

# 黎曼 Zeta 函数方程没有非平凡零点的严格证明

梅晓春

理论物理与纯粹数学部 福州原创物理研究所

**内容摘要** 本文采用一个标准的方法严格证明，在整个复平面上黎曼 Zeta 函数方程都没有非平凡零点，平凡零点只出现在实轴上。将黎曼 Zeta 函数方程中的各个量都写成实部和虚部相加的形式，令  $\zeta(a+ib) = \zeta_1(a,b) + i\zeta_2(a,b)$ ，代入 Zeta 函数方程的两边进行比较，得到关于  $a$  和  $b$  的一个方程组。本文证明该方程组只有平凡零点解，没有非平凡零点解。因此 Zeta 函数方程非平凡零点只能出现在  $\zeta_1(a,b)$  和  $\zeta_2(a,b)$  同时等于零的情况下。利用无穷级数的比较方法，本文证明  $\zeta_1(a,b)$  和  $\zeta_2(a,b)$  不可能同时等于零。因此黎曼 Zeta 函数方程没有非平凡零点，黎曼猜想不成立。

**关键词：**黎曼猜想，黎曼 Zeta 函数方程，黎曼-西格尔公式，非平凡零点，柯西—黎曼定理

## 一 前言

作者在文章《黎曼 Zeta 函数方程的不一致性问题》中证明，黎曼 Zeta 函数方程的值在复平面的实轴上存在严重的矛盾。导致这种不一致性的原因在于，黎曼 1859 年的推导 Zeta 函数方程的原始论文中，存在四个基本的错误，以至于黎曼 Zeta 函数方程是不成立的，因此黎曼猜想也就变得没有意义【1】。

目前在黎曼 Zeta 函数零点的计算中，一般都采用级数展开的近似方法。Zeta 函数方程的实部和虚部经常被混在一起，使问题变得复杂化。由于解析函数需要满足的柯西—黎曼定理被破坏，得到的非平凡零点实际上都不是严格的 Zeta 函数真正的零点【1】。

本文假设黎曼 Zeta 函数方程仍然成立，继续讨论黎曼 Zeta 函数方程的零点问题。文中提出一种标准的方法，将 Zeta 函数方程的实部和虚部完全分开。然后将方程两边的实部和虚部分别进行比较，严格证明 Zeta 函数方程在整个复平面上没有非平凡零点，平凡零点都位于实轴上。在实轴  $a = 1/2$  的点上，Zeta 函数的值是无穷大，而不是零，由此证明黎曼猜想不成立。

黎曼 Zeta 函数有两种形式，一种是级数求和形式，另外一种形式是积分形式。Zeta 函数的级数求和形式是更基本的，写为：

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad \text{Re}(s) > 1 \quad (1)$$

其中  $s = a + ib$  是一个复数。在 (1) 式的基础上，黎曼引入  $\Gamma(s)$  函数和复变函数围道积分，导出以下 Zeta 函数代数方程（简称 Zeta 函数方程）【2】【3】【4】：

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = 2(2\pi)^{s-1} \sin(s\pi/2) \Gamma(1-s) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1-s)} \quad (2)$$

按照 (1) 式的定义, 有:

$$\zeta(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1-s)} \quad (3)$$

就可以将 (2) 式写为:

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \sin(s\pi/2)\Gamma(1-s)\zeta(1-s) \quad \operatorname{Re}(s) \neq 1 \quad (4)$$

按照目前一般的理解, (4) 式被认为是考虑到复延拓后 Zeta 函数的新定义, 其定义域从 (1) 式的  $\operatorname{Re}(s) > 1$  延拓到除了  $\operatorname{Re}(s) = 1$  点外的整个复平面。然而仔细考察黎曼的推导过程, 就会发现, (4) 式中的  $\zeta(s)$  只是一种简化符号表述形式, 它的原始形式应当是 (2) 式。因此 (4) 式并不是 Zeta 函数新的定义, 而是黎曼发现的 Zeta 函数  $\zeta(s)$  和  $\zeta(1-s)$  之间的一种关系。由于  $\zeta(s)$  仍然用 (1) 式来描述, (4) 式的定义域仍然应当是  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , 而不是黎曼认为的  $\operatorname{Re}(s) \neq 1$ 。

在 (4) 式的基础上, 黎曼进一步引入函数【5】:

$$\xi(s) = \frac{1}{2} \pi^{-s/2} s(s-1)\Gamma(s/2)\zeta(s) \quad (5)$$

利用雅可比函数的性质  $\theta(x) = \sqrt{x}\theta(1/x)$ , 黎曼证明这个函数具有对称性  $\xi(s) = \xi(1-s)$ 。由于  $\xi(s)$  和  $\zeta(s)$  被认为有相同的非平凡零点, 黎曼猜想的讨论一般采用 (5) 式。

黎曼在 1859 年的原始论文中提出, Zeta 函数方程的所有非平凡零点可能都落在复平面  $\operatorname{Re}(s) = 1/2$  的临界线上。一百多年来, 数学家对黎曼猜想做了大量的研究, 试图证明或者证伪黎曼猜想, 但都不成功, 黎曼猜想成了世界难题。

作者在论文【1】中证明, 在复平面的实轴上, 黎曼 Zeta 函数方程的两边是不相容的。(2) 式的左边是一个有限值时, 右边可能是一个无穷大, 反之亦然。文章同时还证明, 在复平面的实轴上, 黎曼 Zeta 函数方程只在  $a = 1/2$  的点上成立【1】。然而在这个点上, 黎曼 Zeta 函数方程的值是无穷大, 而不是零, 黎曼猜想不成立意义。

导致 Zeta 函数方程不成立的原因在于, 黎曼原始论文的推导过程存在四个基本错误, 它们是:

