环上反三角矩阵p-Drazin可逆性及其应用

郭世乐

福建技术师范学院电子与信息工程学院, 福建 福清 350300

陈焕艮

杭州师范大学数学学院, 浙江 杭州 311121

摘要: 本文探讨了环中反三角算子矩阵$\begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}$的p-Drazin逆, 并提出了环上两种新型反三角矩阵p-Drazin可逆的等价条件. 在此基础上，作为应用实例，研究了分块算子矩阵$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$在$\mathcal{B}(X \oplus X)$中的p-Drazin可逆性, 从而将p-Drazin逆的新性质推广到了算子矩阵领域.

关键词: p-Drazin 逆; 环, 反三角算子矩阵, 分块算子矩阵.

中图分类号: O153.3 **MSC2020:** 15A09, 15U90, 46H05.

文献标志号: A

文章编号:

郭世乐(1971-)，男，教授，基础数学代数学. E-mail：gsl456@163.com.

基金项目: 浙江省自然科学基金项目资助(No. LY21A010018).

1 引言

在本文中, R 表示有单位元的环. 2012年, 王周和陈建龙 [8]中, 引入了p-Drazin 逆的概念. 这类广义逆和算子矩阵的分解密切相关, 事实上p-Drazin 可逆矩阵都可以表示为幂等矩阵和根矩阵之和. 近年来很多研究者从不同角度研究了相关问题([4, 5, 8, 9, 10, 15]). 称元素 $a \in R$ 具有p-Drazin 逆, 如果存在元素 $x \in R$ 和正整数 k, 使得 $x \in comm^2(a), x = xax, a^k - a^{k+1}x \in J(R)$. 如果上述 x 存在, 那么一定是唯一的, 将它称为 a 的p-Drazin 逆, 并记作 $a^{\ddagger}$. 我们用 $R^{\ddagger}$ 表示 R 中所有有p-Drazin 可逆元素构成的集合. 这里

$$\begin{aligned} comm(a) &= \{y \in R \mid ay = ya\}, \\ comm^2(a) &= \{z \in R \mid zy = yz, y \in comm(a)\}. \end{aligned}$$

为元素a 的交换子和二重交换子. 环R的Jacobson根定义为

$$J(R) = \{y \in R \mid \text{对所有} r \in R, 1 + yr \in R^{-1}\},$$

并记

$$\sqrt{J(R)} = \{y \in R \mid \text{对某个} n \geq 1, y^n \in J(R)\}.$$

容易证明：$a \in R^{\dagger}$ 当且仅当存在某个元素 $x \in R$使得

$$x \in comm^2(a), x = xax, a - a^2 \in \sqrt{J(R)}.$$

文 [10]研究了正交条件下Banach 元素和$a+b$的p-Drazin 可逆性, 文 [9]研究了交换条件下Banach 元素和$a+b$的p-Drazin 可逆性. 由于反三角矩阵的广义逆和微分方程的解密切相关，广义逆研究研究引起了广泛关注([1, 2]). 本文研究环上反三角矩阵 $\begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}$ 的p-Drazin逆, 获得了环上正交条件和交换条件下反三角矩阵的p-Drazin可逆性, 进而把环中元素和p-Drazin 可逆性加法性质推广到了更广泛情形([9, 10, 13]).

设$\mathcal{B}(X)$是Banach空间X上所有有界线性算子构成的Banach代数. 假

设$A, B, C, D \in \mathcal{B}(X)$. 我们将把主要结果应用到算子矩阵

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(X \oplus X)$$

上, 进而得到了新型的的算子矩阵p-Drazin可逆性.

在本文中, R代表有单位元1的结合环. a的谱幂等元$a^\pi = 1 - aa^\ddagger$, R^{-1}表示Banach代数R中可逆元集合. 假设$x, p = p^2 \in R$, 那么$x = pxp + pxp^\pi + p^\pi xp + p^\pi xp^\pi$. x 可以表示成Pierce矩阵的形式$x = \begin{pmatrix} pxp & pxp^\pi \\ p^\pi xp & p^\pi xp^\pi \end{pmatrix}_p$.

2 主要结果

本节主要讨论在新型条件下环上反三角矩阵$\begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}$的p-Drazin可逆性. 我们有：

引理1 设$a, b \in R$, 如果$ab \in R^\ddagger$, 那么$ba \in R^\ddagger$.

