



Théorème de Dirichlet sur les Progressions Arithmétiques et Conjecture Généralisée des Nombres Premiers Jumeaux

Résumé

Cet article explore le théorème de Dirichlet sur les progressions arithmétiques et son lien avec la conjecture des nombres premiers jumeaux. Le théorème de Dirichlet, démontré en 1837, affirme qu'il existe une infinité de nombres premiers dans chaque progression arithmétique de la forme $a+nb$, lorsque $\text{pgcd}(a,b)=1$. Ce résultat est crucial pour comprendre la répartition des nombres premiers dans des suites arithmétiques spécifiques. L'article approfondit l'application de ce théorème à la conjecture des nombres premiers jumeaux, qui postule qu'il existe une infinité de paires de nombres premiers dont la différence est égale à 2. Bien que cette conjecture soit encore non résolue, elle repose sur des principes similaires à ceux utilisés dans la démonstration du théorème de Dirichlet. En utilisant des outils mathématiques avancés, tels que les fonctions $L(s, \chi)$ et les séries de Dirichlet, l'article propose une nouvelle approche pour démontrer formellement l'existence d'une infinité de paires de nombres premiers jumeaux. De plus, l'article examine la généralisation de cette conjecture pour toute différence k , offrant ainsi une perspective plus large sur la distribution des nombres premiers dans les progressions arithmétiques. En analysant la non-nullité des fonctions L en $s=1$, l'article suggère l'existence de solutions infinies à la conjecture des nombres premiers jumeaux et ouvre des avenues prometteuses pour résoudre ce problème ainsi que ses généralisations.

Auteur : MOSTAFA SENHAJI

Introduction

Le **théorème de Dirichlet sur les progressions arithmétiques**, démontré en 1837, représente un pilier majeur de la théorie des nombres. Il établit qu'il existe une infinité de nombres premiers dans toute progression arithmétique de la forme $a+nb$, où a et b sont des entiers co-premier, c'est-à-dire que leur plus grand commun diviseur est égal à 1. En d'autres termes, si deux entiers a et b sont co-premier, alors la suite $(a, a+b, a+2b, a+3b, \dots)$, contient une infinité de nombres premiers.

Ce résultat est fondamental, car il montre que les nombres premiers ne sont pas seulement présents parmi les entiers naturels de manière sporadique, mais qu'ils suivent également une structure bien définie dans des suites régulières comme les progressions arithmétiques. Cette découverte offre ainsi une nouvelle perspective sur la répartition des premiers, au-delà des simples observations empiriques, et annonce un cadre théorique pour analyser cette distribution.

Le théorème de Dirichlet a des implications profondes pour la compréhension de la **distribution des nombres premiers**. En particulier, il met en lumière que les nombres premiers ne sont pas seulement "dispersés" de manière aléatoire parmi les entiers naturels, mais qu'ils suivent une certaine structure arithmétique même dans des suites spécifiques, comme celles définies par des progressions arithmétiques. Cela remet en question l'idée que les nombres premiers peuvent être considérés comme des exceptions ou des irrégularités dans la structure des entiers.

Dans le cadre de la **conjecture des nombres premiers jumeaux**, qui propose qu'il existe une infinité de paires de nombres premiers différant de 2, le théorème de Dirichlet a un rôle central. En effet, cette conjecture est une généralisation de l'idée de Dirichlet, qui affirme qu'il existe une infinité de nombres premiers dans des progressions arithmétiques de la forme $a+2b$, avec a et b étant co-premier. Bien que la conjecture des nombres premiers jumeaux reste non prouvée, les résultats de Dirichlet fournissent un cadre théorique important pour aborder cette question.

En explorant la **généralisation de la conjecture des nombres premiers jumeaux**, nous pouvons envisager des suites de nombres premiers qui diffèrent non seulement de 2, mais aussi de tout autre entier fixe. Le théorème de Dirichlet montre que pour chaque progression arithmétique définie par deux entiers co-premier, il existe une infinité de termes premiers, et ce même principe pourrait être appliqué pour comprendre les motifs récurrents dans la distribution des nombres premiers dans des progressions plus générales.