1. 黎曼在推导 Zeta 函数积分形式时, 忽略了绕坐标原点的严格积分项。该项在  $\operatorname{Re}(s) > 1$  时收敛, 在  $\operatorname{Re}(s) < 1$  时是发散的。经过复延拓后, 黎曼 Zeta 函数没有改变其级数求和形式的发散性, 在  $\operatorname{Re}(s) > 1$  时仍然是没有意义的, 因此黎曼 Zeta 函数方程 (2) 和 (4) 式不成立。

2. 黎曼在推导 Zeta 函数积分形式时, 采用了一个求和公式。该公式在积分下限  $x = 0$  是无穷大, 因此这个公式不能用, Zeta 函数的积分形式不成立。

3. 由于黎曼 Zeta 函数积分的下限为零, 被积函数不是一致收敛的, 积分号与求和号是不可以交换的。然而黎曼把它们看成是可交换的, 导致 Zeta 函数的积分形式不成立。

4. 黎曼在论文中使用了雅可比函数公式  $\theta(x) = \sqrt{x}\theta(1/x)$ , 该公式成立的条件是  $x > 0$ 。由于黎曼的推导过程涉及到积分的下限是  $x = 0$ 【5】。因此这个公式也不能用, 黎曼 Zeta 函数的对称性关系  $\xi(s) = \xi(1-s)$  不存在。

文中讨论了黎曼 Zeta 函数的零点计算问题。目前通过人工计算和计算机数值方法证明, 在复平面  $a = 1/2$  的直线上存在非常多的  $b$  能使 Zeta 函数等于零, 数目已经超过十万亿个【6】。文章指出这种计算采用的都是近似方法, 比如将 (5) 式展开成称为黎曼-西格尔公式的无穷级数, 然后计算不同项数的多项式的零点【7】。这种做法破坏了解析函数需要满足的柯西—黎曼公式, 得到的都不

是严格的 Zeta 函数真正的零点。

本文假设黎曼 Zeta 函数方程仍然成立，从更一般的角度来讨论 Zeta 函数方程的零点问题。具体的做法是，将 (5) 式中的每个部分都写成实部和虚部分离的形式，令  $\xi = \xi_1 + i\xi_2 = 0$  和  $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2 \neq 0$ 。各项相乘后将方程的实部和虚部彻底分离，再分别讨论实部和虚部的零点。

首先假设  $\xi_1 = 0$  和  $\xi_2 = 0$ ，但  $\zeta_1 \neq 0$  和  $\zeta_2 \neq 0$ ，由此得到关于  $a$  和  $b$  的一个方程组。本文证明该方程组的零点是  $a = 1$  和  $b = 0$ ，它只是平凡零点，不是非平凡零点，因此方程 (5) 没有非平凡零点。采用相同的方法证明，在  $\zeta_1 \neq 0$  和  $\zeta_2 \neq 0$  的条件下，方程 (4) 也没有非平凡零点，平凡零点在实轴  $a = -2n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 和  $b = 0$  的点上。

因此为了得到 (4) 和 (5) 式的非平凡零点，唯有令  $\zeta_1$  和  $\zeta_2$  同时等于零。利用无穷级数比较的方法，本文证明  $\zeta_1$  和  $\zeta_2$  不可能同时等于零。因此黎曼 Zeta 函数方程没有非平凡零点，黎曼猜想不成立。

## 二 黎曼 Zeta 函数方程 (5) 没有非平凡零点的证明

以下假设 (4) 和 (5) 式仍然成立，先讨论 (5) 式的零点，下一节再讨论 (4) 式的零点。

**定理 1.** 在复平面上，如果 Zeta 函数  $\zeta(s)$  的实部和虚部都不等于零，Zeta 函数方程 (5) 式就没有非平凡零点，平凡零点在实轴  $a = 1$  和  $b = 0$  的点上。

证：将 (5) 式的  $\xi(s)$  和  $\zeta(s)$  写成实部与虚部分离的形式，令：

$$\xi(s) = \xi_1(a, b) + i\xi_2(a, b) \quad (6)$$

$$\zeta(s) = \zeta_1(a, b) + i\zeta_2(a, b) \quad (7)$$

$\xi_1$  和  $\xi_2$  是实函数， $\zeta_1$  和  $\zeta_2$  也是实函数。利用公式  $t = e^{\ln t}$ ，有：

$$\begin{aligned} \pi^{-s/2} &= \pi^{-(a+ib)/2} = \pi^{-a/2} \pi^{-ib/2} \\ &= \pi^{-a/2} (e^{\ln \pi})^{-ib/2} = \pi^{-a/2} e^{-i(b \ln \pi)/2} \\ &= \pi^{-a/2} \left[ \cos[(b \ln \pi)/2] - i \sin[(b \ln \pi)/2] \right] \end{aligned} \quad (8)$$

$$s(s-1) = (a+ib)(a-1+ib) = a(a-1) - b^2 + i(2ab-b) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \pi^{-s/2} s(s-1) &= \frac{1}{2} \pi^{-a/2} \left[ [a(a-1) - b^2] \cos[(b \ln \pi)/2] + (2ab-b) \sin[(b \ln \pi)/2] \right] \\ &+ i \frac{1}{2} \pi^{-a/2} \left[ (2ab-b) \cos[(b \ln \pi)/2] - [a(a-1) - b^2] \sin[(b \ln \pi)/2] \right] \end{aligned} \quad (10)$$

令 
$$G_1 = \frac{1}{2} \pi^{-a/2} \left[ [a(a-1) - b^2] \cos[(b \ln \pi)/2] + (2ab-b) \sin[(b \ln \pi)/2] \right]$$

$$G_2 = \frac{1}{2} \pi^{-a/2} \left[ (2ab - b) \cos[(b \ln \pi) / 2] - [a(a-1) - b^2] \sin[(b \ln \pi) / 2] \right] \quad (11)$$

