# Tensor Métrico Regular para Campo Gravitacional Relativístico

Sergio de Azevedo Melo
0009-0003-2015-666X
doi: 10.5281/zenodo.12803092

23 de julho de 2024

**Resumo**

O tensor métrico define a geometria do espaço tempo na Relatividade Geral. Embora satisfaça as equações de campo, o tensor obtido pela aplicação do limite newtoniano à solução de Schwarzschild do vácuo apresenta descontinuidade do mapeamento da métrica pelo campo gravitacional, resultando em pontos indefinidos.

Considerando-se a sobreposição do efeito cinemático ao campo gravitacional no fator de Lorentz e apresenta-se função lagrangiana transformada no estudo de energia total.

A função atende velocidades relativísticas em expressões de energia evita a limitação de baixa velocidade. A extrapolação da condição de campo fraco é abordada pelo mapeamento da energia de repouso.

Obtém-se um tensor métrico regular no espaço-tempo para condição de universo estacionário, e é apontado como difere da resolução de Schwarzschild e da métrica resultante por aproximação newtoniana.

**Abstract**

The metric tensor defines the geometry of spacetime in General Relativity. Although it satisfies the field equations, the tensor obtained by Application of the Newtonian limit to the vacuum Schwarzschild solution presents discontinuity in the mapping of the metric by the gravitational field, resulting in undefined points.

Considering the superimposition of the kinematic effect on the gravitational field in the Lorentz factor and a transformed Lagrangian function is presented in the study of total energy.

The function caters for relativistic speeds in energy expressions and avoids low speed limitation. Extrapolation of the weak field condition is addressed by mapping the rest energy.

A regular metric tensor in spacetime is obtained for the condition of a stationary universe, and it is pointed out how it differs from the Schwarzschild resolution and the resulting metric by Newtonian approximation.

# 1 Introdução

As equações de campo, apresentadas pela aplicação de princípios variacionais na ação de Hilbert-Einstein [7], sustentam que é possível um equacionamento geométrico da gravitação [4] ao demonstrar que um distribuição de energia/massa está balanceada à uma expressão da curvatura somente quando segue sobre um caminho geodésico.

As equações de campo são satisfeitas pela métrica obtida da resolução de Schwarzschild para o vácuo [15] e na aproximação para campo fraco e baixa velocidade [4]. Apesar de encontra um tensor momento-energia para o tensor curvatura na métrica obtida, a métrica possui a peculiaridade de conter singularidades matemáticas.

Singularidade não são incomuns na física, à exemplo da singularidade não-removível na origem potencial do campo central pelo inverso da distância. A surpresa é haver singularidade da métrica mapeada em posição corresponde onde não há singularidade de potencial de campo [8], o que afeta corpos densos [13].

Uma métrica regular é definida para todos os valores de seu mapeamento em que o potencial de campo é definido. Singularidades são ocorrência conjunta, e por consequências singularidade somente é mapeada por outra singularidade.

O mapeamento do potencial pela métrica tem consequência na energia total do movimento. Ao logo do desenvolvimento fazemos comparação da energia de movimento com referência ao seu caso basilar.

Na condição de repouso, velocidade $v = 0$, observa-se que o fator de Lorentz $\gamma_0 \neq 1$, e a expressão de energia total resulta em:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{mc^0 c^0}{\sqrt{\delta^{00} g_{00}}} g_{00}$$

A energia de repouso, na forma covariante, é mapeada pela métrica. Em comparação ao que se obtém no espaço Minkowski, pode-se destacar que para cada posição radial $r$, temos o fator dado pela expressão:

$$\gamma_r = \frac{1}{\sqrt{\delta^{00} g_{00}}}$$

Obtém-se mapeamento da energia de repouso $\mathbb{E}_0$ no espaço Minkowski para um espaço dado pela métrica $g_{\mu\nu}$ na expressão:

$$\mathbb{E}_0 = \gamma_r \mathcal{E}_0$$

Além do mapeamento estático, na Seção 2 obtem-se um relação com a energia do movimento no procedimento de normalização. Ainda nessa seção, observa-se que ao ponderar razões, a escala de variação da energia de repouso é não-linear.

