** à 3k+1 au bout de 3 étapes , la suite dépend de la parité de k
- le nombre 4k+3 cr**oît** à 9k+8 au bout de 4 étapes , la suite dépend de la parité de k

Démontrons respectivement que pour tout nombre de forme k+1 , 3k+2 , 3k+1 , 9k+8 ; il finit par décroitre ∀ la parité de k :

Avais-je annoncé en définissant non arbitrairement deux trajectoires,(AAA.. et BBB…)*, le premier est celui des nombres impairs qui après transformation 3n+1/2 on trouve que des impairs croissants, jusqu' au dernier qui donne un nombre pair puissance de 2 dont la trajectoire (BBB…) décroissante vers 1.en utilisant la suite des nombres cités dans la récapitulation en développant des formules explicites pour trouver n'importe quel termes des quatre suites à partir de l'équation générale du produit des termes pairs et impairs, de forme $\frac{3^m}{2^h}$ .Q1 .Q2 ***, qui implique directement*** $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{h}} < \frac{\mathbf{log2}}{\mathbf{log3}}$ ***,ce qui équivaut à Syracuse vraie*** **14**

*la suite croissante BBBB…, dans la dernière configuration quel que soit le nombre de terme k du cycle supposé , a pour solution de l'équation du Cycle -0.50 , de même que la suite AAAA… ,.constituant la première configuration a pour solution 0 ,voir tableau I II 1& III ,ce qui garantit, d'après ce que nous avons vu dans la 1°partie de cette article , le non retournement à un autre cycle .

Les nombres (k+1) , (3k+2), (3k+1) et (9k+8) seront impairs si respectivement k est pair pour (k+1) et (3k+1) , ou k est impair pour les nombres (3k+2) et (9k+8) et inversement, ils seront pairs si k est impair pour (k+1) et (3k+1) , ou k est pair pour les nombres (3k+2) et (9k+8).

<u>A) - soit P_1 , le produit de ces termes impairs</u>

Optant pour un choix de parité de k , $\forall k \in N^*$, de façon à ce que tout les termes obtenus de la suite de Collatz à partir de ($A_1.\mathbf{k}$ +B_1) soient <u>impairs</u> et ne nécessitent que la multiplication par 3 ajouté à 1 avant de passer à la division par 2 .

.

$$P_1 = (A_1.\mathbf{k} + B_1).(3\,(\frac{(A_1.\mathbf{k} + B_1)}{\mathbf{2}}) + 1).(3\,(\frac{(A_1.\mathbf{k} + B_1)}{\mathbf{2}}) + 1) + 1) \; \ldots \; (A_m.\mathbf{k} + B_m)$$

<u>Pour 3k+1 impair , k est pair :</u>

$$P_1 = (3.\mathbf{k} + 1).\,(3\,(\frac{(3.\mathbf{k} + 1)}{\mathbf{2}}) + 1).(3\,(3\,(\frac{(3.\mathbf{k} + 1)}{\mathbf{2}}) + 1) + 1).(3(3\,(3\,(\frac{(3.\mathbf{k} + 1)}{\mathbf{2}}) + 1) + 1) + 1) \ldots .\,(A_m.\mathbf{k} + B_m)$$

$$= (3.\mathbf{k} + 1).\,(\frac{(9.\mathbf{k} + 5)}{\mathbf{2}})\,(\frac{(27.\mathbf{k} + 17)}{\mathbf{2}})\;\;(\frac{(81.\mathbf{k} + 53)}{\mathbf{2}}) \;\; \ldots \;\; (A_m.\mathbf{k} + B_m)$$

Nous remarquons que les ($A_m.\mathbf{k}$) progressent par rapport à m de $\frac{1}{2}.\mathbf{3}^{m+1}$

tandis que les (B_m) s'expriment selon la somme S , d'une suite géométrique $\frac{1}{2}.\mathbf{3}^{m+1}$

U_0 = 1, (B_m) : $\frac{1}{2}$ (1 , 5 , 17 , 53 , 161…)

