

Title: Experimentos de GR resueltos con relatividad especial de campos

Abstract

Este documento es un consolidado de todos los experimentos que se han revisado de GR hasta la fecha, resueltos con relatividad especial de campos.

Autor: Enrique Domínguez Pinos. © Todos los derechos reservados.
Ingeniero Industrial.

Email: enrique_pinos@yahoo.es

Este proyecto precisa de financiación, no dude en contactar para apoyarlo.
This project requires funding, please do not hesitate to contact us for support.

Málaga, 26 de Enero de 2024 (revisado: 5 de Diciembre de 2024)

Table of Contents

Introducción.....	2
Lagrangiano: ecuaciones de movimiento.....	2
Regímenes de velocidad.....	4
Factor de Lorentz generalizado.....	4
Bosones (fotones y gravitones).....	4
Fermiones.....	5
Experimentos de relatividad general.....	6
Experimentos con bosones (fotones).....	8
Deflexión de fotones en campo gravitatorio.....	9
Corrimiento al rojo gravitacional: experimento de Pound-Sneider.....	10
Retardo Shapiro: experimento de viking landers.....	11
Experimentos con fermiones.....	14
Precesión del perihelio de mercurio.....	14
Gravity probe b.....	15
Variación temporal en distintos sistemas de referencia: relojes de Maryland.....	17
Predicciones de la teoría.....	18
Anexo I: Ecuación para el redshift.....	19
Anexo II: Incremento de potencial sobre la superficie terrestre.....	21
Anexo III: Expresión explícita de la variación de la velocidad.....	21
Anexo IV: Combinación de fuerzas gravitatorias y electromagnéticas.....	24
Anexo V: Integración del retardo shapiro en viking landers.....	25
***** English version *****	26
Introduction.....	26
Lagrangian: equations of motion.....	26
Speed regimes.....	28
Generalized Lorentz factor.....	28
Bosons (photons and gravitons).....	28
Fermions.....	29

General relativity experiments.....	30
Experiments with bosons (photons).....	32
Deflection of photons in gravitational field.....	33
Gravitational redshift: Pound-Sneider experiment.....	34
Shapiro delay: viking landers experiment.....	35
Experiments with fermions.....	37
Precession of Mercury's perihelion.....	37
Gravity probe b.....	39
Temporal variation in different reference systems: Maryland clocks.....	41
Predictions of the theory.....	42
Annex I: Redshift equation.....	42
Annex II: Increase in potential on the Earth's surface.....	44
Annex III: Explicit expression of speed variation.....	45
Annex IV: Combination of gravitational and electromagnetic forces.....	48
Annex V: Shapiro delay integration in Viking landers.....	48
Referencias.....	49

Introducción

La relatividad especial de campos (SRF) surge al revisar los experimentos de relatividad general, tratando de explicarlos con una relatividad especial (SR) ‘ligeramente modificada’. El enfoque actual (porque ha tenido muchos cambios de enfoque, que quedan patentes en previos documentos) que es congruente con los 6 experimentos ‘tipo’ revisados, exige un cambio radical en la forma de ver las ecuaciones. Por un lado, la restricción de la componente tangencial de la aceleración concluimos que depende del tipo de campo en consideración, mientras que el factor de Lorentz (generalizado), depende de la partícula sobre la que se hace el cálculo.

Resumiendo, se concluye que los gravitones tienen distinta velocidad que los fotones, pero su mismo rango; esto es, tienen su propia ecuación de ondas y su propia ‘relatividad especial’, simplemente cambiando en las fórmulas de relatividad especial la velocidad de la luz, con la de los gravitones. La velocidad de los gravitones se determina en el ajuste con los experimentos.

Precisaremos de otra modificación en las ecuaciones de movimiento: cambiando también la forma en que se escribe la ecuación de Euler-Lagrange se mantiene la forma del Lagrangiano relativista.

Lagrangiano: ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) del movimiento de la partícula quedan,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= \frac{\vec{v}}{\gamma}, \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{1}{m\gamma} \left(\vec{F} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F})\vec{v}}{c^2} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Nótese la aparición del factor de Lorentz en ambas ecuaciones. Ésta es la ecuación dinámica para la partícula en tiempo del observador.

Se obtiene a partir del Lagrangiano relativista,

$$L = \frac{-c^2}{\gamma} - V.$$

Donde V es el potencial del que derivan las fuerzas.

Mediante la ecuación de Euler-Lagrange,

$$-\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) = 0, q_i = \{x, y, z\}, v_i = \{v_x, v_y, v_z\}$$

Que se diferencia en que la velocidad que aparece en el Lagrangiano es velocidad en tiempo (propio) de la partícula, y se deriva respecto a esa ‘velocidad propia’. Pero el tiempo t representa al tiempo del observador.

Este Lagrangiano nos lleva a la ecuación mecánica,

$$\frac{d(\gamma \vec{v})}{dt} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Que podemos despejar en función a la velocidad, quedando las ecuaciones (1), que indicamos al principio.

Nótese que el factor de Lorentz en esa ecuación sirve a dos propósitos. Por un lado, dejar las ecuaciones como en las (1) al expresar la velocidad de manera explícita. Y por otro lado, sirve como factor de escalado temporal. De ahí parte de la confusión en la interpretación del mismo.

Las ecuaciones en tiempo propio serían,

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} = \vec{v},$$

$$\frac{d\vec{v}}{d\tau} = \frac{1}{m} \left(\vec{F} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F}) \vec{v}}{c^2} \right).$$

La primera es la velocidad propia; esto es, la velocidad de la partícula medida en tiempo propio. Mientras que el vector velocidad v dividido por el factor de Lorentz, representa la velocidad en tiempo del observador.

Para resolver un sistema dinámico, como el sistema solar, debemos expresar todas las ecuaciones en tiempo del observador. El tiempo del observador simplemente permite expresar las ecuaciones de movimiento respecto a un sistema de referencia común, respecto al que se han medido las velocidades y posiciones de cada partícula, y se ha referido el potencial de referencia.

Para el caso de movimiento del fotón en campo gravitatorio, el sistema de referencia que define el tiempo del observador, ve al fotón en su tránsito viajando a la velocidad del gravitón y precisa de un escalado para expresar el tiempo propio del sistema que realiza una medida de tiempo. Se verá un poco más claro en el apartado siguiente.

La expresión de las ecuaciones de relatividad especial con la velocidad explícita se encontraron inicialmente en la referencia [1], pero se puede llegar a ella razonando sólo con el movimiento del fotón y extrapolando los resultados a todas las partículas^[3]. En el ‘Anexo III: Expresión explícita de la variación de la velocidad’ se incluye una demostración de cómo se obtiene la expresión en explícitas.

Regímenes de velocidad

Las ecuaciones que hemos indicado se han supuesto en relatividad especial en campo fotónico y la c representa a la velocidad de los fotones. Si estamos resolviendo las ecuaciones en campo gravitatorio, debemos expresar las ecuaciones en relatividad especial en campo gravitatorio y la c es la velocidad de los gravitones (c_m), que se determina igual a $c_m = c/\sqrt{2}$; esto es, unos 200,000 km/s. En los cálculos, tomamos para c el valor,

$$c = 299,792,458 \text{ m/s.}$$

Para simular partículas que se mueven en campo gravitatorio más rápido que la velocidad de los gravitones, vamos a recurrir a un escalado en el tiempo del observador, y vamos a suponer que las partículas se mueven a la velocidad máxima del campo gravitatorio, que es la velocidad del gravitón.

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma_g}.$$

Con el factor de Lorentz que relaciona ambos campos,

$$\gamma_g = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{c_m}{c}\right)^2}} = \sqrt{2}.$$

Y siendo τ el tiempo propio del sistema de referencia que hace una medida,

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nótese que, en el tiempo propio del sistema de referencia, se medirá la velocidad del fotón igual a c . Porque, aunque en el tiempo del observador se verá que la luz tarda más en recorrer una distancia dada, al convertir al tiempo propio del sistema que hace la medida de tiempo, tenemos que reducir el tiempo del observador por el factor raíz de dos, que hace que el tiempo que tarda la luz en recorrer la distancia sea el correcto.

Factor de Lorentz generalizado

Cada tipo de partícula presenta su propio factor de Lorentz generalizado. El factor de Lorentz en las ecuaciones diferenciales (1), sólo cambia la ley horaria del movimiento, pero no la trayectoria de la partícula. Lo definimos en base al experimento en cuestión, guiado por la expresión de relatividad general.

El incremento de tiempo se expresa como la diferencia del tiempo propio del sistema que realiza la medida, menos el tiempo del observador, $\Delta t = \tau - t$.

Bosones (fotones y gravitones)

En base al experimento del retardo Shapiro establecimos (incorrectamente),

$$\frac{d\Delta t}{dt} = -z.$$

Donde definimos (incorrectamente) el redshift (z) mediante,

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right) - 1.$$

Analizando el experimento del retardo Shapiro y el SN1987A, deducimos la definición correcta para el incremento temporal,

$$\frac{d \Delta t}{dt} = -\frac{\Delta U}{c_m^2}.$$

Con la referencia del potencial en el origen del sistema de referencia respecto al que integramos la ecuación (específicamente, sobre el sistema de referencia que realiza la medición de tiempo).

Y mantenemos para el redshift la expresión (ver Anexo I: Ecuación para el redshift),

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) - 1.$$

La referencia para el potencial se tomaría al principio de la trayectoria (posición en $t=0$) a lo largo de la que deseamos calcular el redshift.

Si el experimento que vamos a predecir es para gravitones,

$$\Delta t = \tau - t.$$

Si, en cambio, vamos a hacer el calculo para fotones,

$$\Delta t = \tau - \frac{t}{\sqrt{2}}.$$

Y el problema requiere escalado temporal.

La expresión de la ecuación del tiempo propio del sistema de medida define el factor de Lorentz generalizado; respectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{d \tau}{dt} &= 1 - \frac{\Delta U}{c_m^2}, \\ \frac{d \tau}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\Delta U}{c_m^2}. \end{aligned}$$

En ambos casos el factor de Lorentz generalizado (γ') se define mediante,

$$\frac{d \tau}{dt} = \frac{1}{\gamma'}.$$

Obviamente, la ecuación para gravitones no se ha probado y es una extensión del caso de fotones.

Fermiones

En base al experimento de tipo Hafele-Keating de los ‘relojes de Maryland’ (se comenta en su apartado) establecimos el incremento de tiempo como,

$$\frac{d \Delta t}{dt} = \frac{\Delta U}{c^2} - \frac{v^2 - v_o^2}{2c^2}.$$

O, suponiendo velocidades inferiores a la del gravitón,

$$\frac{d \tau}{dt} = 1 + \frac{\Delta U}{c^2} - \frac{v^2 - v_o^2}{2c^2}.$$

Que vamos a extrapolar en base a los resultados con bosones a,

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \frac{\Delta U}{c^2} - (\gamma - 1).$$

Con el factor de Lorentz definido sobre la velocidad de los fotones,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Que da el factor generalizado de Lorentz,

$$\frac{1}{\gamma'} = \frac{\Delta U}{c^2} - \gamma + 2.$$

O,

$$\gamma' = \frac{1}{2 - \gamma + \frac{\Delta U}{c^2}}.$$

Esto permite que cuando el incremento de potencial sea nulo,

$$\gamma' = \frac{1}{2 - \gamma},$$

y, en el límite de bajas velocidades, el factor de Lorentz generalizado se corresponda con el factor de Lorentz habitual,

$$\gamma' \simeq \gamma \simeq 1 + \frac{v^2}{2c^2}.$$

Como cabría esperar.

Para velocidades superiores a la del gravitón, y próximas a la de la luz (neutrinos), podemos usar,

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\Delta U}{c^2} - (\gamma - 1).$$

Nótese que la referencia de potencial, como la referencia respecto a la que se define la velocidad del factor de Lorentz, se hacen en base al sistema de referencia respecto al que integramos la ecuación.

