Tensor Métrico Regular para Campo Gravitacional Relativístico

Sergio de Azevedo Melo
0009-0003-2015-666X
doi: 10.5281/zenodo.14750315

27 de janeiro de 2025

Resumo

O tensor métrico representa a geometria do espaço-tempo na Relatividade Geral. Embora satisfaça as equações de campo, o tensor obtido pela aplicação do limite newtoniano à solução de Schwarzschild do vácuo apresenta descontinuidade do mapeamento da métrica pelo campo gravitacional, resultando em pontos indefinidos.

Considerando-se a sobreposição do efeito cinemático ao campo gravitacional no fator de Lorentz, apresenta-se função lagrangiana transformada no estudo de energia total.

A função atende velocidades relativísticas em expressões de energia em que, sem a limitação de baixa velocidade, é feita extrapolação da condição de campo fraco pelo efeito da métrica na energia de repouso.

Obtém-se um tensor métrico regular no espaço-tempo para condição de universo estacionário, e é apontado como difere da resolução de Schwarzschild e da métrica resultante por aproximação newtoniana.

Abstract

The metric tensor defines the geometry of spacetime in General Relativity. Although it satisfies the field equations, the tensor obtained by Application of the Newtonian limit to the vacuum Schwarzschild solution presents discontinuity in the mapping of the metric by the gravitational field, resulting in undefined points.

Considering the superimposition of the kinematic effect on the gravitational field in the Lorentz factor and a transformed Lagrangian function is presented in the study of total energy.

The function caters for relativistic speeds in energy expressions and avoids low speed limitation. Extrapolation of the weak field condition is addressed by mapping the rest energy.

A regular metric tensor in spacetime is obtained for the condition of a stationary universe, and it is pointed out how it differs from the Schwarzschild resolution and the resulting metric by Newtonian approximation.

1 Introdução

As equações de campo, apresentadas pela aplicação de princípios variacionais na ação de Hilbert-Einstein [6], sustentam que é possível um equacionamento geométrico da gravitação [4] ao demonstrar que uma distribuição de energia/massa está balanceada a uma expressão de curvatura somente quando segue sobre um caminho geodésico.

As equações de campo são satisfeitas pela métrica obtida da resolução de Schwarzschild para o vácuo [14] e na aproximação para campo fraco e baixa velocidade [4]. Apesar de equacionar o tensor curvatura para as equações de campo, a métrica possui a peculiaridade de conter singularidades matemáticas.

Singularidade não são incomuns na física, a exemplo da singularidade não-removível na origem potencial do campo central pelo inverso da distância. A surpresa é haver singularidade da métrica mapeada em posição corresponde onde não há singularidade de potencial de campo [7], o que afeta corpos densos [12].

Uma métrica regular é definida para todos os valores de seu mapeamento em que o potencial de campo é definido. Singularidades são ocorrência conjunta, e por consequência, singularidade somente é mapeada por outra singularidade.

Um tratamento diferente do fenômeno gravitacional consiste em estudar os aspectos dinâmicos da mecânica com transporte do campo independente da distribuição massa. Mecânica lagrangiana corpuscular toma lugar da mecânica de campo na resolução do tensor métrico por equacionamento energético.

A energia de repouso sobre o efeito da curvatura não é constante, e sua variação pode ser mapeado em um potencial métrico pela razão que faz com a energia do movimento. O balanço permite, em condição de linearidade, equacionar o movimento para resolução da métrica, porém é necessário que a condição de convergência de campo forte seja conhecida.

Na condição de velocidade nula, o fator de Lorentz sob curvatura não é unitário, diferente do que acontece no espaço plano. A expressão de energia total para $v = 0$ e $\gamma_0 \neq 1$ resulta em:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{mc^0c^0}{\sqrt{\delta^{00}g_{00}}}g_{00} \tag{1.1}$$

Torna-se evidente que a energia em velocidade nula $\mathcal{E}_0$ de uma posição métrica não equivale diretamente à energia de repouso, $\mathbb{E}_0 = mc^0c^0\delta_{00}$, que tem como referência o espaço plano. Para cada posição radial r, temos o fator dado pela expressão:

$$\gamma_r = \frac{1}{\sqrt{\delta^{00}g_{00}}} \tag{1.2}$$

O fator não explica o ganho de cinética, pois em ambos os casos movimento é nulo, entretanto, possui efeito mecânico pela forma como métrica afeta massa inercial.

A quantidade é inerente a formulação, não-linearidade da geometria sobre si mesma. Embora se possa apontar mais especificamente a causa disparidade, torna-se mais proveitoso descobrir qual das duas energias é mais apropriada para representar o estado de inércia.

Energia de repouso é a energia de referência, e saber a proporção que tem efeito no ganho de movimento por variação da métrica permite transcrever mecanicamente as expressões de movimento fatorando para o valor efetivo: expressão normalizada.

$$\mathbb{E}_0 = \gamma_r \mathcal{E}_0 \tag{1.3}$$

Uma vez que seja possível formular a mecânica lagrangiana em relação energia de normalizada, o interesse está na convergência para linearidade de campo fraco, efeito da métrica sobre massa mapeável em potencial, o que encaminha a resolução da métrica, que torna-se possível para um movimento conhecido.

A seção 2 aborda três tópicos da normalidade, sendo que na seção 2.1 é dada a relação de energia entre a presença e ausência de movimento, enquanto a 2.2 a energia na forma repouso sob curvatura. A regressão da convergência de valores pela expansão binomial é tema da seção 2.3 .

