Sur l'équation diophantienne $\boldsymbol{ax+by=c}$ avec $\boldsymbol{a \equiv \pm\frac{10}{p}[b]}$ et $\boldsymbol{p \in \{1, 2, 5, 10\}}$

MOHAMED Algoni

mohamedalgoni99@gmail.com

Résumé

On propose une méthode pour résoudre l'équation diophantienne $(E)_1 : ax + by = c$ où a, b et c sont des entiers naturels avec $a, b \neq 0$ et $a \equiv \pm\frac{10}{p}[b]$ avec $p \in \{1, 2, 5, 10\}$. La méthode repose sur l'analyse des unités de produits pc et pb, que nous désignons respectivement par u et u'. Cette approche permet de simplifier et d'accélérer le processus de résolution en se concentrant sur ces unités . Elle se compose en deux étapes principales : La vérification des solutions qui consiste à observer les valeurs de u et u' pour déterminer l'existence des solutions. Et la détermination de la solution exprimée sous la forme : $x = \pm(\frac{\varepsilon}{10} + pbk), \quad y = \frac{c \pm a(-\frac{\varepsilon}{10})}{b} \pm a(-pk), \quad$ avec $k \in \mathbb{Z}$ où ε est défini par la relation $\varepsilon \equiv pc[pb] \equiv 0[10]$, et sa valeur est en fonction de pc, pb, u et u'. Des exemples concrets sont fournis pour illustrer l'application de cette méthode.

Abstract

We propose a method to solve the Diophantine equation $(E)_1 : ax + by = c$, where a, b, and c are natural numbers with $a, b \neq 0$ and $a \equiv \pm\frac{10}{p}[b]$, where $p \in \{1, 2, 5, 10\}$. The method is based on analyzing the units of the products pc and pb, denoted as u and u', respectively. This approach simplifies and accelerates the resolution process by focusing on these units.

It consists of two main steps : *Verification of solutions* : This involves observing the values of u and u' to determine whether solutions exist. Determination of the solution : *The solution is expressed in the form* : $x = \pm\left(\frac{\varepsilon}{10} + pbk\right), \quad y = \frac{c \pm a\left(-\frac{\varepsilon}{10}\right)}{b} \pm a(-pk), \quad$ with $k \in \mathbb{Z}$, where ε is defined by the relation $\varepsilon \equiv pc[pb] \equiv 0[10]$, and its value depends on pc, pb, u, and u'. Concrete examples are provided to illustrate the application of this method.

Principales notations

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$	:	respectivement ensembles des entiers naturels et relatifs. .
a, b et c	:	entiers naturels tel que a, b non nuls .
p	:	élément de $\{1, 2, 5, 10\}$.
d et u	:	respectivement dizaine et unité du produit pb.
d' et u'	:	respectivement dizaine et unité du produit pc.
n	:	le reste de la division euclidienne par 3 du reste de la division euclidienne de u par 5 .
ε	:	entier multiple de 10 congru à pc modulo pb .
k, k', q etq'	:	entiers relatifs.
$a \wedge b$	:	PGCD de a et b.
$\lfloor\ \rfloor$	:	Fonction partie entière

Introduction

Les équations diophantiennes constituent un sujet d'intérêt majeur en mathématiques, trouvant des applications dans divers domaines allant de la théorie des nombres à la cryptographie. Dans ce document, nous nous intéressons particulièrement à l'équation diophantienne $(E)_1 : ax + by = c$ tels que a, b et c sont des entiers naturels avec $a, b \neq 0$ et $a \equiv \pm\frac{10}{p}[b]$ avec $p \in \{1, 2, 5, 10\}$. Classiquement, cette équation se résout en deux étapes :

— Étape 1 : *Vérification de l'existence des solutions*
Pour vérifier l'existence des solutions, on détermine $a \wedge b$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide. Si $a \wedge b$ divise c, alors l'équation admet des solutions, sinon elle n'admet pas des solutions.