证明 见 [8, 定理3.6]. □

引理2 设$a, b \in R^\ddagger$, 如果$ab = 0$, 那么$a + b \in R^\ddagger$.

证明 见 [8, 定理5.4]. □

引理3 设$a, b \in R^\ddagger, c \in R$, 那么$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}$ 有p-Drazin逆.

证明 见 [8, 定理5.3]. □

定理1 设$a, b \in R^\ddagger$, 如果$b^\pi ab^\ddagger = 0$, 那么下述等价:

(1) $\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ 有p-Drazin逆.

(2) $\begin{pmatrix} b^\pi a & 1 \\ b^\pi b & 0 \end{pmatrix}$ 有p-Drazin逆.

(3) $\begin{pmatrix} ab^\pi & 1 \\ bb^\pi & 0 \end{pmatrix}$ 有p-Drazin逆.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 假设$M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$. 取$p = \begin{pmatrix} b^\pi & 0 \\ 0 & b^\pi \end{pmatrix}$. 由条件$b^\pi ab^\ddagger = 0$得,

$$pM(1-p) = 0, M(1-p) = \begin{pmatrix} bb^\ddagger abb^\ddagger & bb^\ddagger \\ b^2b^\ddagger & 0 \end{pmatrix}.$$

Obviously, $[M(1-p)]^\# = \begin{pmatrix} 0 & b^\ddagger \\ bb^\ddagger & -ab^\ddagger \end{pmatrix}$, 从而容易证明$M(1-p)$有p-Drazin逆, 所以$M(1-p)$有g-Drazin逆. 根据 [11, 引理2.2], $pM = \begin{pmatrix} b^\pi a & b^\pi \\ b^\pi b & 0 \end{pmatrix}$有g-Drazin逆, 并且$(pM)^d = pM^d$. 令$x = pM^\ddagger$, 从而由g-Drazin逆得唯一性有: $x = pM^d = (pM)^d$并且$M^d = M^\ddagger$, 故

$$\begin{aligned} (pM)x &= (pM)(pM)^d = (pM)^d(pM) = x(pM), \\ x(pM)x &= (pM)^d(pM)(pM)^d = (pM)^d = x. \end{aligned}$$

因为M有p-Drazin逆, 存在$n \in \mathbb{N}$使得$M^n - M^\ddagger M^{n+1} \in J\big(M_2(R)\big)$. 注意到$pMp = pM$, 从而有:

$$\begin{aligned} (pM)^n - x(pM)^{n+1} &= (pM)^n - (pM)^{n+1}x \\ &= pM^n - (pM^{n+1})M^d \\ &= p\big(M^n - M^{n+1}M^\ddagger\big) \\ &\in J\big(M_2(R)\big). \end{aligned}$$

由此可知pM有p-Drazin逆. 令$N=\begin{pmatrix} b^\pi a & 1 \\ b^\pi b & 0 \end{pmatrix}$, 直接验证知

$$\begin{aligned} N &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b^\pi a & 1 \\ b^\pi b & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} b^\pi a & b^\pi \\ b^\pi b & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b^\pi a & 1 \\ b^\pi b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^\pi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

根据引理1, N有p-Drazin逆.

(2) $\Rightarrow$ (1) 取幂等矩阵$e=\begin{pmatrix} bb^\ddagger & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 有$M$的Pierce矩阵表示$M=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}_e$, 其中

$$\alpha=\begin{pmatrix} bb^\ddagger abb^\ddagger & bb^\ddagger \\ b^2b^\ddagger & 0 \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} bb^\ddagger ab^\pi & 0 \\ bb^\pi & 0 \end{pmatrix},$$
$$\gamma=\begin{pmatrix} 0 & b^\pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \delta=\begin{pmatrix} b^\pi a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