Demonstra-se, na seção 3 , que é possível chegar a uma mecânica por expressões normalizadas pela formulação lagrangiana. A seção 3.1: apresentação da notação e definição da função lagrangiana normalizada. O desenvolvimento de Euler-Lagrange, seção 3.2, no mapeamento entre as variáveis do movimento e a equivalência.

O equacionamento energético é visto na seção 4 , pela representação normalizada, seção 4.1, e a equivalência com a forma regular.

Na seção 4.2 obtém-se a relação energética entre cinética e métrica. A relação é aplicada em uma trajetória geodésica que vincula as variáveis paramétricas, equacionando para a métrica.

A resolução da métrica é feita em 4.3, pela convergência para o limite clássico em campo fraco.

A comparação entre a métrica regular e métrica de Schwarzschild é feita na seção 5. O confronto entre as duas métricas é feito pela resolução, obtenção da métrica de Schwarzschild pelo método de dedução do tensor regular, seção 5.1 , e em reverso, seção 5.2 , o tensor regular pelo tensor curvatura.

O texto se encerra com as considerações finais 6.

2 Fator Normalizado

Normalização foi introduzida pela noção de fatorar a energia que não participa da produção de movimento. Ainda assim, possui participação mecânica na inércia, e a denominação vem do entendimento da razão energética que ela expressa.

A forma normalizada deve ser viável por mecânica lagrangiana, para que seja possível estabelecer correspondência com a forma canônica independentemente da condição da intensidade de curvatura. A seção aborda três temas: movimento, inércia e intensidade.

A proporção de energia que um corpo possui em movimento em relação à situação ausência de movimento motiva o fator normalizado.

Parte da energia é retida na forma inercial pela ação da geometria do espaço, o que forma razão com a respectiva medida de repouso do espaço plano.

Os valores conhecidos na mecânica clássica correspondem a ação de campo de baixa intensidade, onde os efeitos de curvatura espacial e velocidades relativística não são pronunciados. A cinética newtoniana estabelece correspondência com cinética relativística pela aproximação na expansão binomial. De forma semelhante, a mesma avaliação pode realizada na relação entre potencial e métrica.

2.1 Fator de Lorentz no Repouso

O fator de Lorentz, na forma covariante, para uma velocidade escalar coordenada $v = \sqrt{v^i v^j \eta_{ij}}$, em um espaço-tempo definido pela métrica g_{ij}, escreve-se:

$$\gamma_v = \sqrt{\frac{c^0 c^0 \delta_{00}}{c^0 c^0 g_{00} - v^i v^j g_{ij}}} \tag{2.1}$$

A distinção no parâmetro escalar $\sqrt{v^i v^j \eta_{ij}}$ da sua aplicação na expressão pela conjugação com a métrica $\sqrt{v^i v^j g_{ij}}$ é feita para destacar o efeito da curvatura gravitacional.

O fator de Lorentz combina, por superposição, a influência dos efeitos cinético e gravitacional, o que é contrastado fazendo a velocidade $v = 0$, tornando destacado que o fator não se torna unitário, como no espaço Minkowski. O termo $c^0 c^0 g_{00}$ confere a atuação da curvatura gravitacional independente da velocidade, o que destaca que nem todo o efeito no fator de Lorentz está relacionado ao movimento.

Na ausência de movimento persiste a contribuição gravitacional.

$$\gamma_0 = \frac{\sqrt{c^0 c^0 \delta_{00}}}{\sqrt{c^0 c^0 g_{00}}} = \frac{1}{\sqrt{\delta^{00} g_{00}}} \tag{2.2}$$

O destaque é o efeito na energia em velocidade nula:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{\sqrt{\delta^{00} g_{00}}} m c^0 c^0 g_{00} \tag{2.3}$$

Considerando que $0 < \delta^{00} g_{00} < 1$, por dilatação temporal, e $|\delta^{11} g_{11}| > 1$, por contração espacial, tem-se, na a composição final do repouso, que parte da energia é retida pela massa na configuração do campo e outra parcela é compensada pelo fator de Lorentz como resíduo que é estranho ao movimento.

A curvatura gravitacional proporciona o ganho de movimento por variação da métrica. Em termos energéticos, a curvatura irá se transmutar em energia cinética pela participação de γ_v. Dada expressão de energia:

$$\mathcal{E} = \gamma_v m c^0 c^0 g_{00} \tag{2.4}$$

Pela razão $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ conhecemos a proporção que participa do movimento, entretanto o resultado não é inteiramente atribuído à γ_v. Denomina-se de fator normalizado a razão.

$$\gamma_n = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = \frac{\text{E. movimento}}{\text{E. Repouso}} \tag{2.5}$$

A quantidade de movimento é dada em relação ao repouso. Uma medida complementar é a quantidade de movimento em relação variação da métrica. A seguir, a composição do repouso por variação da métrica.