Experimentos de relatividad general

Analizaremos los siguientes:

1. Deflexión de fotones en campo gravitatorio.
2. Corrimiento al rojo gravitacional: Pound & Sneider
3. Retardo Shapiro: viking landers
4. Precesión del perihelio de mercurio.
5. Gravity probe b.
6. Variación temporal de relojes en distintos sistemas de referencia (tipo Hafele-Keating): experimento de los relojes de la Universidad de Maryland.

Los detalles de cada experimento se encuentran en su referencia correspondiente, salvo el último. Aquí sólo vamos a hacer un consolidado de las ecuaciones, que han ido cambiando. Todos los experimentos se realizaron en influencia del campo gravitatorio, por lo que usaremos relatividad especial gravitatoria. O sea, que hay que usar las relaciones relativistas con la velocidad de los gravitones (salvo para el factor de Lorentz generalizado, que depende sólo del tipo de partícula en cuestión). Las ecuaciones (1) con este enfoque quedan,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\vec{v}}{\gamma'},$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m\gamma'} \left(\vec{F} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F})\vec{v}}{c_m^2} \right).$$

Donde, como hemos indicado, el factor de Lorentz generalizado sólo se usa para las ecuaciones diferenciales. Para las expresiones del Lagrangiano, la energía y restantes, usamos el factor de Lorentz (normal) acorde al tipo de campo (gravitatorio usa la velocidad de los gravitones y el electromagnético la de los fotones).

En condiciones de ambigüedad entre qué factor de Lorentz usar (generalizado o normal), recordar que el factor generalizado de Lorentz se define en base a la ecuación del tiempo propio respecto al tiempo del observador; por lo que al convertir la EDO (que da la trayectoria) al tiempo propio, todos los factores de Lorentz generalizados deben simplificarse. Obviamente, en derivación (total) de magnitudes respecto al tiempo del observador, siempre va a aparecer un factor de Lorentz generalizado. También, recordar que la trayectoria de una partícula no puede depender de un factor de Lorentz generalizado, sólo intervienen en la ecuación horaria (cómo se recorre esa trayectoria).

El factor de Lorentz generalizado controla la velocidad con que se observa un sistema; esto es, si lo vemos a cámara rápida, o lo vemos a cámara lenta. Nadie espera que el ver a cámara rápida o lenta una carrera de coches, los coches cambien de trayectoria.

Nótese también que la limitación de velocidad (el motivo por el que hacemos escalado temporal en campo gravitatorio) viene dado por la forma de la EDO de la velocidad. Si la partícula iguala o supera la velocidad del gravitón, al restar al vector fuerza 'F' toda su componente tangencial, dicha fuerza no puede incrementar la velocidad de la partícula (la velocidad está limitada por el tipo de campo). También sería incorrecto introducir una velocidad superior a la del campo porque estaríamos restando a la fuerza 'F' más componente tangencial de la que posee.

Los experimentos y su influencia en las ecuaciones de relatividad especial de campos se resume en la siguiente tabla.

Resultado sobre el tipo de experimento	Partícula: bosón	Partícula: fermión
Factor de Lorentz generalizado	Retardo Shapiro: Viking landers, SN1987A	Tipo Hafele-Keating, SN1987A
Velocidad gravitones y papel del factor de Lorentz generalizado como factor de escala temporal	Curvado de luz en campo gravitatorio	Precesión del perihelio de mercurio
Forma del redshift	Pound & Sneider	Precesión del perihelio de mercurio
Forma ecuaciones de campo	-	Gravity probe B

Experimentos con bosones (fotones)

Los experimentos con bosones se calculan con las ecuaciones en tiempo propio (o sea, no sale el factor generalizado de Lorentz). Si el experimento requiere una medida de tiempo, como el del retardo Shapiro, usaremos la ecuación del tiempo τ , no es preciso en los otros experimentos.

Los tres primeros experimentos se explican con el mismo conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que son,

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -G_r (x(c_m^2 - p^2) - y p q), \\ \dot{q} &= -G_r (-x p q + y(c_m^2 - q^2)), \\ \dot{x} &= p, \\ \dot{y} &= q, \\ \dot{\tau} &= \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m}\right).\end{aligned}$$

con,

$$\begin{aligned}G_r &= \frac{GM}{c_m^2} \frac{1}{[x^2 + y^2]^{3/2}}, \\ U &= \sum_i \frac{-GM}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}},\end{aligned}$$

Donde la referencia de potencial se toma sobre el origen del sistema que mide el tiempo propio.

Y el redshift z ,

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) - 1.$$

Donde el incremento de U hace referencia a la diferencia de potencial entre el punto de origen y el de destino del fotón. Resaltar que la referencia de potencial para la ecuación del redshift es distinta que para el factor de Lorentz generalizado, como hemos indicado.

Recordando que estamos en SR gravitatoria y c_m es la velocidad de los gravitones.

Nótese que es posible eliminar del problema el tiempo del observador, aunque las ecuaciones que se obtienen no mantienen la forma de las (1).

Deflexión de fotones en campo gravitatorio

En este experimento se mide la deflexión de fotones cuando realizan su tránsito en la vecindad de un objeto masivo^{[2],[3]}. Es un test muy polémico porque, aunque se han realizado varios experimentos, como el de Eddington que dio fama mundial a Einstein, los experimentos más recientes (y exactos) se realizan con medidas astronómicas de VLBI. Por ejemplo, con el tránsito del cuásar 3C279 a su paso por el sol. Una medida no exenta de problemática, ya que al parecer orientar una antena de esas dimensiones cara al sol, trae varias dificultades técnicas. Sin hablar de las dificultades que ya conlleva la medida, ya que para poder medir una deflexión, tiene que compararse dónde está el objeto, con dónde debería estar; y todo ello con mucha precisión.

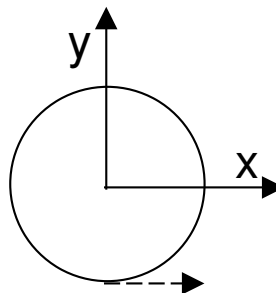
Hay otros experimentos que miden la deflexión de luz usando la gravedad de Júpiter, pero son medidas de deflexiones de mili-arcosegundos, y podrían estar sujetas a otros efectos adicionales. Al tiempo en que se analizó este experimento, no había test de ondas gamma (Fermi LAT) con la precisión requerida para confirmar este test.

Por todo ello, vamos a realizar el test con la referencia del resultado de relatividad general, que predice una deflexión de $\delta = 1.7497$ arcosegundos, el doble de la que se predice usando sólo la gravedad de Newton. Este valor predicho, donde la deflexión es máxima, se encuentra sólo para fotones que pasan por la vecindad del sol tangencialmente a su superficie y por el ecuador del mismo.

Este experimento se resuelve con las 4 primeras de las EDOs y las condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} p &= c_m, \\ q &= 0, \\ x &= 0, \\ y &= -R. \end{aligned}$$

Siendo R el radio del sol.



Suponemos que el fotón avanza inicialmente en la dirección del eje x, y calculamos su deflexión cuando deja de evolucionar (se ha ido lo bastante lejos de la influencia gravitatoria). Multiplicamos el resultado por dos, porque hemos realizado sólo medio tránsito. Éste procedimiento es el seguido por Soldner en un cálculo similar y simplifica mucho el problema. Los datos del sol,

$$\begin{aligned} R &= 6.963 \times 10^8 \text{ m}, \\ GM &= 1.32712440018 \times 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2. \end{aligned}$$

La deflexión la calculábamos con,

$$\delta = 2 \operatorname{atan}\left(\frac{q}{p}\right).$$

Que da una deflexión $\delta = 1.7497$ arcosegundos.

Si usamos la solución al problema de los dos cuerpos para trayectorias hiperbólicas, el resultado que se predice es^[9],

$$\delta = \frac{2GM}{Rv^2}.$$

Sustituyendo la velocidad (v) de los gravitones, se obtiene la misma predicción que GR, si expresamos el resultado en función de la velocidad de los fotones,

$$\delta_{GR} = \frac{4GM}{Rc^2}.$$

Que da exactamente el mismo resultado, $\delta = 1.7497$ arcosegundos.

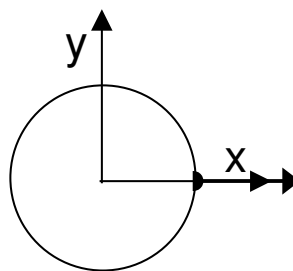
Corrimiento al rojo gravitacional: experimento de Pound-Sneider

Otro test con bastante polémica es éste. Confiamos en el resultado de este último que, esperamos, sea el más exacto. En este experimento se mide el redshift (desplazamiento en frecuencia hacia el rojo) de fotones cuando se mueven contra el campo gravitatorio terrestre^{[2],[3]}. Dicho coloquialmente, los fotones se mueven hacia el cielo.

Este experimento se resuelve con las 4 primeras de las EDOs y la del redshift (algebraica) y las condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} p &= c_m, \\ q &= 0, \\ x &= R, \\ y &= 0. \end{aligned}$$

Siendo R el radio del sol.



Hacemos coincidir con el eje x la dirección de partida del fotón. Con el origen de coordenadas en el centro de la masa gravitacional, de masa M y radio R . El fotón partirá desde su superficie paralelamente a la gravedad.

El sistema de ecuaciones sólo dice que el rayo sale de la superficie de la tierra y va en línea recta. Y es la expresión del redshift la que predice el resultado (ver Anexo I: Ecuación para el redshift).

Combinando la ecuación del redshift,

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) - 1.$$

Con el incremento de potencial dado en el ‘Anexo II: Incremento de potencial sobre la superficie terrestre’,

$$z = \exp\left(\frac{gh}{c^2}\right) - 1.$$

Resulta en la aproximación del redshift,

$$z \approx \frac{gh}{c^2},$$

Al realizar el experimento, se midió tanto el camino de ascensión (redshift) como el de descenso (blueshift, por tanto, negativo) y luego se restó al primero el segundo; por lo que el z_{exp} reportado es el doble del valor del redshift que vamos a calcular (z_{teo}), así que lo multiplicaremos por dos para comparar el resultado,

$$z_{\text{exp}} = z_{\text{redshift}} - z_{\text{blueshift}} = 2z_{\text{redshift}},$$

Sustituyendo los valores del experimento de Pound & Snider (1965),

$$\begin{aligned} h &= 22.5552 \text{ m (74 pies)}, \\ g &= 9.82 \text{ m/s}^2, \\ c &= 299,792,458 \text{ m/s}, \end{aligned}$$

queda,

$$\begin{aligned} z_{\text{exp}} &= 4.905 e^{-15}, \\ z_{\text{teo}} &= 4.9296 e^{-15}. \end{aligned}$$

Donde z_{exp} es el valor que reportaron en el artículo de Pound y z_{teo} el valor que hemos calculado. A pesar de la diferencia con el valor obtenido por Pound, la expresión que evaluamos da lo mismo que el resultado de relatividad general. Ver la referencia [3] para los detalles.

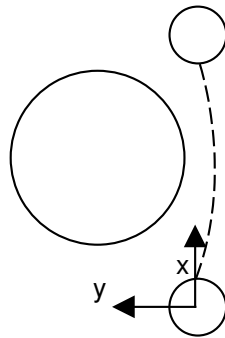
Retardo Shapiro: experimento de viking landers

En este experimento se predice el tiempo de ida y vuelta de un fotón entre la tierra y marte, cuando pasa por la vecindad del sol^[4].

En este caso usamos todas las EDOs, y definimos el potencial de referencia para el factor de Lorentz generalizado, sobre la superficie de la tierra.

$$U_0 = U_0(R_e, 0)$$

Donde R_e es el radio de la tierra.



Como muestra la figura, suponemos que el rayo (línea a trazos) sale de la superficie de la tierra en el punto $(R_e, 0)$ y llega a marte en el punto $(R_{ep} - R_m, 0)$. Siendo R_m y R_e el radio de marte y el radio de la tierra respectivamente; y R_{ep} la distancia que separa los baricentros (tierra-marte). Ver Figure 1.