就有：

$$\frac{1}{2} \pi^{-s/2} s(s-1) = G_1 + iG_2 \quad (12)$$

$G_1$  和  $G_2$  都是实函数。此外，实数的 Gama 函数定义为【8】：

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt > 0 \quad a > 0 \quad (13)$$

令  $a \rightarrow s = a + ib$ ，就得到复延拓的 Gama 函数。在（5）式中，我们有：

$$\begin{aligned} \Gamma(s/2) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s/2-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{a/2-1} t^{ib/2} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{a/2-1} e^{i(b \ln t)/2} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{a/2-1} (\cos[(b \ln t) / 2] + i \sin[(b \ln t) / 2]) dt \\ &= \Gamma_1(a, b) + i\Gamma_2(a, b) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1(a, b) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{a/2-1} \cos[(b \ln t) / 2] dt \\ \Gamma_2(a, b) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{a/2-1} \sin[(b \ln t) / 2] dt \end{aligned} \quad (15)$$

$\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  也都是实函数。（5）式就可以写为：

$$\begin{aligned} \xi_1 + i\xi_2 &= (G_1 + iG_2)(\Gamma_1 + i\Gamma_2)(\zeta_1 + i\zeta_2) \\ &= (G_1\Gamma_1 - G_2\Gamma_2)\zeta_1 - (G_1\Gamma_2 + G_2\Gamma_1)\zeta_2 \\ &\quad + i \left[ (G_1\Gamma_2 + G_2\Gamma_1)\zeta_1 + (G_1\Gamma_1 - G_2\Gamma_2)\zeta_2 \right] \end{aligned} \quad (16)$$

按照（6）式，将（16）式的虚部和实部分开，就有：

$$\xi_1 = (G_1\Gamma_1 - G_2\Gamma_2)\zeta_1 - (G_1\Gamma_2 + G_2\Gamma_1)\zeta_2 \quad (17)$$

$$\xi_2 = (G_1\Gamma_2 + G_2\Gamma_1)\zeta_1 + (G_1\Gamma_1 - G_2\Gamma_2)\zeta_2 \quad (18)$$

如果（5）式有零点，它的实部和虚部就必须同时等于零。令  $\xi_1 = 0$ ， $\xi_2 = 0$ ，得：

$$(G_1\Gamma_1 - G_2\Gamma_2)\zeta_1 - (G_1\Gamma_2 + G_2\Gamma_1)\zeta_2 = 0 \quad (19)$$

$$(G_1\Gamma_2 + G_2\Gamma_1)\zeta_1 + (G_1\Gamma_1 - G_2\Gamma_2)\zeta_2 = 0 \quad (20)$$

设  $\zeta_1 \neq 0$  和  $\zeta_2 \neq 0$ ，从 (19) 式解出：

$$\zeta_1 = \frac{G_1\Gamma_2 + G_2\Gamma_1}{G_1\Gamma_1 - G_2\Gamma_2} \zeta_2 \quad (21)$$

代入 (20) 式，得：

$$\frac{(G_1\Gamma_2 + G_2\Gamma_1)^2}{G_1\Gamma_1 - G_2\Gamma_2} \zeta_2 + (G_1\Gamma_1 - G_2\Gamma_2)\zeta_2 = 0 \quad (22)$$

有：

$$(G_1\Gamma_2 + G_2\Gamma_1)^2 + (G_1\Gamma_1 - G_2\Gamma_2)^2 = 0 \quad (23)$$

由于是两项的平方和，(23) 式的解只能是两项同时等于零，即：

$$G_1\Gamma_2 + G_2\Gamma_1 = 0 \quad (24)$$

$$G_1\Gamma_1 - G_2\Gamma_2 = 0 \quad (25)$$

从 (25) 式得  $\Gamma_1 = G_2\Gamma_2 / G_1$ ，代入 (24) 式，得  $G_1^2 + G_2^2 = 0$ 。同样地，我们有  $G_1 = 0$  和  $G_2 = 0$ 。按照 (11) 式，就有：

$$[a(a-1) - b^2] \cos[(b \ln \pi) / 2] + (2ab - b) \sin[(b \ln \pi) / 2] = 0 \quad (26)$$

$$-[a(a-1) - b^2] \sin[(b \ln \pi) / 2] + (2ab - b) \cos[(b \ln \pi) / 2] = 0 \quad (27)$$

把 (26) 和 (27) 式平方后相加，得：

$$[a(a-1) - b^2]^2 + (2ab - b)^2 = 0 \quad (28)$$

(28) 式意味着  $a(a-1) - b^2 = 0$  和  $b(2a-1) = 0$ ，其解是  $a = 0, 1$  和  $b = 0$ 。显然它们都是平凡的零点，而且都在  $b = 0$  的实轴上。除此之外，就没有非平凡零点。事实上，由于  $\pi^{-s/2} \neq 0$ ，这个解就是令 (9) 式等于零的结果。对于  $s(s-1) = 0$ ，令其实部和虚部同时等于零，得  $a(a-1) - b^2 = 0$  和  $b(2a-1) = 0$ ，其解就是  $a = 0, 1$  和  $b = 0$ 。显然，黎曼猜想的  $a = 1/2$  不是 (28) 式的解。

以上结果与  $\Gamma(s)$  函数无关，我们还要考虑  $\Gamma(s)$  函数的零点问题。显然在  $b \neq 0$  的情况下，用 (15) 式表示的  $\Gamma_1(a, b)$  和  $\Gamma_2(a, b)$  是不相等的，除非  $b = \pi / (4 \ln t)$ ， $\cos(blnt) = \sin(blnt) = \sqrt{2} / 2$ 。然而  $b$  是一个常数， $t$  是一个积分变数，因此  $b \neq \pi / (4 \ln t)$  因此  $\cos(blnt) \neq \sin(blnt)$ ， $\Gamma_1(a, b)$  和  $\Gamma_2(a, b)$  不可能同时等于零（如果它们有零点）。也就是说与实的  $\Gamma(a)$  函数一样，经过复延拓的  $\Gamma(s)$  函数也是没有零点的。