直接验证知

$$\alpha^{\#}=\begin{pmatrix} 0 & b^\ddagger \\ bb^\ddagger & -ab^\ddagger \end{pmatrix}, \alpha^\pi=\begin{pmatrix} b^\pi & 0 \\ 0 & b^\pi \end{pmatrix},$$
$$\beta+\gamma+\delta=\begin{pmatrix} bb^\ddagger ab^\pi+b^\pi a & b^\pi \\ bb^\pi & 0 \end{pmatrix},$$

and

$$(\beta+\gamma+\delta)\alpha=\begin{pmatrix} bb^\ddagger ab^\pi+b^\pi a & b^\pi \\ bb^\pi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} bb^\ddagger abb^\ddagger & bb^\ddagger \\ b^2b^\ddagger & 0 \end{pmatrix}=0.$$

进一步有

$$\begin{aligned}
\beta+\gamma+\delta &= \begin{pmatrix} bb^d a+b^\pi a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b^\pi & 0 \\ 0 & b^\pi \end{pmatrix}; \\
\begin{pmatrix} b^\pi a & b^\pi \\ b^\pi b & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b^\pi & 0 \\ 0 & b^\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} bb^\ddagger a+b^\pi a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}; \\
\begin{pmatrix} b^\pi a & b^\pi \\ b^\pi b & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b^\pi a & 1 \\ b^\pi b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^\pi \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} b^\pi a & 1 \\ b^\pi b & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b^\pi a & 1 \\ b^\pi b & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

因为N有p-Drazin逆, 根据引理1, $\beta+\gamma+\delta$ 有p-Drazin逆. 注意到α 有p-Drazin逆, 利用引理2有$M=\alpha+(\beta+\gamma+\delta)$ 有p-Drazin逆.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) 直接验证：

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} b^\pi a & 1 \\ b^\pi b & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b^\pi a & 1 \\ b^\pi b & 0 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} b^\pi a & b^\pi \\ b^\pi b & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b^\pi a & 1 \\ b^\pi b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^\pi \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

利用引理1得: $\begin{pmatrix} b^\pi a & 1 \\ b^\pi b & 0 \end{pmatrix}$有p-Drazin逆当且仅当$\begin{pmatrix} b^\pi a & b^\pi \\ b^\pi b & 0 \end{pmatrix}$ 有p-Drazin逆.

注意到有:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} ab^\pi & b^\pi \\ bb^\pi & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ab^\pi & 1 \\ bb^\pi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^\pi \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} ab^\pi & 1 \\ bb^\pi & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ab^\pi & 1 \\ bb^\pi & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

从而$\begin{pmatrix} ab^\pi & b^\pi \\ bb^\pi & 0 \end{pmatrix}$有p-Drazin逆当且仅当$\begin{pmatrix} ab^\pi & 1 \\ bb^\pi & 0 \end{pmatrix}$ 有p-Drazin逆. 又由于

我们有:

$$\begin{pmatrix} b^\pi a & b^\pi \\ b^\pi b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^\pi & 0 \\ 0 & b^\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} ab^\pi & b^\pi \\ bb^\pi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b^\pi & 0 \\ 0 & b^\pi \end{pmatrix},$$

再利用引理1即得. □

推论1 设$a, b, b^\pi a \in R^\ddagger$, 如果$b^\pi ab = 0$, 那么$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$有p-Drazin逆.

证明 因为$b^\pi ab = 0$, 所以$b^\pi ab^\ddagger = [b^\pi ab](b^\ddagger)^2 = 0$. 根据定理1, 只需证明$\begin{pmatrix} b^\pi a & 1 \\ b^\pi b & 0 \end{pmatrix}$有p-Drazin逆.

显然, $\begin{pmatrix} b^\pi a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$有p-Drazin 逆. 由于

$$\begin{pmatrix} 0 & b^\pi b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} b^\pi b & 0 \\ 0 & bb^\pi \end{pmatrix}$$

是拟幂零的, 所以$\begin{pmatrix} 0 & b^\pi b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$有p-Drazin 逆.

注意到:

$$\begin{pmatrix} b^\pi a & b^\pi b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^\pi a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b^\pi b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

且

$$\begin{pmatrix} b^\pi a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b^\pi b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b^\pi ab^\pi b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

根据引理2, $\begin{pmatrix} b^\pi a & b^\pi b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 有p-Drazin 逆.

容易验证：

$$\begin{pmatrix} b^\pi a & 1 \\ b^\pi b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^\pi b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b^\pi a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} b^\pi a & b^\pi b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^\pi a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^\pi b \end{pmatrix}.$$

再由引理1 即得. □

引理4 设$a, b \in \sqrt{J(R)}$, 如果$ab = ba$, 那么$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$有p-Drazin逆.