2.2 Razão Energética

A energia de repouso de uma posição varia com a métrica, e uma medida de referência interessante é ponderação que se faz com a energia de repouso no espaço plano.

$$\mathbb{E}_0 = m\, c^0 c^0 \delta_{00} \tag{2.6}$$

Para reverter o efeito gravitacional na energia de repouso $\mathcal{E}_0$, denomina-se o fator de ajuste geométrico o termo normalizante:

$$\gamma_r = \frac{1}{\sqrt{\delta^{00} g_{00}}} \tag{2.7}$$

Assim,

$$\frac{1}{\gamma_r} = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathbb{E}_0} = \frac{\text{Nocional}}{\text{Normalizada}} \tag{2.8}$$

O fator γ_r não se restringe a relação entre as energias de repouso, e expressa proporção que outra quantidade pode ser normalizada. O fator também permite representar γ_n como a sobreposição dos efeitos gravitacional e cinemático.

$$\gamma_n = \gamma_v \gamma_r \tag{2.9}$$

Normalização afeta o fator de Lorentz pela mesma razão energética que afeta a energia de repouso. Essa duplicidade é proveitosa, com efeito, fatora a proporção que está relacionada com o efeito da métrica e, por extensão, coloca em relação direta com a posição.

2.3 Aproximação Binomial

Ao equacionar o fator γ_r para resolução da métrica, é importante fazer considerações sobre os erros por aproximação e sua propagação não-linear.

A componente temporal do tensor métrico em função da distância radial possa ser decomposta em uma parcela fixa, corresponde ao espaço plano, e uma parcela variável.

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} \tag{2.10}$$

O valor de h_{00} aproxima-se assintoticamente de zero com o raio crescente.

$$\lim_{r \to \infty} h_{00} = 0 \tag{2.11}$$

Considere que a métrica possa ser dado por um valor aproximado para posição a partir de um raio grande o suficiente tal que ε seja pequeno.

$$\widetilde{g}_{00} = g_{00} \mp \varepsilon \tag{2.12}$$

A aproximação torna-se tanto melhor quanto maior o raio, ou seja, as duas métricas convergem.

$$\lim_{r \to \infty} \left(\frac{\widetilde{g}_{00}}{g_{00}} \right) = 1 \tag{2.13}$$

Assumindo que ε seja escolhido de tal que para toda posição vale:

$$|\varepsilon| < |h_{00}| \tag{2.14}$$

.

Pode-se supor, em benefício da convergência, a mesma ordem de grandeza para os dois termos da desigualdade acima, o que pode ser expresso como o limite:

$$\lim_{r \to 0} \left(\frac{\widetilde{g}_{00}}{g_{00}} \right) = Cte \tag{2.15}$$

Como ε não é linear, pela conservação de energia, mesmo um pequeno erro na aproximação em raios grandes produzirá um grande desvio no valor da métrica em raios pequenos, o que é percebido na energia de repouso local. A energia de movimento acompanha a energia de repouso na em razão do fator de Lorentz. Essa ocorrência conjugada é importante na resolução.

$$g_{00} = \eta_{00} + \left(\widetilde{h}_{00} \pm \varepsilon \right) \tag{2.16}$$

Na relatividade restrita, a correspondência entre a expressão da energia cinética forma newtoniana equivalente é obtida por expansão binomial para explicar diferença obtida com a progressão de velocidades.

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm \varphi}} = \left(1 \mp \frac{1}{2}\varphi + \frac{3}{8}\varphi^2 \mp \frac{5}{16}\varphi^3 + \frac{35}{128}\varphi^4 \mp \frac{63}{256}\varphi^5 + \frac{231}{1024}\varphi^6 \mp \dots \right) \tag{2.17}$$

A substituição similar pode ser empregada com relação à expressão $\sqrt{\eta_{00} + h_{00}}$ para estimar o efeito da propagação de erros com a regressão com o raio na energia total.

$$\sqrt{1 \pm \varphi} = \left(1 \pm \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{8}\varphi^2 \pm \frac{1}{16}\varphi^3 - \frac{5}{128}\varphi^4 \pm \frac{7}{256}\varphi^5 - \frac{21}{1024}\varphi^5 \pm \dots\right) \tag{2.18}$$

A normalização é a fatoração dos termos da métrica que não estão relacionados com a energia cinética. Supondo que o balanceamento também ocorra entre os resíduos das aproximações, pela forma da cinética relativística, uma aproximação no fator γ_r tem propensão a propagar erros na métrica de forma não linear. Um pequeno erro na métrica por aproximação ao limite clássico tem grandes efeitos na cinética em raios pequenos.

3 Lagrange

A formulação da função de Lagrange define a teoria mecânica. Enquanto a ação Hilbert-Einstein [6] é formulação de campo, a formulação corpuscular resulta na equação geodésica[4]. Para uma mesma teoria, a existência de duas funções de Lagrange, presumida a equivalência, possibilita abordagens distintas ao mesmo problema.

A proposta do texto está na resolução da métrica sem o emprego das equações de campo. Enquanto na equação geodésica o objetivo é resolver as variáveis do movimento, na resolução proposta, a manipulação função lagrangiana corpuscular será feita para energia. Assim é útil escrever:

$$\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu) = -\frac{\gamma_v mc^2}{\gamma_v^2} \tag{3.1}$$

A primeira consideração é que a expressão acima não envolve coordenadas generalizadas, na indicação que não há restrições ao espaço ou tempo.

A formulação não é distinta da relatividade restrita. Pelo princípio da equivalência, a gravidade não se constitui como uma força, portanto não há parcela de potencial. É trivial a correspondência com o espaço Minkowski.

O lagrangiano descreve movimento por curvatura, e qualquer parcela de potencial escalar adicionada à função lagrangiana é associado a uma ação extra gravitacional. A ausência de campo escalar é contraditória a ideia de equivalência pelo potencial em campo fraco. O artifício está em decompor a expressão para expor a curvatura métrica como potencial gravitacional em substituição à curvatura, o que será obtido com auxílio de normalização.