— Étape 2 : *Détermination de la solution de l'équation*
Une fois l'existence confirmée, une solution particulière est obtenue en remontant l'algorithme d'Euclide. Ensuite, la solution générale est construite sous la forme :

$$x = x_0 + k \cdot \frac{b}{a \wedge b}, \quad y = y_0 - k \cdot \frac{a}{a \wedge b}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dans ce document, nous introduisons une nouvelle méthode pour résoudre cette équation. Cette méthode est structurée en deux étapes très simples, tenant uniquement compte des unité respectives des produits pb et pc que nous désignerons par u et u' :

— Étape 1 : *Vérification de l'existence des solutions*

- — Si $u = 0$: $(E)_1 : ax + by = c$ admet des solutions si et seulement si $u' = 0$,
- — Si $u = 5$: $(E)_1 : ax + by = c$ admet des solutions si et seulement si $u' \equiv 0[5]$,
- — Si $u \in \{1, 3, 7, 9\}$: $(E)_1 : ax + by = c$ admet des solutions,
- — Si $u \in \{2, 4, 6, 8\}$: $(E)_1 : ax+by = c$ admet des solutions si et seulement si $u' \in \{2, 4, 6, 8\}$.

— Étape 2 : *Détermination de la solution de l'équation*
Nous proposons une forme finale de la solution qui est exprimée en fonction d'un paramètre ε, dont l'existence garantie celle des solutions. ε est défini tel que $\varepsilon \equiv pc[pb] \equiv 0[10]$, et sa valeur est exprimée en fonction de pb, pc, u et u'.
Cette solution est sous la forme :

$$x = \pm(\frac{\varepsilon}{10} + pbk), \quad y = \frac{c \pm a(-\frac{\varepsilon}{10})}{b} \pm a(-pk), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{où} \quad \varepsilon = pc + pb(\frac{10}{10 \wedge u}q' + (-1)^n uu') \quad \text{avec } n = u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor \quad \text{et} \quad q' \in \mathbb{Z}$$

Dans la suite du document, nous chercherons à retrouver les deux étapes de résolution de la nouvelle méthode. Pour cela nous démontrerons d'abord que l'existence de ε garantie celle des solutions, cherchons ensuite à retrouver l'étape de vérification de l'existence des solutions ainsi que celle de la détermination de la solution de l'équation avant d'illustrer la méthode par quelques exemples concrets.

1 L'existence des solutions est-elle garantie par celle de ε ?

Il s'agit de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 1 : Soit ε un entier multiple de 10 congru à pc modulo pb.

$$\varepsilon \text{ existe} \Longleftrightarrow \text{ L'equation } ax+by=c \text{ admet des solutions}$$

Démonstration. Soient l'équation $(E)_1 : ax+by=c$ et $\varepsilon \in \mathbb{Z}$ tel que $\varepsilon \equiv 0[10] \equiv pc[pb]$

$\varepsilon \equiv pc[pb] \Rightarrow pc \equiv \varepsilon[pb]$ car la relation de congruence est symétrique.

— Premier sens : ε existe $\Rightarrow$ L'equation $ax+by=c$ admet des solutions
  $(E)_1 : ax+by=c$
  $\Rightarrow (E)_2 : ax \equiv c[b]$ avec $a \equiv \pm\frac{10}{p}[b]$ et $p \in \{1,2,5,10\}$

  $\Rightarrow \pm\frac{10}{p}x \equiv c[b]$

  $\Rightarrow \pm\frac{10}{p} = c+bk$ avec $k \in \mathbb{Z}$

  $\Rightarrow \pm 10x = pc+pbk$ avec $k \in \mathbb{Z}$

  $\Rightarrow \pm 10x \equiv pc[pb]$ avec $pc \equiv \varepsilon[pb]$

  $\Rightarrow \pm 10x \equiv \varepsilon[pb]$

  $\Rightarrow \pm 10x - \varepsilon \equiv 0[pb]$

  $\Rightarrow 10(\pm x - \frac{\varepsilon}{10}) \equiv 0[pb]$ avec $\frac{\varepsilon}{10} \in \mathbb{Z}$ car $\varepsilon \in 10\mathbb{Z}$

  Posons $\pm x - \frac{\varepsilon}{10} = X$

  $\Rightarrow 10X \equiv 0[pb]$

  Or l'équation $10X \equiv 0[pb]$ admet des solutions quel que soit le PGCD de 10 et pb.