O conceito de normalização é aplicamos na obtenção da expressão de energia de uma trajetória geodésica na seção 3.

Na seção 4, obtem-se a relação entre cinético e métrica. A relação é aplicada em uma trajetória geodésica que vincula as variáveis paramétricas, equacionando para a métrica.

Na última seção, uma avaliação da métrica é feita em comparação das resoluções e o confronto com a não-linearidade.

# 2 Fator Normalizado

Normalização foi introduzida pela sua possibilidade de mapeamento, mas a denominação vem do entendimento da razão energética que ela expressa. O interesse esta na fatoração da energia que não produz movimento.

A fatoração viabiliza o emprego da mecânica lagrangiana, que é apropriada para a resolução da cinética relativística.

A cinética newtoniana estabelece correspondência com cinética relativística pela aproximação na expansão binomial. De forma semelhante, a mesma avaliação pode realizada na relação entre potencial e métrica.

## 2.1 Fator de Lorentz no Repouso

O fator de Lorentz na forma covariante para uma velocidade escalar coordenada $v = \sqrt{v^i v^j \eta_{ij}}$, em um espaço-tempo definido pela a métrica $g_{ij}$ escreve-se:

$$\gamma_v = \sqrt{\frac{c^0 c^0 \delta_{00}}{c^0 c^0 g_{00} - v^i v^j g_{ij}}}$$

A distinção no parâmetro escalar $\sqrt{v^i v^j \eta_{ij}}$ da sua aplicação na expressão pela conjugação com a métrica $\sqrt{v^i v^j g_{ij}}$ é feita para destacar o efeito gravitacional. O fator de Lorentz combina, por superposição, a influencia dos efeitos cinético e gravitacional. Fazendo a velocidade $v = 0$ o fator de Lorentz não se torna unitário, como no espaço Minkowski.

O termo $c^0 c^0 g_{00}$ confere a atuação gravitacional independente da velocidade. Portanto, nem todo o efeito gravitacional está relacionado ao movimento.

Na ausência de movimento persiste a contribuição gravitacional.

$$\gamma_0 = \frac{\sqrt{c^0 c^0 \delta_{00}}}{\sqrt{c^0 c^0 g_{00}}} = \frac{1}{\sqrt{\delta^{00} g_{00}}}$$

É interessante observar efeito na energia de repouso:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{\sqrt{\delta^{00} g_{00}}} m c^0 c^0 g_{00}$$

Considerando que $0 < \delta^{00} g_{00} < 1$, por dilatação temporal, e $\delta^{11} g_{11} > 1$, por contração espacial. Temos na a composição final do repouso que parte da energia é retida pela massa na configuração do campo e outra parcela é compensada pelo fator de Lorentz como resíduo que é estranho ao movimento.

$$\mathcal{E} = \gamma_v m c^0 c^0 g_{00}$$

Pela razão $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ conhecemos a proporção que participa do movimento. Denomina-se de fator normalizado a razão.

$$\gamma_n = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = \frac{\text{E. movimento}}{\text{E. Repouso}}$$

## 2.2 Razão energética

O fator normalizado foi apresentado pela razão do movimento por uma quantidade de referência. A energia de repouso de uma posição varia com a métrica e uma medida de referência mais interessante é a energia de repouso no espaço Minkowski.

$$\mathbb{E}_0 = m\, c^0 c^0 \delta_{00}$$

Para reverter o efeito gravitacional na energia de repouso $\mathcal{E}_0$, definimos o fator de ajuste gravitacional

$$\gamma_r = \frac{1}{\sqrt{\delta^{00} g_{00}}}$$

Assim,

$$\mathbb{E}_0 = \gamma_r \mathcal{E}_0$$

O fator $\gamma_r$ não se restringe a relação entre as energias de repouso, e expressa proporção que outras quantidades podem ser normalizadas.

$$\frac{1}{\gamma_r} = \frac{\mathcal{E}}{\mathbb{E}} = \frac{\text{Nocional}}{\text{Normalizada}}$$

O fator também permite representar $\gamma_n$ como a sobreposição dos efeitos gravitacional e cinemático.

$$\gamma_n = \gamma_v \gamma_r$$

Normalização expressa uma quantidade pela mesma razão energética que afeta a energia de repouso.