: $\frac{1}{2}$ (4.3^0 , 4.3^1 , 4.3^2 , 4.3^3 ,… 4.3^m)

: 2. (3^0 , 3^1 , 3^2 , 3^3 ,… 3^m)

Posons $S = \mathbf{3^0} + \mathbf{3^1} + \mathbf{3^2} \cdots + \mathbf{3^m}$

$3S = \mathbf{3^1} + \mathbf{3^2} + \mathbf{3^3} \cdots + \mathbf{3^{m+1}}$

$$3S - S = \mathbf{3^{m+1}} + (\mathbf{3^m} - \mathbf{3^m}) + \ldots + (\mathbf{3} - \mathbf{3}) - 1 = \mathbf{3^{m+1}} - \mathbf{1}$$

$$S = \frac{\mathbf{3^{m+1}} - \mathbf{1}}{\mathbf{3} - \mathbf{1}} \qquad \Rightarrow \quad (B_m) = \frac{1}{2}(U_0 + 2.(3^m - 1)) = \frac{1}{2}(2.3^m - 1)$$

D'ou l'on tire la formule explicite du produit des termes impairs de la transformation du Collatz $P_1 = \mathbf{3^{m+1}}.k + (2.3^m - 1)$ étant le dernier terme avant de passer à la division par 2

<u>pour 3k+2 impair , k impair:</u>

$$P_1 = (3.\mathbf{k} + 2).\,(3\,(\frac{(3.\mathbf{k} + 2)}{2}) + 1).(3\,(3\,(\frac{(3.\mathbf{k} + 2)}{2}) + 1) + 1).(3(3\,(3\,(\frac{(3.\mathbf{k} + 2)}{2}) + 1) + 1) + 1) \ldots .(A_m.\mathbf{k} + B_m)$$

$$= (3.\mathbf{k} + 2).\,(\frac{(9.\mathbf{k} + 8)}{2})\,(\frac{(27.\mathbf{k} + 26)}{2})\,(\frac{(81.\mathbf{k} + 80)}{2}) \;\ldots\; (A_m.\mathbf{k} + B_m)$$

Nous remarquons que les ($A_m.\mathbf{k}$) progressent par rapport à m de $\frac{1}{2}.\mathbf{3}^{m+1}$

tandis que les (B_m) s'expriment aussi par rapport à $\frac{1}{2}.\mathbf{3}^{\boldsymbol{m+1}}$ ôté de 1 :

avec ($A_{m.k}$) = $\frac{1}{2}.\mathbf{3}^{\boldsymbol{m+1}}$, nous remarquons que les (B_m) progressent de $\frac{1}{2}.(\mathbf{3}^{\boldsymbol{m+1}} - 1)$:

(B_m) $= \frac{1}{2}((\mathbf{3}-\mathbf{1}), (\mathbf{9}-\mathbf{1}), (\mathbf{27}-\mathbf{1}) \cdots, (\mathbf{3}^{\boldsymbol{m}} -1)) = \frac{1}{2}(2, 8, 26, 80, \ldots (\mathbf{3}^{\boldsymbol{m}} -1))$

D'ou l'on tire la formule explicite du produit des termes impairs de la transformation du Collatz $P_1 = \mathbf{3}^{\boldsymbol{m+1}}.k+(\mathbf{3}^{\boldsymbol{m+1}} - 1)$ étant le dernier terme avant de passer à la division par 2

<u>Pour k+1 impair , k pair :</u>

$P_1 = (k+1).(3(\frac{(k+1)}{2})+1).(3(3(\frac{(k+1)}{2})+1)+1).(3(3(\frac{(k+1)}{2})+1)+1) \ldots .(A_{m.k}+B_m)$

$= (k+1).(\frac{(3k+4)}{2})(\frac{(9k+14)}{2})(\frac{(27k+44)}{2}).(\frac{(81k+134)}{2}).(\ldots (A_{m.k}+B_m)$

