考拉兹猜想不存在非平凡循环

陈超 [1]

(1. 宝鸡市凤翔区村镇供水管理站　陕西省宝鸡市　721400)

摘 要: 本文研究了考拉兹猜想是否存在非平凡循环序列问题. 利用反证法, 获得了对于任意一个正整数奇数 x_0, 当 x_0 等于 1 时产生平凡循环, 循环序列为:$1, 1, 1, \cdots$, 当 x_0 为大于 1 的正整数奇数时不产生非平凡循环序列的结论.

关 键 词: 考拉兹猜想; 枝头数

1 引言

考拉兹猜想即人们简称的"3x + 1" 问题: 对于任意的正整数 x, $x \in \mathbb{N}$, 若 x 为偶数连续除以 2 使其等于一个奇数, 若 x 为奇数则乘 3 再加 1, 不断重复这样的运算, 经有限步骤后一定可以得到 1. 其命题为:

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & \text{if } x \equiv 0 \pmod 2; \\ 3x+1, & \text{if } x \equiv 1 \pmod 2), \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{N}^+,$$

存在正整数 $k \in \mathbb{N}^+$, 总有 $f^k(x) = 1$.
如果考拉兹猜想存在一个非平凡循环序列, 显然考拉兹猜想归 1 结果不成立. 由此看来, 证明考拉兹猜想不存在非平凡循环序列具有非常重要的意义.

2 相关定义及结论

定义 2.1 奇数: 不能被 2 整除的整数称为奇数. 正整数奇数可表示为 $2k+1$, $k \in \mathbb{N}$.

定义 2.2 枝头数: 能够被 3 整除的正整数奇数称为枝头数. 枝头数可表示为 $3 \cdot (2k+1)$,$k \in \mathbb{N}$.

定义 2.3 [1] 正整数奇数 x_0 考拉兹变换序列通项公式 $f^k(x)$ 表达式为:

$$f^k(x) = \frac{3^k x + 3^{k-1} + 3^{k-2} \cdot 2^{p_1} + \cdots + 3 \cdot 2^{p_1+\cdots+p_{k-2}} + 2^{p_1+\cdots+p_{k-1}}}{2^{p_1+\cdots+p_k}}, \tag{2.1}$$

其中:p_j $(j \in \{1, \ldots, k\})$ 为考拉兹奇变换连续除以 2 的次数. 等价变换式为:

$$\begin{aligned} 2^{p_1+\cdots+p_k} \cdot f^k(x) - 3^k x = 3^{k-1} + 3^{k-2} \cdot 2^{p_1} + 3^{k-3} \cdot 2^{p_1+p_2} + \cdots + 3 \cdot 2^{p_1+p_2+\cdots+p_{k-2}} \\ + 2^{p_1+p_2+\cdots+p_{k-1}} \end{aligned}. \tag{2.2}$$

3 相关引理

引理 3.1 对于任意一个大于 1 的奇数 x_0 考拉兹变换奇数序列：$x_0, x_1, x_2 \cdots x_n$，记 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为奇数 x_0 考拉兹奇变换中连续除以 2 的次数，$p_j \geq 1$, $p_j \in \mathbb{N}^+$，若 $x_n \neq 1$ 时，必有 $x_i \neq x_{i+1}$，其中 $0 \leq i \leq n-1$，即考拉兹变换奇数序列相邻两数不相等.

证明: 采用反证法，假设相邻两数相等，则有 $3 \cdot x_i + 1 = x_i \cdot 2^{p_{i+1}}$.
两边除以 x_i, 则有 $3 + \frac{1}{x_i} = 2^{p_{i+1}}$, 因为 x_i 为大于 1 的奇数，等式两边不相等，结果矛盾，原命题成立.

引理 3.2 枝头数不产生循环.

证明: 采用反证法, 假设存在某一枝头数使得考拉兹变换奇数序列产生循环，即枝头数变换为枝头数，由考拉兹变换通项公式等价变换式可知:
$2^{p_1+\cdots+p_k} \cdot f^k(x) - 3^k x = 3^{k-1} + 3^{k-2} \cdot 2^{p_1} + 3^{k-3} \cdot 2^{p_1+p_2} + \cdots\cdots + 3 \cdot 2^{p_1+\cdots+p_{k-2}} + 2^{p_1+\cdots+p_{k-1}}$.
显然等式左边能被 3 整除，等式右边不能被 3 整除，产生矛盾，原命题成立.