  La solution évidente est $X = 0 + pbk$ avec $k \in \mathbb{Z}$

  $\Rightarrow x = \pm(pbk + \frac{\varepsilon}{10})$

  Alors $(E)_2$ admet des solutions.

  Il en résulte donc que l'équation$(E)_1 : ax+by=c$ aussi admet des solutions

  Ainsi ε existe $\Rightarrow$ L'equation $ax+by=c$ admet des solutions .

— Deuxième sens : L'equation $ax+by=c$ admet des solutions $\Rightarrow$ ε existe

  L'equation $ax+by=c$ admet des solutions $\Rightarrow$ $\exists$ $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ax_0+by_0=c$

  $\Rightarrow ax_0 \equiv c[b]$ avec $a \equiv \pm\frac{10}{p}[b]$ et $p \in \{1,2,5,10\}$

  $\Rightarrow \pm\frac{10}{p}x_0 \equiv c[b]$

  $\Rightarrow \pm 10x_0 \equiv pc[pb]$

On rappelle que $\varepsilon \equiv pc[pb]$ et $\varepsilon \equiv 0[10]$, donc on identifie ε à $\pm 10x_0$

Alors ε existe et $\varepsilon = \pm 10x_0$

Donc L'equation $ax + by = c$ admet des solutions $\Rightarrow$ ε existe

D'où

$$\varepsilon \text{ existe} \Longleftrightarrow \text{ L'equation } ax + by = c \text{ admet des solutions}$$

$\square$

Ainsi l'existence de ε garanti celle des solutions pour l'équation $ax + by = c$

2 Vérification de l'existence des solutions et détermination de la forme finale de la solution

2.1 Vérification de l'existence des solutions

Nous savons que l'existence des solutions est garantie par celle de ε, ainsi pour vérifier l'existence des solutions nous n'avons qu'à chercher les conditions d'existence de ε et le déterminer aussi .

Posons $pb = 10d + u$ et $pc = 10d' + u'$, où d et u représentent respectivement la dizaine et l'unité de pb, et d' et u' représentent respectivement la dizaine et l'unité de pc.

Nous partons de la condition

$$\varepsilon \equiv pc[pb] \equiv 0[10]$$

cela conduit à l'équation suivante :

$$\varepsilon = pc + qpb \equiv 0[10] \quad \text{où } q \in \mathbb{Z}$$

En développant cette équation, nous obtenons :

$$(10d' + u') + q(10d + u) \equiv 0[10]$$

Ce qui se simplifie en :

$$u' + q \times u \equiv 0[10]$$

Cela peut être réécrit comme :

$$q \times u \equiv -u'[10]$$

D'où :

$$(-q) \times u \equiv u'[10]$$

Ainsi $\varepsilon = pc + qpb$ existe si et seulement si l'expression suivante est vérifiée :

$$(-q) \times u \equiv u'[10]$$

Pour vérifier l'existence de ε et déterminer sa valeur, nous procédons comme suite :

- **Parcourir les valeurs de u de 0 à 9** : Pour chaque valeur de u, nous cherchons les valeurs possibles de u' telles que l'expression $(-q) \times u \equiv u'[10]$ soit valide.
- **Déterminer q** : Nous déterminons la valeur de q qui satisfait l'équation $(-q) \times u \equiv u'[10]$.
- **Calculer ε** : Une fois que nous avons la valeur de q, nous pouvons calculer $\varepsilon = pc + qpb$

— Pour $u = 0$
L'expression $(-q) \times 0 \equiv u'[10]$ n'est valide que si $u' = 0$, et elle est vérifiée quel que soit q.
Donc $\varepsilon = pc + qpb$ avec $q \in \mathbb{Z}$

— Pour $u = 1$
L'expression $(-q) \times 1 \equiv u'[10]$ est vérifiée quel que soit u' .
$(-q) \times 1 \equiv u'[10]$
$\Rightarrow q \equiv -u'[10]$
$\Rightarrow q = 10q' - u'$
Donc $\varepsilon = pc + pb(10q' - u')$ avec $q' \in \mathbb{Z}$