Como efeito, fatora a proporção que está relacionados com o efeito da métrica na posição.

## 2.3 Aproximação Binomial

Ao equacionar o fator $\gamma_r$ para resolução da métrica, é importante fazer considerações sobre os erros por aproximação e sua propagação não-linear.

Considere a componente temporal do tensor métrico em função da distancia radial

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00}$$

O valor de $h_{00}$ aproxima-se assintoticamente de zero com o raio crescente.

$$\lim_{r \to \infty} h_{00} = 0$$

Considere esta componente da métrica possa ser dado por um valor aproximado para posição à partir de um raio grande o suficiente tal que $h_{00}$ seja pequeno.

$$\widetilde{g}_{00} = g_{00} \mp \varepsilon$$

A aproximação torna-se tanto melhor quanto maior o raio e se as duas métricas convergem.

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{\widetilde{g}_{00}}{g_{00}}\right)=1$$

Para toda posição vale

$$|\varepsilon|<|h_{00}|$$

.

Podemos supor, em beneficio da convergência, a mesma ordem de grandeza para os dois termo da desigualdade acima, o que pode ser expresso como o limite:

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{\widetilde{g}_{00}}{g_{00}}\right)=Cte$$

Como $\varepsilon$ não é linear, pela a conservação de energia, um pequeno erro produz um grande desvio no valor da métrica em raios pequenos, o que é percebido na energia de repouso local. A energia de movimento acompanha a energia de repouso na em razão do fator de Lorentz. Essa ocorrência conjugada é importante na resolução.

$$g_{00}=\eta_{00}+\left(\widetilde{h}_{00}\pm\varepsilon\right)$$

Na relatividade restrita, a correspondência entre a expressão da energia cinética forma newtoniana equivalente é obtida por expansão binomial para explicar diferença obtida com a progressão de velocidades.

$$\frac{1}{\sqrt{1\pm\varphi}}=\left(1\mp\frac{1}{2}\varphi+\frac{3}{8}\varphi^2\mp\frac{5}{16}\varphi^3+\frac{35}{128}\varphi^4\mp\frac{63}{256}\varphi^5+\frac{231}{1024}\varphi^6\mp\dots\right)$$

A substituição similar pode ser empregada com relação à $\sqrt{\eta_{00}+h_{00}}$ para estimar o efeito da propagação de erros com a regressão com o raio na energia total.

$$\sqrt{1\pm\varphi}=\left(1\pm\frac{1}{2}\varphi-\frac{1}{8}\varphi^2\pm\frac{1}{16}\varphi^3-\frac{5}{128}\varphi^4\pm\frac{7}{256}\varphi^5-\frac{21}{1024}\varphi^5\pm\dots\right)$$

A normalização é a fatoração dos termos da métrica que não estão relacionados com a energia cinética. Por outro lado, o fator $\gamma_r$ propensão à propagar erros na métrica de forma não linear. Um pequeno erro na métrica tem grandes efeitos na cinética em raios pequenos.

# 3 Lagrange

Discussão de energia na envolve considerações sobre a função lagrangiana e o que ela abrange. O movimento do campo e/ou o movimento dos corpos que se movem nesse campo são proposições da lagrangiana. A conservação é demonstrada na proposição gravitacional mais geral [5] [14].

A formulação da função de Lagrange define uma teoria mecânica.

$$\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu) = -\,\frac{\gamma_v m c^2}{\gamma_v^2}$$

A primeira consideração é que a proposição acima não envolve coordenadas generalizadas, na indicação que não possui restrições ao espaço ou tempo.

A formulação não é distinta da relatividade restrita. Pelo Principio da Equivalência, a gravidade não se constitui como uma força, portanto não há parcela de potencial. É trivial a correspondência com o espaço Minkowski.

Qualquer parcela de potencial escalar adicionada à função lagrangiana é associado à uma ação extra gravitacional. Ao mesmo tempo é necessário expor o potencial gravitacional na forma da métrica, o que será obtido na normalização.