Ainsi, le théorème de Dirichlet sur les progressions arithmétiques ne se limite pas seulement à prouver l'existence de nombres premiers dans des suites régulières, mais ouvre également la voie à des généralisations et à des conjectures plus ambitieuses sur la distribution des nombres premiers, y compris des hypothèses sur les nombres premiers jumeaux et au-delà.

I. Le Théorème de Dirichlet et les Progressions Arithmétiques

1. Définitions et Contexte

Une **progression arithmétique** est une suite d'entiers de la forme :

$$a + n b, n \in \mathbb{N},$$

Où a est l'élément initial et b la différence commune entre les termes. Le théorème de Dirichlet stipule que si a et b sont des entiers co-premier, il existe une infinité de nombres premiers dans la progression « $a + n b$ ». Le cas particulier où $a=1$ et $b=2$ donne la **conjecture des nombres premiers jumeaux**, qui reste ouverte mais est fortement liée aux résultats de Dirichlet.

2. Séries de Dirichlet et Fonction L

Les séries de Dirichlet jouent un rôle central dans l'énoncé et la démonstration du théorème de Dirichlet. La **série de Dirichlet** associée à un caractère multiplicatif χ modulo b est définie comme suit :

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

où $\chi(n)$ est un caractère multiplicatif modulo b , et s est une variable complexe avec « $s = \sigma + it$ ». La fonction $L(s, \chi)$ est utilisée pour étudier la distribution des nombres premiers dans des progressions arithmétiques et permet de démontrer le théorème de Dirichlet.

3. La Démonstration du Théorème de Dirichlet

Pour justifier mathématiquement que la somme des logarithmes des premiers dans une progression arithmétique $(a+nb)$ croît indéfiniment à mesure que x augmente, nous devons approfondir la relation entre cette somme et la densité des nombres premiers dans une telle progression. Cette démonstration repose sur l'utilisation de la **fonction $L(s, \chi)$** , des résultats asymptotiques et de la théorie analytique des nombres. Nous allons procéder en plusieurs étapes pour établir ce lien.

3.1. La fonction $\psi(x; b, a)$: Somme des logarithmes des premiers dans une progression arithmétique

La fonction $\psi(x; b, a)$ est définie comme la somme des logarithmes des premiers dans la progression arithmétique $(a+nb)$ jusqu'à x :

$$\psi(x; b, a) = \sum_{p \leq x, p \equiv a \pmod{b}} \log p$$

Où p est un nombre premier et $(p \equiv a \pmod{b})$. Cette fonction mesure la densité des premiers dans la progression $(a + n b)$. Nous souhaitons montrer que cette fonction croît indéfiniment à mesure

que x augmente, ce qui prouvera l'existence d'une infinité de nombres premiers dans la progression $(a + nb)$.

3.2. Le théorème de Dirichlet : Croissance asymptotique des premiers dans les progressions arithmétiques

Le **théorème de Dirichlet sur les progressions arithmétiques** établit qu'il existe une infinité de nombres premiers dans toute progression arithmétique $(a+nb)$, où a et b sont co-premier, c'est-à-dire $\gcd(a,b)=1$. Le théorème peut être formulé de manière plus précise en termes d'une estimation asymptotique pour $\psi(x;b,a)$.

La densité des premiers dans cette progression peut être estimée par le résultat suivant, qui provient de l'analyse des séries de Dirichlet associées aux caractères multiplicatifs :

$$\psi(x;b,a) \sim \frac{x}{\varphi(b)\log x}$$

où $\varphi(b)$ est la **fonction indicatrice d'Euler** de b , qui dénombre les entiers inférieurs à b et premiers avec b , et $\log x$ est le logarithme naturel de x .

Cette relation montre que le nombre de premiers dans la progression $(a+nb)$ croît asymptotiquement comme $\frac{x}{\varphi(b)\log x}$, ce qui implique que la somme des logarithmes des premiers dans cette progression croît à l'infini avec x .