已知在  $b = 0$ ， $a/2 > 0$  或  $a > 0$  时  $\Gamma(a/2)$  收敛。在  $a/2 = 0, -1, -2, \dots$ ，或  $a = 0, -2, -4, \dots$  时， $\Gamma(a/2)$  发散【7】。因此考虑  $\Gamma(s/2)$  函数后，(28) 式在  $a = 0$  时的零点被消除，(5) 式的平凡零点是  $a = 1$  和  $b = 0$ 。定理 1 证毕。

除此之外，要使  $\xi(s) = 0$ ，还存在  $\zeta_1$  和  $\zeta_2$  同时等于零的可能性。这就涉及 Zeta 函数级数求和形式是否能够等于零的问题，我们将在第五章中讨论。

### 三 Zeta 函数方程 (4) 没有非平凡零点的证明

**定理 2.** 在复平面上，如果函数  $\zeta(1-s)$  的实部和虚部不同时等于零，Zeta 函数方程 (4) 式就没有非平凡零点。平凡零点位于  $b=0$  和  $a=-n$  ( $n=0, 1, 2, 3, 4\cdots$ ) 的实轴上。

证：令  $\zeta(s) \rightarrow \zeta'(s)$ ，将 (4) 式写为：

$$\zeta'(s) = 2(2\pi)^{s-1} \sin(s\pi/2) \Gamma(1-s) \zeta(1-s) \quad (29)$$

按照现在的理解，方程左边的  $\zeta'(s)$  是经过复延拓的 Zeta 函数，其形式与 (1) 式可以不一样。但方程 (4) 右边的  $\zeta(1-s)$  仍然具有 (1) 式的形式，这是由于黎曼在推导过程的最后一步用了 (3) 式。考虑到  $i=e^{i\pi/2}$ ，有：

$$\begin{aligned} \sin(s\pi/2) &= \frac{e^{is\pi/2} - e^{-is\pi/2}}{2i} = \frac{e^{-i\pi/2}}{2} \left[ e^{i(a+ib)\pi/2} - e^{-i(a+ib)\pi/2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ e^{-b\pi/2} e^{i(a-1)\pi/2} - e^{b\pi/2} e^{-i(a+1)\pi/2} \right] \end{aligned} \quad (30)$$

$$2(2\pi)^{s-1} = 2(2\pi)^{a-1+ib} = 2(2\pi)^{a-1} (2\pi)^{ib} = 2(2\pi)^{a-1} e^{ib \ln 2\pi} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} 2(2\pi)^{s-1} \sin(s\pi/2) &= (2\pi)^{a-1} e^{ib \ln 2\pi} \left[ e^{-b\pi/2} e^{i(a-1)\pi/2} - e^{b\pi/2} e^{-i(a+1)\pi/2} \right] \\ &= (2\pi)^{a-1} \left[ e^{-b\pi/2} e^{i[(a-1)\pi/2 + b \ln 2\pi]} - e^{b\pi/2} e^{-i[(a+1)\pi/2 - b \ln 2\pi]} \right] \end{aligned} \quad (32)$$

令：  $A = (a-1)\pi/2 + b \ln 2\pi$        $B = (a+1)\pi/2 - b \ln 2\pi$       (33)

可以将 (32) 式写成：

$$\begin{aligned} 2(2\pi)^{s-1} \sin(s\pi/2) &= G_1 + iG_2 \\ &= (2\pi)^{a-1} \left[ e^{-b\pi/2} (\cos A + i \sin A) - e^{b\pi/2} (\cos B - i \sin B) \right] \\ &= (2\pi)^{a-1} \left[ e^{-b\pi/2} \cos A - e^{b\pi/2} \cos B + i(e^{-b\pi/2} \sin A + e^{b\pi/2} \sin B) \right] \end{aligned} \quad (34)$$

$$G_1 = (2\pi)^{a-1} (e^{-b\pi/2} \cos A - e^{b\pi/2} \cos B)$$

$$G_2 = (2\pi)^{a-1} (e^{-b\pi/2} \sin A + e^{b\pi/2} \sin B) \quad (35)$$

$A$ ， $B$ ， $G_1$  和  $G_2$  都是实函数。按照复延拓的 Gama 函数的定义，有【7】：

$$\Gamma(1-s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-s} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-a} t^{-ib} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-a} e^{-ib \ln t} dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-a} (\cos(b \ln t) - i \sin(b \ln t)) dt = \Gamma_1(a, b) + i \Gamma_2(a, b) \quad (36)$$

$$\Gamma_1(a, b) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-a} \cos(b \ln t) dt \quad \Gamma_2(a, b) = -\int_0^{\infty} e^{-t} t^{-a} \sin(b \ln t) dt \quad (37)$$

$\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  也都是实函数。(4) 式就可以写为:

$$\begin{aligned} \zeta' &= \zeta'_1 + i \zeta'_2 = (G_1 + i G_2)(\Gamma_1 + i \Gamma_2)(\zeta_1 + i \zeta_2) \\ &= (G_1 \Gamma_1 - G_2 \Gamma_2) \zeta_1 - (G_1 \Gamma_2 + G_2 \Gamma_1) \zeta_2 \\ &\quad + i \left[ (G_1 \Gamma_2 + G_2 \Gamma_1) \zeta_1 + (G_1 \Gamma_1 - G_2 \Gamma_2) \zeta_2 \right] \end{aligned} \quad (38)$$

将虚部和实部分开, 就有:

$$\zeta'_1 = (G_1 \Gamma_1 - G_2 \Gamma_2) \zeta_1 - (G_1 \Gamma_2 + G_2 \Gamma_1) \zeta_2 \quad (39)$$

$$\zeta'_2 = (G_1 \Gamma_2 + G_2 \Gamma_1) \zeta_1 + (G_1 \Gamma_1 - G_2 \Gamma_2) \zeta_2 \quad (40)$$