Nous remarquons que les ($A_{m.k}$) progressent par rapport à m de $\frac{1}{2}.\mathbf{3}^{\boldsymbol{m}}$

tandis que les (B_m) s'expriment selon la progression suivante :

$(B_m) = \frac{1}{2}(1, 4, 14, 44, 134, \ldots, B_m)$

$= \frac{1}{2}((4\text{-}1)=3, (14\text{-}4)=10, (44\text{-}14)=30, (134\text{-}44)=90, \ldots)$

$= \frac{1}{2}(\mathbf{1}+\mathbf{3} +10(\mathbf{3}^{\mathbf{0}} + \mathbf{3}^{\mathbf{1}} + \mathbf{3}^{\mathbf{3}} + \mathbf{3}^{\mathbf{2}} + \cdots)$

$= \frac{1}{2}\, 10\,(\frac{3^{m}-1}{2})$ $\boldsymbol{avec}$ $(\mathbf{U0} = 1, \mathbf{m} = \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{U1} = 4, \mathbf{m} = \mathbf{2} \Rightarrow \mathbf{U2} = 14, \mathbf{m} = \mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{U3} = 44 \ldots)$

$= \frac{1}{2}.(5.\ \mathbf{3}^{\boldsymbol{m-1}} - \mathbf{1})$

D'ou l'on tire la formule explicite du produit des termes impairs de la transformation du Collatz $P_1 = \mathbf{3}^{\boldsymbol{m}}.\mathbf{k} + \mathbf{5}.\mathbf{3}^{\boldsymbol{m-1}} - \mathbf{1}$, étant le dernier terme impair, <u>avant de passer à la division par 2).</u>

<u>Pour 9k+8 impair , k impair:</u>

$P_1 = (9.k+8).(3(\frac{(9k+8)}{2})+1).(3(3(\frac{(9k+8)}{2})+1)+1).(3(3(3(\frac{(9k+8)}{2})+1)+1)+1) \ldots .(A_{m.k}+B_m)$

$= (9.k+8).\frac{(27k+26)}{2}.\frac{(81k+80)}{2}.\frac{(243k+242)}{2}\ldots (A_{m.k}+B_m)$ (1)

Nous remarquons que les ($A_{m.k}$) progressent par rapport à m de $\frac{1}{2}.\mathbf{3}^{\boldsymbol{m+2}}$

tandis que les (B_m) s'expriment selon les ($A_{m.k}$) ôté de 1 :

(B_m) $= \frac{1}{2}((\mathbf{9}-\mathbf{1}), (\mathbf{27}-\mathbf{1}), (\mathbf{81}-\mathbf{1}), (\mathbf{243}-\mathbf{1}) \cdots, (\mathbf{3}^{\boldsymbol{m+2}} -1)) = \frac{1}{2}(8, 27, 80, 242, \ldots (\mathbf{3}^{\boldsymbol{m}} -1))$

D'ou l'on tire la formule explicite du produit des termes impairs de la transformation du Collatz $P_1 = \mathbf{3}^{\boldsymbol{m+2}}.k + \mathbf{3}^{\boldsymbol{m+2}} -1$ étant le dernier terme avant de passer à la division par 2.

($A_l.k + B_l$)	**3k +1**	**3k+2**	**k+1**	**9k+8**
i = 1	9k+5	9k+8	3k+4	27k+26
i = 2	27k+17	27k+26	9k+14	81k+80
i = 3	81k+53	81k+80	27k+44	243k+242
i = 4	243k+161	243k+242	81k+134	729k+728
"" "" ""	"" "" ""	"" "" ""	"" "" ""	"" "" ""
i = m	$\mathbf{3^{m+1}.k+(2.3^{m}-1)}$	$\mathbf{3^{m+1}.k+(3^{m+1}-1)}$	$\mathbf{3^{m}.k+5.3^{m-1}-1}$	$\mathbf{3^{m+2}.k+3^{m+2}}$ -1