证明 令$M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$. 因为$a, b \in \sqrt{J(R)}$, 所以存在$n \in \mathbb{N}$使得$a^n, b^n \in J(R)$.

显然有$M^2 = Ma + bI$. 由于$(\lambda M)a = a(\lambda M)$, 有$M^{2(n+1)} \in M_2(J(R))$, 故$M \in \sqrt{M_2(R)}$, 从而$M$有p-Drazin逆. □

引理5 设$a, pa \in R^\ddagger, p^2 = p \in R$, 如果$pap^\pi = 0$, 那么$ap^\pi \in R^\ddagger$.

证明 因为$pa \in R^\ddagger$, 所以$pa \in R^\ddagger$. 根据 [11, 引理2.2], 引理$ap^\pi \in R^d$ 并且$(ap^\pi)^d = a^d p^\pi$. 可以验证:

$$\begin{aligned} ap^\pi - (ap^\pi)^2(ap^\pi)^d &= ap^\pi - ap^\pi ap^\pi(ap^\pi)^d \\ &= ap^\pi - a^d ap^\pi ap^\pi \\ &= (a - a^d a^2)p^\pi \\ &\in \sqrt{J(R)}. \end{aligned}$$

故有$ap^\pi \in R^\ddagger$. □

定理2 设$a, b, ab^\pi \in R^\ddagger$, 如果

$$b^\pi ab^\ddagger = 0, b^\pi(a^2b) = b^\pi(aba), b^\pi(b^2a) = b^\pi(bab),$$

那么$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$有p-Drazin逆.

证明 令$a_1 = b^{\pi}a, b_1 = b^{\pi}b$. 由条件$b^{\pi}(a^2b) = b^{\pi}(aba), b^{\pi}(b^2a) = b^{\pi}(bab)$可得

$$\begin{aligned} a_1^2b_1 &= b^{\pi}ab^{\pi}ab^{\pi}b = b^{\pi}a^2b = b^{\pi}aba = b^{\pi}ab^{\pi}bb^{\pi}a = a_1b_1a_1, \\ b_1^2a_1 &= b^{\pi}bb^{\pi}bb^{\pi}a = b^{\pi}b^2a = b^{\pi}(bab) = b^{\pi}bb^{\pi}ab^{\pi}b = b_1a_1b_1. \end{aligned}$$

令$f = b_1b_1^{\ddagger}$, 我们有$M = P + Q$, 其中

$$P = \begin{pmatrix} a_1(1-f) & 1-f \\ b_1(1-f) & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} a_1f & f \\ b_1f & 0 \end{pmatrix}.$$

因为$b_1(b_1a_1) = (b_1a_1)b_1$, 由于$b_1^{\ddagger} \in comm^2(b_1)$, 得$b_1^{\ddagger}(b_1a_1) = (b_1a_1)b_1^{\ddagger}$, 从而有$fa_1(1-f) = b_1^{\ddagger}(b_1a_1)(1-b_1b_1^{\ddagger}) = 0$, 故$QP = 0$. 注意到

$$(fa_1f)(fb_1) = (fb_1)(fa_1f), a_1^2f = a_1fa_1, f^2a_1 = fa_1f.$$

直接验证知, $fa_1f, fb_1 \in \sqrt{J(R)}$. 根据引理4, $\begin{pmatrix} fa_1f & 1 \\ fb_1 & 0 \end{pmatrix}$ 有p-Drazin逆. 容易验证：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1f & f \\ b_1f & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1f & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & b_1f \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a_1f & f \\ b_1f & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & b_1f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1f & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} a_1f & f \\ b_1f & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b_1f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1f & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a_1f & b_1f \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1f & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b_1f \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

再利用引理1, 即得Q有p-Drazin逆.

显然有$P = R + S$, 这里

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} a_1(1-f) & 1 \\ n & 0 \end{pmatrix}, n = b_1(1-b_1b_1^{\ddagger}).$$

由于$R^2=0$, 所以R有p-Drazin逆. 进一步地, $RS=0$.