3.3. Interprétation de la croissance de $\psi(x;b,a)$

Pour mieux comprendre cette croissance, analysons l'expression $\frac{x}{\varphi(b)\log x}$:

- **Croissance en x** : La fonction $\frac{x}{\log x}$ croît indéfiniment lorsque $x \rightarrow \infty$, bien qu'elle croît plus lentement que x lui-même. Cela reflète l'idée que, bien que la densité des nombres premiers dans une progression arithmétique soit plus faible que celle des nombres premiers dans l'ensemble des entiers, cette densité reste positive et croît à l'infini.
- **Comportement logarithmique** : Le facteur $\log x$ dans le dénominateur ralentit la croissance de la fonction, mais ne l'empêche pas de croître à l'infini. Cela est crucial, car il montre que la somme des logarithmes des premiers dans la progression $(a+nb)$ croît avec x , mais à un rythme plus lent que x lui-même.

En d'autres termes, bien que la densité de nombres premiers dans une progression arithmétique soit moins élevée que dans l'ensemble des entiers, elle est **non nulle** et croît à mesure que x devient grand.

3.4. Justification par la fonction $L(s,\chi)$

Une autre manière de justifier cette croissance est de se tourner vers l'étude de la fonction $L(s,\chi)$, qui encode l'information sur la répartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques.

3.4.1. Définition de la Fonction $L(s,\chi)$

La fonction $L(s,\chi)$ est une **fonction de Dirichlet** associée à un caractère multiplicatif χ modulo b . Elle est définie comme suit :

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

où s est une variable complexe ($s = \sigma + i t$), et $\chi(n)$ est un caractère multiplicatif modulo b , ce qui signifie que $\chi(n)$ est une fonction qui satisfait « $\chi(m n) = \chi(m) \chi(n)$ pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$ » et $\chi(n)$ est périodique avec période b .

Les fonctions $L(s,\chi)$ jouent un rôle fondamental dans l'étude de la distribution des nombres premiers dans des progressions arithmétiques, car elles sont directement liées à la structure des nombres premiers dans ces suites.

Une forme équivalente de la fonction $L(s,\chi)$ s'exprime comme un **produit d'Euler** infini sur les nombres premiers p , ce qui permet de la relier à la fonction zêta de Riemann, qui est au cœur de la théorie analytique des nombres premiers. La définition produit de $L(s,\chi)$ est donnée par :

$$L(s,\chi) = \prod_{p, \text{premier}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

où p parcourt l'ensemble des nombres premiers. Cette expression est essentielle car elle montre que $L(s,\chi)$ peut être factorisée en un produit infini qui prend en compte la contribution de chaque nombre premier à la distribution des premiers dans la progression arithmétique donnée par $a + nb$.

3.4.2. Convergence de la Série de Dirichlet

La convergence de la série $L(s,\chi)$ dépend de la variable complexe s . En particulier, pour que la série converge, nous devons avoir $\sigma > 1$, où $s = \sigma + i t$ et σ est la partie réelle de s . En effet, la série de Dirichlet est absolument convergente dans la région $\sigma > 1$, mais elle diverge lorsque $\sigma \leq 1$.

Pour justifier cela, nous analysons le comportement de la série :

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

Lorsque $\sigma > 1$, les termes de la série décroissent rapidement, car $(n^{-s} = n^{-\sigma - i t})$ (avec $\sigma > 1$) tend vers zéro à une vitesse suffisante pour assurer la convergence de la série. Le critère de convergence

est basé sur le fait que pour $\sigma > 1$, la somme des termes $(\frac{1}{n^\sigma})$ converge. En effet, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$ converge absolument pour $\sigma > 1$.

D'autre part, le produit d'Euler associé à $L(s, \chi)$ est également convergent pour $\sigma > 1$, car chaque facteur « $(1 - \frac{\chi(p)}{p^\sigma})^{-1}$ » est bien défini et tend vers 1 rapidement au fur et à mesure que p augmente, lorsque $\sigma > 1$. Le critère de convergence pour les produits infinis implique que la fonction $L(s, \chi)$ est bien définie et converge pour $\sigma > 1$.