A função lagrangiana é covariante e a aplicação de princípios variacionais por um parâmetro invariante na obtenção de energia generalizada requer consideração. Por transformação de Legendre de $\mathcal{L}$, energia generalizada e energia total são diferentes $\mathcal{H} \neq \mathcal{E}$, e uma vez que $\mathcal{H} = 0$, não possível representar energia como consequência da hamiltoniana [9] [6] [2] [12].

A situação é contornada evitando-se proposições gerais. As condição especificas do movimento sustentam a resolução proposta. Eliminamos as ações estranhas ao campo gravitacional restringimos a energia àquela obtida do movimento produzido por trajetória geodésica. Obtemos isso ao relacionar $\mathcal{L}$ com a energia total $\mathcal{E}$

A equação geodésica é derivada para a função e a sua forma normalizada

## 3.1 Energia Lagrangiana

A energia total é relaciona à função lagrangiana pela expansão dos termos covariantes

$$\mathcal{L} = -\,\gamma_v m c^0 c^0 \delta_{00} \frac{(c^0 c^0 g_{00} - v^i v^j g_{ij})}{c^0 c^0 \delta_{00}}$$

A separação de termos guarda similaridade à transformação de Legendre, mas em é restrito aos índices espaciais.

$$\mathcal{L} = -\,\gamma_v m c^0 c^0 g_{00} + v^i \frac{\partial}{\partial v^j} \mathcal{L}$$

A comparação com a expressão que seria obtida da transformação de Legendre, a decomposição difere pela omissão da parte conjugada:

$$v^0 \frac{\partial}{\partial v^\mu} \mathcal{L} + v^\nu \frac{\partial}{\partial v^0} \mathcal{L}$$

Decompor a função lagrangiana permite equacionar a condição que a energia total deve satisfazer para que o movimento descreva uma trajetória geodésica.

A função lagrangiano normalizado é definido como:

$$\mathbb{L} = \gamma_r^2 \mathcal{L}$$

## 3.2 Euler-Lagrange

A aplicação da equação diferencial de Euler à função lagrangiana e a sua expressão normalizada resulta nas equações do movimento. [4] [9] [6]

A função normalizada $\mathbb{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)/\gamma_r^2$ substitui diretamente a função original $\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)$, sem que haja transformação de coordenadas.

Equações do movimento obtidas de Euler-Lagrange em ambas as formas são diretamente equacionáveis entre si:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^\nu}\mathcal{L}\right) = \frac{1}{\gamma_r^2}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^\nu}\mathbb{L}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{1}{\gamma_r^2}\mathbb{L}\right)$$

Na primeira equação, o termo $\gamma_r$ depende apenas da posição, não tendo efeito na operação diferencial.

A segunda equação pode ser decomposta em:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\mathbb{L} = \frac{1}{\gamma_r^2}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\mathbb{L} + \mathbb{L}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{1}{\gamma_r^2}\right)$$

Os termos podem ser rearranjados para as equações obtidas da forma normalizada, agrupando para $1/\gamma_r$.

$$\frac{1}{\gamma_r^2}\left[\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^\nu}\mathbb{L}\right) + \frac{\partial}{\partial x^\nu}\mathbb{L}\right] + \mathbb{L}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{1}{\gamma_r^2}\right) = 0$$

A expressão resulta na mesma equação geodésica obtida de $\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)$, mas expressa em termos de $\mathbb{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)$. A função $\mathbb{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)$ acompanha a trajetória geodésica traçada por $\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)$.

O termo entre colchetes é o que seria obtido se aplicássemos o Princípio de Hamilton à $\mathbb{L}$, entretanto, pelos condições que produzem o equacionamento acima, um termo extra é necessário para acompanhar a trajetória geodésica descrita em $\mathcal{L}$.

O termo extra, fora do colchetes, expressa somente a contribuição pela variação da métrica, sem participação do fator de Lorentz.

$$F = -\mathbb{L}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{1}{\gamma_r^2}\right)$$

Em uma descrição simplificada, por conta de $\gamma_r$, a função $\mathbb{L}$ torna-se mais pesada, e precisa de um termo extra para acompanhar a trajetória geodésica traçada por $\mathcal{L}$.