引理 3.3 $\forall m \in \mathbb{N}^+$, $\forall k \in \mathbb{N}^+$, 满足 $3^m + 1 = 2^k$. 则满足方程等式的解有且只有一组解 $m = 1$, $k = 2$.

证明: 将 $m = 1$, $k = 2$ 代入方程则有 $1 = 1$, 有一组解，命题成立.
现在讨论 $m \geq 2$ 的情况:
当 m 为偶数时, 令 $m = 2n$, $n \in \mathbb{N}^+$, 根据二项式定理可得:
$3^m = 3^{2n} = 9^n = (8+1)^n = 8^n + \binom{n}{1} \cdot 8^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot 8^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} \cdot 8^1 + 1$
显然这样的数可以表示为 $8t+1$ 类奇数，$t \in \mathbb{N}^+$.
当 m 为奇数时，令 $m = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}^+$, 根据二项式定理可得:
$3^m = 3^{2n+1} = 3 \cdot 9^n = 3 \cdot (8+1)^n = 3 \cdot (8^n + \binom{n}{1} \cdot 8^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot 8^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} \cdot 8^1 + 1)$
同样可知可以表示为 $24t+3$ 类奇数, 其中 $t \in \mathbb{N}^+$, 由于 $8t+1+1 = 8t+2$, $24t+3+1 = 24t+4$, $t \in \mathbb{N}^+$，分别对两数连续除以 2，其结果为 $4t+1$，$6t+1$ 均为大于 1 的奇数，显然不能连续被 2 整除了，原命题成立.

引理 3.4 对于任意一个大于 1 的正整数奇数 x_0 考拉兹变换奇数序列为:$x_0, x_1, x_2 \cdots x_n$, 记 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为奇数 x_0 考拉兹奇变换中连续除以 2 的次数，$p_j \geq 1$, $p_j \in \mathbb{N}^+$, 依据考拉兹变换奇数通项公式等价变换式, 令 $x_n \cdot 2^{p_1+\cdots+p_n} - x_0 \cdot 3^n = 3^{n-1} + 3^{n-2} \cdot 2^{p_1} + 3^{n-3} \cdot 2^{p_1+p_2} + \cdots + 3 \cdot 2^{p_1+\cdots+p_{n-2}} + 2^{p_1+\cdots+p_{n-1}} = S_n$. 如果存在正整数 n, $n \in \mathbb{N}^+$，使得等式方程 $2^{p_1+\cdots+p_n} - 3^n = x_n \cdot 2^{p_1+\cdots+p_n} - x_0 \cdot 3^n = S_n$ 恒成立，则必有 $x_n \neq x_0$.

证明: 由题可知 $x_n \cdot 2^{p_1+\cdots+p_n} - x_0 \cdot 3^n = 2^{p_1+\cdots+p_n} - 3^n$. 移项化简可得:
$(x_n - 1) \cdot 2^{p_1+\cdots+p_n} = (x_0 - 1) \cdot 3^n$.
由于 x_0 为大于 1 的正整数奇数, 于是就有: $\frac{x_n-1}{x_0-1} = \frac{3^n}{2^{p_1+\cdots+p_n}} \neq 1$. 因此 $x_n \neq x_0$. 综合上述原命题成立.