如果黎曼 Zeta 函数有零点, 它的实部和虚部就必须同时等于零。令  $\zeta_1 \neq 0$ ,  $\zeta_2 \neq 0$ , 按照相同的程序, 同样可以得到:

$$G_1 \Gamma_2 + G_2 \Gamma_1 = 0 \quad (41)$$

$$G_1 \Gamma_1 - G_2 \Gamma_2 = 0 \quad (42)$$

从 (42) 式得  $\Gamma_1 = G_2 \Gamma_2 / G_1$ , 代入 (41) 式, 得  $G_1^2 + G_2^2 = 0$ 。由于  $G_1^2$  和  $G_2^2$  都不可能是负数, 因此唯有  $G_1 = 0$  和  $G_2 = 0$ 。按照 (35) 式, 就有:

$$e^{-b\pi/2} \cos A - e^{b\pi/2} \cos B = 0 \quad (43)$$

$$e^{-b\pi/2} \sin A + e^{b\pi/2} \sin B = 0 \quad (44)$$

把它们各自平方后相加, 得:

$$e^{-b\pi} + e^{b\pi} = 2\cos(A + B) \quad (45)$$

将它们各自平方后相减, 得:

$$e^{-b\pi} \cos 2A + e^{b\pi} \cos 2B = 2\cos(A - B) \quad (46)$$

将 (33) 式代入 (45) 和 (46) 式, 得:

$$e^{-b\pi} + e^{b\pi} = 2\cos(a\pi) \quad (47)$$

$$-e^{-b\pi} \cos(a\pi + 2b \ln 2\pi) - e^{b\pi} \cos(a\pi - 2b \ln 2\pi) = -2\cos(2b \ln 2\pi) \quad (48)$$

如果  $b \neq 0$ , 将  $e^{-b\pi}$  和  $e^{b\pi}$  展开成级数, 可证  $e^{-b\pi} + e^{b\pi} > 2$ 。然而  $2\cos(a\pi) \leq 2$ , (47) 式不成立。

因此(47)式的解是  $b=0$  和  $a=\pm n$ ,  $n$  是奇数时取正号,  $n$  是偶数是取正负号。它代表 Zeta 函数的平凡零点, 而且都在实轴上。在这种情况下, (47)式和(48)式变成一样, 有相同的解。

如果  $a=1/2$ ,  $b$  取任意值, 则有  $2\cos(\pi/2)=0$ , 但  $e^{-b\pi}+e^{b\pi}\neq 0$ , (47)式仍然不成立, 因此  $a=1/2$  不是(4)式的零点。事实上, 由于  $(2\pi)^{is}\neq 0$ , 这个解就是在(29)式中令  $\sin(s\pi/2)=0$  的解, 也与  $\Gamma$  函数无关。

但如果在(37)式中令  $b=0$  和  $-a=a'-1$ , 则在  $a'\leq 0$  时  $\Gamma_1\rightarrow\infty$ 。由于  $a'=1-a$ , 这意味着在  $a\geq 1$  和  $b=0$  时  $\Gamma_1\rightarrow\infty$ 。因此在  $a=2, 4, 6\cdots$  时, (4)式相应的零点会被消除。Zeta 函数方程(4)式的平凡零点只出现在  $b=0$  和  $a=-n$  ( $n=0, 1, 2, 3, \cdots$ ) 的点上。定理 2 证毕。

因此如果方程(4)式存在非平凡零点, 只能考虑  $\zeta_1$  和  $\zeta_2$  同时等于零的情况。与(5)式的情况一样, 涉及到 Zeta 函数的求和形式本身是否有零点的问题。按照(1)式, 有:

$$\begin{aligned}\zeta(1-s) &= \zeta_1(1-a, b) + i\zeta_2(1-a, b) \\ &= 1 + \frac{1}{2^{1-s}} + \frac{1}{3^{1-s}} + \cdots + \frac{1}{n^{1-s}} + \cdots \\ &= 1 + 2^{a-1}e^{ib\ln 2} + 3^{a-1}e^{ib\ln 3} + \cdots + n^{a-1}e^{ib\ln n} + \cdots \\ &= 1 + 2^{a-1}\cos(b\ln 2) + 3^{a-1}\cos(b\ln 3) + \cdots + n^{a-1}\cos(b\ln n) + \cdots \\ &\quad + i(2^{a-1}\sin(b\ln 2) + 3^{a-2}\sin(b\ln 3) + \cdots + n^{a-3}\sin(b\ln n) + \cdots)\end{aligned}\quad (49)$$

就有:

$$\zeta_1(1-a, b) = 1 + 2^{a-1}\cos(b\ln 2) + 3^{a-1}\cos(b\ln 3) + \cdots + n^{a-1}\cos(b\ln n) + \cdots \quad (50)$$

$$\zeta_2(1-a, b) = 2^{a-1}\sin(b\ln 2) + 3^{a-2}\sin(b\ln 3) + \cdots + n^{a-3}\sin(b\ln n) + \cdots \quad (51)$$

我们在下一章讨论(50)和(51)式的零点问题。

## 四 黎曼 Zeta 函数的级数求和没有零点的证明

### 4.1 Zeta 函数级数求和公式的收敛性

为了讨论 Zeta 函数级数求和形式的零点, 需要先讨论它的收敛性。如果(1)式中  $s=a$  是实数,  $a<1$  时级数发散, 就没有零点。当  $a>1$  时级数收敛, 求和结果大于零, (1)式也没有零点。证明摘录如下【8】。设  $\text{Re}(s)=a>1$ , 采用欧拉素数乘积公式, 有:

$$|\zeta(a)| = \prod_p |1-p^{-a}|^{-1} \geq \prod_p |1+p^{-a}|^{-1} = \exp\left[-\sum_p \ln(1+p^{-a})\right] \quad (52)$$