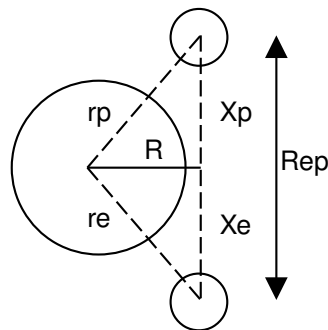


Figure 1: Esquema de distancias

Este sistema se integra con las condiciones en $t=0$ para el camino de ida,

$$\begin{aligned} p &= \delta_x, \\ q &= \delta_y, \\ x &= R_e, \\ y &= 0, \\ \tau' &= 0. \end{aligned}$$

El vector de velocidades inicial (δ_x, δ_y) debe ajustarse para que cuando $x=R_{ep}-R_m$ se cumpla también $y=0$ (valores en el instante de llegada) Y su módulo debe ser $\sqrt{(\delta_x^2, \delta_y^2)}=c_m$ (la velocidad del gravitón)

Para el camino de vuelta, las condiciones iniciales quedan,

$$\begin{aligned} p &= \delta_x', \\ q &= \delta_y', \\ x &= R_{ep} - R_m, \\ y &= 0, \\ \tau' &= 0. \end{aligned}$$

y el vector de velocidades inicial (δ_x', δ_y') debe ajustarse para que cuando $x=R_e$ se cumpla también $y=0$.

La deflexión que hace falta para conseguir acertar con el camino deseado es muy pequeña respecto al eje x, en ambos casos (del orden de un arcosegundo). Para el camino de ida, los signos del vector velocidad inicial quedan (+,-) y para el de vuelta (-,-). El ángulo de salida no coincide en ida y vuelta, porque tampoco el sol se encuentra a mitad del camino entre tierra y marte.

Los datos astrométricos los tomamos de Horizons (datos en km), el servicio del JPL de la NASA. Resultando,

re	1.476451407E+08
rp	2.268514296E+08
Rep	3.744933357E+08
R	7.606447132E+05

El retardo predicho por relatividad general es 243 micro-segundos, y el obtenido en el cálculo 260.84 micro-segundos (con la corrección de tiempo por la velocidad terrestre)

El curvado de la luz por sí sólo introduce una corrección en el retardo Shapiro del orden de 19.33 nano-segundos en este experimento, por lo que es despreciable. Hacer el cálculo suponiendo que el rayo de luz traza una línea recta, da un resultado sólo ligeramente peor, y simplifica mucho los cálculos.

También se puede sacrificar más precisión, con un resultado similar, si sólo se considera la presencia del sol; en este caso es posible una integración a mano. Obteniendo, sólo para el término del retardo Shapiro,

$$\Delta t'_{ida} = \frac{GM}{c_m^3} \left(\ln \left| \frac{r_e + X_e}{r_p - X_p} \right| - \frac{R_{ep}}{r_e} \right) = 136.75 \mu s,$$

$$\Delta t'_{vuelta} = \frac{GM}{c_m^3} \left(\ln \left| \frac{r_p + X_p}{r_e - X_e} \right| - \frac{R_{ep}}{r_e} \right) = 136.75 \mu s,$$

$$\Delta t' = \frac{GM}{c_m^3} \left(\ln \left| \frac{(r_e + X_e)(r_p + X_p)}{(r_e - X_e)(r_p - X_p)} \right| - \frac{2R_{ep}}{r_e} \right) = 273.50 \mu s$$

El tiempo que tarda el fotón en realizar el camino de ida y vuelta, aproximado por una línea recta es,

$$t_{ST} = \frac{2R_{ep}}{c} = 2498.35061369 s.$$

Y el retardo obtenido con la corrección por la velocidad de la tierra, dado el tiempo t_{ST} ,

$$\Delta t = \frac{(t_{ST} + \Delta t')}{\gamma} - t_{ST} = \frac{\Delta t'}{\gamma} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) t_{ST} = 260.84 \mu s.$$

La forma del cálculo sí que difiere de la que se emplea en las referencias de la NASA. Ver referencia [4] para los vínculos a esos tests. Para el experimento de 'viking landers' se tiene,

$$\Delta t = \frac{4GM}{c^3} \ln \left| \frac{r_e + r_p + R_{ep}}{r_e + r_p - R_{ep}} \right| = 243.37 \mu s.$$

Mientras que para el experimento de la sonda cassini,

$$\Delta t = \frac{4GM}{c^3} \ln \left| \frac{4r_p r_e}{R^2} \right| = 243.37 \mu s.$$

Dando ambas el mismo resultado y no incluyendo corrección alguna por la velocidad de la tierra.

Experimentos con fermiones

Precesión del perihelio de mercurio

La precesión del perihelio de mercurio hace referencia a un movimiento de giro de la elipse que describe mercurio entorno al sol. Dicha elipse gira en el ‘plano de movimiento’ de mercurio con un eje que pasa por el sol (que está en un foco de dicha elipse).

La magnitud que varía es el ángulo que forma el semieje mayor de la elipse entre dos instantes de tiempo (por ejemplo, se puede definir de otras maneras)

Este test es complejo de realizar y precisa de muchos datos de Horizons y varios ajustes. Sin embargo las ecuaciones son sencillas de plantear, pero costosas computacionalmente (se usó fortran)

Resumidamente, vamos a definir al ángulo de precesión calculando el instante en que se produce el perihelio, integrando las ecuaciones de n-body para los cuerpos celestes desde el Sol hasta Neptuno^[5]. Si el cuerpo celeste es un sistema con lunas, tomamos el baricentro del sistema (sólo sol, mercurio y venus se excluyen de esto)

El valor que existe en la literatura para la precesión del perihelio, no representa correctamente la evolución temporal (por no ser realmente una evolución lineal) y el pretender obtenerlo exige un postprocesado de los resultados de cada perihelio excesivamente complejo, a mi entender (ver los resultados del JPL; puede encontrarse la referencia al documento del JPL en el documento detallado de este experimento^[5])

Es cierto, y poco costoso, que el ajuste de mínimos cuadrados muestra resultados mucho más parecidos a lo que se espera, por lo que usaremos esta métrica para los resultados obtenidos.

El no poder obtener el valor teórico nos exige comprobar el resultado mediante otro procedimiento, y para ello se usa el kernel de JPL DE405 ascii. O sea, que repetimos la simulación de la evolución temporal usando los datos del kernel de la NASA y ajustamos la evolución con mínimos cuadrados, como hicimos con los resultados de la integración de las ecuaciones de n-body.

Para obtener el resultado correcto, es preciso añadir un término en las ecuaciones de mercurio que tiene en cuenta la inducción de campo gravitomagnético del sol sobre mercurio (ley de Faraday)

Aunque los efectos relativistas, evaluados mirando la diferencia entre la energía que predice el Lagrangiano de Newton frente al de relatividad especial de campos, sólo son apreciables en los cuerpos celestes desde mercurio a Júpiter ambos incluidos, puede realizarse la simulación poniendo a uno todos los factores (generalizados) de Lorentz sin pérdida significativa de resolución. Los efectos importantes son la modificación de la fuerza tangencial, y la inducción de campo gravitatorio; este último sólo en el caso de mercurio.

Si realizamos la simulación durante 100 años, manteniendo una resolución de 0.1 segundos en la localización del perihelio, obtenemos la tabla siguiente,

Tipo de simulación	Arcseg
Sólo con fuerzas de Newton	515.66
Términos ecuaciones de relatividad especial de campos (SRF)	28.88
Término de inducción de Faraday (sol a mercurio sólo)	14.04
	558.58

El valor que se obtiene con el kernel ascii es 558.51 arcseg con una resolución de 0.6 segundos (lo máximo) en la localización del perihelio (EphemUtil con código C clonado del código fortran) La aportación de GR teórica sería 42.98 arcosegundos; SRF+Faraday obtiene 42.92.

Mercurio completa 416 perihelios en total.

Las fechas del último perihelio tampoco terminan por cuadrar y se parecen más a los valores que suministra el kernel que al resultado que aporta Horizons.

Tipo de simulación	Resolución (segundos)	Fecha último perihelio (@416)
Datos Horizons	10	Sun Feb 17 02:28:50 2013
Kernel ascii DE405 con EphemUtil en C	0.6	Sun Feb 17 03:27:44 2013
Código fortran (real*16)	0.1	Sun Feb 17 03:14:20 2013

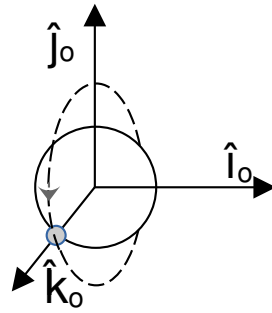
La simulación a 2000 años suma aproximadamente 10 arcosegundos más sin llegar al valor teórico (574.10 ± 0.65 arcseg)

Gravity probe b

El 'gravity probe b' o 'gbp' es un test que prueba la influencia del campo gravitomagnético terrestre en dos efectos denominados 'geodetic precesion' y 'frame dragging precesion'. La primera se refiere al efecto del campo gravitatorio de la tierra sobre un objeto que orbita entorno a ella, es un efecto puramente relativista (de relatividad especial); y, el segundo, se refiere al efecto del campo gravitomagnético de la tierra sobre un objeto (no necesariamente en movimiento). El objeto de prueba es un giróscopo y el efecto que se produce sobre el mismo es la precesión del eje de giro^[6].

Este test presenta un cálculo de cierta complejidad, pero es el único que podemos integrar a mano y obtener una expresión cerrada fácilmente.

Necesitamos modelar matemáticamente la órbita del giróscopo que circunda a la tierra. El giróscopo (esfera pequeña en la figura) lo vamos a suponer realizando una órbita elíptica (línea a trazos) entorno a la tierra; como se indica en la figura, con su vector de posición inicial alineado con el eje k_0 .



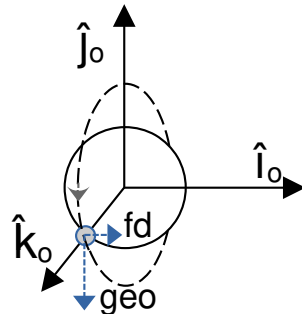
El eje de rotación de la tierra se encuentra alineado con el eje j_0 , y el eje de rotación del giróscopo se encuentra alineado con el eje k_0 en todo momento. En realidad no es así y hay un pequeño ángulo con ambos ejes que vamos a despreciar.

Tal como se ha descrito, el giróscopo tiene una trayectoria que pasa por los dos polos consecutivamente.

Vamos a suponer que la trayectoria es tal que el perigeo (punto en que la distancia es la menor al objeto orbitado) y el apogeo (punto en que la distancia es la mayor al objeto orbitado) se producen en el plano ecuatorial de la tierra, con el apogeo en la posición inicial que hemos fijado.

Tenemos, pues, dos sistemas de referencia que se mantienen paralelos; el sistema 0 (indicado en la figura) y el sistema 'g' (del giróscopo; no indicado) que acompaña al giróscopo en su giro entorno a la tierra, pero manteniendo sus ejes coordenados paralelos en todo momento a los del sistema 0.

La precesión geodética provoca el giro del eje de rotación del giróscopo según el eje i_0 , y la precesión frame-dragging provoca el giro según el eje j_0 . Ver la figura siguiente.



El efecto del campo gravitomagnético sobre el giróscopo lo vamos a modelar mediante el momento dipolar (gravito)magnético y la ecuación de precesión de Larmor.

Los resultados se listan en la tabla,

Precesión	Medido (mas/año)	Obtenido	ratio
geodética	6601.8 ± 18.3	4399.74	1.50032
frame-dragging	37.2 ± 7.2	24.59	1.51281

Hemos obtenido correctamente el signo de la precesión pero en ambos casos la predicción ha sido defectiva por un factor de 3/2 aproximadamente. Con esto en mente, se propone una modificación de las ecuaciones del gravitomagnetismo.

