

Imaging of microwave data based on backward projection algorithms

Ren Xuancheng¹; Yuan Xinyu¹; Yan Qixiang¹; Zhang Hengzhi¹; Li Jingyi¹

¹ Fudan University

Abstract:

This document explores the principles and applications of Synthetic Aperture Radar (SAR) imaging, with a focus on Backprojection (BP) algorithms for microwave data imaging. It starts by introducing SAR technology, its historical development, and fundamental imaging mechanisms. Key differences between SAR and conventional radar systems are highlighted, emphasizing SAR's advantages in achieving high-resolution imaging through pulse compression and Doppler frequency shifts.

The document then delves into signal processing techniques, including Linear Frequency Modulation (LFM) signals, range compression, and Doppler phase compensation. The BP algorithm is discussed in depth, covering echo signal modeling, range migration correction, and coherent accumulation. Simulation results demonstrate the BP algorithm's capability to reconstruct detailed images, illustrating the impact of interpolation coefficients on image quality.

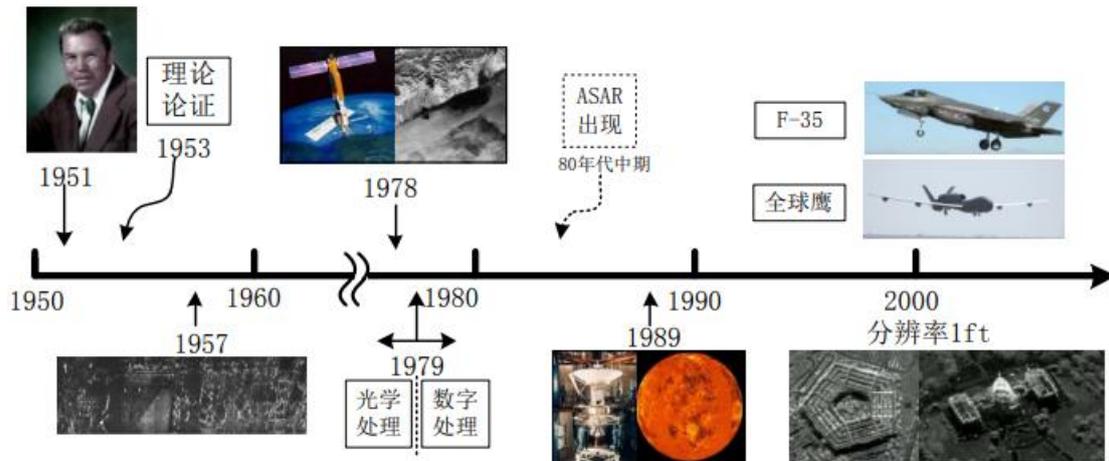
Additionally, alternative SAR algorithms like DBS, RD, and CS are compared, showcasing their strengths and limitations in various scenarios. The study concludes by emphasizing the BP algorithm's importance in SAR imaging and its potential for future technological advancements.

This research, conducted by Fudan University, provides valuable insights into microwave data imaging and signal processing in SAR systems, paving the way for more efficient imaging techniques.

一.SAR 雷达的背景知识与成像的原理

合成孔径雷达 Synthetic Aperture Radar, SAR 是 Goodyear 公司的 Carl Wiley 最早提出的一种具有高分辨率的成像雷达,其基本原理是利用载体平台与目标的相对运动来合成等效的虚拟长天线孔径,从而获得方位向高分辨率的雷达图像。与光学传感器相比, SAR 具有全天时和全天候的工作能力,广泛应用于地球遥感、资源勘测、灾情预告和军事侦察等领域。

1.SAR 的发展历史

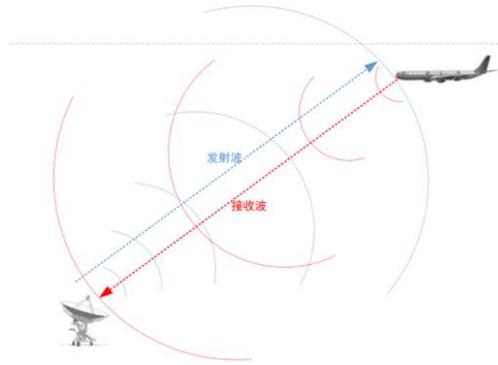


SAR 成像发展示意图

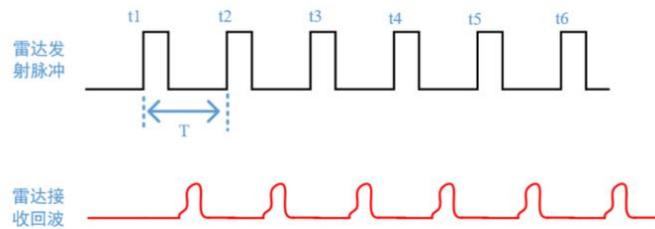
上图给出了 SAR 发展历程中一些标志性事件。1951 年六月，Carl A. Wiley，一名 Goodyear 航空公司的数学家，在进行导航系统校正时发现了 SAR 成像技术，并于 Goodyear 航空公司的报告中首次提出 SAR 的概念，突破了实孔径尺寸对于方位维成像分辨率的限制。1953 年，伊利诺依大学采用非聚焦方法使角度分辨率由 4.13° 提高到 0.4° ，并获得第一张 SAR 图像。1957 年，密西根大学采用光学处理方式，获得了第一张全聚焦 SAR 图像。1978 年，美国发射了第一颗星载 Seasat-1，标志着合成孔径雷达已成功进入从太空对地观测的新时代。1989 年，搭载 SAR 成像测量系统的“麦哲伦号”金星探测器，隔着金星大气中永不散去的稠密云层，清晰透视了金星的地形地貌。2000 年后，基于 SAR 技术的 F-35 和全球鹰无人机诞生，极大提高了成像分辨率。随着研究不断深入，SAR 成像技术正逐渐朝着多平台、多模式、多极化、超高分辨、宽测绘的方向发展。

2.雷达的原理

雷达的英文式 Radar，源于 Radio Detection and Ranging 的缩写，意思是“无线电探测和测距”。顾名思义初始雷达是为了探测目标距离和目标角度的。如下图所示，雷达自身发射电磁波在空气中向前传播，电磁波遇到目标后会将电磁波散射到各个方向中，目标反射的电磁波部分能量被雷达接收，雷达接收机将接收的微弱信号放大，进行信号处理后获取所需的目标信息。



雷达发射信号和接收回波如下图所示，



在最简单的雷达测距中，目标的距离表示为

$$R = \frac{ct_r}{2}$$

其中 t_r 是雷达接收信号时间和发射信号时间的差值。分子上的2表示电磁波信号的双程路径。测距的分辨率为： $\Delta R = \frac{c\tau}{2}$ ， τ 为脉冲持续时间。

电磁波的多普勒效应是雷达测速的基础，也是合成孔径雷达成像依据。由于目标和雷达的相对移动，雷达的发射信号与目标反射回波信号的频率不同。两者的频率差称为多普勒频移 f_d 。可以通过多普勒频率计算出目标相对于雷达的速度：

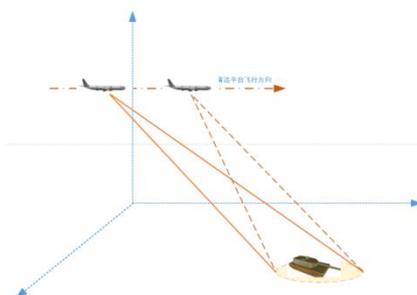
$$V = \frac{\lambda f_d}{2}$$

(1) 合成孔径雷达 (SAR) 成像原理

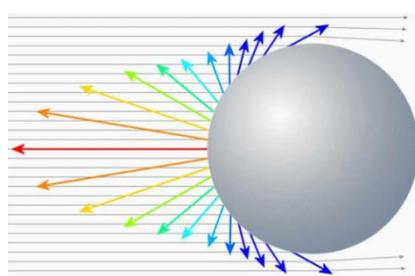
在常规的雷达使用中，每发射一个脉冲雷达接收机就获得一个一维采样的回波信号，然后对信号进行处理获得目标信息。为了获得足够的目标能力，也可做相关积累。但是图像是一个二维的矩阵。要想使用雷达获得目标的二维图像就必须要有二维的回波信号，二维的回波信号可以通过排列每个脉冲回波得到。但是这种二维的回波信号不一定在二维上都是有用信息。在雷达信号中的有用信息就是发射电磁波的频率。