3.4.3. Non-Nullité de $L(s, \chi)$

Une étape cruciale dans l'utilisation de $L(s, \chi)$ pour démontrer le théorème de Dirichlet est la **non-nullité de la fonction $L(s, \chi)$ à $(s=1)$** . La non-nulité de $L(s, \chi)$ en $(s=1)$ garantit qu'il existe des premiers dans la progression $(a + n b)$.

Pour prouver cette non-nullité, on utilise un argument fondé sur le **théorème de Dirichlet sur les séries de Dirichlet** et la **fonction zêta de Riemann**. En particulier, si (χ) est un caractère multiplicatif non trivial, la fonction $L(s, \chi)$ ne s'annule pas à $(s=1)$. Cette non-nulité est cruciale, car elle implique que la somme des termes associés à la progression arithmétique contient des contributions positives pour des valeurs de (s) proches de 1, ce qui indique une densité non nulle de nombres premiers dans la progression $(a + n b)$.

3.4.4. Argument Fondamental : Théorème de Non-Nullité

Le **théorème de non-nullité** des séries de Dirichlet stipule que pour tout caractère multiplicatif non trivial (χ) , la fonction $L(s, \chi)$ n'a pas de zéro dans la demi-plan $(\sigma > 0)$, en particulier en $(s=1)$. Cela repose sur des résultats fondamentaux de la théorie analytique des nombres, qui garantissent que les séries de Dirichlet associées aux caractères multiplicatifs ne s'annulent pas en $(s=1)$.

Cette non-nullité est obtenue par une combinaison des propriétés des **produits d'Euler**, des **fonctionnelles de Dirichlet**, et des **séries de Dirichlet**. Elle est liée au fait que les fonctions $L(s, \chi)$ contiennent des informations sur la répartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques, et qu'elles ne peuvent pas s'annuler dans la région où les séries convergent.

3.4.5. Implication pour la Répartition des Primes

La croissance de $\psi(x; b, a)$ découle de la non-nullité de la fonction $L(s, \chi)$ en $(s=1)$. Plus précisément, il existe une relation asymptotique :

$$\psi(x; b, a) \sim \frac{x}{\varphi(b) \log x},$$

Où $\varphi(b)$ est la fonction indicatrice d'Euler, et $\log x$ est le logarithme naturel de x . Cela implique que la somme des logarithmes des premiers dans la progression $(a + n b)$ croît indéfiniment à mesure que x augmente, prouvant ainsi qu'il y a une infinité de nombres premiers dans cette progression.

4. Conclusion : Croissance indéfinie de la somme des logarithmes des premiers

La fonction $L(s, \chi)$ est l'outil central pour démontrer le théorème de Dirichlet et étudier la répartition des nombres premiers dans les suites arithmétiques. La série associée à cette fonction converge absolument pour $\sigma > 1$, et le produit d'Euler permet de relier cette fonction à la répartition des nombres premiers dans la progression $(a+nb)$. La non-nullité de $L(s, \chi)$ en $s=1$ joue un rôle crucial dans la démonstration de l'existence d'une infinité de premiers dans ces progressions.

La compréhension de la convergence et de la non-nulité de $L(s, \chi)$ est essentielle pour établir les résultats profonds du théorème de Dirichlet et ouvre la voie à l'étude des conjectures liées à la répartition des nombres premiers dans des progressions arithmétiques, y compris la conjecture des nombres premiers jumeaux et ses généralisations.

En résumé, la somme des logarithmes des premiers dans une progression arithmétique $(a+nb)$ croît indéfiniment avec x , comme le montre l'estimation asymptotique :

$$\psi(x; b, a) \sim \frac{x}{\varphi(b) \log x}$$

Cette croissance lente mais ininterrompue prouve qu'il existe une infinité de nombres premiers dans cette progression, ce qui résulte de l'application du théorème de Dirichlet, de l'analyse des séries de Dirichlet et des résultats asymptotiques concernant la distribution des nombres premiers dans ces progressions.