其中  $p$  是素数 ( $p>1$ )。对于任意  $x>0$ , 有  $\ln(1+x)<x$ 。由于  $\sum p^{-a}<\infty$  是收敛, 就有:

$$|\zeta(a)| \geq \exp\left[-\sum_p p^{-a}\right] > 0 \quad (53)$$

如果  $s=a+ib$  是复数, 情况就比较复杂。目前没有严格的证明, 使我们确信  $\zeta(s)\neq 0$ 。以下来讨论这个问题。按照复变函数级数的收敛性判断公式, 对(1)式采用绝对值进行比较, 有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^{a+ib}}{(n+1)^{a+ib}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left( \frac{1}{1+1/n} \right)^{a+ib} \right| = 1 \quad (54)$$

收敛半径等于 1，无法判断 (54) 式的收敛性。利用欧拉公式  $e^{ib} = \cos b + i \sin b$ ，将 (1) 式写成：

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= 1 + \frac{1}{2^{a+ib}} + \frac{1}{3^{a+ib}} + \cdots + \frac{1}{n^{a+ib}} + \cdots \\ &= 1 + 2^{-a} \cos(b \ln 2) + 3^{-a} \cos(b \ln 3) + \cdots + n^{-a} \cos(b \ln n) + \cdots \\ &\quad - i \left( 2^{-a} \sin(b \ln 2) + 3^{-a} \sin(b \ln 3) + \cdots + n^{-a} \sin(b \ln n) + \cdots \right) \end{aligned} \quad (55)$$

将实部与虚部分开，有：

$$u(a, b) = 1 + 2^{-a} \cos(b \ln 2) + 3^{-a} \cos(b \ln 3) + \cdots + n^{-a} \cos(b \ln n) + \cdots \quad (56)$$

$$v(a, b) = - \left( 2^{-a} \sin(b \ln 2) + 3^{-a} \sin(b \ln 3) + \cdots + n^{-a} \sin(b \ln n) + \cdots \right) \quad (57)$$

利用公式  $\ln(n+1) = \ln n + \ln(1+1/n)$ ，考虑 (56) 和 (57) 式的收敛性，我们有：

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a \cos(b \ln(n+1))}{(n+1)^a \cos(b \ln n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(b \ln n + b \ln(1+1/n))}{(1+1/n)^a \cos(b \ln n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(b \ln n)}{\cos(b \ln n)} = 1 \end{aligned} \quad (58)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a \sin(b \ln(n+1))}{(n+1)^a \sin(b \ln n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(b \ln n)}{\sin(b \ln n)} = 1 \quad (59)$$

收敛半径也等于 1，(56) 和 (57) 式的收敛性仍然不确定。由于公式中包含三角函数，其中各项即可以是正的，也可以是负的，就不能保证求和的结果一定大于零。这个结果与  $a$  和  $b$  大于零还是小于零无关，与  $s$  是实数的情况是不同的。

## 4.2 一般解析函数的零点

在复变函数理论中，函数的解析性是非常重要的。如果一个函数是非解析的，许多定理都不能。例如，留数定理仅对解析函数有效。另一方面，一个复变函数总可以将实部和虚部分开，写成：

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (60)$$

其中  $z = x + iy$ ，如果  $f(z)$  是解析函数，它的实部和虚部就不是独立的，二者必须满足以下柯西—黎曼方程【7】：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (61)$$

在目前的黎曼 Zeta 函数零点计算中，采用的是近似方法，(61) 式被忽略，得到的都不是严格的 Zeta 函数的真正的零点。需要强调，在讨论解析函数的零点问题时，我们有必要将实部和虚部分开。因为有可能出现实部或虚部等于零，但二者不同时等于零的情况。在这种情况下得到的零点不

是真正的零点。在目前的对黎曼猜想的讨论中，经常是将实部和虚部混在一起，使问题变的含糊不清。

### 4.3 黎曼 Zeta 函数级数求和公式没有零点的证明

**定理 3.** 黎曼 Zeta 函数级数求和公式在整个复平面上没有零点。

证： 利用  $n^a = e^{a \ln n}$ ，将 (50) 和 (51) 式改写为：

$$\zeta_1(1-a, b) = u(a, b) = 1 + e^{(a-1)\ln 2} \cos(b \ln 2) + e^{(a-1)\ln 3} \cos(b \ln 3) + \dots \quad (62)$$

$$\zeta_2(1-a, b) = v(a, b) = -\left(e^{(a-1)\ln 2} \sin(b \ln 2) + e^{(a-1)\ln 3} \sin(b \ln 3) + \dots\right) \quad (63)$$

容易证明，(62) 和 (63) 式满足 (61) 式，因此用 (1) 式表示的黎曼 Zeta 函数是解析函数。以下证明 (62) 和 (63) 式不可能同时等于零。

先讨论最简单的情况，取 (49) 式的头两项并令它等于零，按照 (62) 和 (63) 式，就有：

$$1 + e^{(a-1)\ln 2} \cos(b \ln 2) = 0 \quad (64)$$

$$e^{(a-1)\ln 2} \sin(b \ln 2) = 0 \quad (65)$$

设  $a$  是一个有限值，(65) 式的解是  $b \ln 2 = n\pi$ 。当  $n$  是偶数时  $\cos n\pi = 1$ ，代入 (64) 式，得：

$$1 + e^{(a-1)\ln 2} = 0 \quad \text{或} \quad (a-1)\ln 2 = \ln(-1) \quad (66)$$

由于  $a$  是实数， $\ln(-1) = \ln e^{i\pi} = i\pi$  不是实数，因此  $n$  是偶数时 (64) 式无实数解。 $n$  是奇数时  $\cos n\pi = -1$ ，代入 (75) 式，得：

$$1 - e^{(a-1)\ln 2} = 0 \quad \text{或} \quad (a-1)\ln 2 = \ln 1 = 0 \quad (67)$$