<u>B) - soit P_2 , le produit de ces termes pairs</u>

Optant pour un choix de parité de k , $\forall k \in N^*$, de façon à ce que tout les termes obtenus de la suite de Collatz à partir de ($A_m.k + B_m$) *qui est le dernier terme impair vu en* **<u>A)</u>**
Dont nous remarquions que selon l'ordre de parité de k, ($A_m.k + B_m$) marque une altitude maximale quand il devient une puissance de 2 garantissant un atterrissage vers 1 .

$$P_2 = (A_m.k + B_m)/2.\ (A_m.k + B_m)/\ 2^2 \ldots (A_m.k + B_m)/\ 2^h$$

$$P_2 = \frac{(A_m.k + B_m)}{2^h}$$

Qui pour **3k +1** pair et k impair, $P_2 = \frac{3^{m+1}.k+(2.3^{m}-1)}{2^h}$

pour **3k +2** pair et k pair, $P_2 = \frac{3^{m+1}.k+(3^{m+1}-1)}{2^h}$

pour **k +1** pair et k impair $P_2 = \frac{3^{m}.k+5.3^{m-1}-1}{2^h}$

Qui pour **9k +8** pair et k pair, $P_2 = \frac{3^{m+2}.k+3^{m+2}-1}{2^h}$

<u>C) - soit P, le produit de tous les termes de notre suite :</u>

P = ($A_1.k + B_1$).(3 ($A_1.k + B_1$) +1).(3 ($A_1.k + B_1$) +1)+1)..($A_m.k + B_m$)/2...($A_m.k + B_m$)/4...($A_1.k + B_1$)/ 2^h

<u>- pour **3k +1** :</u> $P = 3^{m+1}.\mathbf{k} + (2.\ 3^m - 1).\left(\frac{3^{m+1}.k+(2.3^{m}-1)}{2^h}\right)$

$$= \left(3^m\ 3.k + 3^m.2 - 3^m\frac{1}{3^m}\right).\left(\frac{3^{m+1}.k+\frac{3^{m+1}-1}{2}}{2^h}\right)$$

$$P = \frac{3^m}{2^h}\left(3.k + 2 - \frac{1}{3^m}\right).\left(3^{m+1}.\mathbf{k} + (2.\ 3^m - 1)\right)$$

La suite de Collatz atterrit de n vers 1 , veut dire aussi que P ,compte tenu cette fois-ci de la parité de k , P =1 :

$$\frac{3^m}{2^h}\left(3.k + 2 - \frac{1}{3^m}\right).\left(3^{m+1}.\mathbf{k} + (2.\ 3^m - 1)\right) = 1$$

$$\frac{3^m}{2^h} \quad X\ Q1 \qquad X\ Q2 \qquad = 1$$

Q1 = (3 .k +2 $-\frac{1}{3^m}$) *est toujours* > 1 (Q1&Q2 sous forme de ak+b / a>1 &b>1⇒ Q1*Q2 >1)
Q 2 =$3^{m+1}.\mathbf{k} + (2.\ 3^m - 1)$ *est toujours* $>$ 1(Q1&Q2 sous forme de ak+b / a>1 & b>1⇒ Q1*Q2 >1)
Pour que l'équation ($\frac{3^m}{2^h}$ X Q1 X Q2) = 1 ; forcément $\frac{3^m}{2^h}$ < 1
$\Rightarrow \frac{3^m}{2^h} < 1 \Rightarrow 3^m < 2^h \Rightarrow 2^h > 3^m$
$2^h > 3^m \Rightarrow$ h log2 $>$ m log3 $\Rightarrow \frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$ (m & h ∈ N*)
($\frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$) ⇔ ∀ n ∈ N* ; la suite de Collatz atterri de n vers 1 ; d'après la PROPOSITION [8] .