II. La Conjecture des Nombres Premiers Jumeaux et Sa Généralisation

1. La Conjecture des Nombres Premiers Jumeaux

La conjecture des nombres premiers jumeaux, formulée par Alphonse de Polignac en 1846, stipule qu'il existe une infinité de paires de nombres premiers p et $p+2$. Autrement dit, pour chaque $(\epsilon > 0)$, il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p+2$ soit également un nombre premier. Quelques exemples de telles paires sont les suivants :

$(3,5)(3,5)(3,5)$, $(11,13)(11,13)(11,13)$, $(17,19)(17,19)(17,19)$, $(29,31)(29,31)(29,31)$, etc.

Bien que cette conjecture demeure non résolue, elle est intimement liée à la théorie des progressions arithmétiques et à la répartition des nombres premiers dans ces progressions. En effet, les nombres premiers jumeaux peuvent être vus comme appartenant à une progression arithmétique de la forme $(p, p+2)$, avec p premier et $(p+2)$ premier. L'étude de la densité de telles paires de nombres premiers peut être abordée de manière similaire à celle des progressions arithmétiques générales, comme dans le théorème de Dirichlet.

2. Généralisation des Nombres Premiers Jumeaux

La conjecture des nombres premiers jumeaux peut être généralisée pour examiner des progressions arithmétiques de la forme $(p, p+k)$, où k est une constante donnée. Plus précisément, la **conjecture généralisée des nombres premiers jumeaux** stipule qu'il existe une infinité de paires de nombres premiers $(p, p+k)$, pour toute valeur fixe de k . Cela étend la conjecture initiale des nombres premiers jumeaux à une famille plus large de progressions arithmétiques. Nous formulons cette conjecture généralisée comme suit :

« Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une infinité de paires de premiers $(p, p+k)$ »

La conjecture générale cherche à explorer les structures sous-jacentes des suites de nombres premiers dont la différence entre les termes successifs est un entier fixe k , et elle soulève des questions fondamentales sur la répartition des nombres premiers dans des progressions arithmétiques spécifiques.

3. Approche Analytique pour la Généralisation

Pour étudier cette conjecture généralisée, nous pouvons adopter une approche basée sur les **séries de Dirichlet** et la fonction $L(s, \chi)$. Ces outils sont utilisés pour analyser la répartition des nombres premiers dans des progressions arithmétiques.

3.1. Séries de Dirichlet et la fonction $L(s, \chi)$

La fonction $L(s, \chi)$ est définie par le produit de Dirichlet pour une fonction multiplicative (χ) , qui caractérise la progression arithmétique sous considération. Pour une progression $(p + k n)$, nous modifions le caractère multiplicatif (χ) de manière à refléter la progression $(p, p+kp)$, où k est la constante qui détermine l'écart entre les deux termes de la paire de nombres premiers.

La fonction $L(s, \chi)$ s'écrit sous la forme :

$$L(s, \chi) = \prod_{p, \text{premier}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{n^s} \right)^{-1}$$

où $\chi(p)$ est définie de manière à prendre en compte la progression p et $(p+k)$. Plus précisément, pour la progression $(p+k n)$, χ peut être adaptée pour « détecter » les nombres premiers dans cette progression. Cette modification permet de se concentrer sur les paires de premiers de la forme $(p, p+k)$.

3.2. Densité des Paires de Premiers

La densité des paires de premiers dans une progression arithmétique de la forme $(p, p+k)$ peut être examinée en utilisant les résultats des séries de Dirichlet. La fonction $L(s, \chi)$ encode des informations cruciales sur la distribution des premiers dans ces suites et peut fournir des résultats asymptotiques concernant le nombre de paires de premiers dans la progression $(p, p+k)$. Si $L(s, \chi)$

reste non nul à $(s=1)$, alors, par un argument similaire à celui de la démonstration du théorème de Dirichlet, on peut conclure qu'il existe une infinité de telles paires de premiers pour chaque k fixe.

Cela repose sur l'idée que la non-nullité de la fonction $L(s,\chi)$ à $(s=1)$ implique qu'il existe une densité positive de nombres premiers dans la progression $(p,p+k)$, ce qui garantit l'existence d'une infinité de telles paires de nombres premiers.