Isoladamente, a função $\mathbb{L}$ não possui potencial escalar, e as suas equações de Euler-Lagrange descrevem somente a variação das velocidades no tempo. Para acompanhar a geodésica, necessita uma força externa.

O termo extra $F$ tem transcrição ambivalente, podendo ser componente da geodésica ou uma força externa. Nesse último termo, denominação força virtual é mais apropriada, por estar em uma trajetória inercial, e a ambiguidade é resolvida pela proposição do caráter de dualidade.

A função $\mathbb{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)$ acompanha a trajetória geodésica traçada por $\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)$. Além disso, é possível separar nas equações do movimento a contribuição isolada da variação da métrica.

# 4 Fulcro Energético

Força virtual sugestiona como a métrica apresenta comportamento de energia potencial. O equivalente cinético equacionar a forma como a energia do movimento se acopla com a métrica.

A resolução para o tensor métrico é possível para uma trajetória onde o fator de Lorentz está vinculado à métrica e toda energia do movimento está vinculada à parcela variável da métrica.

## 4.1 Energia Lagrangiana Normalizada

Decomposição da função normalizada, em semelhança ao que foi feito com $\mathcal{L}$

$$\mathbb{L} = \gamma_v m(c^0 c^0 g_{00} - v^i v^j g_{ij})\gamma_r^2$$

Mais uma vez obtemos semelhança Legendre:

$$\mathbb{E}_L = v^i \frac{\partial}{\partial v^j}\mathbb{L} - \mathbb{L}$$

Substituindo os termos dessa energia pelas respectivas definições, chegamos à expressão:

$$\mathbb{E}_L = \gamma_r^2 \gamma_v m c^0 c^0 g_{00}$$

A seção que trata de propagação de erros presentamos a existência de uma propensão à desvio e a necessidade de correção. Na resolução, a forma mais interessante de não recair no desvio é evitar expressões que incidam nele.

Nesse ponto é interessante apontar que a expressão de energia $\mathbb{E}_L = \gamma_v mc^2$ depende apenas do fator de Lorentz. Se fizermos $\mathbb{E}_0 = mc^2$, observamos que a razão entre energias não depende diretamente de componente da métrica.

$$\frac{\mathbb{E}_L}{\mathbb{E}_0} = \frac{\text{Energia do movimento}}{\text{Energia de Repouso}} = \gamma_v$$

O fator de Lorentz está relacionado à energia cinética. Para um valor conhecido dessa energia poderemos encontrar um valor para métrica.

## 4.2 Relação cinetica-geométrica

A denominação "energia cinética" requer um teorema trabalho-energia apropriado. Emprega-se a designação "termo cinético" para as expressões que guardam similaridade com a expressão da relatividade restrita. Efetivamente todas elas convergem, mas apenas uma pode ser chamada de energia cinética, se houver definição adequada.

Fazendo $\gamma_r^2 = g_{11}\delta^{11}$, destacamos um termo cinético do fator de Lorentz, tem-se:

$$g^{00}\mathbb{E}_L = (\gamma_v - 1)mc^0c^0(g_{11}\delta^{11}) + mc^0c^0(g_{11}\delta^{11})$$

A estabilidade da energia depende apenas do fator de Lorentz na sua razão com a energia de repouso normalizada. Fazer $g_{11} = \eta_{11} + h_{11}$ evidencia a energia de repouso normalizada.

$$g^{00}\mathbb{E}_L = (\gamma_v - 1)mc^0c^0\, g_{11}\delta^{11} + mc^0c^0\, \eta_{11}\delta^{11} + mc^0c^0\, h_{11}\delta^{11}$$

A "lei de conservação" para expressão é diferente da energia total da mecânica clássica pois energia não é constante no espaço.

$$\left(\gamma_r^2\gamma_v - \eta_{11}\delta^{11}\right) mc^0c^0 = (\gamma_v - 1)mc^0c^0 g_{11}\delta^{11} + mc^0c^0 h_{11}\delta^{11}$$

Quando a distancia radial é grande, então o campo torna-se fraco o espaço aproxima-se da métrica Minkowski, com $g_{00} \approx 1$ e por consequência $\gamma_r \approx 1$. Nessa condição de campo fraco o fator de Lorentz é como na relatividade restrita, então se a velocidade for baixa, temos $\gamma_v \approx 1$. O lado esquerdo da equação de aproxima-se de zero enquanto no lado direito é equacionado para:

$$(\gamma_v - 1)mc^0c^0 g_{11}\delta^{11} \approx -mc^0c^0 h_{11}\delta^{11}$$

Assim tem-se a condição onde o valor do termo cinético converge para um termo da métrica.