Las ecuaciones de Maxwell son,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \wedge \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \vec{B} &= \nabla \wedge \vec{A}, \\ \vec{E} &= -\nabla V.\end{aligned}$$

y las análogas del campo másico,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E}_g &= -4\pi G \rho_g, \\ \nabla \cdot \vec{B}_g &= 0, \\ \nabla \wedge \vec{E}_g &= -\frac{\partial \vec{B}_g}{\partial t}, \\ \nabla \wedge \vec{B}_g &= \frac{4\pi G}{c_m^2} \vec{J}_g + \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t}, \\ \vec{B}_g &= \nabla \wedge \vec{A}_g, \\ \vec{E}_g &= -\nabla V_g.\end{aligned}$$

Se propone el cambio,

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \vec{E}_g &= -\frac{2}{3} \frac{\partial \vec{B}_g}{\partial t}, \\ \nabla \wedge \vec{B}_g &= \frac{6\pi G}{c_m^2} \vec{J}_g + \frac{3}{2c_m^2} \frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t}.\end{aligned}$$

El primer cambio para mantener el resultado establecido en [5], y el segundo para que cuadren los resultados de este experimento. No es el único arreglo posible, otros autores optaron por introducir coeficientes en expresiones como la de Larmor. Ver referencia [6] para los detalles de cálculo.

Variación temporal en distintos sistemas de referencia: relojes de Maryland

Es un experimento del tipo Hafele-Keating. Se calcula la diferencia en el paso de tiempo entre dos sistemas; bajo la influencia de dos factores: una diferencia de potencial y una diferencia de velocidad. El experimento, mucho más controlado que el de Hafele-Keating, se realizó en la universidad de Maryland en Septiembre de 1975^[8].

Para medir la diferencia temporal se usaron dos relojes atómicos sincronizados. Uno de ellos se mantiene en un vuelo controlado tanto en altura como en velocidad. El tiempo de vuelo y la altura del mismo se lista en la tabla.

Tiempo (h)	Altura h (m)
5	7,620
5	9,144
5	10,668

El ensayo duró 15 horas y se realizó a una velocidad de 138 m/s (velocidad del avión relativa al centro de control en tierra)

Como comentamos, se usará la relación dada en relatividad general,

$$\frac{d \Delta t}{dt} = \frac{\Delta U}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}.$$

Con el potencial referido al centro de control en tierra. La expresión del incremento de potencial, si h es la altura de vuelo y g la gravedad terrestre, (ver Anexo II: Incremento de potencial sobre la superficie terrestre),

$$\frac{\Delta U}{c^2} = \frac{g h}{c^2}.$$

Por lo que,

$$\frac{d \Delta t}{dt} = \frac{g h}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}.$$

Tenemos que integrar esta ecuación por tramos para las 15 horas del experimento, ya que la altura va cambiando. Si hacemos esto, obtenemos,

$$\begin{aligned} \Delta t_U &= 53.95 \text{ ns}, \\ \Delta t_v &= -5.72 \text{ ns}, \\ \Delta t &= 48.23 \text{ ns}. \end{aligned}$$

Son los valores para la predicción teórica (el primer valor la contribución del término del potencial, y el segundo el término de velocidad)

Los datos medidos fueron,

$$\Delta t = 52.8 - 5.7 = 47.1 \text{ ns}.$$

Las constantes que se usaron,

$$\begin{aligned} g &= 9.82 \text{ m/s}^2, \\ c &= 299,792,458 \text{ m/s}, \end{aligned}$$

Predicciones de la teoría

La teoría predice, por ejemplo:

1. La velocidad de los gravitones es $c_m = c/\sqrt{2}$. Este extremo podría probarse observando en un acelerador de partículas quasi-rectangular, dispuesto de forma vertical, la tasa de aceleración que las partículas adquieren en sucesivas vueltas al circuito del acelerador. Se aplicaría la energía precisa

para mantener el haz dentro del acelerador en las curvas del rectángulo y en la ascensión contra la gravedad; y se dejaría que la gravedad fuera acelerando el haz en el tramo de bajada.

2. Las trayectorias de partículas materiales, bajo la influencia de un campo gravitatorio, con velocidades entre la del gravitón y la del fotón, son las mismas. Para comprobar este extremo, haría falta un experimento como el del retardo Shapiro pero usando partículas másicas a distintas velocidades relativistas v , con $c_m \leq v < c$. Sería también muy útil que se midiera su retardo temporal.

3. La velocidad máxima que puede adquirirse en caída libre bajo la acción de un campo gravitatorio es la velocidad del gravitón (c_m).

Anexo I: Ecuación para el redshift

Viendo la forma para la ecuación (1), notamos que de la fuerza que se aplica sobre la partícula, hay una parte que, dependiendo de la velocidad de la partícula, deja de causar efecto sobre la misma. Esta componente tangencial no se pierde, se invierte en modificar la energía de la onda asociada a la partícula. En el caso de los fotones, a su onda electromagnética. Por extensión, en el caso de gravitones, a su onda gravitacional. Y en el caso de partículas materiales, a su función de onda cuántica asociada.

Vamos a deducir de nuevo la expresión del redshift para bosones.

La definición del redshift es,

$$z = \frac{f_o}{f} - 1.$$

Donde f_o es la frecuencia inicial, y f la que se observa en el punto de recogida de la medición.

$$dz = \frac{-f_o df}{f^2}.$$

Introduciendo la definición del redshift en esta ecuación,

$$dz = -(1+z) \frac{df}{f}.$$

O,

$$-\frac{dz}{1+z} = \frac{df}{f}.$$

Que nos permite cambiar la variación de frecuencia por la variación del redshift.

Por otro lado, la ecuación de la energía cinética para las ondas electromagnéticas en campo gravitatorio sería,

$$E_c = m c_m^2 = hf.$$

(recuérdese que en campo gravitatorio hay que usar expresiones de relatividad gravitatoria) de donde podemos despejar la masa,

$$m = \frac{hf}{c_m^2}.$$

Como indicamos, el trabajo de la componente de la aceleración tangencial, se invierte en el cambio de frecuencia (redshift/blueshift),

$$\frac{dW_t}{2} = \frac{1}{2} \vec{F}_t \cdot d\vec{x} = h df.$$

El factor 1/2 hace referencia al hecho de que la onda electromagnética es una onda transversal; esto es, tiene dos planos de polarización ortogonales^[7], y cada plano absorbe la mitad de la energía disponible, dando,

$$\frac{dW_t}{2} = \frac{1}{2} m \vec{a}_t \cdot d\vec{x} = h df.$$

Como proyectamos la aceleración tangencial sobre la dirección de movimiento, podemos cambiar la aceleración tangencial por la aceleración sin alterar el resultado,

$$\frac{1}{2} m \vec{a} \cdot d\vec{x} = h df.$$

y sustituir la expresión para la masa,

$$\frac{1}{2} \frac{hf}{c_m^2} \vec{a} \cdot d\vec{x} = h df.$$

De donde desaparece la constante de Planck.

$$\frac{1}{2c_m^2} \vec{a} \cdot d\vec{x} = \frac{df}{f}.$$

Ahora sustituimos en ella la expresión para el redshift,

$$\frac{1}{2c_m^2} \vec{a} \cdot d\vec{x} = -\frac{dz}{1+z}.$$

Esta ecuación la podemos integrar a lo largo de un camino; si invertimos los miembros de la ecuación para dejar el redshift a la izquierda, y mantenemos el menos a la derecha,

$$\int \frac{dz}{1+z} = \frac{-1}{2c_m^2} \int \vec{a} \cdot d\vec{x}.$$

Donde la expresión de la derecha representa el trabajo de las fuerzas (por unidad de masa).

Supongamos que tenemos fuerzas conservativas y no conservativas. Las conservativas las podemos cambiar por su diferencia de potencial a lo largo del camino,

$$\ln|1+z| = \frac{\Delta U - W_{FNC}}{2c_m^2}.$$

O,

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U - W_{FNC}}{2c_m^2}\right) - 1.$$

Que no necesita constantes de integración, porque cuando el trabajo de las fuerzas es cero, el redshift es cero también.

Con,

$$W_{FNC} = \int \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{x},$$

o,

$$\frac{dW_{FNC}}{dt} = \vec{F}_{NC} \cdot \vec{v},$$

Lo que resulta mas sencillo para el caso en cuestión.

Para el caso particular en que no hay fuerzas no conservativas o no realizan trabajo,

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U}{2c_m^2}\right) - 1.$$

Que es el resultado que concuerda con el experimento de Pound & Sneider.

Nótese que la expresión en términos de la velocidad de la luz queda,

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) - 1.$$

Anexo II: Incremento de potencial sobre la superficie terrestre

Vamos a calcular el incremento de potencial entre la superficie de la tierra y una altura por encima. Si h es la altura y R_T el radio de la tierra,

$$\Delta U = GM \left(\frac{-1}{R_T + h} + \frac{1}{R_T} \right).$$

Si sacamos el radio factor común, y desarrollamos el término entre paréntesis teniendo en cuenta que el radio es mucho mayor que la altura ($R_T \gg h$),

$$\Delta U = \frac{GM}{R_T} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{h}{R_T}} \right) \approx \frac{GM}{R_T} \frac{h}{R_T}.$$

Introduciendo la definición de la gravedad terrestre,

$$g = \frac{GM}{R_T^2},$$

queda,

$$\Delta U = gh.$$

Anexo III: Expresión explícita de la variación de la velocidad

Usaremos las expresiones,

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}. \quad (2)$$

Que, en función del cuadrado del factor de Lorentz,

$$\gamma^2 = 1 + \frac{v^2 \gamma^2}{c^2}. \quad (3)$$

Junto con la variación del factor de Lorentz con el tiempo,

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2} (v_x \dot{v}_x + v_y \dot{v}_y + v_z \dot{v}_z). \quad (4)$$

Partimos de la expresión de la cantidad de movimiento relativista, donde vamos a obviar la masa,

$$\frac{d}{dt} (\gamma \vec{v}) = \vec{a}.$$

Para la componente x,

$$\frac{d}{dt} (\gamma v_x) = a_x.$$

Desarrollando,

$$\frac{d\gamma}{dt} v_x + \gamma \frac{dv_x}{dt} = a_x.$$

Sustituyendo (4),

$$\frac{\gamma^3}{c^2} (v_x^2 \dot{v}_x + v_x v_y \dot{v}_y + v_x v_z \dot{v}_z) + \gamma \dot{v}_x = a_x.$$

Para las otras componentes,

$$\frac{\gamma^3}{c^2} (v_x v_y \dot{v}_x + v_y^2 \dot{v}_y + v_y v_z \dot{v}_z) + \gamma \dot{v}_y = a_y,$$

$$\frac{\gamma^3}{c^2} (v_x v_z \dot{v}_x + v_y v_z \dot{v}_y + v_z^2 \dot{v}_z) + \gamma \dot{v}_z = a_z.$$

Dando en forma de matriz (simétrica),

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma^2 v_x^2}{c^2} & \frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_y & \frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_z \\ \frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_y & 1 + \frac{\gamma^2 v_y^2}{c^2} & \frac{\gamma^2}{c^2} v_y v_z \\ \frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_z & \frac{\gamma^2}{c^2} v_y v_z & 1 + \frac{\gamma^2 v_z^2}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma}.$$