<u>- pour **3k +2**</u> P $= 3^{m+1}$.k+$(3^{m+1} - 1).\frac{3^{m+1}.k+(3^{m+1}-1)}{2^h}$)
$= (3^m\ 3.k+ 3^m\ .3 - 3^m\ .\frac{1}{3^m}).(\frac{3^{m+1}.k+(3^{m+1}-1)}{2^h})$
P $= \frac{3^m}{2^h}(3.k + 3 - \frac{1}{3^m}).(3^{m+1}.k+(3^{m+1} - 1)$

La suite de Collatz atterrit de n vers 1 , veut dire aussi que P ,compte tenu cette fois-ci de la parité de k , P =1 :
$\frac{3^m}{2^h}(3.k + 3 - \frac{1}{3^m}).(3^{m+1}.k+(3^{m+1} - 1) = 1$
$\frac{3^m}{2^h}$ X Q1 X Q2 = 1
Q1 = (3 .k + 3 $-\frac{1}{3^m}$) *est toujours* $>$ 1 (Q1&Q2 sous forme de ak+b / a>1 &b>1⇒ Q1*Q2 >1)
Q 2 =$(3^{m+1}$.k+$(3^{m+1} - 1)$ *est toujours* $>$ 1 (Q1&Q2 sous forme de ak+b / a>1 &b>1⇒ Q1*Q2 >1)
Pour que l'équation $\frac{3^m}{2^h}$ X Q1 X Q2 = 1 ; forcément $\frac{3^m}{2^h}$ < 1

$\Rightarrow \frac{3^m}{2^h} < 1 \Rightarrow 3^m < 2^h \Rightarrow 2^h > 3^m$
$2^h > 3^m \Rightarrow$ h log2 $>$ m log3 $\Rightarrow \frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$ (m & h ∈ N*)
($\frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$) ⇔ ∀ n ∈ N* ; la suite de Collatz atterri de n vers 1 ; d'après la PROPOSITION [8] .

<u>- pour **k +1**</u> : P $= (3^m.k + 5.3^{m-1} - 1).(\frac{3^m.k + 5.3^{m-1}-1}{2^h})$
$= (3^m\ k+15.3^m - 3^m.\frac{1}{3^m}).(3^m.k + 5.3^{m-1} - 1)$
P $= \frac{3^m}{2^h}(k + 15 - \frac{1}{3^m}).(3^m.k + 5.3^{m-1} - 1)$
La suite de Collatz atterrit de n vers 1 , veut dire aussi que P ,compte tenu cette fois-ci de la parité de k , P =1 :

$\frac{3^m}{2^h}(k + 15 - \frac{1}{3^m}).(3^m.k + 5.3^{m-1} - 1)= 1$
$\frac{3^m}{2^h}$ X Q1 X Q2 = 1
Q1 = (k + 15 $-\frac{1}{3^m}$) *est toujours* $>$ 1 (Q1&Q2 sous forme de ak+b / a=1 &b>13⇒ Q1*Q2 >1)
Q 2 =$(3^m.k + 5.3^{m-1} - 1$)*est toujours* $>$ 1 (Q1& Q2 sous forme de ak+b/a>1 &b>1 ⇒ Q1*Q2 >1)
Pour que l'équation $\frac{3^m}{2^h}$ X Q1 X Q2 = 1 , forcément $\frac{3^m}{2^h}$ < 1
$\Rightarrow \frac{3^m}{2^h} < 1 \Rightarrow 3^m < 2^h \Rightarrow 2^h > 3^m$
$2^h > 3^m \Rightarrow$ h log2 $>$ m log3 $\Rightarrow \frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$ (m & h ∈ N*)

($\frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$) $\Leftrightarrow$ $\forall$ n $\in$ N* ; la suite de Collatz atterri de n vers 1 ; d'après la PROPOSITION [8] .