下面考察$S=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ n & 0\end{pmatrix}$的$P$-Drazin逆, 这里$\alpha=a_1(1-f)$. 根据引理5, $\alpha\in R^{\ddagger}$. 进一步有$S=G+H$, 这里

$$G=\begin{pmatrix}\alpha e & e\\ en & 0\end{pmatrix}, H=\begin{pmatrix}\alpha(1-e) & 1-e\\ (1-e)n & 0\end{pmatrix}, e=\alpha\alpha^{\ddagger}.$$

注意到

$$\begin{aligned}\alpha ab(1-bb^{\ddagger}) &= a(1-bb^{\ddagger})ab(1-bb^{\ddagger})\\ &= (a^2b-abb^dab)(1-bb^{\ddagger})\\ &= [aba-ab(b^da)b](1-bb^{\ddagger})\\ &= [aba-ab^2(b^da)](1-bb^{\ddagger})\\ &= ab(1-bb^{\ddagger})a(1-bb^{\ddagger})\\ &= ab(1-bb^{\ddagger})\alpha;\end{aligned}$$

由此得$\alpha^d ab(1-bb^{\ddagger})=ab(1-bb^{\ddagger})\alpha^{\ddagger}$. 从而

$$\begin{aligned}en(1-e) &= \alpha^{\ddagger}\alpha b(1-bb^{\ddagger})(1-\alpha\alpha^{\ddagger})\\ &= \alpha^{\ddagger}ab(1-bb^{\ddagger})(1-\alpha\alpha^{\ddagger})\\ &= ab(1-bb^{\ddagger})\alpha^{\ddagger}(1-\alpha\alpha^{\ddagger})\\ &= 0.\end{aligned}$$

故$GH=0$. 容易验证：

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\alpha(1-e) & 1-e\\ (1-e)n & 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\alpha(1-e) & 1\\ (1-e)n & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1-e\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}\alpha(1-e) & \\ n(1-e) & 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1-e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha(1-e) & 1\\ (1-e)n & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

We compute that

$$
\begin{aligned}
((1-e)\alpha)^2[n(1-e)] &= (1-e)\alpha^2 n(1-e) \\
&= (1-e)[a(1-bb^{\ddagger})ab(1-bb^{\ddagger})](1-e) \\
&= (1-e)(a^2b-ab(b^d a)b)(1-bb^{\ddagger})(1-e) \\
&= (1-e)(a^2b-ab^2(b^d a))(1-bb^{\ddagger})(1-e) \\
&= (1-e)(aba-abb^d ba)(1-bb^{\ddagger})(1-e) \\
&= (1-e)[a(1-bb^{\ddagger})ba](1-bb^{\ddagger})(1-e) \\
&= (1-e)\alpha n\alpha(1-e) \\
&= [(1-e)\alpha][n(1-e)][(1-e)\alpha] \\
&= [\alpha(1-e)][(1-e)n][\alpha(1-e)], \\
(n(1-e))^2[(1-e)\alpha] &= n(1-e)n\alpha(1-e) \\
&= n^2\alpha(1-e) \\
&= (1-bb^{\ddagger})(b^2a)(1-bb^{\ddagger})(1-e) \\
&= (1-bb^{\ddagger})(bab)(1-bb^{\ddagger})(1-e) \\
&= n\alpha n(1-e) \\
&= [n(1-e)][\alpha(1-e)][n(1-e)].
\end{aligned}
$$

显然$\alpha(1-e), n(1-e) \in \sqrt{J(R)}$, 根据引理4, $\begin{pmatrix} \alpha(1-e) & 1 \\ n(1-e) & 0 \end{pmatrix}$ 有p-Drazin 逆, 从而H是p-Drazin逆.