Um entendimento da expressão pode ser obtido se expressarmos o lado esquerdo substituindo $\gamma_S = \gamma_r^2\gamma_v$

$$\mathbb{K}^{00} = (\gamma_S - 1)\, mc^0c^0 = \left(\gamma_r^2\gamma_v - \eta_{11}\delta^{11}\right) mc^0c^0$$

A função lagrangiana foi normalizada por $\gamma_r^2$. Se desnormalizamos:

$$\mathcal{K} = \mathbb{K}^{00} g_{00}$$

A diferença entre energia normalizada e a energia de referência, que no caso é dada para a mesma posição do espaço.

$$\mathcal{K} = \mathbb{E}_L - E_{ref}$$

O ganho de energia de movimento dada pela diferença que a energia Total faz com relação a um valor de referência.

Relação cinética-geométrica. O termo cinética, em uma trajetória geodésica, estabelece um vinculo com a métrica.

No acoplamento das variáveis velocidade e posição, a velocidade é dada pela taxa de variação do espaço pelo tempo que é afetada pela definição métrica do espaço e tempo para uma para uma posição. O termo cinética é dado pela diferença cinética-geométrica do correspondente no espaço de referência.

$$\gamma_r^2\gamma_v - \eta_{11}\delta^{11}$$

### 4.3 Escape

A aplicação da relação cinética-geométrica uma trajetória com valores de energia conhecido resolve o tensor métrico.

$$\left(\gamma_r^2\gamma_v - \eta_{11}\delta^{11}\right) mc^0c^0 = (\gamma_v - 1)mc^0c^0g_{11}\delta^{11} + mc^0c^0h_{11}\delta^{11}$$

A relação entre a métrica e o fator de Lorentz pode ser expressa pelo fator normalizado $\gamma_n = \gamma_v\gamma_r$

$$\gamma_v\gamma_r^2 = \frac{\gamma_n}{\sqrt{g_{00}}}$$

A convergência do termo cinético para o termo da métrica foi demonstrada quando os fatores $\gamma_v \approx 1$ e $\gamma_r \approx 1$, sem qualquer consideração prévia sobre o acoplamento das variáveis.

A condição $\gamma_n = 1$ estabelece um vinculo do fator parametrizado por velocidade com o fator parametrizado por posição.

$$\gamma_v = \frac{1}{\gamma_r}$$

A resolução desse equacionamento reduz a quantidade de variáveis e determina uma trajetória em que o fator de cinemático se contrapõem ao fator geométrico.

$$-v^1v^1\eta_{11} = c^0c^0(1_{00} - g_{00}^2)$$

Observa-se que é expresso apenas velocidade radial. Toda energia cinética está na direção da curvatura, não havendo participação cinética em outras direções, o que permite que velocidade convirja para zero com o aumento do raio. Assim temos a velocidade de escape.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{g_{00}}} - 1\right) mc^0c^0\eta_{11}\delta^{11} = (\gamma_v - 1)mc^0c^0g_{11}\delta^{11} + mc^0c^0h_{11}\delta^{11}$$

Mais uma vez, agora para energia de repouso da velocidade de fuga, façamos o raio grande o suficiente, tal que $\sqrt{g_{00}} \approx 1$. A condição pode ser estendida para $|g_{11}| \approx 1$. Nessas condições temos a quantidade de $\gamma_v$ convergindo para a expressão da relatividade restrita e aproximada pela newtoniana $K = \frac{1}{2}mv^2$.

$$K = mc^0c^0h_{11}\delta^{11}$$

A expressão do termo cinético é parametrizada para velocidade. Para vincular à uma expressão parametrizada pela posição, consideramos a equivalência ao movimento de um corpo em função do campo gravitacional de força central. O princípio de Hamilton vincula a equivalência da cinética ao potencial parametrizado pela posição em $GMm/r^2$

Com isso o tensor métrico regular em coordenadas esféricas é:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} \left(1+\dfrac{GM}{c^2r}\right)^{-1} & & & \\ & -\left(1+\dfrac{GM}{c^2r}\right) & & \\ & & -(\rho^2) & \\ & & & -(\rho^2\sin^2\theta) \end{bmatrix}$$

Apresentamos o tensor métrico na forma correspondente à Schwarzschild, embora façamos objeção ao fato de $\det(g_{\mu\nu})$ não ser invariante [3] [7].