在单个脉冲中通常发射线性调频信号方便做匹配滤波形成高分辨一维像，那么在排列起来的二维信号中也希望有一个脉间的调频信号，这个脉间的调频信号

就是多普勒调频信号。因此合成孔径雷达（SAR）成像的基础是目标与雷达产生相对运动，获得包含两个维度的具有线性调频信号性质的回波。如下图所示：



(2) 频域雷达散射截面 Radar Cross Section (RCS)



当电磁波照射到物体上时将会产生散射现象，对电磁散射进行分析和计算对研究雷达具有至关重要的作用。事实上，成像雷达显示的就是一个目标或者一幅场景的散射能量。雷达散射截面可以视为是目标反射电磁能量的度量，是识别飞机、舰船、坦克等军事目标的重要参数。

1) 物理含义

在频域中，用来描述散射体电磁散射能力大小的物理量为目标的雷达散射截面或雷达截面，英文为 Radar Cross Section (RCS)。

2) 公式推导

入射平面波的功率密度是

$$\omega_i = \frac{1}{2Z_0} |E_i|^2$$

如果目标的等效截面为 σ ，则目标所截获的总功率为

$$P = \sigma \omega_i$$

若目标将这些功率各向同性地散射出去，在距离为 R 的观察点处，其散射功率密度为

$$\omega_s = \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{\sigma |E_i|^2}{8\pi R^2 Z_0}$$

另一方面，散射功率密度也可以由观察点处的散射场得到

$$\omega_s = \frac{1}{2z_0} |\mathbf{E}_s|^2$$

该理想散射平面所截获的入射波的能量再次各向同性地散射到观察点时的功率正好与真实目标散射到观察点处的功率相等，则

$$\sigma = 4\pi R^2 \frac{|\mathbf{E}_s|^2}{|\mathbf{E}_i|^2}$$

通常，将 R 趋于无穷大时目标的等效截面称为雷达散射截面（RCS）

$$RCS = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \frac{|\mathbf{E}_s|^2}{|\mathbf{E}_i|^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \frac{|H_s|^2}{|H_i|^2}$$

(3) SAR 与普通雷达的区别：

在早期研究雷达成像系统时采用的是真实孔径雷达系统。真实孔径雷达成像系统及处理设备相对较为简单，但存在一个难以解决的问题，其方位分辨率要受到天线尺寸的限制。所以想要获得较高的分辨率，就需要较长的天线。而天线长短受制于雷达系统被载平台大小的限制，不能无休止提高天线长度。因此，提出了合成孔径雷达的概念。

合成孔径雷达方位向和距离向分辨率都高于普通雷达，有着非常广泛的应用前景，在成像雷达中占有重要地位。距离向上，合成孔径雷达通过脉冲压缩技术提高分辨率；方位向上，利用雷达与目标之间相对运动产生的多普勒频移提高分辨率。与一般的光学图像相比，SAR 图像的特点包括以下几个方面：

- ①不受恶劣天气如云、烟、雾、雨雪等的影响，能够全天候的工作；
- ②SAR 图像不受大气成分的影响，能够用于多实相分析，如动态监视等；
- ③对目标的距离测量比较准确；
- ④对目标的组成成分比较敏感；
- ⑤对人工目标比较敏感；
- ⑥对地表粗糙度敏感；
- ⑦对电介质特性敏感；
- ⑧具有一定的表面穿透性，工作早低频段的 SAR 具有一定的穿透树林、地表的能力；

⑨能够高分辨的地形地貌图像。

3.六种合成孔径雷达的介绍

条带合成孔径雷达（Stripmap SAR）。见图 1，在这种模式下，随着雷达平台的移动，天线的指向保持不变。此时，波束与运动平台相对不变，波束以平台运动速度照射成像区域。条带合成孔径雷达的天线匀速扫过地面，得到的图像是不间断的。该模式对于地面的一个条带进行成像，条带的长度仅取决于雷达移动的距离，方位向的分辨率由天线的长度决定。

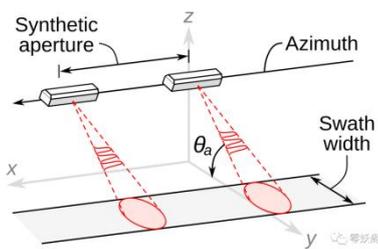


图 1

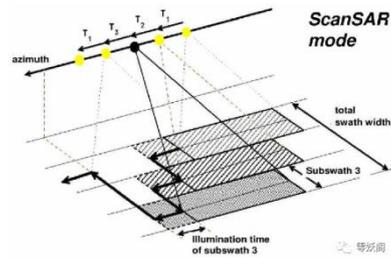


图 2

扫描合成孔径雷达（Scan SAR）。见图 2，这种模式与条带模式的不同之处在于，在一个合成孔径时间内，天线会沿着距离向进行多次扫描。通过控制波束速度（一般比平台速度大），实现场景不同区域的快速成像。通过这种方式，牺牲了方位向分辨率，而获得了更宽的测绘带宽。扫描模式能够获得的最佳方位分辨率等于条带模式下的方位向分辨率与扫描条带数的乘积。

聚束合成孔径雷达（Spotlight SAR）。见图 3，这种模式下，平台飞行过程中通过控制雷达波束照射成像场景同一位置，实现场景凝视成像。通过扩大感兴趣区域的天线照射波束角宽，可以提高条带模式的分辨率。这一点可以通过控制天线波束指向，使其随着雷达飞过照射区而逐渐向后调整来实现。波束指向的控制可以在短时间内模拟出一个较宽的天线波束，但是波束指向不可能永远向后，最终还是要调回到前向，这就意味着地面覆盖区域是不连续的，即一次只能对地面的一个有限圆域进行成像。

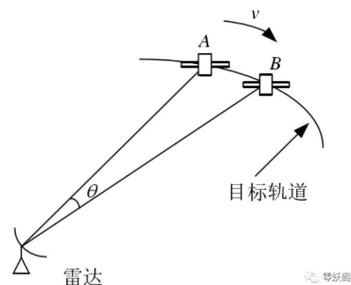
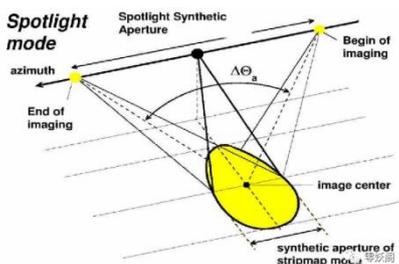


图 3

图 4

逆合成孔径雷达（Inverse SAR，简称 ISAR）。见图 4，到目前为止，我们考虑的都是目标静止而雷达移动的情况，然而在目标移动而雷达静止的情况下，SAR 同样可以工作。这种相反的工作模式称为“逆合成孔径雷达”。ISAR 的一个例子就是用地基雷达跟踪卫星航迹。这个概念可以推广到雷达和目标都运动的情况，例如用机载或星载合成孔径雷达对波涛涌的海面上的舰船进行成像。

双基地合成孔径雷达（Bistatic SAR）。见图 5，在这种作模式下接收机和发射机分置于不同的位置。对于遥感 SAR 来说，接收机和发射机通常很接近，可以近似成单基模式。

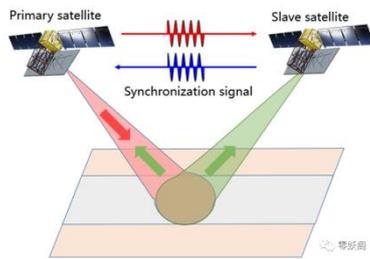


图 5

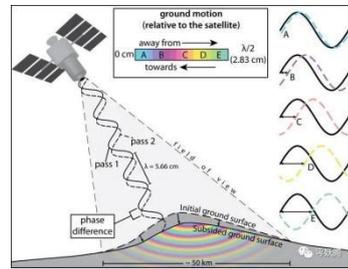


图 6

干涉合成孔径雷达（InSAR）。见图 6，在这种工作模式下，可以通过复数图像的后处理来提取地形高度和移位。将两幅在同一空间位置（差分干涉 SAR）或间隔很小的两个位置（地形高度干涉 SAR）获得的复数图像进行共轭相乘，就能得到一幅具有等高度线或等位线的干涉图。