Para invertir la matriz 'A' empezamos por calcular el determinante,

$$|\bar{\bar{A}}| = \left(1 + \frac{\gamma^2 v_x^2}{c^2}\right) \left(1 + \frac{\gamma^2 v_y^2}{c^2}\right) \left(1 + \frac{\gamma^2 v_z^2}{c^2}\right) + 2 \frac{\gamma^6}{c^6} v_x^2 v_y^2 v_z^2 - \left(1 + \frac{\gamma^2 v_y^2}{c^2}\right) \frac{\gamma^4}{c^4} v_x^2 v_z^2 - \left(1 + \frac{\gamma^2 v_x^2}{c^2}\right) \frac{\gamma^4}{c^4} v_y^2 v_z^2 - \left(1 + \frac{\gamma^2 v_z^2}{c^2}\right) \frac{\gamma^4}{c^4} v_x^2 v_y^2,$$

$$|\bar{\bar{A}}| = \left(1 + \frac{\gamma^2}{c^2} (v_x^2 + v_y^2) + \frac{\gamma^4}{c^4} v_x^2 v_y^2\right) \left(1 + \frac{\gamma^2 v_z^2}{c^2}\right) - \frac{\gamma^4}{c^4} (v_x^2 v_z^2 + v_y^2 v_z^2 + v_x^2 v_y^2) - \frac{\gamma^6}{c^6} v_x^2 v_y^2 v_z^2,$$

$$|\bar{\bar{A}}| = 1 + \frac{\gamma^2 v^2}{c^2},$$

Pero por (3),

$$|\bar{\bar{A}}| = \gamma^2.$$

Ahora calculamos los adjuntos,

$$A_{xx} = \left(1 + \frac{\gamma^2 v_y^2}{c^2}\right) \left(1 + \frac{\gamma^2 v_z^2}{c^2}\right) - \frac{\gamma^4}{c^4} v_y^2 v_z^2 = 1 + \frac{\gamma^2}{c^2} (v_y^2 + v_z^2),$$

$$A_{xy} = \frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_y \left(1 + \frac{\gamma^2 v_z^2}{c^2}\right) - \frac{\gamma^4}{c^4} v_x v_y v_z^2 = \frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_y,$$

$$A_{xz} = \frac{\gamma^4}{c^4} v_x v_z v_y^2 - \left(1 + \frac{\gamma^2 v_y^2}{c^2}\right) \frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_z = -\frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_z,$$

$$A_{yz} = \frac{-\gamma^4}{c^4} v_y v_z v_x^2 + \left(1 + \frac{\gamma^2 v_x^2}{c^2}\right) \frac{\gamma^2}{c^2} v_y v_z = \frac{\gamma^2}{c^2} v_y v_z,$$

Los restantes son análogos y queda el sistema con la matriz invertida,

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\gamma^2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma^2}{c^2} (v_y^2 + v_z^2) & -\frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_y & -\frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_z \\ -\frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_y & 1 + \frac{\gamma^2}{c^2} (v_x^2 + v_z^2) & -\frac{\gamma^2}{c^2} v_y v_z \\ -\frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_z & -\frac{\gamma^2}{c^2} v_y v_z & 1 + \frac{\gamma^2}{c^2} (v_x^2 + v_y^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma}.$$

Haciendo el producto de la matriz invertida con el vector e introduciendo el valor del determinante en el vector resultante,

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma^2} a_x + \frac{v_y^2 + v_z^2}{c^2} a_x - \frac{v_x v_y}{c^2} a_y - \frac{v_x v_z}{c^2} a_z \\ -\frac{v_x v_y}{c^2} a_x + \frac{1}{\gamma^2} a_y + \frac{v_x^2 + v_z^2}{c^2} a_y - \frac{v_y v_z}{c^2} a_z \\ -\frac{v_x v_z}{c^2} a_x - \frac{v_y v_z}{c^2} a_y + \frac{1}{\gamma^2} a_z + \frac{v_x^2 + v_y^2}{c^2} a_z \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma}.$$

Cambiando el inverso del factor de Lorentz al cuadrado por (2),

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x - \frac{v^2}{c^2} a_x + \frac{v_y^2 + v_z^2}{c^2} a_x - \frac{v_x v_y}{c^2} a_y - \frac{v_x v_z}{c^2} a_z \\ -\frac{v_x v_y}{c^2} a_x + a_y - \frac{v^2}{c^2} a_y + \frac{v_x^2 + v_z^2}{c^2} a_y - \frac{v_y v_z}{c^2} a_z \\ -\frac{v_x v_z}{c^2} a_x - \frac{v_y v_z}{c^2} a_y + a_z - \frac{v^2}{c^2} a_z + \frac{v_x^2 + v_y^2}{c^2} a_z \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma}.$$

Y, simplificando términos,

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x - \frac{v_x^2}{c^2} a_x - \frac{v_x v_y}{c^2} a_y - \frac{v_x v_z}{c^2} a_z \\ -\frac{v_x v_y}{c^2} a_x + a_y - \frac{v_y^2}{c^2} a_y - \frac{v_y v_z}{c^2} a_z \\ -\frac{v_x v_z}{c^2} a_x - \frac{v_y v_z}{c^2} a_y + a_z - \frac{v_z^2}{c^2} a_z \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma}.$$

Extrayendo factor común cada componente de la velocidad (en la primera la x, la segunda la y, la tercera la z),

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x - \frac{a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z}{c^2} v_x \\ a_y - \frac{a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z}{c^2} v_y \\ a_z - \frac{a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z}{c^2} v_z \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma}.$$

Que adquiere la representación vectorial,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m\gamma} \left(\vec{F} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F})}{c^2} \vec{v} \right).$$

Anexo IV: Combinación de fuerzas gravitatorias y electromagnéticas

Vamos a dar un esbozo de cómo podrían establecerse las EDOs; ya que cada fuerza impone su restricción en un rango de velocidades distinto. El problema aparecería para velocidades superiores a la del gravitón. Las ecuaciones quedarían,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v},$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m\gamma'} \left(\vec{F}_g - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F}_g)}{c_m^2} \vec{v} + \vec{F}_e - \frac{2(\vec{v} \cdot \vec{F}_e)}{c^2} \vec{v} \right).$$

Donde el vector 'Fg' son las fuerzas gravitatorias y 'Fe' las electromagnéticas. El dos que aparece con la restricción de las fuerzas electromagnéticas es debido a que, como hemos indicado, en campo gravitatorio la velocidad máxima es la del gravitón, y el problema precisa de escalado temporal.

Pero la restricción para las fuerzas electromagnéticas precisa que pongamos la velocidad real del objeto, no la del gravitón, por lo que a cada término de velocidad lo acompaña un factor raíz de dos. Este dos podemos absorberlo dentro de la velocidad de la luz para dar,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\vec{v}}{\gamma'},$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m\gamma'} \left(\vec{F}_g - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F}_g)\vec{v}}{c_m^2} + \vec{F}_e - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F}_e)\vec{v}}{c_m^2} \right).$$

O,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\vec{v}}{\gamma'},$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m\gamma'} \left(\vec{F} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F})\vec{v}}{c_m^2} \right).$$

Con el vector 'F' agrupando todas las fuerzas, y las expresiones de relatividad de campo gravitatorio. Las expresiones de relatividad para campo fotónico sólo se usarían cuando no exista campo gravitatorio.

Es una propuesta tentativa, a la espera de encontrar algún test con que verificarla.

Anexo V: Integración del retardo shapiro en viking landers

La ecuación que vamos a integrar es,

$$\frac{d\Delta t}{dt} = -\frac{\Delta U}{c_m^2}.$$

Para el camino de ida, el potencial toma la forma,

$$U = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (X_e - c_m t)^2}}.$$

Para el camino de vuelta, el potencial toma la forma,

$$U = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (X_p - c_m t)^2}}.$$

El potencial de referencia se calcula desde el punto de vista de la tierra,

$$U_o = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + X_e^2}}.$$

Vamos a resolver el camino de ida, aplicamos un cambio de variables,

$$\Delta t_{ida} = \frac{GM}{c_m^2} \int_0^{\frac{R_{ep}}{c_m}} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + (X_e - c_m t)^2}} - \frac{1}{r_e} \right) dt = \left(\frac{\tau = X_e - c_m t}{d\tau = -c_m dt} \right) = \frac{GM}{c_m^3} \int_{-X_p}^{X_e} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + \tau^2}} - \frac{1}{r_e} \right) d\tau,$$

sabiendo que,

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{R^2 + \tau^2}} = \ln|\tau + \sqrt{\tau^2 + R^2}|.$$

resulta,

$$\Delta t_{ida} = \frac{GM}{c_m^3} \left(\ln \left| \frac{X_e + r_e}{-X_p + r_p} \right| - \frac{R_{ep}}{r_e} \right),$$

Para el camino de vuelta,

$$\Delta t_{vuelta} = \frac{GM}{c_m^2} \int_0^{\frac{R_{ep}}{c_m}} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + (X_p - c_m t)^2}} - \frac{1}{r_e} \right) dt = \left. \frac{\tau = X_p - c_m t}{d\tau = -c_m dt} \right\} = \frac{GM}{c_m^3} \int_{-X_e}^{X_p} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + \tau^2}} - \frac{1}{r_e} \right) d\tau,$$

obtenemos,

$$\Delta t_{vuelta} = \frac{GM}{c_m^3} \left(\ln \left| \frac{X_p + r_p}{-X_e + r_e} \right| - \frac{R_{ep}}{r_e} \right),$$

Sumando ambos tiempos,

$$\Delta t = \frac{GM}{c_m^3} \left(\ln \left| \frac{(r_e + X_e)(r_p + X_p)}{(r_e - X_e)(r_p - X_p)} \right| - \frac{2R_{ep}}{r_e} \right).$$

Obtenemos el retardo total.

***** English version *****

Introduction

Special field relativity (SRF) arises from reviewing general relativity experiments, trying to explain them with a 'slightly modified' special relativity (SR). The current approach (because it has had many changes of approach, which are evident in previous documents) that is consistent with the 6 'type' experiments reviewed, requires a radical change in the way of seeing the equations. On the one hand, the restriction of the tangential component of the acceleration we conclude depends on the type of field in consideration, while the Lorentz factor (generalized), depends on the particle on which the calculation is made.

Summarizing, it is concluded that gravitons have a different speed than photons, but their same range; that is, they have their own wave equation and their own 'special relativity', simply by changing the speed of light in the special relativity formulas with that of gravitons. The speed of gravitons is determined in the adjustment with the experiments.

We will need another modification in the equations of motion: by also changing the way in which the Euler-Lagrange equation is written, the form of the relativistic Lagrangian is maintained.

Lagrangian: equations of motion

The ordinary differential equations (ODEs) of the particle motion become,

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{x}}{dt} &= \frac{\vec{v}}{\gamma}, \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{1}{m\gamma} \left(\vec{F} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F})\vec{v}}{c^2} \right).\end{aligned}\tag{5}$$

Note the appearance of the Lorentz factor in both equations. This is the dynamical equation for the particle in observer time.

It is obtained from the relativistic Lagrangian,

$$L = \frac{-c^2}{\gamma} - V.$$

Where V is the potential from which the forces are derived.

Using the Euler-Lagrange equation,

$$-\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) = 0, \quad q_i = \{x, y, z\}, \quad v_i = \{v_x, v_y, v_z\}$$

The difference is that the velocity appearing in the Lagrangian is the particle's velocity in proper time, and is derived with respect to that 'proper velocity'. But the time t represents the observer's time.

This Lagrangian leads us to the mechanical equation,

$$\frac{d(\gamma\vec{v})}{dt} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

We can solve this in terms of speed, leaving equations (5), which we indicated at the beginning.

Note that the Lorentz factor in this equation serves two purposes. On the one hand, to leave the equations as in (5) by expressing the speed explicitly. And on the other hand, it serves as a time scaling factor. Hence part of the confusion in the interpretation of it.

The proper time equations would be,

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{x}}{d\tau} &= \vec{v}, \\ \frac{d\vec{v}}{d\tau} &= \frac{1}{m} \left(\vec{F} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F})\vec{v}}{c^2} \right).\end{aligned}$$

The first is the proper velocity; that is, the velocity of the particle measured in proper time. While the velocity vector v divided by the Lorentz factor represents the velocity in observer time.

To solve a dynamical system, such as the solar system, we must express all the equations in observer time. Observer time simply allows us to express the equations of motion with respect to a common reference system, with respect to which the velocities and positions of each particle have been measured, and the reference potential has been referred to.

In the case of photon motion in a gravitational field, the reference system that defines the observer's time sees the photon in its transit traveling at the speed of the graviton and requires scaling to express the proper time of the system that performs a time measurement. This will become a little clearer in the following section.

The expression of the equations of special relativity with the explicit speed was initially found in reference [1], but it can be reached by reasoning only with the motion of the photon and extrapolating the results to all particles^[3]. In ‘Annex III: Explicit expression of speed variation’ a demonstration of how the explicit expression is obtained is included.