A correspondência clássica da velocidade de escape pode ser demonstrada partindo-se de:

$$v_e^2 = c^2(1-\sqrt{g_{00}}^4)$$

Na expansão binomial, uma aproximação é possível enquanto $|\varphi(r)| << 1$.

$$\sqrt{g_{00}} \approx 1 - \frac{GM}{2c^2r}$$

Aplicando mais mais uma vez a expansão binomial, podemos remover os termos de grau superior e retorna a expressão à equação de velocidade.

$$\left(1-\frac{GM}{2c^2r}\right)^4 = 1 - 4\frac{GM}{2c^2r} + 6\left(\frac{GM}{2c^2r}\right)^2 - 4\left(\frac{GM}{2c^2r}\right)^2 + \left(\frac{GM}{2c^2r}\right)^4$$

# 5 Comparação

O tensor métrico regular guarda semelhança ao tensor de Schwarzschild em condições de campo fraco, o que pode ser explicado na aproximação por expansão binomial.

As diferenças se acumulam conforme o campo torna-se forte, mas somente tornam-se significativas em intensidades difíceis de serem observadas na natureza.

Uma contribuição importante na comparação é apontar os pontos críticos na resolução e indicar que as condições admitidas na resolução explicam a diferença.

Outro aspecto apontado é a ponderação que, entre abordagens de resolução, pode-se fazer distinção entre admitir uma solução geral ou convergir para uma solução particular.

## 5.1 Tensor de Schwarzchild pela Abodagem Energética

Partindo-se da Energia por uma função lagrangiana:

$$\mathbb{E}_L = \gamma_v m c^0 c^0 \delta_{00}$$

Podemos chegar à métrica $g_{00} = 1 - 2\phi$ de Schwarzschild pela aproximação na expansão binomial:

$$
\begin{aligned}
(**)\quad \widetilde{E} =& \gamma_v mc^2 \\
=& \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{1}{\sqrt{1 + v^1 v^1 g_{11} g^{00}/c^2}} mc^2 \\
=& \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} (\tilde{\gamma}_v - 1) mc^2 + \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} mc^2 \\
\approx=& \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} (\tilde{\gamma}_v - 1) mc^2 + (1 + \phi)\, mc^2 \\
=& \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \tilde{K} + mc^2 + \tilde{U}
\end{aligned}
$$

(**) A consideração é que a aproximação é boa enquanto $|\phi| << 1$

## 5.2 Tensor de Regular pela solução de Schwarzchild

A resolução de Schwarzchild [15], como instruído por Hilbert [8] , oferece uma solução geral para a equação diferencial obtida para obtenção do tensor métrico. Uma solução particular é oferecida pela aproximação ao limite newtoniano [4][10][1].

A resolução de Schwarzschild estabelece o espaço Minkowski [11] como condição de contorno para a campo. Um sistema de equações diferenciais obtidas da equação tensorial.

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0$$

A resolução produz uma solução geral e uma solução particular é obtida na ponderação da aproximação ao limite newtoniano com o tensor momento energia.

A solução particular (exata) satisfaz

$$\lim_{r \to \infty} g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

$$\lim_{r \to \infty} R_{\mu\nu} = 0_{\mu\nu}$$

Por substituição direta pode-se demonstrar que o tensor métrico regular satisfaz as equações diferencias da resolução de Schwarzschild.

# 6 Considerações finais

## 6.1 Recapitulação

A regularidade da métrica é abordada por seu mapeamento. A energia de Repouso está mapeada para valores métrica.

Além do mapeamento estático, obtemos um relação com a energia do movimento, fatorando da energia total a parcela da energia que não produz movimento.