Ainda que se faça necessário um balanço energético, não há uma expressão conservativa. A função lagrangiana é covariante, e a aplicação de princípios variacionais por um parâmetro invariante na obtenção de energia generalizada requer consideração. Por transformação de Legendre de $\mathcal{L}$, energia generalizada e energia total são diferentes $\mathcal{H} \neq \mathcal{E}$, e uma vez que $\mathcal{H} = 0$, não é possível representar energia na forma hamiltoniana [8] [5] [2] [11] [13].

A proposição hamiltoniana é para uma expressão geral, com efeito global, um objetivo excessivo às necessidades de resolução. O propósito é formular problema simplificado deve ser suficiente para particularidade do campo fraco.

A formulação desta seção relaciona $\mathcal{L}$ com a energia total $\mathcal{E}$ por uma transformação de Legendre incompleta, e a função lagrangiana em sua forma normalizada de definida, e a equivalência pelas variáveis do movimento apresentada por Euler-Lagrange.

3.1 Energia Lagrangiana

A energia total é relaciona à função lagrangiana (3.1) pela expansão dos termos covariantes:

$$\mathcal{L} = -\gamma_v m c^0 c^0 \delta_{00} \frac{(c^0 c^0 g_{00} - v^i v^j g_{ij})}{c^0 c^0 \delta_{00}} \tag{3.2}$$

A separação de termos guarda similaridade à transformação de Legendre, mas em é restrito aos índices espaciais.

$$\mathcal{L} = -\gamma_v m c^0 c^0 g_{00} + v^i \frac{\partial}{\partial v^j} \mathcal{L} \tag{3.3}$$

A comparação com a expressão que seria obtida da transformação de Legendre, a decomposição difere pela omissão da parte conjugada:

$$v^0 \frac{\partial}{\partial v^\mu} \mathcal{L} + v^\nu \frac{\partial}{\partial v^0} \mathcal{L} \tag{3.4}$$

Decompor a função lagrangiana permite equacionar a condição que a energia total (2.4) deve satisfazer para que o movimento descreva uma trajetória geodésica, e a equação torna-se importante para evidenciar as equivalências que serão feitas.

Destaque é que na equação (3.3) a energia total pode ser inteiramente expressa pela variação espacial v^j, importante no desenvolvimento da cinética.

A função lagrangiana normalizado é definido como:

$$\mathbb{L} = \gamma_r^2 \mathcal{L} \tag{3.5}$$

A definição decorre da decomposição que será aplicada, e o destaque está no γ_r quadrático, que se explica por necessidade do equacionamento covariante que se apresentará e da estabilidade apontada em 2.3. Normalização explica a relação entre as energias de repouso e o potencial estático por expansão binomial, enquanto na situação dinâmica é equacionável por binormalização.

3.2 Euler-Lagrange

A aplicação da equação diferencial de Euler à função lagrangiana e a sua expressão normalizada resulta nas equações do movimento geodésico [4] [8] [5]. A função normalizada $\mathbb{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)/\gamma_r^2$ substitui diretamente a função original $\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)$, sem que haja transformação de coordenadas. A equivalência é direta pela substituição da igualdade que se faz. Segue o entendimento feito para as variáveis do movimento, em especial as varáveis pontuadas.

Equações do movimento obtidas de Euler-Lagrange em ambas as formas são diretamente equacionáveis entre si:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{x}^\nu}\mathcal{L}\right) = \frac{1}{\gamma_r^2}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{x}^\nu}\mathbb{L}\right) \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{1}{\gamma_r^2}\mathbb{L}\right) \tag{3.7}$$

Na primeira equação, (3.6), o termo γ_r depende apenas da posição, não tendo efeito na operação diferencial. As duas equações possuem a mesma variável pontuada, o que se torna importante pela equivalência cinética.

A segunda equação, (3.7), pode ser decomposta em:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\mathbb{L} = \frac{1}{\gamma_r^2}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\mathbb{L} + \mathbb{L}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{1}{\gamma_r^2}\right) \tag{3.8}$$

Os termos podem ser rearranjados para as equações obtidas da forma normalizada, agrupando para $1/\gamma_r$.

$$\frac{1}{\gamma_r^2}\left[\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{x}^\nu}\mathbb{L}\right) + \frac{\partial}{\partial x^\nu}\mathbb{L}\right] + \mathbb{L}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{1}{\gamma_r^2}\right) = 0 \tag{3.9}$$

A expressão resulta na mesma equação geodésica obtida de $\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)$, mas expressa em termos de $\mathbb{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)$, e a equivalência entre as variáveis pontuadas faz concluir que a função $\mathbb{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)$ acompanha a trajetória geodésica traçada por $\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)$.

O termo entre colchetes é o que seria obtido se aplicássemos o Princípio de Hamilton diretamente à expressão $\mathbb{L}$, entretanto, pelas condições que produzem o equacionamento acima, um termo extra é necessário para acompanhar a trajetória geodésica descrita em $\mathcal{L}$.

O termo extra, fora dos colchetes, expressa somente a contribuição pela variação da métrica, sem participação do fator de Lorentz.

$$F = -\mathbb{L}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{1}{\gamma_r^2}\right) \tag{3.10}$$

Em uma descrição simplificada, por conta de γ_r, a função $\mathbb{L}$ torna-se mais pesada, e precisa de um termo extra para acompanhar a trajetória geodésica traçada por $\mathcal{L}$.