Speed regimes

The equations we have indicated have been assumed in special relativity in a photon field and c represents the speed of the photons. If we are solving the equations in a gravitational field, we must express the equations in special relativity in a gravitational field and c is the speed of the gravitons (c_m), which is determined to be equal to $c_m = c/\sqrt{2}$; that is, about 200,000 km/s. In the calculations, we take for c the value,

$$c = 299,792,458 \text{ m/s.}$$

To simulate particles moving in a gravitational field faster than the speed of gravitons, we will resort to a scaling in observer time, and we will assume that the particles move at the maximum speed of the gravitational field, which is the speed of the graviton.

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma_g}$$

With the Lorentz factor relating both fields,

$$\gamma_g = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{c_m}{c}\right)^2}} = \sqrt{2}.$$

And τ being the proper time of the reference system that makes a measurement,

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Note that in the proper time of the reference system, the speed of the photon will be measured equal to c . Because, although in the observer's time it will be seen that the light takes longer to travel a given distance, when converting to the proper time of the system that makes the time measurement, we have to reduce the observer's time by the square root factor of two, which makes the time taken by the light to travel the distance correct.

Generalized Lorentz factor

Each type of particle has its own generalized Lorentz factor. The Lorentz factor in the differential equations (5) only changes the clockwise law of motion, but not the trajectory of the particle. We define it based on the experiment in question, guided by the expression of general relativity.

The time increment is expressed as the difference between the proper time of the system that performs the measurement, minus the observer's time, $\Delta t = \tau - t$.

Bosons (photons and gravitons)

Based on the Shapiro delay experiment we established (incorrectly),

$$\frac{d\Delta t}{dt} = -z.$$

Where we (incorrectly) defined the redshift (z) by,

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right) - 1.$$

Analyzing the Shapiro delay experiment and SN1987A, we deduce the correct definition for the time increment,

$$\frac{d \Delta t}{dt} = -\frac{\Delta U}{c_m^2}.$$

With the reference of the potential at the origin of the reference system with respect to which we integrate the equation (specifically, on the reference system that performs the time measurement). And we maintain for the redshift the expression (see Annex I: Redshift equation),

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) - 1.$$

The reference for the potential would be taken at the beginning of the trajectory (position at t=0) along which we wish to calculate the redshift.

If the experiment we are going to predict is for gravitons,

$$\Delta t = \tau - t.$$

If, instead, we are going to do the calculation for photons,

$$\Delta t = \tau - \frac{t}{\sqrt{2}}.$$

And the problem requires temporal scaling.

The expression for the proper time equation of the measurement system defines the generalized Lorentz factor; respectively,

$$\begin{aligned} \frac{d \tau}{dt} &= 1 - \frac{\Delta U}{c_m^2}, \\ \frac{d \tau}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\Delta U}{c_m^2}. \end{aligned}$$

In both cases the generalized Lorentz factor (γ') is defined by,

$$\frac{d \tau}{dt} = \frac{1}{\gamma'}.$$

Obviously, the equation for gravitons has not been proven and is an extension of the photon case.

Fermions

Based on the Hafele-Keating type experiment of the 'Maryland clocks' (discussed in its section) we established the time increment as,

$$\frac{d \Delta t}{dt} = \frac{\Delta U}{c^2} - \frac{v^2 - v_o^2}{2c^2}.$$

Or, assuming velocities less than that of the graviton,

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \frac{\Delta U}{c^2} - \frac{v^2 - v_0^2}{2c^2}.$$

Which we are going to extrapolate based on the results with bosons a,

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \frac{\Delta U}{c^2} - (\gamma - 1).$$

With the Lorentz factor defined on the speed of photons,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Which gives the generalized Lorentz factor,

$$\frac{1}{\gamma'} = \frac{\Delta U}{c^2} - \gamma + 2.$$

Or,

$$\gamma' = \frac{1}{2 - \gamma + \frac{\Delta U}{c^2}}.$$

This allows that when the potential increase is zero,

$$\gamma' = \frac{1}{2 - \gamma},$$

and, in the low speed limit, the generalized Lorentz factor corresponds to the usual Lorentz factor,

$$\gamma' \simeq \gamma \simeq 1 + \frac{v^2}{2c^2}.$$

As you might expect.

For speeds greater than that of the graviton, and close to that of light (neutrinos), we can use,

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\Delta U}{c^2} - (\gamma - 1).$$

Note that the potential reference, like the reference with respect to which the Lorentz factor speed is defined, are made based on the reference system with respect to which we integrate the equation.

General relativity experiments

We will analyze the following:

1. Deflection of photons in gravitational field.
2. Gravitational redshift: Pound & Sneider.
3. Shapiro delay: viking landers.
4. Precession of Mercury's perihelion.
5. Gravity probe b.

6. Temporal variation of clocks in different reference frames (Hafele-Keating type): University of Maryland clock experiment.

The details of each experiment are found in their corresponding reference, except for the last one. Here we are only going to consolidate the equations, which have been changing. All the experiments were carried out under the influence of the gravitational field, so we will use gravitational special relativity. That is, we must use the relativistic relations with the speed of the gravitons (except for the generalized Lorentz factor, which depends only on the type of particle in question). The equations (5) with this approach are,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\vec{v}}{\gamma'},$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m \gamma'} \left(\vec{F} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F}) \vec{v}}{c_m^2} \right).$$

Where, as we have indicated, the generalized Lorentz factor is only used for differential equations. For the expressions of the Lagrangian, the energy and the rest, we use the (normal) Lorentz factor according to the type of field (gravitational uses the speed of gravitons and electromagnetic that of photons).

In conditions of ambiguity between which Lorentz factor to use (generalized or normal), remember that the generalized Lorentz factor is defined based on the equation of proper time with respect to the observer's time; therefore, when converting the ODE (which gives the trajectory) to proper time, all the generalized Lorentz factors must be simplified. Obviously, in the (total) derivation of magnitudes with respect to the observer's time, a generalized Lorentz factor will always appear. Also, remember that the trajectory of a particle cannot depend on a generalized Lorentz factor, they only intervene in the time equation (how that trajectory is traveled).

The generalized Lorentz factor controls the speed at which a system is observed; that is, whether we view it in fast motion or slow motion. Nobody expects that when watching a car race in fast or slow motion, the cars will change trajectory.

Note also that the speed limitation (the reason why we do time scaling in a gravitational field) is given by the form of the ODE of the speed. If the particle equals or exceeds the speed of the graviton, by subtracting all its tangential component from the force vector 'F', said force cannot increase the speed of the particle (the speed is limited by the type of field). It would also be incorrect to introduce a speed greater than that of the field because we would be subtracting more tangential component from the force 'F' than it has.

The experiments and their influence on the special relativity field equations are summarized in the following table.

Result on the type of experiment	Particle: boson	Particle: fermion
Generalized Lorentz factor	Shapiro delay: Viking landers, SN1987A	Hafele-Keating type, SN1987A
Graviton velocity and the role of the generalized Lorentz factor as a time scale factor	Light bending in gravitational field	Precession of Mercury's perihelion
Redshift expression	Pound & Sneider	Precession of Mercury's perihelion
Expressions of the field equations	-	Gravity probe B

Experiments with bosons (photons)

The experiments with bosons are calculated with the proper time equations (i.e. the generalized Lorentz factor does not come into play). If the experiment requires a time measurement, such as the Shapiro delay, we will use the time equation τ , which is not necessary in the other experiments.

The first three experiments are explained with the same set of ordinary differential equations, which are,

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -G_r (x(c_m^2 - p^2) - y p q), \\ \dot{q} &= -G_r (-x p q + y(c_m^2 - q^2)), \\ \dot{x} &= p, \\ \dot{y} &= q, \\ \dot{\tau} &= \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m}\right).\end{aligned}$$

with,

$$\begin{aligned}G_r &= \frac{GM}{c_m^2} \frac{1}{[x^2 + y^2]^{3/2}}, \\ U &= \sum_i \frac{-GM}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}},\end{aligned}$$

Where the potential reference is taken at the origin of the system that measures proper time.

And the redshift z ,

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) - 1.$$

Where the increment of U refers to the potential difference between the point of origin and the destination of the photon. It should be noted that the potential reference for the redshift equation is different from that for the generalized Lorentz factor, as we have indicated.

Remembering that we are in gravitational SR and c_m is the speed of the gravitons.

Note that it is possible to eliminate the observer's time from the problem, although the equations obtained do not maintain the form of (5).

Deflection of photons in gravitational field

This experiment measures the deflection of photons when they transit in the vicinity of a massive object^{[2],[3]}. It is a very controversial test because, although several experiments have been carried out, such as the one by Eddington that made Einstein world famous, the most recent (and exact) experiments are carried out with astronomical VLBI measurements. For example, with the transit of the quasar 3C279 as it passes the sun. A measurement that is not without problems, since apparently orienting an antenna of those dimensions towards the sun brings several technical difficulties. Not to mention the difficulties that the measurement already entails, since in order to measure a deflection, it has to be compared where the object is, with where it should be; and all of this with great precision.

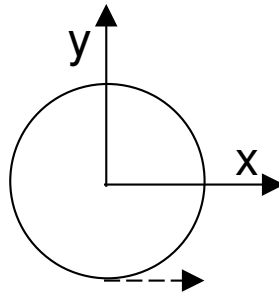
There are other experiments that measure the deflection of light using Jupiter's gravity, but they are measurements of milli-arcsecond deflections, and could be subject to other additional effects. At the time this experiment was analyzed, there was no gamma wave test (Fermi LAT) with the precision required to confirm this test.

For all these reasons, we are going to perform the test with the reference of the result of general relativity, which predicts a deflection of $\delta=1.7497$ arcseconds, twice that predicted using only Newton's gravity. This predicted value, where the deflection is maximum, is found only for photons that pass through the vicinity of the sun tangentially to its surface and through its equator.

This experiment is solved with the first 4 of the ODEs and the initial conditions,

$$\begin{aligned} p &= c_m, \\ q &= 0, \\ x &= 0, \\ y &= -R. \end{aligned}$$

R being the radius of the sun.



We assume that the photon initially advances in the direction of the x axis, and we calculate its deflection when it stops evolving (it has gone far enough away from the gravitational influence). We multiply the result by two, because we have only made half a transit. This procedure is the one followed by Soldner in a similar calculation and greatly simplifies the problem. The data from the Sun,

$$\begin{aligned} R &= 6.963 \times 10^8 \text{ m}, \\ GM &= 1.32712440018 \times 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2. \end{aligned}$$

We calculated the deflection with,

$$\delta = 2 \operatorname{atan}\left(\frac{q}{p}\right).$$

Which gives a deflection $\delta=1.7497$ arcseconds.

If we use the solution to the two-body problem for hyperbolic trajectories, the predicted result is^[9],

$$\delta = \frac{2GM}{Rv^2}.$$

Substituting the velocity (v) of the gravitons, we obtain the same prediction as GR, if we express the result in terms of the velocity of the photons,

$$\delta_{GR} = \frac{4GM}{Rc^2}.$$

Which gives exactly the same result, $\delta=1.7497$ arcseconds.

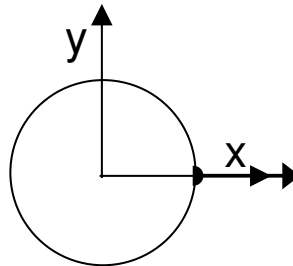
Gravitational redshift: Pound-Sneider experiment

Another test with a lot of controversy is this one. We trust in the result of this last one, which we hope will be the most accurate. In this experiment, the redshift (frequency shift towards red) of photons is measured when they move against the Earth's gravitational field^{[2],[3]}. Colloquially speaking, photons move towards the sky.

This experiment is solved with the first 4 of the ODEs and the redshift (algebraic) and the initial conditions,

$$\begin{aligned} p &= c_m, \\ q &= 0, \\ x &= R, \\ y &= 0. \end{aligned}$$

R being the radius of the sun.