— Pour $u = 2$
L'expression $(-q) \times 2 \equiv u'[10]$ n'est vérifiée que si u' est paire, i.e. $u' \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.
$(-q) \times 2 \equiv u'[10]$
$\Rightarrow 2q \equiv -u'[10]$
$\Rightarrow q \equiv -\frac{u'}{2}[5]$
$\Rightarrow q \equiv (4)\frac{u'}{2}[5]$
$\Rightarrow q \equiv 2u'[5]$
$\Rightarrow q = 5q' + 2u'$
Donc $\varepsilon = pc + pb(5q' + 2u')$ avec $q' \in \mathbb{Z}$

— Pour $u = 3$
L'expression $(-q) \times 3 \equiv u'[10]$ est vérifiée quel que soit u' .
$(-q) \times 3 \equiv u'[10]$
$\Rightarrow -3q \equiv u'[10]$, on multiplie par 3
$\Rightarrow -9q \equiv 3u'[10]$
$\Rightarrow q \equiv 3u'[10]$
$\Rightarrow q = 10q' + 3u'$
Donc $\varepsilon = pc + pb(10q' + 3u')$ avec $q' \in \mathbb{Z}$

— Pour $u = 4$
L'expression $(-q) \times 4 \equiv u'[10]$ n'est vérifiée que si u' est paire, i.e. $u' \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.
$(-q) \times 4 \equiv u'[10]$
$\Rightarrow -4q \equiv u'[10]$, On multiplie par -3
$\Rightarrow 12q \equiv -3u'[10]$
$\Rightarrow 2q \equiv -3u'[10]$
$\Rightarrow q \equiv -3 \times \frac{u'}{2}[5]$
$\Rightarrow q \equiv -(8) \times \frac{u'}{2}[5]$
$\Rightarrow q \equiv -4u'[5]$
$\Rightarrow q = 5q' - 4u'$
Donc $\varepsilon = pc + pb(5q' - 4u')$ avec $q' \in \mathbb{Z}$

— Pour $u = 5$
L'expression $(-q) \times 5 \equiv u'[10]$ n'est vérifiée que si $u' \in \{0, 5\}$.
$(-q) \times 5 \equiv u'[10]$
$\Rightarrow -5q \equiv u'[10]$
$\Rightarrow 5q \equiv u'[10]$
$\Rightarrow q \equiv \frac{u'}{5}[2]$
$\Rightarrow q \equiv u'[2]$
$\Rightarrow q \equiv (5)u'[2]$
$\Rightarrow q = 2q' + 5u'$

Donc $\varepsilon = pc + pb(2q' + 5u')$ avec $q' \in \mathbb{Z}$

— Pour $u = 6$
L'expression $(-q) \times 6 \equiv u'[10]$ n'est vérifiée que si u' est paire, i.e. $u' \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.
$(-q) \times 6 \equiv u'[10]$
$\Rightarrow -6q \equiv u'[10]$, On multiplie par 3
$\Rightarrow -18q \equiv 3u'[10]$
$\Rightarrow 2q \equiv 3u'[10]$
$\Rightarrow q \equiv 3 \times \frac{u'}{2}[5]$
$\Rightarrow q \equiv (-12)\frac{u'}{2}[5]$
$\Rightarrow q \equiv -6u'[5]$
$\Rightarrow q = 5q' - 6u'$
Donc $\varepsilon = pc + pb(5q' - 6u')$ avec $q' \in \mathbb{Z}$

— Pour $u = 7$
L'expression $(-q) \times 7 \equiv u'[10]$ est vérifiée quel que soit u' .
$(-q) \times 7 \equiv u'[10]$
$\Rightarrow -7q \equiv u'[10]$ On multiplie par 7
$\Rightarrow -49q \equiv 7u'[10]$
$\Rightarrow q \equiv 7u'[10] \Rightarrow q = 10q' + 7u'$
Donc $\varepsilon = pc + pb(10q' + 7u')$ avec $q' \in \mathbb{Z}$