Isoladamente, a função $\mathbb{L}$ não possui potencial escalar, e as suas equações de Euler-Lagrange descrevem somente a variação das velocidades no tempo. Para acompanhar a geodésica, necessita uma força externa.

O termo extra F tem transcrição ambivalente, podendo ser componente da geodésica ou uma força externa. Nesse último termo, denominação força virtual é mais apropriada, por estar em uma trajetória inercial, e a ambiguidade é resolvida pela proposição do caráter de dualidade, idealizando que ocorra uma holonomia.

O equilíbrio por Euler-Lagrange torna aparente uma resolução da métrica para o movimento circular em campo fraco, entretanto essa trajetória não exercita as variações das curvaturas espaciais e temporais. A solução apresentada será por balanço energético de trajetória radial.

4 Fulcro Energético

Força virtual da seção anterior depende apenas da posição espacial, e sugere como a métrica apresenta comportamento de energia potencial. O equivalente cinético equaciona como a energia do movimento se acopla com a métrica.

A resolução para o tensor métrico é possível para uma trajetória onde o fator de Lorentz está vinculado à métrica e toda energia do movimento está vinculada à parcela variável da métrica.

4.1 Energia Lagrangiana Normalizada

Decomposição da função normalizada, em semelhança ao que foi feito com $\mathcal{L}$ em (3.2).

$$\mathbb{L} = \gamma_v m(c^0 c^0 g_{00} - v^i v^j g_{ij})\gamma_r^2 \tag{4.1}$$

Mais uma vez, obtemos semelhança dm Legendre:

$$\mathbb{E}_L = v^i \frac{\partial}{\partial v^j}\mathbb{L} - \mathbb{L} \tag{4.2}$$

Substituindo os termos dessa energia pelas respectivas definições, chegamos à expressão:

$$\mathbb{E}_L = \gamma_r^2 \gamma_v m c^0 c^0 g_{00} \tag{4.3}$$

A seção 2.3 aponta a atenção que se deve fazer para que aproximações em campo fraco não propague erros em campo forte, entretanto não apresenta uma técnica geral e depende de avaliar a estabilidade que a equação. Na resolução, a forma mais interessante de não recair nessa imprecisão é evitar expressões que incidam nele.

Nesse ponto é interessante apontar que a expressão de energia $\tilde{\mathbb{E}}_L = \gamma_v mc^2$ depende apenas do fator de Lorentz. Se for tomado como referência $\mathbb{E}_0 = mc^2$, observa-se que a razão entre energias não depende diretamente de componente da métrica.

$$\frac{\tilde{\mathbb{E}}_L}{\mathbb{E}_0} = \frac{\text{Energia do movimento}}{\text{Energia de Repouso}} = \gamma_v \tag{4.4}$$

O fator de Lorentz está relacionado à energia cinética. Para um valor conhecido dessa energia pode-se encontrar um valor para métrica.

4.2 Relação Cinética-Geométrica

A denominação "energia cinética" requer um teorema trabalho-energia apropriado, se houver definição adequada. Emprega-se a designação "termo cinético" para as expressões que guardam similaridade com a expressão da relatividade restrita. Efetivamente todas elas convergem, mas apenas uma pode ser chamada de energia cinética.

A energia relacionada a trajetória geodésica é dada por (4.3), e isola-se a ação dos fatores associados ao movimento multiplicando-se ambos os lados por g^{00}, em atenção a instrução dada para equação (4.4). O fator de binormalizante é convertido na forma métrica $\gamma_r^2 = g_{11}\delta^{11}$ para representar a deformação espacial, que ocorre somente na direção radial. Destacando-se um termo cinético do fator de Lorentz, tem-se:

$$g^{00}\mathbb{E}_L = (\gamma_v - 1)mc^0c^0(g_{11}\delta^{11}) + mc^0c^0(g_{11}\delta^{11}) \tag{4.5}$$

Seguindo as ideias desenvolvidas anteriormente, procura-se expressar a relação energética tomando como referência a energia de repouso normalizada, que para a função lagrangiana é escolhida pela estabilidade de γ_v em (4.4). O termo é evidenciado fazendo-se $g_{11} = \eta_{11} + h_{11}$.

$$g^{00}\mathbb{E}_L = (\gamma_v - 1)mc^0c^0\, g_{11}\delta^{11} + mc^0c^0\, \eta_{11}\delta^{11} + mc^0c^0\, h_{11}\delta^{11} \tag{4.6}$$

A "lei de conservação" para expressão é diferente da energia total da mecânica clássica, pois energia não é constante no espaço. Entretando, é possível considerar a convergência na aproximação para campo fraco.

$$\left(\gamma_r^2\gamma_v - \eta_{11}\delta^{11}\right) mc^0c^0 = (\gamma_v - 1)mc^0c^0g_{11}\delta^{11} + mc^0c^0h_{11}\delta^{11} \tag{4.7}$$

Conforme a distância radial torna-se grande, a curvatura do espaço torna-se amena e aproxima-se da métrica Minkowski, com $g_{00} \approx 1$ e, por consequência, $\gamma_r \approx 1$. Nessa condição de curvatura, o fator de Lorentz porta-se como na relatividade restrita, e as velocidades promovidas pelo campo são relativisticamente baixas, tendo-se $\gamma_v \approx 1$. O lado esquerdo da equação de aproxima-se de zero, o que permite equacionar o balanco pelo lado direito para:

$$(\gamma_v - 1)mc^0c^0g_{11}\delta^{11} \approx -mc^0c^0h_{11}\delta^{11} \tag{4.8}$$

Obtém-se, por essa equação, a condição em que o termo cinético em γ_v converge para um termo da métrica.