注意到,

$$\begin{array}{rcl}(\alpha e)(en) & = & \alpha^d a(1-bb^{\ddagger})a(1-bb^{\ddagger})b(1-bb^{\ddagger}) \\ & = & \alpha^{\ddagger}a(1-bb^{\ddagger})ab(1-bb^{\ddagger}) \\ & = & \alpha^{\ddagger}[a^2b-abb^dab](1-bb^{\ddagger}) \\ & = & \alpha^{\ddagger}[a^2b-ab^{\ddagger}(ba)b](1-bb^{\ddagger}) \\ & = & \alpha^{\ddagger}[a^2b-a(ba)b^db](1-bb^{\ddagger}) \\ & = & \alpha^d a^2b(1-bb^{\ddagger}) \\ & = & \alpha^d ab\alpha, \\ (en)(\alpha e) & = & \alpha\alpha^d n\alpha^2\alpha^{\ddagger} \\ & = & \alpha^{\ddagger}ab\alpha^2\alpha^{\ddagger}.\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\alpha(ab) & = & a(1-bb^{\ddagger})ab \\ & = & a^2b-ab(b^da)b \\ & = & a^2b-ab^2(b^da) \\ & = & a^2b-abb^{\ddagger}(ba) \\ & = & a^2b-ab(ba)b^{\ddagger} \\ & = & a^2b-a(b^2a)b^{\ddagger} \\ & = & a^2b-a(bab)b^{\ddagger} \\ & = & a^2b-(aba)bb^{\ddagger} \\ & = & aba(1-bb^{\ddagger}) \\ & = & (ab)\alpha.\end{array}$$

从而$ab\in comm(\alpha)$. 注意到, 利用$\alpha^{\ddagger}\in comm^2(\alpha)$, 得$ab\in comm(\alpha^{\ddagger})$, 从而

$$(\alpha e)(en)=\alpha^d ab\alpha=\alpha^{\ddagger}ab\alpha^2\alpha^{\ddagger}=(en)(\alpha e).$$

由于$\alpha e, en \in R^{\ddagger}$, 利用引理4, $\begin{pmatrix} \alpha e & en \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 有p-Drazin 逆. 因为

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \alpha e & 1 \\ en & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha e & 1 \\ en & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \alpha e & e \\ en & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha e & 1 \\ en & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

利用引理1有$G = \begin{pmatrix} \alpha e & e \\ en & 0 \end{pmatrix}$ 有p-Drazin 逆. 进而再由引理2即得M有p-Drazin 逆. □

例1 假设$M = \begin{pmatrix} E & I_2 \\ F & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_4)$, 其中

$$E = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{2} \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_4).$$

那么$E^2F = EFE, F^2E = FEF$, 但$EF \neq FE$. 这里$E, F, EF^{\pi} \in M_2(\mathbb{Z}_4)^{\ddagger}$.

证明 注意到$J\big(M_2(\mathbb{Z}_4)\big) = M_2\big(2\mathbb{Z}_4\big)$, 直接验证即得. □

例2 假设$M = \begin{pmatrix} E & I_3 \\ F & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{6\times 6}$, 其中

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

那么$F^{\pi}EF=F^{\pi}FE$, $EF\neq FE$ 而且

$$M^{\ddagger}=\begin{pmatrix}0 & F^{-1}\\ I_3 & -EF^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1&2&0\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&1&0\end{pmatrix}.$$

证明 显然, $E^2=0, F^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 所以$E,F,F^{\pi}E$有p-Drazin逆.
进一步可验证：$F^{\pi}EF=0=F^{\pi}FE$,

$$EF=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=FE.$$

直接计算得

$$M^{\ddagger}=\begin{pmatrix}0 & F^{-1}\\ I_3 & -EF^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1&2&0\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&1&0\end{pmatrix}.$$

$\square$

3 应用

假设X为Banach空间, $A,B,C,D\in\mathcal{B}(X)$. 我们将把主要结果应用到算子矩阵, 研究分块算子矩阵$M=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$ 在$\mathcal{B}(X\oplus X)$ 上的p-Drazin 可逆性. 为了证明本节主要结果, 首先下面需要用到的引理.

引理4 设 $a,b\in\mathcal{A}^{\ddagger}$. 设 $a,b\in\mathcal{A}^{\ddagger}$. 如果 $ab^2=0, aba=0$, 则 $a+b\in\mathcal{A}$ 有p-Drazin逆.

证明 见 [10, 推论3.6]. □

定理3 设 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $A, D, BC, (BC)^{\pi}A\in\mathcal{B}(X)^{\ddagger}$. 如果

$$(BC)^{\pi}A(BC)^{\ddagger}=0, (BC)^{\pi}AB=(BC)^{\pi}BA, BDC=0, BD^2=0,$$

则 M 有p-Drazin逆.