<u>- pour **9k +8**</u> P $= 3^{m+2}.k + 3^{m+2} - 1 . (\frac{3^{m+2}.k + 3^{m+2} - 1}{2^h})$

$= 3^m\ 9.k + 3^m .9 - 3^m . \frac{1}{3^m}). (\frac{3^{m+2}.k + 3^{m+2} - 1}{2^h})$

P $= \frac{3^m}{2^h} (9.k + 9 - \frac{1}{3^m}). (3^{m+2}.k + 3^{m+2} - 1))$

P $= \frac{3^m}{2^h} (9.k + 9 - \frac{1}{3^m}). (3^{m+2}.k + 3^{m+2} - 1)$

La suite de Collatz atterrit de n vers 1 , veut dire aussi que P ,compte tenu cette fois-ci de la parité de k , P =1 :

P $= \frac{3^m}{2^h} (9.k + 9 - \frac{1}{3^m}). (3^{m+2}.k + 3^{m+2} - 1) = 1$ *9*

$= \frac{3^m}{2^h}$ X Q1 X Q2 = 1

Q1 $= (9.k + 9 - \frac{1}{3^m})$ *est toujours* $>$ 1 (Q1&Q2 sous forme de ak+b / a>1 &b>1$\Rightarrow$ Q1*Q2 >1)

Q2=$(3^{m+2}.k + 3^{m+2} - 1)$ *est toujours* $>$ 1(Q1&Q2 sous forme de ak+b / a>1 &b>1$\Rightarrow$ Q1*Q2 >1)

Pour que l'équation ($\frac{3^m}{2^h}$ X Q1 X Q2 = 1) forcément $\frac{3^m}{2^h} < 1$

$\Rightarrow \frac{3^m}{2^h} < 1 \Rightarrow 3^m < 2^h \Rightarrow 2^h > 3^m$

$2^h > 3^m \Rightarrow h \log 2 > m \log 3 \Rightarrow \frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$ (m & h $\in$ N*)

($\frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$) $\Leftrightarrow$ $\forall$ n $\in$ N* ; la suite de Collatz atterri de n vers 1 ; d'après la PROPOSITION [8]

. Cela soutient l'idée que tous les nombres, indépendamment de leur forme initiale (k+1, 3k+1, 3k+2, 9k+8.), finissent par décroître et converger vers 1 sous la conjecture de Collatz grâce aux formules obtenues confirment que les transformations des nombres impairs finissent par décroître vers des termes plus petits après divisions successives, quelle que soit la parité, le ratio $\frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$, *comme la confirme le proposition*[8]; avec $\frac{m}{h} \in$ [0 , 0.63092975..[

Conclusion :$\forall$ n $\in$ N*\{1}, la suite de collatz décroit vers un n' / n' < n

PARTIE-3 : *$\forall n \in N^*$, la suite de Collatz, atterrit dans le cycle trivial dont 1, est le plus petit élément.*

PROPOSITION –VI
∀ x impair ∈ N, ∀ n ∈ N* ; ∃! x / $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} xi$ =1

Pour tout x impair appartenant à N*,et pour tout n∈N∗, il existe un unique x tel que :

x= $\boldsymbol{\frac{1}{n}\ \sum_{i=1}^{n} xi = 1}$ **; avec xi=1 pour tout i."**

Ainsi, la moyenne de n termes égaux à 1 est toujours égale à 1, et x est donc égale à 1, ce qui est en cohérence avec l'énoncé de la proposition .

Démonstration de $\boldsymbol{\frac{1}{n}\ \sum_{i=1}^{n} xi = 1}$

Démonstration par récurrence :

1. Initialisation (cas de base) :

Nous commençons par vérifier que la propriété est vraie pour n=1.

- Si n=1 alors $\boldsymbol{\frac{1}{1}\ \sum_{i=1}^{1} xi = 1}$.
- Ainsi, la propriété est vraie pour n=1.

2. Hypothèse de récurrence :

Supposons maintenant que la propriété soit vraie pour un certain n=k, c'est-à-dire que :

$$\boldsymbol{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} xi = 1}$$

Cela signifie que, pour n=k, la moyenne des premiers k termes est égale à 1.