We make the direction of departure of the photon coincide with the x-axis. With the origin of the coordinates at the center of the gravitational mass, of mass M and radius R . The photon will depart from its surface parallel to gravity.

The system of equations only says that the ray leaves the surface of the earth and goes in a straight line. And it is the expression for the redshift that predicts the result (see Annex I: Redshift equation).

Combining the redshift equation,

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) - 1.$$

With the increase in potential given in 'Annex II: Increase in potential on the Earth's surface',

$$z = \exp\left(\frac{gh}{c^2}\right) - 1.$$

It results in the redshift approximation,

$$z \simeq \frac{gh}{c^2},$$

When performing the experiment, both the ascent path (redshift) and the descent path (blueshift, therefore negative) were measured and then the second was subtracted from the first; therefore the reported z_{exp} is double the value of the redshift that we are going to calculate (z_{teo}), so we will multiply it by two to compare the result,

$$z_{\text{exp}} = z_{\text{redshift}} - z_{\text{blueshift}} = 2z_{\text{redshift}},$$

Substituting the values from the Pound & Snider experiment (1965),

$$\begin{aligned} h &= 22.5552 \text{ m (74 pies)}, \\ g &= 9.82 \text{ m/s}^2, \\ c &= 299,792,458 \text{ m/s}, \end{aligned}$$

we have,

$$\begin{aligned} z_{\text{exp}} &= 4.905 e^{-15}, \\ z_{\text{teo}} &= 4.9296 e^{-15}. \end{aligned}$$

Where z_{exp} is the value reported in Pound's paper and z_{teo} is the value we have calculated. Despite the difference with the value obtained by Pound, the expression we evaluated gives the same as the general relativity result. See reference [3] for details.

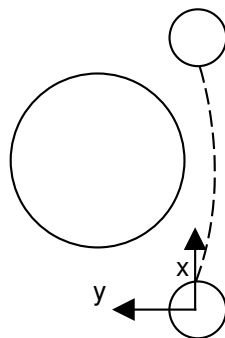
Shapiro delay: viking landers experiment

In this experiment, the round trip time of a photon between Earth and Mars is predicted when it passes through the vicinity of the Sun^[4].

In this case we use all the ODEs, and define the reference potential for the generalized Lorentz factor, on the surface of the earth.

$$U_o = U_o(R_e, 0)$$

Where R_e is the radius of the earth.



As shown in the figure, we assume that the ray (dashed line) leaves the Earth's surface at the point $(R_e, 0)$ and reaches Mars at the point $(R_{ep}-R_m, 0)$. R_m and R_e are the radius of Mars and the radius of Earth respectively; and R_{ep} is the distance separating the barycenters (Earth-Mars). See Figure 2.

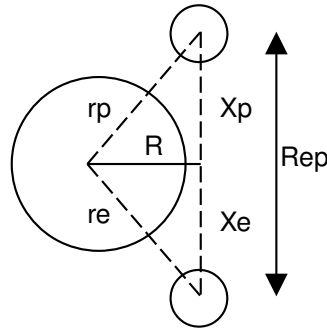


Figure 2: Distance diagram

This system is integrated with the conditions at $t=0$ for the outbound path,

$$\begin{aligned} p &= \delta_x, \\ q &= \delta_y, \\ x &= R_e, \\ y &= 0, \\ \tau' &= 0. \end{aligned}$$

The initial velocity vector (δ_x, δ_y) must be adjusted so that when $x=R_{ep}-R_m, y=0$ is also true (values at the time of arrival) And its magnitude must be $\sqrt{(\delta_x^2, \delta_y^2)}=c_m$ (the speed of the graviton)

For the return path, the initial conditions are,

$$\begin{aligned} p &= \delta_x', \\ q &= \delta_y', \\ x &= R_{ep} - R_m, \\ y &= 0, \\ \tau' &= 0. \end{aligned}$$

and the initial velocity vector (δ_x', δ_y') must be adjusted so that when $x=R_e, y=0$ is also true.

The deflection required to achieve the desired path is very small relative to the x-axis in both cases (about one arcsecond). For the outward path, the signs of the initial velocity vector are $(+,-)$ and for the return path $(-,-)$. The angle of departure does not coincide on the outward and return paths, because the sun is not halfway between Earth and Mars.

Astrometric data were taken from Horizons (data in km), NASA's JPL service. Resulting in,

re	1.476451407E+08
rp	2.268514296E+08
Rep	3.744933357E+08
R	7.606447132E+05

The delay predicted by general relativity is 243 microseconds, and the one obtained in the calculation is 260.84 microseconds (with time correction for the Earth's speed)

The bending of light alone introduces a correction in the Shapiro delay of the order of 19.33 nanoseconds in this experiment, so it is negligible. Doing the calculation assuming that the light ray traces a straight line gives a result only slightly worse, and greatly simplifies the calculations.

More precision can also be sacrificed, with a similar result, if only the presence of the sun is considered; in this case, a hand integration is possible. Obtaining, only for the Shapiro delay term,

$$\Delta t'_{ida} = \frac{GM}{c_m^3} \left(\ln \left| \frac{r_e + X_e}{r_p - X_p} \right| - \frac{R_{ep}}{r_e} \right) = 136.75 \mu s,$$

$$\Delta t'_{vuelta} = \frac{GM}{c_m^3} \left(\ln \left| \frac{r_p + X_p}{r_e - X_e} \right| - \frac{R_{ep}}{r_e} \right) = 136.75 \mu s,$$

$$\Delta t' = \frac{GM}{c_m^3} \left(\ln \left| \frac{(r_e + X_e)(r_p + X_p)}{(r_e - X_e)(r_p - X_p)} \right| - \frac{2R_{ep}}{r_e} \right) = 273.50 \mu s$$

The time it takes for the photon to make the round trip, approximated by a straight line is,

$$t_{ST} = \frac{2R_{ep}}{c} = 2498.35061369 s.$$

And the delay obtained with the correction for the speed of the earth, given the time t_{ST} ,

$$\Delta t = \frac{(t_{ST} + \Delta t')}{\gamma} - t_{ST} = \frac{\Delta t'}{\gamma} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) t_{ST} = 260.84 \mu s.$$

The form of the calculation does differ from that used in NASA references. See reference [4] for links to those tests. For the 'Viking Landers' experiment we have,

$$\Delta t = \frac{4GM}{c^3} \ln \left| \frac{r_e + r_p + R_{ep}}{r_e + r_p - R_{ep}} \right| = 243.37 \mu s.$$

While for the Cassini probe experiment,

$$\Delta t = \frac{4GM}{c^3} \ln \left| \frac{4r_p r_e}{R^2} \right| = 243.37 \mu s.$$

Both giving the same result and not including any correction for the speed of the earth.

Experiments with fermions

Precession of Mercury's perihelion

The precession of the perihelion of Mercury refers to a turning motion of the ellipse that Mercury describes around the Sun. This ellipse rotates in the 'plane of motion' of Mercury with an axis that passes through the Sun (which is at a focus of said ellipse).

The magnitude that varies is the angle formed by the semi-major axis of the ellipse between two instants of time (for example, it can be defined in other ways)

This test is complex to perform and requires a lot of data from Horizons and several adjustments. However, the equations are simple to set up, but computationally expensive (fortran was used)

In short, we are going to define the precession angle by calculating the instant in which the perihelion occurs, integrating the n-body equations for celestial bodies from the Sun to Neptune^[5]. If the celestial body is a system with moons, we take the barycenter of the system (only the Sun, Mercury and Venus are excluded from this)

The value that exists in the literature for the precession of the perihelion does not correctly represent the temporal evolution (because it is not really a linear evolution) and trying to obtain it requires a post-processing of the results of each perihelion that is excessively complex, in my opinion (see the JPL results; the reference to the JPL document can be found in the detailed document of this experiment^[5]).

It is true, and inexpensive, that the least squares adjustment shows results much closer to what is expected, so we will use this metric for the results obtained.

Since we cannot obtain the theoretical value, we must check the result using another procedure, and for this we use the JPL DE405 ascii kernel. That is, we repeat the simulation of the time evolution using the data from the NASA kernel and adjust the evolution with least squares, as we did with the results of the integration of the n-body equations.

To obtain the correct result, it is necessary to add a term in the Mercury equations that takes into account the gravitomagnetic field induction of the Sun on Mercury (Faraday's law)

Although the relativistic effects, evaluated by looking at the difference between the energy predicted by Newton's Lagrangian versus that of special relativity of fields, are only noticeable in celestial bodies from Mercury to Jupiter inclusive, the simulation can be performed by setting all the (generalized) Lorentz factors to one without significant loss of resolution. The important effects are the modification of the tangential force, and the gravitational field induction; the latter only in the case of Mercury.

If we run the simulation for 100 years, keeping a resolution of 0.1 seconds in the location of the perihelion, we obtain the following table,

Type of simulation	Arcseg
Only with Newton's forces	515.66
Terms of special relativity field equations(SRF)	28.88
Faraday induction term (sun to mercury only)	14.04
	558.58

The value obtained with the ascii kernel is 558.51 arcsec with a resolution of 0.6 seconds (the maximum) at the perihelion location (EphemUtil with C code cloned from the fortran code). The theoretical GR contribution would be 42.98 arcseconds; SRF+Faraday obtains 42.92.

Mercury completes 416 perihelia in total.

The dates of the last perihelion also do not end up matching and are more similar to the values provided by the kernel than to the result provided by Horizons.

Type of simulation	Resolution (seconds)	Last perihelion date (@416)
Horizons data	10	Sun Feb 17 02:28:50 2013
DE405 ascii kernel with EphemUtil in C	0.6	Sun Feb 17 03:27:44 2013
Fortran code (real*16)	0.1	Sun Feb 17 03:14:20 2013

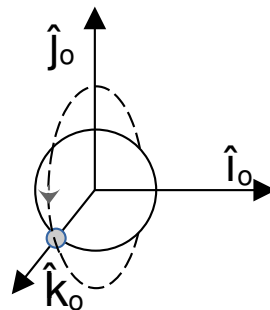
The 2000-year simulation adds approximately 10 more arcseconds without reaching the theoretical value (574.10 ± 0.65 arcsec)

Gravity probe b

The ‘gravity probe b’ or ‘gbp’ is a test that tests the influence of the Earth’s gravitomagnetic field on two effects called ‘geodetic precession’ and ‘frame dragging precession’. The first refers to the effect of the Earth’s gravitational field on an object orbiting around it, it is a purely relativistic effect (of special relativity); and the second refers to the effect of the Earth’s gravitomagnetic field on an object (not necessarily in motion). The test object is a gyroscope and the effect produced on it is the precession of the axis of rotation^[6].

This test presents a calculation of some complexity, but it is the only one that we can integrate by hand and obtain a closed expression easily.

We need to mathematically model the orbit of the gyroscope that circles the earth. We will suppose that the gyroscope (small sphere in the figure) is making an elliptical orbit (dashed line) around the earth; as indicated in the figure, with its initial position vector aligned with the \hat{k}_0 axis.



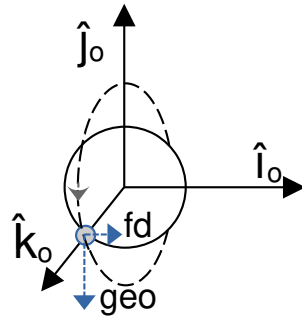
The earth's axis of rotation is aligned with the \hat{j}_0 axis, and the gyroscope's axis of rotation is aligned with the \hat{k}_0 axis at all times. In reality this is not the case, and there is a small angle with both axes that we will neglect.

As described, the gyroscope has a path that passes through the two poles consecutively.

We will assume that the path is such that the perigee (point at which the distance is the smallest to the orbited object) and the apogee (point at which the distance is the largest to the orbited object) occur in the equatorial plane of the earth, with the apogee at the initial position that we have set.

We thus have two reference systems that remain parallel; the 0 system (indicated in the figure) and the ‘g’ system (of the gyroscope; not indicated) that accompanies the gyroscope in its rotation around the earth, but keeping its coordinate axes parallel at all times to those of the 0 system.