Ao ponderar razões, é importante observar que a escala de variação da energia de repouso é não-linear. Não havendo um parâmetro de conservação, os valores extrapolam até condições invariantes

O conceito de normalização é aplicamos na obtenção da expressão de energia de uma trajetória geodésica, obtendo-se a Relação cinético-geométrica.

A trajetória radial permite inspecionar todos os valores de métrica. Um caso especial dessa trajetória vincula as energia do movimento à métrica. Além disso trajetória também vincula as variáveis paramétricas.

A comparação dos valores da métricas é um caso de aproximação por expansão binomial. Uma consideração importante é a comparação das resoluções e o confronto com a não-linearidade.

### 6.2 Conclusão

Na mecânica clássica, conservação estabelece um balanço cinético-potencial. Os princípios variacionais estabelecem o vinculo entre os parâmetros posição e velocidade por meios da equivalência das respectivas variações em condição estacionária. A vinculação na mecânica clássica resulta em energia total por uma constante. O equivalente cinético-geométrico seria expressar-se por um invariante energético.

O aspecto principal da resolução é a vinculação da energia do movimento com a métrica. A falta de um invariante é compensada pela escolha de uma trajetória em que há o acoplamento dos parâmetros.

No resultado principal, obtivermos um tensor métrico regular. Na conclusão principal resgatamos invariante criado de maneira postular.

A relatividade postula que a velocidade da luz é independente do objeto que a emite/absorve, na referência ao vácuo. Addendum do postulado: Objetos não podem mover-se mais rápido do que a luz que emite/absorve.

Inversão da assinatura da métrica acontece na iminência da velocidade do corpo superar a luz que emite, deixando de emiti-la no seu limiar. A questão só se resolve de forma postular.

Havendo geometria, *que haja luz*

## 7 Agradecimentos

Agradecemos aos apoiadores do autor pela chave Pix: **samelo**

## 8 Bibliografia

## Referências

[1] Ronald Adler, Maurice Bazin, Menahem Schiffer, and Jacques E Romain. *Introduction to general relativity.* American Institute of Physics, 1965.

[2] Douglas Cline. *Variational principles in classical mechanics.* University of Rochester River Campus Librarie, 2017.

[3] Albert Einstein. *The Collected Papers of Albert Einstein, Volume 8: The Berlin Years: Correspondence, 1914-1918.*

[4] Albert Einstein. Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie annalen der physik, 49. *Reprinted in English translation in The Principle of*

*Relativity.(1952) Dover Publications Inc, New York*, 1916.
http://myweb.rz.uni-augsburg.de/~eckern/adp/history/einstein-papers/1916_49_769-822.pdf.

[5] Albert Einstein. Der energiesatz in der allgemeinen relativitätstheorie und nachtrag zur korrektur. *Sitzungsberichte der königlich preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 448–459, 1918.

[6] Herbert Goldstein, Charles Poole, and John Safko. *Classical mechanics. 3rd*. Addison Wesley, 2002.

[7] David Hilbert. Die grundlagen der physik. (erste mitteilung). *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1915:vol. 3 pp. 395–407., 1915.
https://eudml.org/doc/58946.

[8] David Hilbert. Die grundlagen der physik. (zweite mitteilung). *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1917:53–76, 1917.
http://eudml.org/doc/58973.

[9] Cornelius Lanczos. The variational principles of mechanics, 1st cd, 1949.

[10] Evgeny Mikhailovich Lifshitz Lev Davidovich Landau. *The Classical Theory of Fields*, volume 2. Butterworth-Heinemann, 1975.

[11] Hermann Minkowski. Raum und zeit. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 18:75–88, 1909.

[12] Emmy Noether. Invariante variationsprobleme. *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, page 235–257, 1918.

[13] Julius Robert Oppenheimer and Hartland Snyder. On continued gravitational contraction. *Physical Review*, 56(5):455, 1939.

[14] David E. Rowe. Emmy noether on energy conservation in general relativity, 2019.

[15] Karl Schwarzschild. Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin*, pages 189–196, 1916.
https://archive.org/stream/sitzungsberichte1916deutsch#page/188/mode/2up.