— Pour $u = 8$
L'expression $(-q) \times 8 \equiv u'[10]$ n'est vérifiée que si u' est paire, i.e. $u' \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.
$(-q) \times 8 \equiv u'[10]$
$\Rightarrow -8q \equiv u'[10]$
$\Rightarrow 2q \equiv u'[10]$
$\Rightarrow q \equiv \frac{u'}{2}[5]$
$\Rightarrow q \equiv \frac{u'}{2}[5]$
$\Rightarrow q \equiv \frac{16u'}{2}[5]$
$\Rightarrow q \equiv 8u'[5]$
$\Rightarrow q = 5q' + 8u'$
Donc $\varepsilon = pc + pb(5q' + 8u')$ avec $q' \in \mathbb{Z}$

— Pour $u = 9$
L'expression $(-q) \times 9 \equiv u'[10]$ est vérifiée quel que soit u' .
$(-q) \times 9 \equiv u'[10]$
$\Rightarrow -9q \equiv u'[10]$ On multiplie par -9
$\Rightarrow 81q \equiv -9u'[10]$
$\Rightarrow q \equiv -9u'[10]$
$\Rightarrow q = 10q' - 9u'$
Donc $\varepsilon = pc + pb(10q' - 9u')$ avec $q' \in \mathbb{Z}$

Ainsi nous pouvons résumer comme suite :

— Pour la vérification de l'existence de ε :
  — Si $u = 0$: ε existe si et seulement si $u' = 0$, alors $(E)_1$ admet des solutions pour les mêmes conditions.
  — Si $u = 5$: ε existe si et seulement si $u' \equiv 0[5]$, alors $(E)_1$ admet des solutions pour les mêmes conditions.
  — si $u \in \{1, 3, 7, 9\}$: ε existe, alors $(E)_1$ admet des solutions.

— Si $u \in \{2,4,6,8\}$: ε existe si et seulement si $u' \in \{2,4,6,8\}$, alors $(E)_1$ admet des solutions pour les mêmes conditions.

— Pour la valeur de ε :

$$\varepsilon = pc + pb(\frac{10}{10 \wedge u}q' + (-1)^n uu') \quad \text{avec } n = u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{u-5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor \quad \text{et } q' \in \mathbb{Z}$$

2.2 Détermination de la forme finale de la solution

Soit l'équation diophantienne $(E)_1 : ax + by = c$ où a, b, c sont des entiers naturels et $a, b \neq 0$ tel que $a \equiv \pm\frac{10}{p}[b]$ avec $p \in \{1,2,5,10\}$.

Pour $x = x_0$, on a $y = \frac{c-ax_0}{b}$

$$ax + by = c$$
$$\Rightarrow ax \equiv c[b]$$
$$\Rightarrow \pm\frac{10}{p}x \equiv c[b]$$
$$\Rightarrow \pm\frac{10}{p}x = c + bk \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow \pm 10x = pc + pbk$$
$$\Rightarrow \pm 10x \equiv pc[pb] \quad \text{avec } pc \equiv \varepsilon[pb]$$
$$\Rightarrow \pm 10x \equiv \varepsilon[pb]$$
$$\Rightarrow \pm 10x - \varepsilon \equiv 0[pb]$$
$$\Rightarrow 10(\pm x - \frac{\varepsilon}{10}) \equiv 0[pb]$$

Posons $\pm x - \frac{\varepsilon}{10} = X$

$$\Rightarrow 10X \equiv 0[pb]$$

On obtient alors l'équation $10X \equiv 0[pb]$

$$10X \equiv 0[pb]$$

la solution évidente est la classe de congruence 0 modulo pb.

$$\Rightarrow X \ \in \{0 + pbk\} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow \pm x - \frac{\varepsilon}{10} \in \{pbk\}$$
$$\Rightarrow \pm x \in \{\frac{\varepsilon}{10} + pbk\}$$
$$\Rightarrow x \in \{\pm(\frac{\varepsilon}{10} + pbk)\}$$
$$\Rightarrow y \in \{\frac{c \pm a(-\frac{\varepsilon}{10})}{b} \pm a(-pk)\}$$