因此 (64) 和 (65) 式的解是  $a = 1$  和  $b = (2n+1)\pi / \ln 2$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )。如果  $a \neq 1$ ，(64) 和 (65) 式就不能同时等于零。

再来讨论 (49) 式的前三项的零点。将 (49) 式的前三项乘上  $2^{1-s}3^{1-s}$ ，并令其等于零。利用  $n^a = e^{a \ln n}$ ， $n^{ib} = e^{ib \ln n}$ ，得：

$$(2 \cdot 3)^{1-a} e^{-ib \ln(2 \cdot 3)} + 2^{1-a} e^{-ib \ln 2} + 3^{1-a} e^{-ib \ln 3} = 0 \quad (68)$$

利用欧拉公式，并将虚部与实部分开，得：

$$(2 \cdot 3)^{1-a} \cos(b \ln(2 \cdot 3)) + 2^{1-a} \cos(b \ln 2) + 3^{1-a} \cos(b \ln 3) = 0 \quad (69)$$

$$(2 \cdot 3)^{1-a} \sin(b \ln(2 \cdot 3)) + 2^{1-a} \sin(b \ln 2) + 3^{1-a} \sin(b \ln 3) = 0 \quad (70)$$

将 (70) 式改写为：

$$(2 \cdot 3)^{1-a} \cos\left(\frac{\pi}{2} - b \ln(2 \cdot 3)\right) + 2^{1-a} \cos\left(\frac{\pi}{2} - b \ln 2\right) + 3^{1-a} \cos\left(\frac{\pi}{2} - b \ln 3\right) = 0 \quad (71)$$

可以看出，(69) 和 (71) 式完全对称，余弦函数前的系数完全一样。由于  $a$  和  $b$  是相互独立的，要使它们对任意的  $a$  和  $b$  能同时成立，唯有令：

$$b \ln(2 \cdot 3) = \frac{\pi}{2} - b \ln(2 \cdot 3) \quad b \ln 2 = \frac{\pi}{2} - b \ln 2 \quad b \ln 3 = \frac{\pi}{2} - b \ln 3 \quad (72)$$

$$\text{或:} \quad b = \frac{\pi}{4 \ln(2 \cdot 3)} \quad b = \frac{\pi}{4 \ln 2} \quad b = \frac{\pi}{4 \ln 3} \quad (73)$$

显然，(73) 式的三个关系是不可能同时成立的，因此 (69) 和 (70) 式不可能同时为零。

当然，对于项数有限的级数，以上的证明不是真正严格的。然而对于无穷级数，这种方法却是标准的方法。对于：

$$\zeta(1-s) = 1 + \frac{1}{2^{1-s}} + \frac{1}{3^{1-s}} + \cdots + \frac{1}{p_n^{1-s}} + \cdots = 0 \quad (74)$$

将 (74) 式乘上  $(2 \cdot 3 \cdots p_n)^{(1-s)} = (p_2 p_3 \cdots p_{n-1} p_n)^{(1-a)} e^{-ib \ln(p_2 p_3 \cdots p_{n-1} p_n)}$ ，得：

$$\begin{aligned} & (p_2 p_3 \cdots p_{n-1})^{(1-a)} e^{-ib \ln(p_2 p_3 \cdots p_{n-1})} + (p_2 p_3 \cdots p_{n-2} p_n)^{(1-a)} e^{-ib \ln(p_2 p_3 \cdots p_{n-2} p_n)} + \cdots \\ & + (p_3 \cdots p_{n-1} p_n)^{(1-a)} e^{-ib \ln(p_3 \cdots p_{n-1} p_n)} + (p_2 p_3 \cdots p_{n-1} p_n)^{(1-a)} e^{-ib \ln(p_2 p_3 \cdots p_{n-1} p_n)} = 0 \end{aligned} \quad (75)$$

对于无穷级数，令  $p_n \rightarrow \infty$ 。将实数部分与虚数部分分开，与 (69) 和 (71) 式类似，就有：

$$\begin{aligned} & (p_2 p_3 \cdots p_{n-1})^{(1-a)} \cos(b \ln(p_2 p_3 \cdots p_{n-1})) \\ & + (p_2 p_3 \cdots p_{n-2} p_n)^{(1-a)} \cos(b \ln(p_2 p_3 \cdots p_{n-2} p_n)) \\ & \cdots + (p_3 \cdots p_{n-1} p_n)^{(1-a)} \cos(b \ln(p_3 \cdots p_{n-1} p_n)) \\ & + (p_2 p_3 \cdots p_{n-1} p_n)^{(1-a)} \cos(b \ln(p_2 p_3 \cdots p_{n-1} p_n)) = 0 \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} & (p_2 p_3 \cdots p_{n-1})^{(1-a)} \cos\left(\frac{\pi}{2} - b \ln(p_2 p_3 \cdots p_{n-1})\right) \\ & + (p_2 p_3 \cdots p_{n-2} p_n)^{(1-a)} \cos\left(\frac{\pi}{2} - b \ln(p_2 p_3 \cdots p_{n-2} p_n)\right) \\ & \cdots + (p_3 \cdots p_{n-1} p_n)^{(1-a)} \cos\left(\frac{\pi}{2} - b \ln(p_3 \cdots p_{n-1} p_n)\right) \\ & + (p_2 p_3 \cdots p_{n-1} p_n)^{(1-a)} \cos\left(\frac{\pi}{2} - b \ln(p_2 p_3 \cdots p_{n-1} p_n)\right) = 0 \end{aligned} \quad (77)$$