Completando a equação (4.7), um entendimento para o termo do lado esquerdo pode ser feito substituindo $\gamma_S = \gamma_r^2\gamma_v$.

$$\mathbb{K}^{00} = (\gamma_S - 1)\, mc^0c^0 = \left(\gamma_r^2\gamma_v - \eta_{11}\delta^{11}\right) mc^0c^0 \tag{4.9}$$

A função lagrangiana foi normalizada por γ_r^2. Revertendo a normalização:

$$\mathcal{K} = \mathbb{K}^{00} g_{00} \tag{4.10}$$

O termo pode ser entendido pela diferença entre energia normalizada e a energia de referência para a mesma posição do espaço.

$$\mathcal{K} = \mathbb{E}_L - E_{ref} \tag{4.11}$$

As parcelas do termo cinético em $\mathcal{K}$ têm significado vinculado a uma posição métrica, entretanto a binormalização desse símbolo desloca todo o efeito geométrico dessa posição para parcela do fator $\gamma_r^2 \gamma_v$, resultado na diferença em relação ao espaço plano.

$$\gamma_r^2 \gamma_v - \eta_{11} \delta^{11} \tag{4.12}$$

Denominamos relação cinética-geométrica a transmutabilidade de representar o potencial geométrico na forma cinética.

4.3 Escape

A resolução da métrica é obtida da aplicação da relação cinética-geométrica uma trajetória com valores de energia conhecidos. A convergência a valores clássicos é simplificada pela redução do número de variáveis, e uma trajetória radial é escolhida por ser a direção que participa da curvatura espacial. A escolha da trajetória específica a vinculação entre parâmetros, sendo adequado retornar à equação (4.7).

$$\left(\gamma_r^2 \gamma_v - \eta_{11} \delta^{11}\right) mc^0 c^0 = (\gamma_v - 1) mc^0 c^0 g_{11} \delta^{11} + mc^0 c^0 h_{11} \delta^{11} \tag{4.13}$$

A relação entre a métrica e o fator de Lorentz pode ser expressa pelo fator normalizado $\gamma_n = \gamma_v \gamma_r$

$$\gamma_v \gamma_r^2 = \frac{\gamma_n}{\sqrt{g_{00} \delta^{00}}} \tag{4.14}$$

A convergência do termo cinético para o termo da métrica foi demonstrada quando os fatores $\gamma_v \approx 1$ e $\gamma_r \approx 1$, sem qualquer consideração prévia sobre o acoplamento das variáveis. A condição $\gamma_n = 1$ estabelece um vínculo do fator parametrizado por velocidade com o fator parametrizado por posição.

$$\gamma_v = \frac{1}{\gamma_r} \tag{4.15}$$

A resolução desse equacionamento reduz a quantidade de variáveis e determina uma trajetória que o fator de cinemático se contrapõe ao fator geométrico.

Para uma métrica com assinatura $(+, +, +, +)$, o sinal é interno à métrica.

$$c^0c^0\delta_{00} = \gamma_v^2(c^0c^0g_{00} + v^1v^1g_{11}) \tag{4.16}$$

Fazendo a substituição $\gamma_v^2 = g_{00}\delta^{00}$ e sabendo que $g_{11}g_{00} = -\delta_{11}\delta_{00}$, chega-se à expressão:

$$-v^1v^1\delta_{11} = c^0c^0\delta_{00}(1 - \delta^{00}g_{00}\delta^{00}g_{00}) \tag{4.17}$$

O resultado é expresso apenas velocidade radial. Toda energia cinética está na direção da curvatura, não havendo participação cinética em outras direções, o que permite que velocidade convirja para zero com o aumento do raio. Assim, a escolha da velocidade de escape torna a condição de energia conhecida para campo fraco.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{g_{00}}} - 1\right) mc^0c^0\eta_{11}\delta^{11} = (\gamma_v - 1)mc^0c^0g_{11}\delta^{11} + mc^0c^0h_{11}\delta^{11} \tag{4.18}$$

Mais uma vez, agora para energia de repouso da velocidade de fuga, façamos o raio grande o suficiente, tal que $\sqrt{g_{00}} \approx 1$, o que é estendido para $|g_{11}| \approx 1$. Nessas condições, temos a quantidade de γ_v convergindo para a expressão da relatividade restrita, o que pode ser aproximada pela forma newtoniana $K = \frac{1}{2}mv^2$.

$$K = mc^0c^0h_{11}\delta^{11} \tag{4.19}$$

A expressão do termo cinético é parametrizada para velocidade. Para vincular a uma expressão parametrizada pela posição, considera-se a equivalência ao movimento de um-corpo em função do campo gravitacional de força central. O princípio de Hamilton vincula a equivalência da cinética ao potencial parametrizado pela posição em GMm/r.