证明 令 $M=P+Q$, 其中

$$P=\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

根据条件, 可以验证

$$PQP=\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} BDC & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0.$$

$$PQ^2=\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 0 & BD^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0.$$

注意到：

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & I \\ C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix} A & I \\ BC & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & I \\ C & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

根据定理1, $\begin{pmatrix} A & I \\ BC & 0 \end{pmatrix}$ 有p-Drazin 逆, 再利用引理1得：P有p-Drazin逆. 又由引理3知, Q有p-Drazin逆. 取 $\mathcal{A}=\mathcal{B}(X\oplus X)$, 由引理4可知, M 具有伪Drazin逆. □

推论4 设 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $A, D, BC, (CB)^{\pi}D \in \mathcal{B}(X)^{\ddagger}$. 如果

$$(CB)^{\pi}D=0, (CB)^{\pi}C=0, CAB=0, CA^2=0,$$

则 M 具有伪Drazin逆.

证明 注意到

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}.$$

由定理3可知, $\begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}$ 具有伪Drazin逆. 因此, $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 具有伪Drazin逆. □

推论5 设 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $A, D, \in \mathcal{B}(X)^{\ddagger}$. 如果$BC$是可逆算子, $CAB=0, CA^2=0$, 则由定理3得: M 具有伪Drazin逆.

证明 注意到BC是可逆算子, 所以$(BC)^{\ddagger}=(BC)^{-1}$, 进而$(BC)^{\pi}=0$, 故由推论4即得. □

定理4 设 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $A, D, BC, (BC)^{\pi}A \in \mathcal{B}(X)^{\ddagger}$. 如果

$$(BC)^{\pi}A(BC)^{\ddagger}=0, (BC)^{\pi}A^2(BC)=(BC)^{\pi}A(BC)A,$$
$$(BC)^{\pi}(BC)^2A=(BC)^{\pi}(BC)A(BC), BDC=0, BD^2=0,$$

则 M 有p-Drazin逆.

证明 令 $M=P+Q$, 其中

$$P=\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

由于

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} A & I \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} A & I \\ BC & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & I \\ C & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

根据定理2和引理1, P 有p-Drazin 逆. 另一方面, 由引理3, Q有p-Drazin 逆.

因为$BDC = 0, BD^2 = 0$, 类似于定理3, 可以验证

$$PQP = 0, PQ^2 = 0.$$

取 $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X \oplus Y)$, 由引理4可知, M 具有伪Drazin逆. □

推论6 设 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, A, D, BC \in \mathcal{B}(X)^{\ddagger}$. 如果

$$(BC)^{\pi}A = 0, (BC)^{\pi}B = 0, BDC = 0, BD^2 = 0,$$

则 M 有p-Drazin逆.

证明 因为$(BC)^{\pi}A = 0, (BC)^{\pi}B = 0, BDC = 0, BD^2 = 0$, 从而由定理4即得. □

推论7 设 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, A, D, BC \in \mathcal{B}(X)^{\ddagger}$. 如果

$$(CB)^{\pi}D = 0, (CB)^{\pi}C = 0, CAB = 0, CA^2 = 0,$$

则 M 有p-Drazin逆.

证明 因为$BC \in \mathcal{B}(X)^{\ddagger}$, 根据引理1得$CB \in \mathcal{B}(X)^{\ddagger}$.

注意到

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}.$$

由于 $(CB)^{\pi}D = 0, (CB)^{\pi}C = 0, CAB = 0, CA^2 = 0$, 由推论6可知, $\begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}$ 具有p-Drazin逆. 因此, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 具有p-Drazin逆. □

最后, 我们给出一个数值例子.