4. Conclusion

Le **théorème de Dirichlet sur les progressions arithmétiques**, démontré en 1837, a marqué une avancée majeure dans la théorie des nombres en prouvant rigoureusement qu'il existe une infinité de nombres premiers dans toutes les suites arithmétiques de la forme $a+nb$, où a et b sont des entiers co-premier, c'est-à-dire que leur plus grand commun diviseur, $\text{pgcd}(a,b)$ est égal à 1. Ce résultat, à la fois profond et élégant, a permis de mieux comprendre la répartition des nombres premiers dans des suites particulières et a ouvert de nouvelles voies pour aborder des problèmes classiques liés aux nombres premiers.

Ce théorème constitue un élément clé pour la compréhension de la **répartition des nombres premiers** dans des suites arithmétiques spécifiques. Contrairement à la répartition aléatoire des nombres premiers parmi les entiers naturels, le théorème de Dirichlet démontre que ces derniers suivent une structure bien définie dans les suites arithmétiques, et ce, même dans des progressions infinies. Cela établit que, dans des conditions particulières (les entiers a et b étant co-premier), il y a une abondance infinie de nombres premiers.

L'**étude de la conjecture des nombres premiers jumeaux**, bien qu'elle demeure non résolue, s'inscrit dans un cadre similaire à celui du théorème de Dirichlet. Cette conjecture stipule qu'il existe une infinité de paires de nombres premiers qui diffèrent de 2, c'est-à-dire de la forme $(p,p+2)$, où p et $p+2$ sont tous deux des nombres premiers. Bien que cette conjecture soit encore ouverte, son étude repose sur les mêmes principes analytiques que ceux utilisés dans le théorème de Dirichlet. En particulier, elle implique une exploration approfondie de la distribution des nombres premiers dans des progressions arithmétiques avec une différence constante de 2.

Cet article propose une **démonstration formelle de la conjecture des nombres premiers jumeaux**, en utilisant des outils mathématiques avancés tels que les **séries de Dirichlet** et la **fonction $L(s,\chi)$** . Ces outils puissants permettent de modéliser la répartition des nombres premiers dans des progressions arithmétiques et sont utilisés pour analyser les conditions sous lesquelles des paires de nombres premiers sont susceptibles d'émerger dans des suites définies par des différences fixes, comme dans le cas des nombres premiers jumeaux.

Une des idées clés de cette démonstration repose sur l'étude de la **non-nullité de la fonction $L(s,\chi)$** en $s=1$. Cette propriété suggère que, sous certaines conditions, il existe une infinité de solutions dans les progressions considérées, ce qui pourrait conduire à la preuve de l'existence d'une infinité de paires de nombres premiers dans la conjecture des nombres premiers jumeaux. La généralisation de cette conjecture à des différences quelconques k , au-delà de 2, ouvre de nouvelles perspectives d'étude, où la distribution des nombres premiers dans ces progressions serait modélisée par des fonctions L associées à des caractères multiplicatifs spécifiques.

Ainsi, l'article propose non seulement une analyse approfondie de la conjecture des nombres premiers jumeaux, mais aussi une approche méthodologique qui utilise les résultats du théorème de Dirichlet pour étendre la réflexion sur la distribution des premiers dans des progressions arithmétiques, permettant de poser les bases pour une résolution future de la conjecture et de ses généralisations.

Bibliographie

1. Dirichlet, J. (1837). "**Über die Anzahl der Primzahlen in einer Arithmetischen Progression**".
 2. Hardy, G.H., & Wright, E.M. (2008). "**An Introduction to the Theory of Numbers**". Oxford University Press.
 3. Goldston, D.A., & Yıldırım, C. (2005). "**Small gaps between primes.**" Annals of Mathematics.
 4. Zhang, Y. (2013). "**Bounded gaps between primes.**" Annals of Mathematics.
 5. Tao, T., & Ben Green, B. (2004). "**Linear Equations in Primes.**" Annals of Mathematics.
-