从无穷级数理论知道，当求和项数趋于无穷时，要使 (76) 和 (77) 式同时成立，除了  $a \rightarrow \infty$ ，唯有令对应项一一相等，就有：

$$b = \frac{\pi}{4 \ln(p_2 p_3 \cdots p_{n-1})} \quad b = \frac{\pi}{4 \ln(p_2 p_3 \cdots p_{n-2} p_n)}$$

$$b = \frac{\pi}{4 \ln(p_3 \cdots p_{n-1} p_n)} \qquad b = \frac{\pi}{4 \ln(p_2 p_3 \cdots p_{n-1} p_n)} \qquad (78)$$

如此等等。显然这是不可能的，因此 (76) 和 (77) 式不可能同时成立，Zeta 函数  $\zeta(1-s)$  的无穷级数求和形式没有零点。对于  $\zeta(s')$  令  $s' \rightarrow 1-s$ ，结果有一样，定理 3 证毕。

以上结果与  $a$  的取值无关，只要  $a < \infty$ ，不论  $a > 1$  还是  $a \leq 1$ 。如果令  $b = 0$ ，即在实轴上，(51) 式等于零，但 (50) 式不等于零，有：

$$\zeta(1-a) = \zeta_1(1-a) = 1 + 2^{a-1} + 3^{a-1} + \cdots + n^{a-1} + \cdots \neq 0 \qquad (79)$$

如果取  $a = 1/2$ ，则  $1-a = 1/2$ 。作者在论文【1】中证明，只有在这种情况下，(2) 式两边才恰好完全相等。但结果不是零，而是无穷的大，没有意义：

$$\zeta(1/2) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots \rightarrow \infty \qquad (80)$$

由于 Zeta 函数方程 (4) 和 (5) 式都没有非平凡零点，也就无所谓黎曼猜想了。至此，我们完整地阐述了黎曼猜想是否存在的问题，得到以下定理 4。

**定理 4:** 黎曼 Zeta 函数方程 (4) 和 (5) 式在整个复平面上没有非平凡零点，黎曼猜想不成立。

## 五 结论

黎曼 Zeta 函数方程有两种形式，它们被认为具有相同的零点。黎曼猜想认为 Zeta 函数方程的零点全部位于复平面  $\text{Re}(s) = 1/2$  的临界线上，但这个论断一直无法得到证明。黎曼猜想对素数分布理论及其重要，在假定它是正确的基础上，已经证明了一千多条定理【9】，并被应用于更为广阔的数学和物理学领域【10, 11, 12, 13, 14】。如果黎曼猜想不成立，后果是及其严重的，数学界对这个问题应当有一个明确的结论。

在作者此前的论文《黎曼 Zeta 函数方程的不一致性》中，业已证明黎曼 1859 年的原始论文存在四个基本错误。因此黎曼 Zeta 函数方程不成立，黎曼猜想没有意义。

目前采用人工和计算机计算 Zeta 函数零点，采用的都是近似的方法，破坏了柯西—黎曼定理，得到的实际上不是真正的零点。此外，这类方法没有将 Zeta 函数方程的实部和虚部分开，计算过程过于复杂导致混乱。

本文假设黎曼 Zeta 函数方程仍然成立，采用一个标准而严格的方法，将 Zeta 函数方程分解成实部和虚部，然后分别进行比较。由此证明黎曼 Zeta 函数方程的两种形式都没有非平凡零点，黎曼 Zeta 函数本身的级数求和形式也没有零点，由此证明黎曼猜想不成立。

## 参考文献

- 【1】 Mei Xiaochun, The inconsistency problem of Riemann Zeta function Equation, Mathematics Letters, 2019; 5(2): 13-22., doi: 10.11648/j.ml.20190502.11, <http://www.sciencepublishinggroup.com/journal/paperinfo?journalid=348&doi=10.11648/j.ml.20190502.11>
- 【2】 Riemann G. F. B., (1859), Uber die Anzahl der Primahlem unter einer gegebenen Grosse, Monatsberichte der Berliner Akademie, 2, 671- 680.

- 【3】 Bent E. Petersen, Riemann Zeta Function, <https://pan.baidu.com/s/1geQsZxL>.
- 【4】 谢国芳, 黎曼提出黎曼猜想的原始论文的译注, <https://wenku.baidu.com/view/8029b653be23482fb4da4cff.html>.
- 【5】 Neukirch, J. (1999). Algebraic Number Theory. Springer, Berlin, Heidelberg (The original German edition was published in 1992 under the title Algebraische Zahlentheorie).
- 【6】 Gourdon X., The  $10^{13}$  first zeros of the Riemann Zeta function, and zeros computation at very large height, 2004, <http://pdfs.semanticscholar.org/6eff/62ff5d98e8ad2ad8757c0faf4bac87546f27.pdf>.
- 【7】 卢昌海, 黎曼猜想漫谈, 清华大学出版社, 2016, p. 192.
- 【8】 郭敦仁, 数学物理方法, 人民教育出版社, 1965, p. 109.
- 【9】 Jessen, B. , Wintner, A., Distribution functions and the Riemann zeta function. Transactions of the American Mathematical Society, 1935, 38(1), 48 – 88.
- 【10】 Chen G, Guo G, Yang K, Yang D. Multi-step prediction of zero series and gap series of Riemann zeta function. Results in Physics. 2021 Aug 1;27:104449.
- 【11】 Matiyasevich Y. Continuous crop circles drawn by Riemann's zeta function. Journal of Number Theory. 2021 Dec 1;229:199-217.
- 【12】 Berry, M. V., Keating, J. P., The Riemann zeros and eigenvalue asymptotics. Siam Review, 1999, 41(2), 236–266.
- 【13】 Sierra, G., Townsend, P. K. Landau levels and riemann zeros. Physica Review Letters, 2008, 101(9), 110201.
- 【14】 Bender, C. M., Brody, D. C., Muller, M. P., Hamiltonian for the zeros of the Riemann Zeta function. Physical Review Letters, 2017,118(13), 130201.