LAGRANGIAN OF TWO-COMPONENT BOSE-EINSTEIN CONDENSATE

ЛАГРАНЖИАН ДВУХКОМПОНЕНТНОГО КОНДЕНСАТА БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНА

Х.Н.Исматуллаев

НУУз

Abstract. In this work, the Lagrangian of a two-component Bose-Einstein condensate is derived in terms of the Gaussian Ansatz parameters.

Абстракт. В данной работе выводится Лагранжиан двухкомпонентного конденсата Бозе-Эйнштейна в параметрах Гауссового анзаца.

Впервые Бозе-Эйнштейновская конденсация в парах щелочных металлов была обнаружена в 1995 году [1]. С тех пор изучение динамики однокомпонентного конденсата развивалось в разных направлениях. Была изучена динамика Бозе конденсата при изменяющемся во времени коэффициенте нелинейности и проводились расчеты коллективных колебаний конденсата при периодической осцилляции силы внешнего поля [2]. Также изучены свойства конденсата во внешних пространственно периодических полях [3,4]. В данной работе выводится Лагранжиан двухкомпонентного конденсата Бозе-Эйнштейна в параметрах Гауссового анзаца.

Динамика двухкомпонентного Бозе конденсата описывается двумя связанными уравнениями Гросса-Питаевского,

$$\begin{aligned} i\varphi_{1t} &= -\frac{1}{2}\varphi_{1xx} + V(x)\varphi_1 + g_1|\varphi_1|^2\varphi_1 + g_{12}|\varphi_2|^2\varphi_1, \\ i\varphi_{2t} &= -\frac{1}{2}\varphi_{2xx} + V(x)\varphi_2 + g_2|\varphi_2|^2\varphi_2 + g_{12}|\varphi_1|^2\varphi_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\varphi_{1,2} = \varphi_{1,2}(x,t)$ волновые пакеты компонент конденсата, нижние индексы t и x означают дифференцирования по времени и координате соответственно,

$V(x)=1/2x^2$ внешнее поле, g_1 и g_2 коэффициенты внутри-компонентного взаимодействия, g_{12} коэффициент межкомпонентного взаимодействия, время t и расстояние x нормированы на частоту и на длину осциллятора соответственно, и в следствии, t и x безразмерные величины.

Для волновой функции конденсата $\varphi_{1,2}(x,t)$ мы используем гауссовский анзац

$$\varphi_j = A_j(t)\exp(-\frac{(x-x_j(t))^2}{2a_j^{\,2}(t)} + ik_j(t)(x-x_j(t)) + \frac{ib_j(t)(x-x_j(t))^2}{2} + i\varepsilon_j(t)),\ j=1,2\ ,$$

(2)

где A_j, a_j, b_j, x_j, k_j и ε_j амплитуда, ширина, чирп, центр массы, скорость и линейная фаза, соответственно.

Система (1) может быть получена из вариационных уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_j *} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial \varphi_{jx} *} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \varphi_{jt} *} = 0,\ j=1,2\ , \qquad (3)$$

где верхний индекс * обозначает комплексное сопряжение, L Лагранжиан системы данный уравнением

$$\begin{aligned} L = &\frac{i}{2}(\varphi_{1t}\varphi_1 * - \varphi_{1t} * \varphi_1) - \frac{1}{2}|\varphi_{1x}|^2 - \frac{x^2}{2}|\varphi_1|^2 - \frac{g_1}{2}|\varphi_1|^4 + \\ &+ \frac{i}{2}(\varphi_{2t}\varphi_2 * - \varphi_{2t} * \varphi_2) - \frac{1}{2}|\varphi_{2x}|^2 - \frac{x^2}{2}|\varphi_2|^2 - \frac{g_2}{2}|\varphi_2|^4 + g_{12}|\varphi_1|^2|\varphi_2|^2 \end{aligned} \qquad (4)$$

Подставляя пробную функцию (2) в уравнение (4) и усредняя ее

$$\overline{L} = \int_{-\infty}^{\infty} L(x)dx\ , \qquad (5)$$

мы получим усредненный Лагранжиан в параметрах гауссового анзаца

$$\frac{\overline{L}}{\sqrt{\pi}} = -A_1^{\,2} a_1 \left(\frac{a_1^{\,2} b_{1t}}{4} + \varphi_{1t} - kx_{1t} + \frac{1}{4a_1^{\,2}} + \frac{a_1^{\,2} b_1^{\,2}}{4} + \frac{1}{2} k_1^{\,2} + \frac{a_1^{\,2} + 2x_1^{\,2}}{4} + \frac{g_1 A_1^{\,2}}{2\sqrt{2}} \right) -$$

$$- A_2^{\,2} a_2 \left(\frac{a_2^{\,2} b_{2t}}{4} + \varphi_{2t} - kx_{2t} + \frac{1}{4a_2^{\,2}} + \frac{a_2^{\,2} b_2^{\,2}}{4} + \frac{1}{2} k_2^{\,2} + \frac{a_2^{\,2} + 2x_2^{\,2}}{4} + \frac{g_2 A_2^{\,2}}{2\sqrt{2}} \right) - \qquad (6)$$

$$- \frac{A_1^{\,2} a_1 A_2^{\,2} a_2 \mathrm{g}_{12} \exp\left(- \frac{(x_1 - x_2)^2}{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}} \right)}{\sqrt{\pi (a_1^{\,2} + a_2^{\,2})}}$$

Полученный Лагранжиан полезен для получения обыкновенных дифференциальных уравнений описывающих динамику конденсата Бозе-Эйнштейна.

Литература.

1. Anderson, M.H. // Science. 1995, 269. P.198-201.
2. Abdullaev, F.Kh., Garnier, J // Phys. Rev. A. 2004. 70. P. 053604 - 053607.
3. Baizakov, B.B., Malomed, B.A.// Europhys. Lett., 2003. 63. P. 642-645.
4. Adhikari, S.K // Phys. Rev. A // 2007. 76. P. 043626 - 043629P.