Com isso, as componente temporal e radial da métrica são:

$$g_{00} = \left(1 + \frac{GM}{c^2r}\right)^{-1} \qquad\qquad g_{11} = -\left(1 + \frac{GM}{c^2r}\right) \tag{4.20}$$

A resolução das direções angulares vem da propriedade do invariante ser invariante e unitário.

$$\det(g_{\mu\nu}) = -1 \tag{4.21}$$

A regularidade da métrica não admite singularidade removível, como acontece na componente $g_{33} = \rho^2 \sin^2\theta$ da métrica de Schwarzschild. A ocorrência se deve à arbitrariedade da escolha do sistema de coordenadas e o fato de ser removível, reforça que as direções angulares não participam da curvatura. Além disso, ajunta-se a necessidade de homogeneidade dimensional no vetor velocidade.

$$g_{22} = -1 \qquad\qquad g_{33} = -1 \tag{4.22}$$

O valor unitário do determinante da métrica não é inédito[6], e a restrição é relaxada para obtenção da resolução do tensor métrico pelas equações de campo ([3] Doc. #169, #188, #194).

A correspondência clássica da velocidade de escape pode ser demonstrada na aproximação da equação (4.17) para campo fraco:

$$v_e^2 = c^2(1 - \sqrt{g_{00}}^{\,4}) \tag{4.23}$$

Na expansão binomial, uma aproximação é possível enquanto $|\varphi(r)| << 1$.

$$\sqrt{g_{00}} \approx 1 - \frac{GM}{2c^2 r} \tag{4.24}$$

Aplicando mais uma vez a expansão binomial, podemos remover os termos de grau superior e retorna a expressão à equação de velocidade.

$$\left(1 - \frac{GM}{2c^2 r}\right)^2 \approx 1 - 4\frac{GM}{2c^2 r} \tag{4.25}$$

5 Comparação

O tensor métrico regular guarda semelhança ao tensor de Schwarzschild em condições de campo fraco, o que pode ser explicado na aproximação por expansão binomial.

As diferenças se acumulam conforme o campo torna-se forte, mas somente tornam-se significativas em intensidades extremas. Uma forma de comparação consiste em apontar os pontos críticos na resolução e indicar que as condições admitidas na resolução explicam a diferença.

Mudando a abordagem para campo, as diferenças são explicadas na arbitragem da formulação e escolha da condição contorno do problema particular.

5.1 Tensor de Schwarzschild pela Abordagem Energética

Ambas as métricas, regular e de Schwarzschild, convergem na aproximação para campo fraco. Nessa condição, é difícil apresentar, quantitativamente, uma diferença entre as duas métricas, que seja pela curvatura, quer seja pelas velocidades orbitais. Entretanto, ainda em campo fraco, a diferença apresenta-se na convergência que se faz para o balanço de energético clássico, o que se torna uma boa oportunidade para demonstrar aproximação por expansão binomial apresentada na seção 2.3 , partindo-se da energia relativística:

$$E = \gamma_v m c^0 c^0 \delta_{00} \tag{5.1}$$

Pode-se empregar a métrica $g_{00} = 1 - 2\phi$ de Schwarzschild, e pela aproximação na expansão binomial chegar ao balanço energético clássico.

$$\begin{aligned}
\widetilde{E} =& \gamma_v mc^2 && (5.2a)\\
=& \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{1}{\sqrt{1+v^1v^1g_{11}g^{00}/c^2}}mc^2 \\
=& \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}(\tilde{\gamma}_v - 1)mc^2 + \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}mc^2 \\
\approx& \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}(\tilde{\gamma}_v - 1)mc^2 + (1+\phi)\,mc^2 \\
=& \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\tilde{K} + mc^2 + \tilde{U} && (5.2b)
\end{aligned}$$

A aproximação por expansão binomial ocorre, complementarmente, nos dois termos de energia, e parece condizente que o balanceamento também ocorra entre os resíduos das aproximações. No caso da energia cinética, a aproximação é conhecida da relatividade restrita, e é boa enquanto a velocidade $|v| << c$.

$$\tilde{K} = (\gamma - 1)mc^2 \approx \frac{1}{2}mv^2 \tag{5.3}$$

O campo potencial é trazido da métrica, a consideração é que a aproximação será boa enquanto $|\phi| << 1$. A convergência das métricas, apontado na equação (2.13), destaca que o limite clássico é necessário, mas não suficiente.

5.2 Tensor de Regular pela Solução de Schwarzschild

A gravidade decai em intensidade com o quadrado da distância, para um corpo central. Para um universo estacionário, o campo nunca é nulo, o que torna aceitável a premissa que o termo de curvatura das equações e campo da relatividade geral possa ser proposto com o comportamento assintótico:

$$\lim_{r\to\infty}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) = 0_{\mu\nu} \tag{5.4}$$

A resolução de Schwarzschild [14], como instruído por Hilbert [7], oferece uma solução geral para a equação diferencial obtida para obtenção do tensor métrico, e estabelece o espaço Minkowski [10] como condição de contorno. Uma solução particular é oferecida pela aproximação ao limite newtoniano [4][9][1].

O problema é reformulado para:

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0_{\mu\nu} \tag{5.5}$$

O novo equacionamento em (5.5) é uma solução trivial para o limite de (5.4), condicionado a satisfazer:

$$\lim_{r\to\infty} g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \tag{5.6}$$

Por substituição direta, pode-se demonstrar que o tensor métrico regular satisfaz as equações diferenciais da resolução de (5.4) e (5.6). Uma solução geral de 5.5 apresenta deslocamento de potencial, mas não se resolve na solução particular.