4.经典 SAR 算法介绍

(1) DBS 算法

DBS 算法是 SAR 成像算法的始祖，但分辨率较低。为了改善 SAR 图像的成像质量，光学成像方法被引入到 SAR 成像中，但由于近似处理忽略了目标回波的距离徙动，在分辨率要求较高，场景较大的情况下不再适用。

(2) FPA 算法

极坐标格式算法（Polar Format Algorithm,PFA）按照极坐标格式对数据进行录取，通过插值获取直角坐标系下的波数谱，但在插值过程中对斜距进行了近似，即使用了平面波假设，造成该算法只能适用于较小场景的高分辨成像。

(3) RD 算法

距离多普勒算法（Range Doppler Algorithm,RDA）最初是为了处理

Radarsat-2 卫星录取的回波数据而提出的，最原始的 RD 算法忽略了点目标在距离向的距离徙动，按照场景中心点进行包络校正，在分辨率较低的时候能够处理较大的场景，但当场景增加到一定程度或者斜视角增大到一定程度时，成像精度快速下降。为了处理斜视情况下的距离徙动，时域校正线性走动的 RD 算法、频域校正线性走动和弯曲的 RD 算法和时域校正线性走动并在频域校正距离弯曲的 RD 算法都被提出，后者可以处理较大的斜视角。但即使是改进的 RD 算法，仍未考虑距离弯曲的空变性。

(4) CS 算法

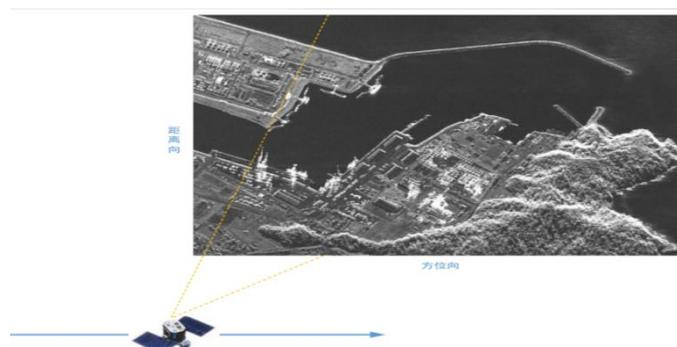
为了解决 RD 算法没有校正距离徙动空变的问题，Chirp Scaling (CS) 算法利用变标处理，在距离时域方位频域内将空变的距离弯曲转化为非空变的距离弯曲，然后再进行与 RD 算法类似的处理，但原始的 CS 算法只能校正一次距离空变，当场景或者斜视角进一步增大的情况下，出现的距离向二次相位空变将影响成像质量。为此，一些改进 CS 算法被提出，例如非线性 CS，扩展 CS 和扩展非线性 CS。这一类 CS 算法已经能够处理较大的斜视角，被广泛应用。CS 一类算法虽然已经能够应对多数情况的 SAR 成像，但仍旧为近似算法。

(5) BP 算法

后向投影 (Backprojection, BP) 算法起源于计算机层析处理，在轨道精确已知的情况下能够进行无近似的成像。BP 算法将每一次脉冲的能量向场景中进行投影，所以每一次发射脉冲时刻都需要计算雷达与场景所有点间的斜距，计算量较大。

5.SAR 雷达分辨率

SAR 成像不同于传统的光学 CCD 成像，一次性形成二维图像。SAR 成像的二维是分开的，分为距离向和方位向。因此 SAR 成像主要包含两个步骤：距离向聚焦与方位向聚焦。



①距离分辨率

雷达的距离向分辨率是指在同一方位向上，雷达在距离上可分辨出来的最小值。包络的主瓣宽度为：

$$\tau = \frac{1}{K_r T} = \frac{1}{B_r}$$

其中 K_r ——为调频斜率，由扫频带宽 B_r 与 Chirp 周期 T 决定；

根据主瓣宽度定义邻近距离分辨率得：

$$\rho_r = \frac{c\tau}{2} = \frac{c}{2B_r}$$

可知距离分辨力主要与带宽有关，带宽越大，距离分辨率越高。

②方向分辨率

方位向分辨率取决于合成孔径得波束宽度，由阵列天线类比可得到合成孔径 3dB 波束宽度为：

$$\theta = \frac{\lambda}{2L_a}$$

其中 L_a ——为合成孔径宽度。 λ ——为波长。

由此可以得到方位向分辨率表达式：

$$\rho_a = \theta R = \frac{\lambda R}{2L_a}$$

其中 R ——为目标与雷达得距离；

实际中，受制于雷达实际孔径，合成孔径长度不可无限增大，假定天线实际孔径为 D ， L_a 最大为：

$$L_a = \frac{\lambda}{D} R$$

代入可得方位分辨率最小为：

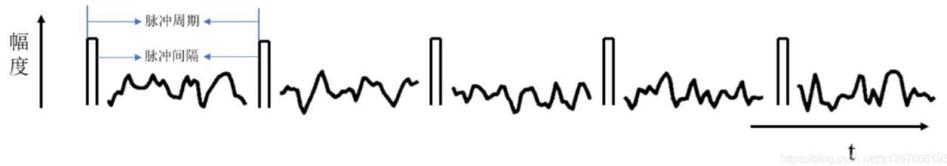
$$\rho_a = \frac{D}{2}$$

也就是说合成孔径雷达方位向分辨率可达到实际天线孔径的一半。但一直减少实际天线的孔径也不能一直提高方位分辨率。当天线尺寸不断减小，极限情况下方位分辨率也不会好于波长的四分之一。

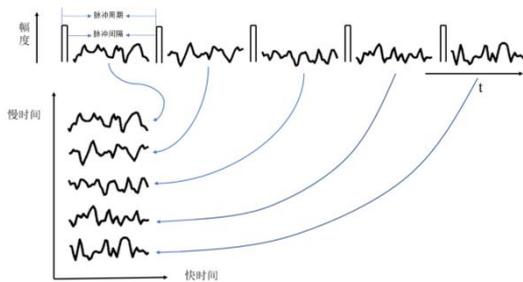
6. 雷达快时间、慢时间

普通地基雷达工作时周期性发送脉冲信号，在脉冲间隔时间内对回波信号进行采样，如下图

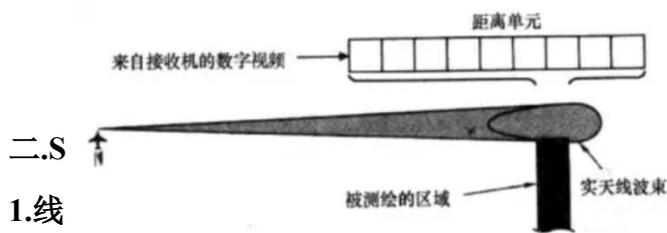
回波采样间隔与脉冲重复间隔（脉冲周期）虽然在一个时间轴上，但是在量



级上差别非常大，回波采样间隔大概在 10^{-8} 量级，而脉冲重复周期大概在 10^{-3} 级别，所以在处理的时候可能会不方便。于是将回波采样间隔与脉冲重复周期分成了两个维度，分别称为快时间和慢时间。如下图所示，将每个脉冲间隔内的回波分割出来作为一行，以二维数组的形式存储采样到的回波信号，横纵轴分别为快时间和慢时间。



在 SAR 系统里，快时间和慢时间的含义是一样的，表现为是雷达平台边走边发射周期脉冲信号，在实际 SAR 雷达测绘任务中，飞机的测绘某个区域时，会合成一个阵列。载机在前进的同时会发送脉冲，意味着每发射一个脉冲，天线中心就会沿飞行路线前进，所以合成阵列看作是间隔相同的阵元组成的线阵。而将信号以数组形式存储，便于我们进一步处理成图像。



线性调频信号是一种瞬时频率是时间的线性函数的信号，广泛应用于 SAR 系统中，一般用于发射，可以得到均匀的带宽。

(1) 时域表达

在时域中，理想的线性调频波脉冲持续 T 秒，振幅为常量，中心频率为 f_{cen} ，由于线性调制频率，则其相位是时间的二次函数。当中心频率取 0 分析时，信号可以写作：

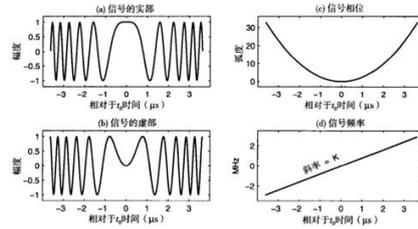
$$s(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \exp\{j\pi Kt^2\}$$