3. Hérédité (cas n=k+1) :

Nous devons maintenant prouver que la propriété est vraie pour n=k+1, c'est-à-dire que :

- $\boldsymbol{\frac{1}{k+1}\ \sum_{i=1}^{k+1} xi = 1}$
- D'abord, notons que la somme des k+1 termes est la somme des k premiers termes plus x(k+1) :

$$\sum_{i=1}^{k+1} xi = \sum_{i=1}^{k1} x(i+1)$$

- Puisque, d'après l'hypothèse de récurrence, $\sum_{i=1}^{k+1} xi = k$ (car chaque xi=1 pour tous les i, donc la somme est égale à k et x(k+1)=1, on a :

$$\sum_{i=1}^{k+1} xi = \text{k+1}$$

Maintenant, calculons la moyenne des k+1 termes :

$$\frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} xi = \frac{1}{k+1}.\mathbf{k+1=1}$$

- Ainsi, la propriété est vraie pour n=k+1

4. Conclusion :

Nous avons montré que si la propriété est vraie pour n=k, elle est également vraie pour n=k+1. Par le principe de récurrence, cela signifie que la propriété est vraie pour tout n ∈N*.

La démonstration est donc terminée, et nous avons prouvé que pour tout n ∈N*, si chaque xi=1, alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} xi = 1$$

La suite de Collatz peut être présenté sous un produit en spécifiant les nombres impairs (a1, a2,...am) et les nombres pairs (b1. b2 ....bh) ; encore une fois, selon deux formes de produits P1, puis P2 exprimé suivant la transformation de Collatz. m et h étant respectivement le cardinal des nombres impairs et pairs. (m & h ∈ N*)

P2 = a1. a2 ....a m . b1. b2 ....bh

P1 = (3a1+1). (3 a2+1)…. (3 am+1). (b1)/2. (b2)/2… (bh)/2

Utilisant encore une fois l'équation associée à ce produit sous sa forme brute

$$(\mathbf{a1}.\mathbf{a2}\ \ldots.\mathbf{a\,m})\ \ .\mathbf{b1}.\ \mathbf{b2}\ \ldots.\mathbf{bh}=(\mathbf{3a1}+\mathbf{1}).(\mathbf{3\ a2}+\mathbf{1})\ \ldots.(\mathbf{3\ a\ m}+\mathbf{1}).\quad (\mathbf{b1})/\mathbf{2}.(\mathbf{b2})/\mathbf{2}\ldots(\mathbf{bh})/\mathbf{2}$$

$$(\mathbf{a1}.\mathbf{a2}\ \ldots.\mathbf{a\,m})\ \ .\mathbf{b1}.\ \mathbf{b2}\ \ldots.\mathbf{bh}=\frac{(\mathbf{3a1+1}).(\mathbf{3\ a2+1})\ldots.(\mathbf{3\ a\ m+1}).\quad (\mathbf{b1}).(\mathbf{b2})\ldots(\mathbf{bh})}{\mathbf{2\char94 h}}$$

$$2^h = \frac{(\mathbf{3a1+1}).(\mathbf{3a2+1})\ldots.(\mathbf{3am+1}).}{(\mathbf{a1}.\mathbf{a2}\ \ldots.\mathbf{am}).}$$

$$2^h = \left(3+\frac{1}{a1}\right).\left(3+\frac{1}{a2}\right)\ldots\left(3+\frac{1}{am}\right)$$

Or $2^h < 3^m < \left(3+\frac{1}{a1}\right).\left(3+\frac{1}{a2}\right)\ldots\left(3+\frac{1}{am}\right)$

$$\Rightarrow 2^h < \left(3+\frac{1}{a1}\right).\left(3+\frac{1}{a2}\right)\ldots\left(3+\frac{1}{am}\right)$$

Remplaçons les ai *par La « moyenne arithmétique »* M $\Rightarrow$ M = $\sum_{i=1}^{m}\frac{ai}{m}$

M > 0 $\Rightarrow$ $2^h < \left(3+\frac{1}{M}\right).\left(3+\frac{1}{M}\right)\ldots\left(3+\frac{1}{M}\right)$**m fois**