Ainsi la solution a pour forme finale :

$$\boxed{S = \{\ (\ \ \pm(\tfrac{\varepsilon}{10} + pbk),\ \ \tfrac{c \pm a(-\frac{\varepsilon}{10})}{b} \pm a(-pk)\ \ )\ \} \quad \text{avec} k \in \mathbb{Z}}$$

3 Exemples de résolution

1. $13x + 8y = 11$ **2.** $385x + 129y = 87$

3. $191x - 67y = 36$ **4.** $137x - 135y = -15$

— Pour l'équation $13x + 8y = 11$
$13 \equiv 5[8] \ \Rightarrow p = 2 \ \Rightarrow pb = 16 \equiv 6[10]$ et $pc = 22 \equiv 2[10] \Rightarrow u = 6$ et $u' = 2$
Alors l'équation $13x + 8y = 11$ admet des solutions.

$S = \{((\frac{\varepsilon}{10} + pbk), \frac{c+a(-\frac{\varepsilon}{10})}{b} + a(-pk))\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\varepsilon = pc + pb(\frac{10}{10 \wedge u}q' + (-1)^n uu')$ avec $n = u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{u-5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor$ et $q' \in \mathbb{Z}$

$n = u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{u-5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor = 6 - 5\lfloor\frac{6}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{6-5\lfloor\frac{6}{5}\rfloor}{3}\rfloor = 1$

$\varepsilon = pc + pb(\frac{10}{10 \wedge u}q' - uu') = 22 + 16(\frac{10}{10 \wedge 6}q' - 6 \times 2) = 22 + 16(5q' - 12)$ avec $q' \in \mathbb{Z}$
Prenons $q' = 2$
$\varepsilon = -10$

$$\boxed{S = \{(-1+16k, 3-26k)\} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$$

— Pour l'équation $385x + 129y = 87$
$385 \equiv -2[129] \ \Rightarrow p = 5 \ \Rightarrow pb = 645 \equiv 5[10]$ et $pc = 435 \equiv 5[10] \Rightarrow u = 5$ et $u' = 5$
Alors l'équation $385x + 129y = 87$ admet des solutions.

$S = \{(-(\frac{\varepsilon}{10} + pbk), \frac{c+a(\frac{\varepsilon}{10})}{b} + a(pk))\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\varepsilon = pc + pb(\frac{10}{10 \wedge u}q' + (-1)^n uu')$ avec $n = u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{u-5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor$ et $q' \in \mathbb{Z}$

$n = u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{u-5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor = 5 - 5\lfloor\frac{5}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{5-5\lfloor\frac{5}{5}\rfloor}{3}\rfloor = 0$

$\varepsilon = pc + pb(\frac{10}{10 \wedge u}q' + uu') = 435 + 645(\frac{10}{10 \wedge 5}q' + 5 \times 5) = 435 + 645(2q' + 25)$ avec $q' \in \mathbb{Z}$
Prenons $q' = -12$
$\varepsilon = 1080$

$$\boxed{S = \{(-108 - 645k, 323 + 1925k)\} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$$

— Pour l'équation $191x - 67y = 36$
Tous les coefficients doivent être positif, on pose alors $-y = y'$ et l'équation devient
$191x + 67y' = 36$
$191 \equiv -10[67] \ \Rightarrow p = 1 \ \Rightarrow pb = 67 \equiv 7[10]$ et $pc = 36 \equiv 6[10] \Rightarrow u = 7$ et $u' = 6$
Alors l'équation $191x + 67y' = 36$ admet des solutions.