其中 t 为时间变量， K 为线性调频频率，单位为 Hz/s。可以发现，其相位变

化函数是二次函数，频率变化函数是线性函数：

$$\phi(t) = \pi Kt^2$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{d(\pi Kt^2)}{dt} = Kt$$



(2) 频域表达

我们对于线性调频信号做傅立叶分析以得到其频谱的特性。假设 $g(t)$ 信号是一个线性调频信号，它的实包络是 $w(t)$, 调制相位是 $\phi(t)$ ：

$$g(t) = w(t)\exp\{j\phi(t)\}$$

对其做傅立叶变换：

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\exp\{-j2\pi ft\}dt$$

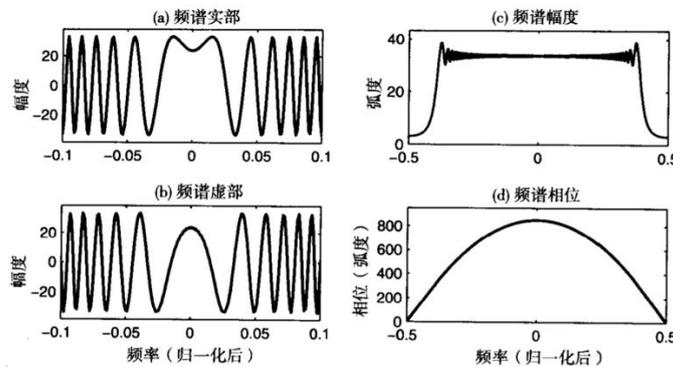
$$= \int_{-\infty}^{\infty} w(t)\exp\{j\phi(t) - j2\pi ft\}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} w(t)\exp\{j\theta(t)\}dt$$

可以发现，被积分的相位不只有一次项，还有高次项，很难得到准确的频谱解析表达式。但我们可以利用驻定相位原理（POSP）得到近似的表达式：

$$G(f) \approx C_1 W(f)\exp\{j(\Theta(f) \pm \pi/4)\}$$

其中， C_1 为通常可以忽略的包络， $W(f)$ 为频域包络， $W(f) = w[t(f)]$ ，是时域包络的尺度变换， $\Theta(f)$ 为频域相位包络， $\Theta(f) = \theta[t(f)]$ ，是时域相位的尺度变换。



(3) LFM 波的回波模型

SAR 雷达发射的线性调频波被称为 Chirp 信号，信号经过物体反射后会与发

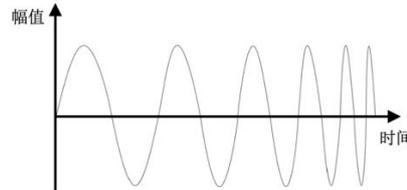
射信号产生一定的时间差，这个时间差来自于物体于雷达之间的距离，距离越远则延时越长。

Chirp 信号可以表达为：

$$m(t) = e^{j2\pi(f_0t + 0.5Kt^2)}, 0 \leq t \leq T_0$$

其中， K 为调频频率，这一般于带宽和周期的选取有关， f_0 为起始频率。

其图像为：

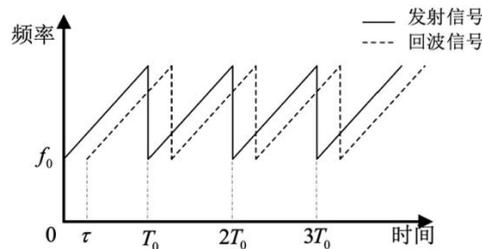


假设被测物体于雷达的阵列距离为 R ，回波信号则为发射信号的延迟并乘以一个相应的衰减系数，我们一般可以写作：

$$\hat{s}(t) = \sigma m(t - \tau) = \sigma e^{j2\pi(f_0(t-\tau) + 0.5K(t-\tau)^2)}$$

其中， τ 为信号在雷达和物体间往返的时延， $\tau = 2R/c$ ； c 为光速， σ 为衰减系数，取决于被测物体反射率和信号传播的路径。

回波信号的频率时间图如下图所示：



2.距离维脉冲压缩算法

距离维脉压有两种方法，一种是使用匹配滤波器，一种是使用 FMCW 方式。

(1) 为什么要匹配滤波？

在探测系统中，通过脉冲能量对远场目标的距离、速度、形状或反射率等参数进行测量。为了使测量有效，接收脉冲必须具有足够强的能量和足够好的分辨率。如果发射脉冲的持续时间为 T ，则每一目标在回波数据中占据相同的时间间隔 T ，故压缩前的可分辨能力为 $\rho = T$ 。

在任意时刻，回波中间隔大于这一时间的两个目标都不会被同一脉冲同时照射到。因此，为了得到良好的分辨率，必须使用短脉冲或至少使用经过信号处理能得到短脉冲的信号。但是，为了得到精确的目标参数，接收信号的 SNR 必须足够高，这一要求经常与分辨率相矛盾。提高信号的平均发射功率，可以增大 SNR。这可以通过增大峰值功率或发射信号长度（持续时间）予以实现。由于高峰值功率

较难实现，通常都采用后一种方法，经延伸后的信号长度一般远高于分辨率所要求的脉冲长度。在信号处理中，将这种通过发送一个展宽脉冲，再对其进行脉冲压缩以得到所需分辨率的技术称为脉冲压缩。

脉冲压缩的理论基础是匹配滤波。对雷达接收的回波信号进行脉冲压缩后有两个好处：增加信噪比；压缩信号宽度。匹配滤波是一种最优滤波器，只要我们给予输入的是某一确知信号，并加上白噪声，那么就能让输出的信噪比达到最大。

(2) 匹配滤波

1) 时域匹配滤波器

SAR 成像的回波信号在距离向和方位向都表现为线性调频信号。设线性调频信号为：

$$s(t) = \text{rect} \left(\frac{t}{T} \right) e^{-j\pi K t^2}$$

匹配滤波器的冲击响应函数为：

$$H(t) = \text{rect} \left(\frac{t}{T} \right) e^{j\pi K t^2}$$

匹配滤波器的输出为：

$$S_{\text{out}} = s(t) * H(t) = T \text{sinc}(\pi B t)$$

2) 频域匹配滤波器

由于时域匹配滤波器需要使用参考信号时间反褶后复共轭作为滤波核，计算量非常大，所以使用频域匹配滤波器更好点。

将原始数据进行距离向 FFT，根据驻相点原理，我们可以得到的频率信息为：

$$S_T(f, t_{\text{slow}}) = \text{rect}(f^2/B_r) \text{rect}(t_{\text{slow}} - X/v) \exp(-i\pi f^2/K_r) \cdot \exp(-i4\pi(f_c + f)/C * R(t_{\text{slow}}))$$

匹配滤波器是发射信号（参考信号）的复共轭：

$$S_t^*(-t_{\text{fast}}) = \exp(i\pi K_r t_{\text{fast}}^2)$$

FFT 之后得到的滤波器是：

$$H(f) = \exp(i\pi f^2/K_r)$$

ifft 之后得到的结果是这个样子

$$S_t(t_{\text{fast}}, t_{\text{slow}}) = \text{sinc}(B_r(t_{\text{fast}} - 2R(t_{\text{slow}})/C)) \cdot \text{rect}(t_{\text{slow}} - X/v) \exp(-i4\pi f_c/C * R(t_{\text{slow}}))$$

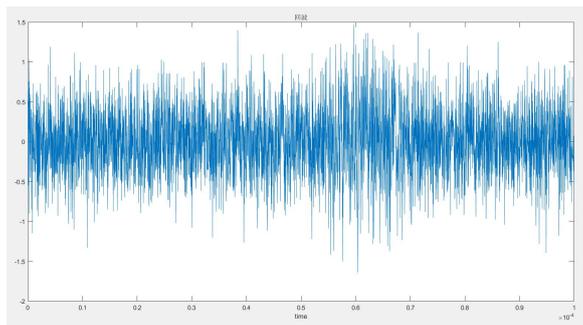
因此成像中的匹配滤波器如下图所示



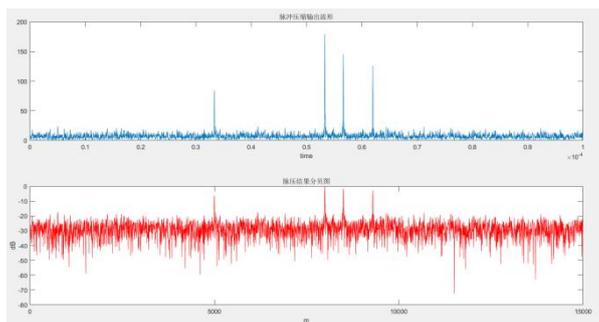
(3) 对脉冲压缩效果仿真：

参数名称	参数值
带宽 (B)	20MHz
脉冲宽度 (Iao)	10e-6s
脉冲重复间隔 (T)	1e-4s
采样频率 (fs)	20MHz
目标1距离 (R1)	5000m
目标2距离 (R2)	8000m
目标3距离 (R3)	8300m
目标4距离 (R4)	9500m