引理 3.5 对于任意一个大于 1 的正整数奇数 x_0，设奇数 x_0 考拉兹变换奇数序列为 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$，记 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为奇数 x_0 考拉兹奇变换中连续除以 2 的次数，其

中 $p_j \geq 1, p_j \in \mathbb{N}^+$, 则奇数 x_0 不产生非平凡循环，即 $x_0 \neq x_n$; 当 $x_0 = 1$ 时产生平凡循环，循环序列为：$1, 1, 1, \cdots$

证明: 当 $x_0 = 1$ 时产生循环，循环序列为：$1, 1, 1, \cdots$. 命题显然成立.
当 $x_0 > 1$ 时，若奇数 x_0 为枝头数时，由引理 3.2 可知，不存在循环，命题成立.
当奇数 x_0 为非枝头数时，采用反证法，假设存在一个正整数奇数 x_0 经考拉兹变换得到奇数 x_n 与奇数 x_0 产生非平凡循环，于是就有 $x_0 = x_n, x_0 \neq x_j, 1 \leq j \leq n-1$.
依据奇数序列考拉兹等价变换通项公式可得：
$x_0 \cdot (2^{p_1+p_2+\cdots+p_n} - 3^n) = 3^{n-1} + 3^{n-2} \cdot 2^{p_1} + 3^{n-3} \cdot 2^{p_1+p_2} + \cdots + 3^1 \cdot 2^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-2}} + 2^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}}$.
令等式右边 $3^{n-1} + 3^{n-2} \cdot 2^{p_1} + 3^{n-3} \cdot 2^{p_1+p_2} + \cdots + 3^1 \cdot 2^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-2}} + 2^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}} = S_n$.
如果 $2^{p_1+p_2+\cdots+p_n} - 3^n < 0$, 假设不成立，原命题成立.
如果 $2^{p_1+p_2+\cdots+p_n} - 3^n > 0$, 可分下面几种情况进行讨论：
1. 当 S_n 为一素数时, 依据素数的唯一分解原理则有两种情况:

1.1 使得下面等式成立.

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ 2^{p_1+p_2+\cdots+p_n} - 3^n = S_n \end{cases} \tag{3.1}$$

1.2 使得下面等式成立.

$$\begin{cases} x_0 = S_n \\ 2^{p_1+p_2+\cdots+p_n} - 3^n = 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

对于第一种情况，显然 $x_0 = 1$ 与 x_0 为大于 1 的正整数奇数矛盾, 因此原命题成立.
对于第二种情况，依据引理 3.3 可知 $n = 1, p_1 = 2$, 依据引理 3.1 可知考拉兹猜想奇数序列相邻两数不相等, 因此原命题成立.
2. 若 S_n 为多个素数的乘积, 下面分四种情况进行讨论:

2.1 使得下面等式成立.

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ 2^{p_1+p_2+\cdots+p_n} - 3^n = S_n \end{cases} \tag{3.3}$$

2.2 使得下面等式成立.

$$\begin{cases} x_0 = S_n \\ 2^{p_1+p_2+\cdots+p_n} - 3^n = 1 \end{cases} \tag{3.4}$$

2.3 S_n 不存在 x_0 因子.

2.4 S_n 存在 x_0 因子，即存在正整数 c, $1 < c < S_n$ ，使得下面等式成立.

$$\begin{cases} S_n = x_0 \cdot c \\ x_0 \cdot (2^{p_1+p_2+\cdots+p_n} - 3^n) = x_0 \cdot c \end{cases} \tag{3.5}$$

对于第一种情况，同 1.1，原命题成立.
对于第二种情况，同 1.2，原命题成立.
对于第三种情况，S_n 不能整除 x_0，原命题成立.
对于第四种情况，(3.5) 式两边除以 x_0，其考拉兹变换等价变换式为：

$$2^{p_1+p_2+\cdots+p_n} - 3^n = c. \tag{3.6}$$

对于 (3.6) 式，依据引理 3.4 可知 $x_n \neq x_0$ 与假设矛盾, 原命题成立. 综合上述，考拉兹猜想不存在非平凡循环命题成立.

4 结论

从本文可以看出对于任意一个大于 1 的奇数 x_0，设奇数 x_0 考拉兹变换奇数序列为 $x_0, x_1, x_2, \cdots x_n$, 必有 $x_0 \neq x_j, 1 \leq j \leq n$, 奇数 x_0 不产生非平凡循环序列; 当 $x_0 = 1$ 时产生平凡循环序列, 循环序列为 $1, 1, 1 \cdots$.

参 考 文 献

[1] 邬家邦, 黄国麟. 3N+1 猜想中的伸长迭代 [J]. 华中科技大学学报, 2001, 29(09): 112–114.