例子3 设A, B, C, D是作用在可分Hilbert空间$l_2(\mathbb{N})$上的线性算子, 分别定义如下:

$$\begin{aligned}
A(x_1, x_2, x_3 \cdots, x_n, \cdots) &= (x_1 - x_3, 0, -x_1 + x_3, 0, 0, \cdots), \\
B(x_1, x_2, x_3 \cdots, x_n, \cdots) &= (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_2, 0, 0, \cdots), \\
C(x_1, x_2, x_3 \cdots, x_n, \cdots) &= (x_1 - x_2, x_2, x_3, 0, 0, \cdots), \\
D(x_1, x_2, x_3 \cdots, x_n, \cdots) &= (0, 0, x_1 - x_2 - x_3, 0, 0, \cdots).
\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}
BC(x_1, x_2, x_3 \cdots, x_n, \cdots) &= (x_2, x_1 - x_3, x_2, 0, 0, \cdots), \\
(BC)^{\pi}(x_1, x_2, x_3 \cdots, x_n, \cdots) &= (\tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}x_3, 0, -\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_3, 0, 0, \cdots),
\end{aligned}$$

直接验证得: $A^2 = 2A, B^3 = B, (BC)^3 = 2(BC)$. Hence, $A, D, BC \in \mathcal{B}(X)^{\ddagger}$. 进一步有

$$(BC)^{\pi}A = 0, (BC)^{\pi}B = 0, BDC = 0, BD^2 = 0.$$

由定理3知算子矩阵$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(X \oplus X)$ 有p-Drazin 逆.

参 考 文 献

[1] CHEN H, SHEIBANI M, The g-Drazin invertibility in a Banach algebra[J], Filomat, 2023, 37:4639-4647.

[2] CHEN H, SHEIBANI M, The g-Drazin inverses of anti-triangular block operator matrices[J], Applied Mathematics and Computation, 2024, 463: 128368.

[3] CHEN J and Zhang X, Algebraic Theory of Generalized Inverses, Singapore: Springer; Beijing: Science Press, 2024.

[4] CHEN J, Chen X, Zguitti H, On the weighted pseudo Drazin invertible elements in associative rings and Banach algebras[J], Filomat, 2019, 19: 6359–6367.

[5] CHEN J, ZHU Z, SHI G, The pseudo Drazin inverses in Banach algebras[J], Commun. Math. Res., 2021, 37：484-495.

[6] MOSIĆ D, The generalized and pseudo n-strong Drazin inverses in rings[J], Linear Multilinear Algebra, 2021, 69: 361–375.

[7] MOSIĆ D,ZOU H L and CHEN J L , The generalized Drazin inverse of the sum in a Banach algebra[J], Ann. Funct. Anal., 2017, 8:90-105.

[8] WANG Z, CHEN J L, Pseudo Drazin inverses in associative rings and Banach algebras[J], Linear Algebra Appl., 2012, 437: 1332 – 1345.

[9] ZHU H H, CHEN J L, Additive property of pseudo Drazin inverse of elements in Banach algebras[J], Filomat, 2014, 28:1773-1781.

[10] ZOU H L, CHEN J L. On the pseudo Drazin inverse of the sum of two elements in a Banach algebra[J], Filomat,2017,31(7):2011-2022.

[11] ZHANG D C, MOSIĆ D, Explicit formulae for the generalized Drazin inverse of block matrices over a Banach algebra[J], Filomat, 2018, 32:5907 – 5917.

[12] 李金凤, 王华. 算子乘积与和的广义Drazin逆及反三角算子矩阵的Drazin逆[J]. 应用泛函分析学报, 2020, 22: 33-43.

[13] 孙晓青,王欣, 巴拿赫代数里2×2阶反三角矩阵的伪Drazin逆[J]. 山东大学学报(理学版), 2017, 52: 58–66.

[14] 邹红林. Mary逆与广义Drazin逆的研究[D].南京:东南大学,2017.

[15] 邹红林, 陈建龙.关于Banach代数中p-Drazin逆的进一步结果[J].东南大学学报(自然科学版),2017,47(3):626-630.

Pseudo Drazin invertibility of anti-triangular matrix over a ring and Its applications

Guo Shilu

School of Big Data and Artificial Intelligence, Fujian Polytechnic Normal University, Fuqing 350300, China

Chen Huanyin

School of Mathematics, Hangzhou Normal University, Hangzhou 311121, China

Abstract: In this paper, we investigate the p-Drazin inverse of the anti-triangular operator matrix $\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$. We identify two new class of necessary and sufficient conditions for an anti-triangular matrix to possess a p-Drazin inverse. Subsequently, we generalize several established results to a broader context. As practical applications, we demonstrate the p-Drazin invertibility of specific block operator matrices $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(X \oplus X)$.

Key words: p-Drazin inverse; ring, aniti-triangular matrix, block operator matrix.