得到回波如下图：



对回波进行脉冲压缩后的波形如下图：



可以看到，由于目标 2、目标 3 和目标 4 相距较近，他们的回波信号由接收机接收后会混在一起，难以分辨，但是经过脉冲压缩后，可以很容易的分辨出来。

(4) 距离压缩

“信号数据”或“原始数据”指的是雷达系统接收到的数据。数据首先被解至基带，以便将距离频率中心置零。

$$s_0(\tau, \eta) = A_0 w_r[\tau - 2R(\eta)/c] w_a(\eta - \eta_c) \times \exp \{-j4\pi f_0 R(\eta)/c\} \exp \{j\pi K_r (\tau - 2R(\eta)/c)^2\}$$

其中， A_0 ——任意复常， τ ——距离时间， η ——近距方位时间， η_c ——波束中心偏离时间， $w_r(\tau)$ ——距离包络（矩形窗函数）， $w_a(\eta)$ ——方位包络（sinc 平方函数）， f_0 ——雷达中心频率， K_r ——距离 chirp 调频率， $R(\eta)$ ——瞬时斜距。则距离压缩输出（匹配滤波）：

$$s_{rc} = IFFT_t \{S_0\{f_v, \eta\} H(f_l)\} = A_0 * p_r[\tau - 2R(\eta)/c] * \omega_a(\eta - \eta_c) * \exp \{-j4\pi f_0 R(\eta)/c\}$$

上式中： A_0 为包括散射系数在内的增益， $p_r[\tau - 2R(\eta)/c]$ 为窗函数的傅立叶逆变换。例如对于矩形窗，气味 sinc 形的距离包络，包含了随方位变化的目标距离

徙动 $2R(\eta)/c$ 。后两项为距离压缩无关的方位向上的增益与相位。
仿真：

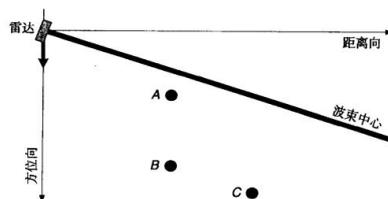
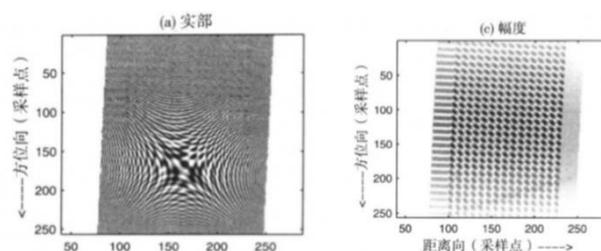


图 6.2 三点仿真目标位置



原始信号

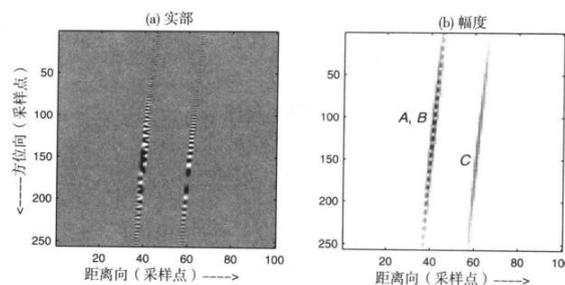


图 6.4 距离压缩数据 (与图 6.3 相比, x 轴经过了放大)

三.后向投影算法

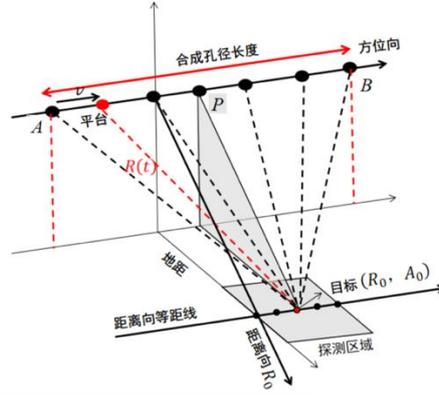
我们在此章节采用新的符号系统。

(1) 真实 SAR 系统回波信号的建模

前面的小节中, 我们给出了单目标的回波模型, 而在实际的场景中, 地形复杂, 各个物体的散射特性不同, 接受的回波信号是所有物体的叠加信号, 这使得回波模型相当复杂。直接分析探测区域的回波信号是困难且没有必要的, 我们由此引进探测区域的离散化和平台飞行的离散化。

探测区域离散化是将探测区域视为由多个散射点组成的集合, 从而将区域回波信号模型的建立转化为对这些散射点回波信号模型的建立。通过这种方式, 只需要建立任意散射点的回波信号模型, 就可以表示整个探测区域的回波信号模型。离散化的准则是, 在离散间隔内, 物体的散射特性基本保持不变。

平台飞行离散化在 SAR 雷达数据介绍中提到过, 分为慢时间和快时间。实际中, 雷达一边移动, 一边向目标区域发射 LFM 波。但在离散化后, 我们认为雷达平台的飞行过程是一个“走停”的模式。在一个脉冲内, 我们认为平台静止, 在该位置接受回波信号; 在下一个脉冲时间前, 平台瞬移到另一位置; 然后如此往复。这个离散过程只有在电磁波传播速度远大于平台速度, 即 SAR 一次发射、接收过程中, 雷达的位置基本不变的情况下才成立。



针对于上图的 SAR 探测示意图，对于红色目标点，从 A 点开始照射目标，到 P 点离目标最近，并在 B 点刚好离开红点目标。平台从 A 到 B 都能接收到红点目标的回波信号。

假设雷达 t 时刻飞到红点位置，雷达发射脉冲信号 $s(t)$ ，此时红色目标点的回波可以写成：

$$r(\tau; t) = \sigma(R_0, A_0) s\left(\tau - \frac{2R(t)}{c}\right) w_a\left(\frac{t - t_p}{T_{syn}}\right)$$

其中， $\sigma(R_0, A_0)$ 表示 (R_0, A_0) 出物体的散射性质等， T_{syn} 表示合成孔径时长， w_a

可认为是矩形窗（在理想状态下）， τ 是快时间， t 是慢时间。 t_p 为距离目标最短时刻。

在平台飞行离散化的假设下，距离的也是随慢时间变化而与快时间无关的：

$$R(t) = \sqrt{R_0^2 + v^2(t - t_p)^2}$$

可以发现，这个回波模型只含有时延部分和衰减系数，我们可以进一步写作卷积形式：

$$r(\tau, t) = \left\{ s(\tau) w_a\left(\frac{t}{T_{syn}}\right) \right\} \otimes h(\tau, t)$$

$$h(\tau, t) = \sigma(R_0, A_0) \delta\left(\tau - \frac{2R(t)}{c}, t - t_p\right)$$

即可以把任何一个坐标为 (R_0, A_0) 看作一个系统，系统的冲激响应为 $h(\tau, t)$ 。

经过以上的分析，SAR 成像问题变成了利用发射信号 $s(\tau)$ ，从回波信号 $r(\tau, t)$ 中反卷积出系统冲激响应 $h(\tau, t)$ 的问题。从冲激响应的表达式中，我们已经可以隐约发现，快时间部分出现了慢时间的耦合项，这会造成距离徙动的现象，我们在

后面会做距离徙动矫正，将冲激响应矫正为： $\delta\left(\tau - \frac{2R_0}{c}, t - t_p\right)$ 可以正确进行方向维度压缩。

(2) 距离脉冲压缩

依靠前面真实 SAR 系统回波信号的建模，我们可以展开写出回波信号的表达式：

$$r(\tau, t) = \sigma w_a \left(\frac{t - t_p}{T_{syn}} \right) \text{rect} \left(\frac{\tau - \frac{2R(t)}{c}}{T_p} \right) e^{j\pi K \left(\tau - \frac{2R(t)}{c} \right)^2} e^{j2\pi f_0 \left(\tau - \frac{2R(t)}{c} \right)}$$