6 Considerações Finais

6.1 Sumário

A regularidade da métrica é obtida da razão obtida pela energia de repouso, apresentado na seção 2 , procedimento denominado de normalização. Motivado pela quantidade de movimento e a variação da métrica, a seção 2.1 relaciona o movimento por uma posição estática, e a seção 2.2 o fator que existe entre a energia da ausência de movimento e energia de repouso. A seção 2.3 aborda o tratamento da aproximação em campo fraco e a convergência da escala energética e sua expressão por expansão binomial.

A mecânica da expressão normalizada é dada na seção 3 , com a formulação lagrangiana. A seção 3.1 , apresenta a expressão de energia pela transformação incompleta de Legendre e a definição da função lagrangiana normalizada.

—

A equivalência da função normalizada com a regular é demonstrada na aplicação Euler-Lagrange, seção 3.2 , e o mapeamento entre as variáveis do movimento.

O equacionamento energético é visto na seção 4 . A seção 4.1 , replica, para representação normalizada, transformação incompleta de Legendre e relaciona energia obtida ao fator de Lorentz pelo repouso.

Similar ao balanço cinético-potencial, a relação entre cinético e métrica é obtida na seção 4.2 . A relação é aplicada em uma trajetória geodésica converte para a forma clássica, que vincula as variáveis paramétricas, equacionando para a métrica.

A resolução da métrica é feita em 4.3 na aplicação da relação cinética-geométrica para condição de escape. A trajetória radial reduz o número de variáveis e vincula os fatores envolvidos. A métrica é obtida para um determinante unitário, removendo singularidades transitórias e promovendo a homogeneidade dimensional. É demonstrada a convergência clássica da velocidade de escape.

A comparação entre a métrica regular e métrica de Schwarzschild é feita na seção 5. O confronto entre as duas métricas é feito pela resolução: obtenção da métrica de Schwarzschild pelo método de dedução do tensor regular, seção 5.1 ; e em reverso, seção 5.2 , tensor regular pelo tensor curvatura.

6.2 Conclusão

Na mecânica clássica, conservação estabelece um balanço cinético-potencial. Os princípios variacionais estabelecem os vínculos entre os parâmetros posição e velocidade por meios da equivalência das respectivas variações em condição estacionária. A vinculação na mecânica clássica resulta em energia total por uma constante. O equivalente cinético-geométrico seria expressar-se por um invariante energético, que não existe no espaço curvo. Não obstante, a resolução possibilita-se pela convergência assintótica pela razão que faz com energia de repouso.

O aspecto principal da resolução é a vinculação da energia do movimento com a métrica. Mais uma vez, a falta de um invariante é compensada pela escolha de uma trajetória em que há o acoplamento dos parâmetros.

No resultado principal, obteve-se um tensor métrico regular. A conclusão principal realça o invariante da velocidade como condição de regularidade.

A relatividade postula que a velocidade da luz é independente do objeto que a emite/absorve. Addendum do postulado: objetos não podem mover-se mais rápido do que a luz que emite/absorve.

A não-regularidade implica na inversão da assinatura da métrica, que acontece na iminência da velocidade do corpo superar a luz que emite, deixando de emiti-la no seu limiar. Exauridos os argumentos, a contradição que questão traz só se resolve de forma postular.

Havendo geometria, *que haja luz.*

7 Agradecimentos

Agradecemos aos apoiadores do autor pela chave Pix: **samelo**

8 Bibliografia

Referências

[1] Ronald Adler, Maurice Bazin, Menahem Schiffer, and Jacques E Romain. *Introduction to general relativity.* American Institute of Physics, 1965.

[2] Douglas Cline. *Variational principles in classical mechanics.* University of Rochester River Campus Librarie, 2017.

[3] Albert Einstein. *The Collected Papers of Albert Einstein, Volume 8: The Berlin Years: Correspondence, 1914-1918.*

[4] Albert Einstein. Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie annalen der physik, 49. *Reprinted in English translation in The Principle of Relativity.(1952) Dover Publications Inc, New York*, 1916. `http://myweb.rz.uni-augsburg.de/~eckern/adp/history/einstein-papers/1916_49_769-822.pdf`.

[5] Herbert Goldstein, Charles Poole, and John Safko. *Classical mechanics. 3rd.* Addison Wesley, 2002.

[6] David Hilbert. Die grundlagen der physik. (erste mitteilung). *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1915:vol. 3 pp. 395–407., 1915. `https://eudml.org/doc/58946`.

[7] David Hilbert. Die grundlagen der physik. (zweite mitteilung). *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1917:53–76, 1917. `http://eudml.org/doc/58973`.

[8] Cornelius Lanczos. The variational principles of mechanics, 1st cd, 1949.

[9] Evgeny Mikhailovich Lifshitz Lev Davidovich Landau. *The Classical Theory of Fields*, volume 2. Butterworth-Heinemann, 1975.

[10] Hermann Minkowski. Raum und zeit. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 18:75–88, 1909.

[11] Emmy Noether. Invariante variationsprobleme. *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, page 235–257, 1918.

[12] Julius Robert Oppenheimer and Hartland Snyder. On continued gravitational contraction. *Physical Review*, 56(5):455, 1939.

[13] David E. Rowe. Emmy noether on energy conservation in general relativity, 2019.

[14] Karl Schwarzschild. Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin*, pages 189–196, 1916. `https://archive.org/stream/sitzungsberichte1916deutsch#page/188/mode/2up`.