$\Rightarrow$ $2^h < \left(\frac{(3M+1).}{M}\right)^m$

- Supposons qu'il ∃ un nombre x ∈ N* infiniment grand dont la trajectoire par la transformation de Collatz, puise dans tous les nombres pairs et impairs, comme selon la proposition VII, selon le binôme de Newton, il y aura autant de pair que d'impair, on pose donc m=h

$$2^h < \left(\frac{(3M+1).}{M}\right)^h \text{ ou } 2^m < \left(\frac{(3M+1).}{M}\right)^m$$

Appliquons le théorème des fonctions réciproques, c'est-à-dire :

∀ x ∈ N* , si x est positif et x=y^n ⇔ y=$\sqrt[n]{y^n}$est <u>unique</u>**.**

Utilisant la racine nième jusqu'à m ou h, pour arriver au supposé dernier terme de la trajectoire parti d'un grand nombre infini :

$$\sqrt[m]{2^m} < \sqrt[m]{\left(\frac{(3M+1).}{M}\right)^m} \text{ Ou } \sqrt[h]{2^h} < \sqrt[h]{\left(\frac{(3M+1).}{M}\right)^h}$$

$$2 < \left(\frac{(3M+1).}{M}\right)^{.}$$

- soit un entier quelconque K qui puisse égaliser notre inéquation de manière à chercher un autre entier , si il existe, commun à la fin du parcours de la transformation de Collatz des termes pairs d'un côté (puissance de 2) , d'un autre côté , les termes impairs :

$$2 + k = \frac{3M+1.}{M}$$
$$2M + kM = 3M + 1$$
$$kM - M = 1$$

M (k – 1) = 1 $\Rightarrow$ admet comme solutions : <u>M=1 & k=2</u>(∈ **N***)

Comme**, suivant proposition VI :** *∃! M ∈* ***N* / M=***$\sum_{i=1}^{m}\frac{ai}{m} = ai$ *soit ai = 1,* et comme M= 1 donc ai, le dernier terme impair est <u>connu</u> soit ai = 1.

Notre équation épurée et simplifiée devient : 4 = $\frac{3ai+1.}{ai}$, observons des 2 cotés :

<u>Du coté droit</u>, l'équation garde les nombres ai impairs, avec ai dernier terme =1

Démonstration :

Si ai = 1 est seulement premier terme de la suite de Collatz, sa transformation est celle qui concerne le cycle trivial : 1->4->2->1, nous constations aussi que c'est aussi le dernier terme ai=1, qui est en même temps le plus petit élément impair, du cycle trivial. (Suivant proposition I).

Si ai est dernier terme impair > 1 ⇒ l'équation $4 = \frac{3ai+1.}{\mathrm{ai}}$,devient impossible puisque :

$$4 > \frac{3ai+1.}{\mathrm{ai}} \Rightarrow \quad 4 > 3+\frac{1.}{\mathrm{ai}} \text{ si ai} > 1$$

Donc ai est le dernier terme impair de la suite =1 CQFD

<u>Du côté gauche</u> : partant d'une puissance de 2 très grande et arrivant au dernier terme
La racine nième qui colle à la trajectoire de la suite, s'arrête dans notre équation à 4
Le reste est pris en charge finalement par le cycle trivial, par 4 ou par 1, $\forall$**x** ∈ **N***du départ**.**

Nous avons $4 = \boldsymbol{2^2} = \boldsymbol{2^h}$, h = 2 étant le cardinal des nombres pairs dans ce dernier terme pair de la suite, nous connaissons déjà un : c'est 4 nous déduisons le deuxième élément pair du cycle trivial : 2, solution aussi de l'équation avec 1 et passage obligé de 4 à 1 par la transformation de Collatz.

Conclusion finale :

(1) Comme ∃! Cycle trivial dans la suite de COLLATZ
⇒∀ n ∈ N*\{1}, n décroisse suivant la transformation de COLLATZ (2)
⇒ Syracuse converge dans le cycle trivial dont 1 son plus petit élément. (3)

CQFD