我们基于探测区域离散化的假设，向回波信号中加入目标像素的坐标，并将回波信号下变频处理：

$$r(\tau, t|x, y) = \sigma w_a \left(\frac{t - t_p}{T_{syn}} \right) \text{rect} \left(\frac{\tau - \frac{2R(t|x, y)}{c}}{T_p} \right) e^{j\pi K \left(\tau - \frac{2R(t|x, y)}{c} \right)^2} e^{-j4\pi f_0 \frac{R(t|x, y)}{c}}$$

$$\text{其中, } \begin{cases} \tau = nT_r & n = 0:N-1 \\ t = mT_a & m = 0:M-1 \end{cases}$$

τ 是快时间的采样， T_r 为其采样的时间间隔； t 为慢时间采样， T_a 为其采样的时间间隔。

利用前面章节提到的距离维度匹配滤波的技术，得到距离维度压缩的信号：

$$r_1(\tau, t|x, y) = \sigma N w_a \left(\frac{t - t_p}{T_{syn}} \right) \text{sinc} \left(K T_p \left(\tau - \frac{2R(t|x, y)}{c} \right) \right) e^{-j4\pi f_0 \frac{R(t|x, y)}{c}}$$

可以知道，这是 sinc 函数型的信号，当 $\tau = \frac{2R(t|x, y)}{c}$ 时，信号会出现峰值，由此确定目标在距离维度上的位置。

(3) 距离徙动曲线

在探测区域离散化假设里，我们已经将探测区域网格化，将其划分为 $N_a \times N_r$ 的网格点。对于任意的网格点目标 (x_0, y_0) ，回波信号（经过距离维度压缩）写作：

$$r_2(\tau', t|x_0, y_0) = \sigma N w_a \left(\frac{t - t_p}{T_{syn}} \right) \text{sinc} \left(K T_p \left(\tau' - \frac{2R(t|x_0, y_0)}{c} \right) \right) e^{-j4\pi f_0 \frac{R(t|x_0, y_0)}{c}}$$

信号的峰值出现在 sinc 函数的变量为 0 处，于是，对应的距离徙动曲线可以求出：

$$\tau' = \frac{2R(t|x_0, y_0)}{c}$$

这里可以看到，在坐标 (x_0, y_0) 确定，慢时间 t 确定的情况下， $R(t|x_0, y_0)$ 是确定的，但是 τ' 是连续的时间变量，而我们的系统中 τ 是离散的，这样就会导致在不同的慢时间下，找不到 τ' 所对应的离散时间点 τ ，这会造成较大的误差，为了减少这部分的误差，我们一般会沿距离维度进行插值处理，以找到与 τ' 更接近的离散时间点，这时候，在找到的离散时间点上，回波信号可以表达为：

$$r_2(t|x_0, y_0) = \sigma N w_a \left(\frac{t - t_p}{T_{syn}} \right) e^{-j4\pi f_0 \frac{R(t|x_0, y_0)}{c}}$$

插值的准确度将影响此处信号的误差。

如果考虑雷达平台正侧视的情况，可将距离方程近似为抛物线：

$$R(t) = \sqrt{R_0^2 + v^2 t^2} \approx R_0 + \frac{v^2 t^2}{2R_0}$$

(4) 多普勒相位补偿

平台的运动会造成距离徙动的同时，还会因为慢时间的变化（即方位向上）带来一个相位的变换。在快时间内，因为平台运动离散化的假设，可以忽略其相位变化，在慢时间内，因为时间间隔是可观的，所以不能忽略。

由前文分析可得，经过插值后的信号为：

$$r_2(t|x_0, y_0) = \sigma N w_a \left(\frac{t - t_p}{T_{syn}} \right) e^{-j4\pi f_0 \frac{R(t|x_0, y_0)}{c}}$$

我们自然的在时域上乘以相应的相位项 $e^{j4\pi f_0 \frac{R(t|x_0, y_0)}{c}}$ 即可：

$$r_3(t|x_0, y_0) = \sigma N w_a \left(\frac{t - t_p}{T_{syn}} \right)$$

(5) 相干累加成像

对于进行过相位补偿的信号进行相干叠加，对整个目标区域的像素点进行遍历，可以得到最终的成像图像：

$$I(x_0, y_0) = \sum_M \sigma N w_a \left(\frac{t - t_p}{T_{syn}} \right)$$

这对于 (x_0, y_0) 就完成了相干的叠加，该点如有目标物体，就会出现峰值。当然，在叠加时，也会有其他像素点的干扰：

$$\sum_{x \neq x_0} r_2(t|x, y)$$

但由于干扰的部分仍要通过相位补偿 $e^{j4\pi f_0 \frac{R(t|x_0, y_0)}{c}}$ ，但实际的相位变化却不是这样，由此，这部分干扰的信号会在相干累加时被抑制。由此，我们完成了 SAR 的图像处理。

(5) 极坐标格式算法——PFA

在实验仿真项目中，我们使用的是极坐标格式算法（Polar format algorithm），这种算法采用的是极坐标格式存储数据，可以有效解决原理成像区中心散射点的越分辨单元走动的问题，极大的提高了聚束 SAR 的有效聚焦成像范围。

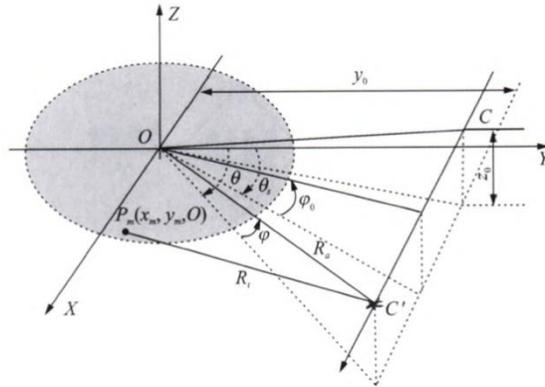
假设雷达发射的 LFM 波是：（省略不影响分析的项）

$$s(\tau) = \exp(j2\pi f_0 \tau) \cdot \exp(j\pi k \tau^2)$$

在其经过距离向压缩后和距离徙动处理后：

$$s(f_v, t) = \exp \left[j \frac{4\pi}{c} (f_0 + f_\tau) R_\Delta \right]$$

可见相位补偿项还是与 R_Δ （雷达天线相位中心到场景中心到目标的差分距离）有关。



如上图所示，PFA 以场景中心为坐标系原点，利用俯仰角和方位角来表达雷达天线相位中心到场景中心到目标的差分距离 R_{Δ} 。PFA 采用了平面波假设，可以证明（证明将在下一小节给出），差分距离可表示为：

$$R_{\Delta} = R_a - R_t \approx x_m \cos \varphi \sin \theta + y_m \cos \varphi \cos \theta$$

带入回波信号：

$$s(f_{\tau}, t) = \exp \left[j \frac{4\pi}{c} (f_0 + f_{\tau}) \cos \varphi (x_m \sin \theta + y_m \cos \theta) \right]$$

也可以用空间波数表示：

$$s_B(k_x, k_y) = \exp [j(x_m k_x + y_m k_y)]$$

$$k_x = \frac{4\pi}{c} (f_c + f_{\tau}) \cos \varphi \sin \theta$$

$$k_y = \frac{4\pi}{c} (f_c + f_{\tau}) \cos \varphi \cos \theta$$

其余的处理方式与常规 BP 算法一致。

（6）平面波假设下差分距离的证明

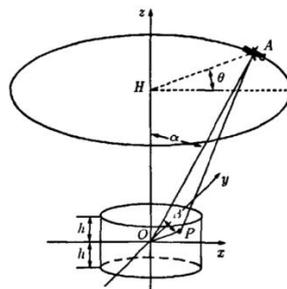
平面波假设：

平面波假设是电磁学中常用的假设之一，这个假设可以有效的简化一些复杂的电磁计算。

平面波假设的基本原理是假设电磁波在传播方向上是无限延伸的平面波，即波向量和电磁场的幅度与相位都是均匀分布的。

CSAR 差分距离的证明：

在实验中，SAR 雷达在测量时，俯仰角是不变的，这属于圆迹 SAR 的极坐标格式测量。测量示意图如下：



变量说明：雷达平台 A 坐标为 (R_0, α, θ) ，其中 $R_0 = \sqrt{R^2 + H^2}$ 为雷达天线相位中心到场景中心的距离。目标点直角坐标为： (x_p, y_p, z_p) ，球坐标（以场景中心为原点）为： (ρ, η, φ) 。雷达天线相位中心到目标的距离为： $R_p(\theta)$ 。雷达天线相位中心到场景中心到目标的差分距离 R_Δ 可以表达为：

$$\begin{aligned} R_\Delta &= R_p(\theta) - R_0 = \sqrt{R_0^2 + \rho^2 - 2\rho R_0 \cos \beta} - R_0 \\ &= -\rho \cos \beta + \frac{\sin^2 \beta}{2R_0} \rho^2 + \dots \end{aligned}$$