$S' = \{(x, y')\} = \{(-\frac{\varepsilon}{10} - pbk, \frac{c+\frac{a\varepsilon}{10}}{b} + apk)\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\varepsilon = pc + pb(\frac{10}{10 \wedge u}q' + (-1)^n uu')$ avec $n = u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{u-5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor$ et $q' \in \mathbb{Z}$

$n = u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{u-5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor = 7 - 5\lfloor\frac{7}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{7-5\lfloor\frac{7}{5}\rfloor}{3}\rfloor = 2$

$\varepsilon = pc + pb(\frac{10}{10 \wedge u}q' + uu') = 36 + 67(\frac{10}{10 \wedge 7}q' + 7 \times 6) = 36 + 67(10q' + 42) \quad \text{avec} \quad q' \in \mathbb{Z}$
Prenons $q' = -4$
$\varepsilon = 170$

$S' = \{(-17 - 67k, 49 + 191k)\}$

$S = \{(x, -y')\}$

$$\boxed{S = \{(-17 - 67k, -49 - 191k)\} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}}$$

— Pour l'équation $137x - 135y = -15$
Tous les coefficients doivent être positif, on multiplie l'équation par (-1) et on pose $-x = x'$ et l'équation devient $137x' + 135y = 15$
$137 \equiv 2[67] \ \Rightarrow p = 5 \ \Rightarrow pb = 675 \equiv 5[10]$ et $pc = 75 \equiv 5[10] \Rightarrow u = 5$ et $u' = 5$
Alors l'équation $137x' + 135y = 15$ admet des solutions.

$S' = \{(x', y)\} = \{((\frac{\varepsilon}{10} + pbk), \frac{c + a(-\frac{\varepsilon}{10})}{b} + a(-pk))\} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$

$\varepsilon = pc + pb(\frac{10}{10 \wedge u}q' + (-1)^n uu') \qquad \text{avec } n = u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor \quad \text{et } q' \in \mathbb{Z}$

$n = u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor = 5 - 5\lfloor\frac{5}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{5 - 5\lfloor\frac{5}{5}\rfloor}{3}\rfloor = 0$

$\varepsilon = pc + pb(\frac{10}{10 \wedge u}q' + uu') = 75 + 675(\frac{10}{10 \wedge 5}q' + 5 \times 5) = 75 + 675(2q' + 25) \quad \text{avec} \quad q' \in \mathbb{Z}$
Prenons $q' = -12$
$\varepsilon = 750$

$S' = \{(75 + 675k, -76 - 685k)\}$

$S = \{(-x', y)\}$

$$\boxed{S = \{(-75 - 675k, -76 - 685k)\} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}}$$

Conclusion

Dans ce document, nous avons introduit une nouvelle méthode pour résoudre une classe particulière d'équations diophantiennes de la forme $ax + by = c$ tels que a, b et c sont des entiers naturels et $a \equiv \pm\frac{10}{p}[b]$ avec $p \in \{1, 2, 5, 10\}$. Cette approche alternative repose sur l'analyse des unités des produits pb et pc, que nous avons désignées respectivement par u et u'. Cette méthode permet de simplifier et d'accélérer la résolution en se concentrant uniquement sur ces unités.

Nous avons structuré la méthode en deux étapes simples : La vérification de l'existence des solutions, qui repose sur des conditions sur u et u', et la détermination de la solution, qui est exprimée de manière explicite en fonction d'un paramètre ε. Ce paramètre ε est calculé en fonction de pb, pc, u et u'.

En conclusion, cette méthode constitue une alternative intéressante à la méthode classique, avec l'avantage de simplifier les calculs et de fournir des solutions explicites sous une forme facilement applicable. Les exemples résolus montrent l'application pratique de cette méthode et confirment son efficacité.

Références

[Alg24] Mohamed Algoni, *Sur la résolution de l'équation modulaire* $10x \equiv a[n]$, P.2-16 https://auf.hal.science/hal-04783772, November 2024.

[Kou17] Dimitris Koukoulopoulos, *Introduction à la théorie des nombres*, 2017, P.116-117 https://dms.umontreal.ca/~koukoulo/documents/notes/theorie_des_nombres.pdf.

[Sup11] MPSI Sup, *Cours de mathématiques*, 2011, P.748-755 http://les.mathematiques.free.fr/pdf/livre.pdf.

[Vin09] Valentin Vinoles, *Cours élémentaire d'arithmétique*, P.17 http://www.maths-mancini.fr/wp-content/uploads/2016/07/cours_arithmetique-ts.pdf.