其中：

$$\cos \beta = \sin \alpha \sin \eta \cos (\theta - \varphi) + \cos \alpha \cos \eta$$

将 $\cos \beta$ 带入 R_Δ ：

$$\begin{aligned} R_\Delta &= \rho [\sin \alpha \sin \eta \cos (\theta - \varphi) + \cos \alpha \cos \eta] \\ &\quad - \frac{(\rho \sin \beta)^2}{2R_0} + \dots \end{aligned}$$

基于平面波假设， R_Δ 近似至一次项。然后对于目标点 A 做坐标变换：

$$x_p = \rho \sin \eta \cos \varphi, y_p = \rho \sin \eta \sin \varphi, z_p = \rho \cos \eta$$

可得：

$$R_\Delta = x_p \cdot \sin \alpha \cdot \cos \theta + y_p \cdot \sin \alpha \cdot \sin \theta + z_p \cdot \cos \alpha$$

由于本实验是二维平面成像， $z_p = 0$ ，故只取前两项。

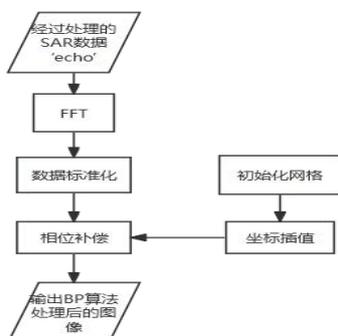
平面波近似的成立条件是：

$$R_0 \gg \rho$$

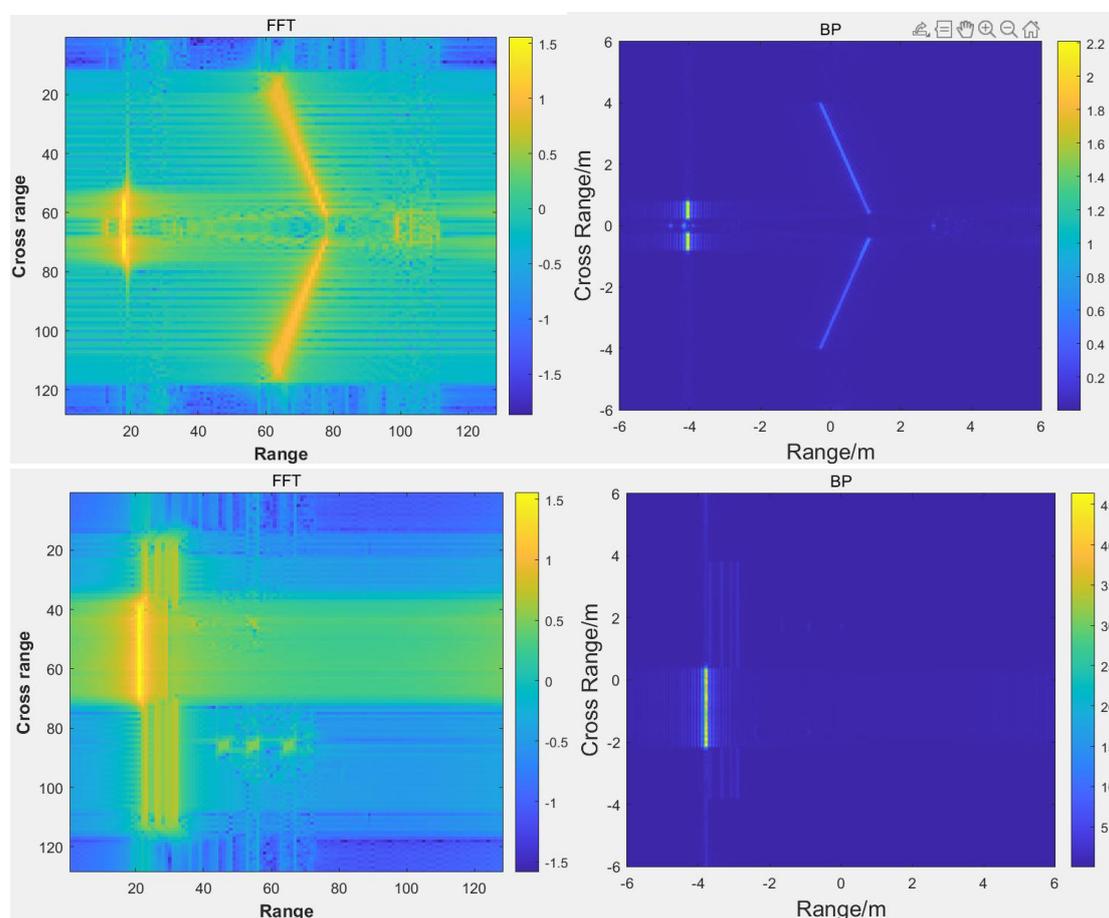
即雷达到场景中心的距离尺度远大于场景的长宽尺度。

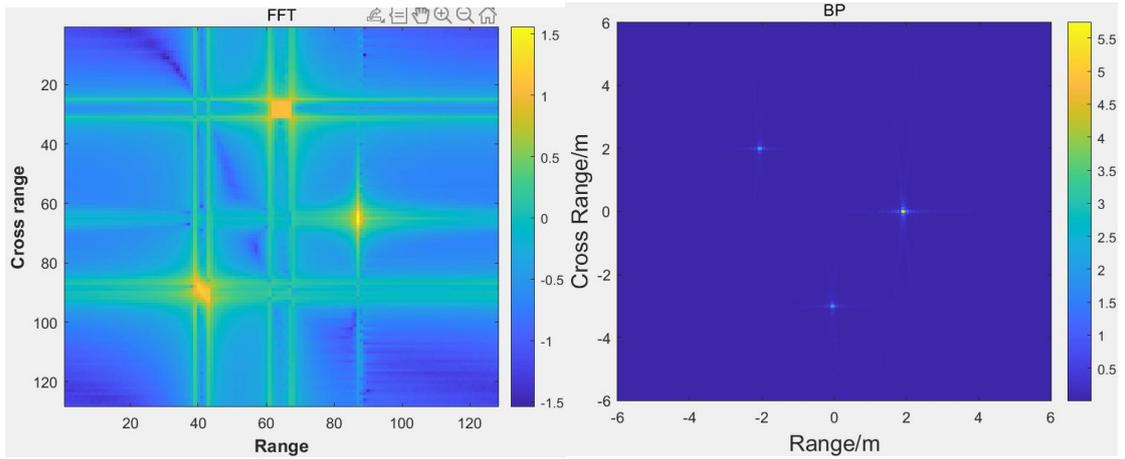
四. BP 算法代码架构与实验结果

1. BP 成像算法代码架构



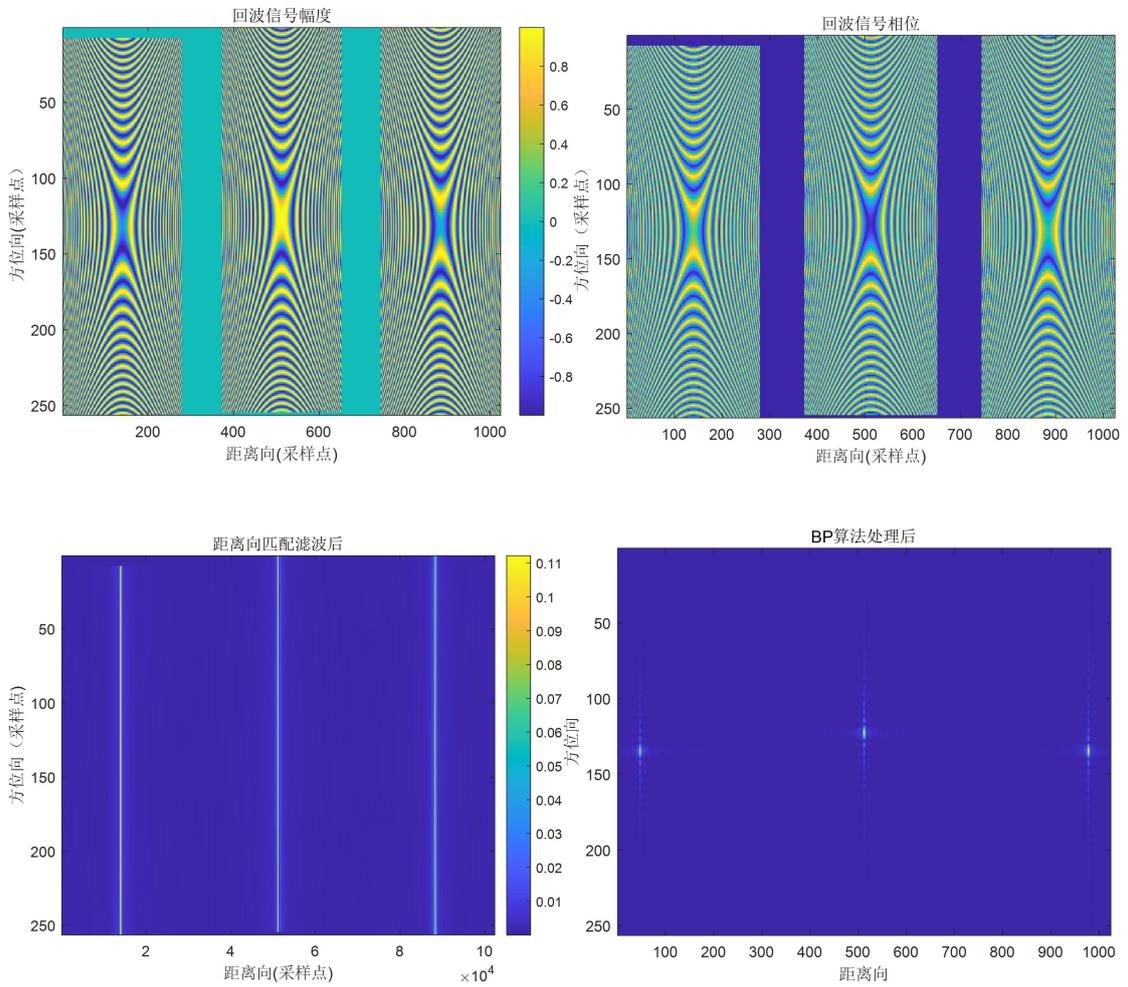
2. BP 成像结果



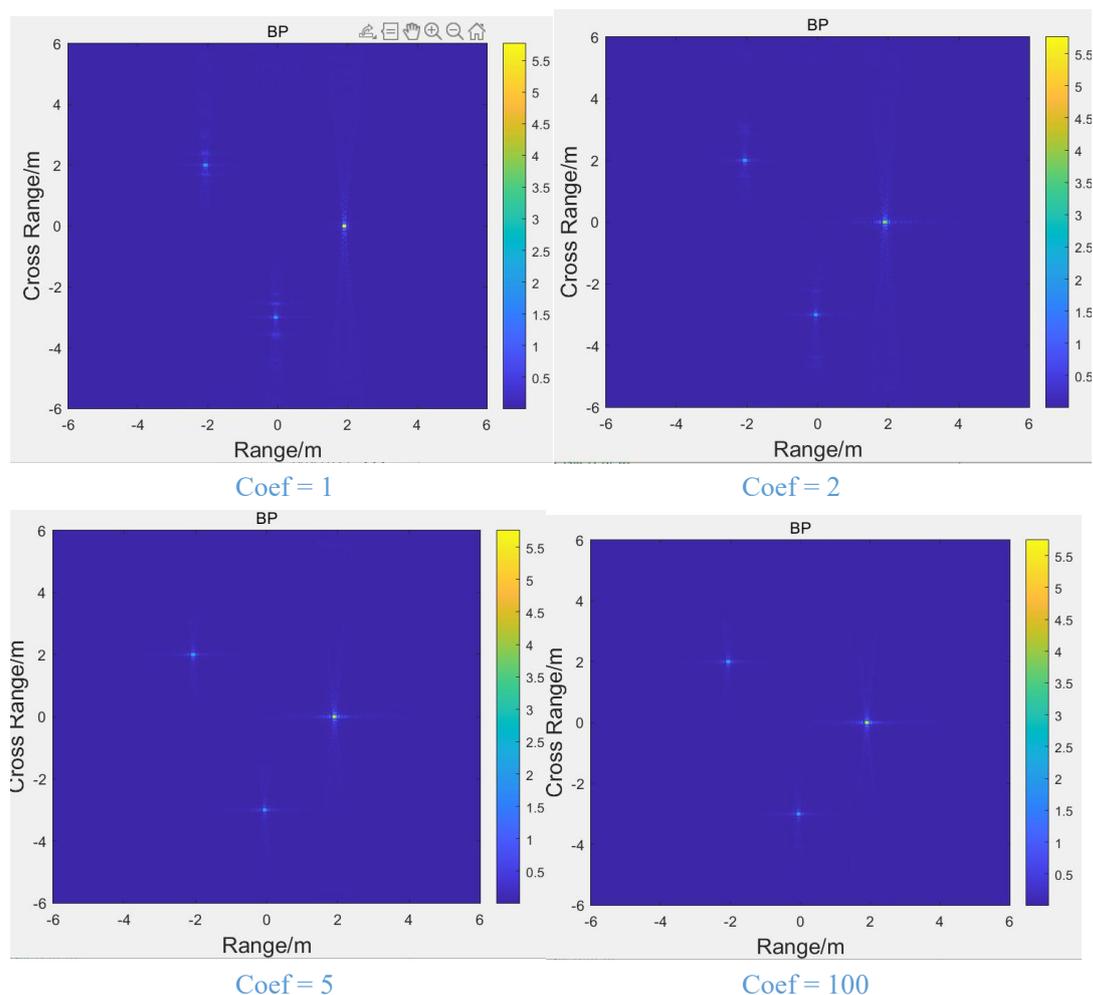


由结果可以看出，经过 BP 算法处理后图像展现出了物体大致轮廓，成像结果较为理想。

3.微波数据成像过程可视化



4.插值系数对于成像的影响



由结果可以看出，当插值系数不够大，可能会导致相位补偿不足。

五.心得体会与感想

BP 算法是应用于 SAR 雷达成像的一种图像重构和信号处理的重要算法，特别是在雷达成像和医学成像中，具有重要的应用价值。随着技术的发展，其变体和改进算法将继续促进这些领域的进步。

参考文献

- [1]林赞,谭维贤,洪文等.圆迹 SAR 极坐标格式算法研究[J].电子与信息学报,2010,32(12):2802-2807.
- [2]梁媚蓉,王晨沁,毛新华.基于极坐标格式算法的大斜视条带 SAR 子孔径拼接成像算法[J].南京航空航天大学学报,2016,48(05):649-655.DOI:10.16356/j.1005-2615.2016.05.006.
- [3]王韶.运动平台毫米波雷达 SAR 成像技术研究[D].哈尔滨工业大学,2022.DOI:10.27061/d.cnki.ghgdu.2021.003900.
- [4]Lan G.Cumming Frank H.Wong.合成孔径雷达成像:算法与实现[M].电子工业出版社,2012.

- [5]林春辉. 单基/双基 SAR 成像若干关键问题研究[D].西安电子科技大学,2020.DOI:10.27389/d.cnki.gxadu.2019.000035.
- [6]邢孟道,谢意远,高悦欣等.电磁散射特征提取与成像识别算法综述[J].雷达学报,2022,11(06):921-942.
- [7]班阳阳. 基于后向投影的 SAR 成像算法与 GPU 加速研究[D].南京航空航天大学,2016.
- [8]沈淳,高航,王雪松等.基于激光雷达探测的飞机尾流特征参数反演系统[J].雷达学报,2020,9(06):1032-1044.
- [9]谭小龙. 逆合成孔径雷达图像仿真与目标识别技术研究[D].安徽大学,2020.DOI:10.26917/d.cnki.ganhu.2020.000708.