Geodetic precession causes the rotation axis of the gyroscope to rotate along the \hat{i}_o axis, and frame-dragging precession causes it to rotate along the \hat{j}_o axis. See the following figure.



The effect of the gravitomagnetic field on the gyroscope is going to be modeled by the (gravito)magnetic dipole moment and the Larmor precession equation.

The results are listed in the table,

Precession	Measured (mas/year)	Obtained	ratio
geodetic	6601.8 ± 18.3	4399.74	1.50032
frame-dragging	37.2 ± 7.2	24.59	1.51281

We have correctly obtained the sign of the precession but in both cases the prediction has been off by a factor of about 3/2. With this in mind, a modification of the equations of gravitomagnetism is proposed.

Maxwell's equations are,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \wedge \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \vec{B} &= \nabla \wedge \vec{A}, \\ \vec{E} &= -\nabla V.\end{aligned}$$

and the analogues of the mass field,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E}_g &= -4\pi G \rho_g, \\ \nabla \cdot \vec{B}_g &= 0, \\ \nabla \wedge \vec{E}_g &= -\frac{\partial \vec{B}_g}{\partial t}, \\ \nabla \wedge \vec{B}_g &= \frac{4\pi G}{c_m^2} \vec{J}_g + \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t}, \\ \vec{B}_g &= \nabla \wedge \vec{A}_g, \\ \vec{E}_g &= -\nabla V_g.\end{aligned}$$

Change is proposed,

$$\nabla \wedge \vec{E}_g = -\frac{2}{3} \frac{\partial \vec{B}_g}{\partial t},$$

$$\nabla \wedge \vec{B}_g = \frac{6\pi G}{c_m^2} \vec{J}_g + \frac{3}{2c_m^2} \frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t}.$$

The first change is to maintain the result established in [5], and the second to make the results of this experiment fit. It is not the only possible arrangement, other authors chose to introduce coefficients in expressions such as Larmor's. See reference [6] for calculation details.

Temporal variation in different reference systems: Maryland clocks

This is a Hafele-Keating type experiment. The difference in the passage of time between two systems is calculated; under the influence of two factors: a potential difference and a speed difference. The experiment, much more controlled than the Hafele-Keating experiment, was carried out at the University of Maryland in September 1975^[8].

To measure the time difference, two synchronized atomic clocks were used. One of them is kept in a controlled flight both in height and speed. The flight time and height are listed in the table.

Time (h)	Height h (m)
5	7,620
5	9,144
5	10,668

The test lasted 15 hours and was carried out at a speed of 138 m/s (speed of the aircraft relative to the ground control centre)

As we mentioned, the relationship given in general relativity will be used,

$$\frac{d \Delta t}{dt} = \frac{\Delta U}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}.$$

With the potential referred to the ground control center. The expression for the potential increase, if h is the flight altitude and g the Earth's gravity, (see Annex II: Increase in potential on the Earth's surface),

$$\frac{\Delta U}{c^2} = \frac{g h}{c^2}.$$

For what remains,

$$\frac{d \Delta t}{dt} = \frac{g h}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}.$$

We have to integrate this equation piecewise for the 15 hours of the experiment, since the height is changing. If we do this, we get,

$$\begin{aligned}\Delta t_U &= 53.95 \text{ ns}, \\ \Delta t_y &= -5.72 \text{ ns}, \\ \Delta t &= 48.23 \text{ ns}.\end{aligned}$$

These are the values for the theoretical prediction (the first value being the contribution of the potential term, and the second being the velocity term)

The measured data were,

$$\Delta t = 52.8 - 5.7 = 47.1 \text{ ns}.$$

The constants that were used,

$$\begin{aligned}g &= 9.82 \text{ m/s}^2, \\ c &= 299,792,458 \text{ m/s},\end{aligned}$$

Predictions of the theory

The theory predicts, for example:

1. The speed of gravitons is $c_m = c/\sqrt{2}$. This could be tested by observing the rate of acceleration of the particles in successive revolutions around the accelerator circuit in a quasi-rectangular particle accelerator, arranged vertically. The energy required to keep the beam inside the accelerator in the curves of the rectangle and in the ascent against gravity would be applied; and gravity would be allowed to accelerate the beam in the descent section.
2. The trajectories of material particles under the influence of a gravitational field with velocities between that of the graviton and that of the photon are the same. To verify this, an experiment like the Shapiro delay would be needed but using massive particles at different relativistic velocities v , with $c_m \leq v < c$. It would also be very useful to measure their time delay.
3. The maximum speed that can be acquired in free fall under the action of a gravitational field is the speed of the graviton (c_m).

Annex I: Redshift equation

Looking at the form of equation (5), we notice that from the force applied to the particle, there is a part that, depending on the speed of the particle, stops having an effect on it. This tangential component is not lost, it is invested in modifying the energy of the wave associated with the particle. In the case of photons, to its electromagnetic wave. By extension, in the case of gravitons, to its gravitational wave. And in the case of material particles, to its associated quantum wave function.

Let us deduce again the expression for the redshift for bosons.

The definition of the redshift is,

$$z = \frac{f_o}{f} - 1.$$

Where f_o is the initial frequency, and f is the frequency observed at the measurement collection point.

$$dz = \frac{-f_o df}{f^2}.$$

Plugging the definition of redshift into this equation,

$$dz = -(1+z) \frac{df}{f}.$$

Or,

$$-\frac{dz}{1+z} = \frac{df}{f}.$$

This allows us to change the frequency variation by the redshift variation.

On the other hand, the kinetic energy equation for electromagnetic waves in a gravitational field would be,

$$E_c = m c_m^2 = hf.$$

(remember that in gravitational field we must use expressions of gravitational relativity) from which we can clear the mass,

$$m = \frac{hf}{c_m^2}.$$

As we indicated, the work of the tangential acceleration component is reversed in the frequency change (redshift/blueshift),

$$\frac{dW_t}{2} = \frac{1}{2} \vec{F}_t \cdot d\vec{x} = h df.$$

The factor 1/2 refers to the fact that the electromagnetic wave is a transverse wave; that is, it has two orthogonal polarization planes^[7], and each plane absorbs half of the available energy, giving,

$$\frac{dW_t}{2} = \frac{1}{2} m \vec{a}_t \cdot d\vec{x} = h df.$$

Since we project the tangential acceleration onto the direction of motion, we can change the tangential acceleration to the acceleration without altering the result,

$$\frac{1}{2} m \vec{a} \cdot d\vec{x} = h df.$$

and substitute the expression for the mass,

$$\frac{1}{2} \frac{hf}{c_m^2} \vec{a} \cdot d\vec{x} = h df.$$

Where Planck's constant disappears.

$$\frac{1}{2c_m^2} \vec{a} \cdot d\vec{x} = \frac{df}{f}.$$

Now we substitute the expression for the redshift into it,

$$\frac{1}{2c_m^2} \vec{a} \cdot d\vec{x} = -\frac{dz}{1+z}.$$

We can integrate this equation along a path; if we invert the members of the equation to leave the redshift on the left, and keep the minus on the right,

$$\int \frac{dz}{1+z} = \frac{-1}{2c_m^2} \int \vec{a} \cdot d\vec{x}.$$

Where the expression on the right represents the work of the forces (per unit mass). Suppose we have conservative and non-conservative forces. We can exchange the conservative ones by their potential difference along the path,

$$\ln|1+z| = \frac{\Delta U - W_{FNC}}{2c_m^2}.$$

Or,

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U - W_{FNC}}{2c_m^2}\right) - 1.$$

Which does not need integration constants, because when the work of the forces is zero, the redshift is zero as well.

With,

$$W_{FNC} = \int \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{x},$$

or,

$$\frac{dW_{FNC}}{dt} = \vec{F}_{NC} \cdot \vec{v},$$

Whatever is easiest for the case in question.

For the particular case where there are no non-conservative forces or they do not do work,

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U}{2c_m^2}\right) - 1.$$

This is the result that agrees with the Pound & Sneider experiment.

Note that the expression in terms of the speed of light becomes,

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) - 1.$$

Annex II: Increase in potential on the Earth's surface

Let us calculate the potential increase between the surface of the earth and a height above it. If h is the height and R_T the radius of the earth,

$$\Delta U = GM \left(\frac{-1}{R_T+h} + \frac{1}{R_T} \right).$$

If we take out the common factor radius, and develop the term in parentheses taking into account that the radius is much greater than the height ($R_T \gg h$),

$$\Delta U = \frac{GM}{R_T} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{h}{R_T}} \right) \simeq \frac{GM}{R_T} \frac{h}{R_T}.$$

Introducing the definition of Earth's gravity,

$$g = \frac{GM}{R_T^2},$$

we have,

$$\Delta U = g h.$$

Annex III: Explicit expression of speed variation

We will use the expressions,

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}. \quad (6)$$

Which, as a function of the square of the Lorentz factor,

$$\gamma^2 = 1 + \frac{v^2 \gamma^2}{c^2}. \quad (7)$$

Together with the variation of the Lorentz factor with time,

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2} (v_x \dot{v}_x + v_y \dot{v}_y + v_z \dot{v}_z). \quad (8)$$

We start from the expression of the relativistic amount of movement, where we will ignore the mass,

$$\frac{d}{dt} (\gamma \vec{v}) = \vec{a}.$$

For the x component,

$$\frac{d}{dt} (\gamma v_x) = a_x.$$

Expanding,

$$\frac{d\gamma}{dt} v_x + \gamma \frac{dv_x}{dt} = a_x.$$

Replacing (8),

$$\frac{\gamma^3}{c^2} (v_x^2 \dot{v}_x + v_x v_y \dot{v}_y + v_x v_z \dot{v}_z) + \gamma \dot{v}_x = a_x.$$

For the other components,

$$\frac{\gamma^3}{c^2} (v_x v_y \dot{v}_x + v_y^2 \dot{v}_y + v_y v_z \dot{v}_z) + \gamma \dot{v}_y = a_y,$$

$$\frac{\gamma^3}{c^2} (v_x v_z \dot{v}_x + v_y v_z \dot{v}_y + v_z^2 \dot{v}_z) + \gamma \dot{v}_z = a_z.$$

Giving in the form of a matrix (symmetrical),

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma^2 v_x^2}{c^2} & \frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_y & \frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_z \\ \frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_y & 1 + \frac{\gamma^2 v_y^2}{c^2} & \frac{\gamma^2}{c^2} v_y v_z \\ \frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_z & \frac{\gamma^2}{c^2} v_y v_z & 1 + \frac{\gamma^2 v_z^2}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma}.$$

To invert the matrix 'A' we start by calculating the determinant,

$$\begin{aligned} |\bar{A}| &= \left(1 + \frac{\gamma^2 v_x^2}{c^2}\right) \left(1 + \frac{\gamma^2 v_y^2}{c^2}\right) \left(1 + \frac{\gamma^2 v_z^2}{c^2}\right) + 2 \frac{\gamma^6}{c^6} v_x^2 v_y^2 v_z^2 - \left(1 + \frac{\gamma^2 v_y^2}{c^2}\right) \frac{\gamma^4}{c^4} v_x^2 v_z^2 - \left(1 + \frac{\gamma^2 v_x^2}{c^2}\right) \frac{\gamma^4}{c^4} v_y^2 v_z^2 \\ &\quad - \left(1 + \frac{\gamma^2 v_z^2}{c^2}\right) \frac{\gamma^4}{c^4} v_x^2 v_y^2, \\ |\bar{A}| &= \left(1 + \frac{\gamma^2}{c^2} (v_x^2 + v_y^2) + \frac{\gamma^4}{c^4} v_x^2 v_y^2\right) \left(1 + \frac{\gamma^2 v_z^2}{c^2}\right) - \frac{\gamma^4}{c^4} (v_x^2 v_z^2 + v_y^2 v_z^2 + v_x^2 v_y^2) - \frac{\gamma^6}{c^6} v_x^2 v_y^2 v_z^2, \\ |\bar{A}| &= 1 + \frac{\gamma^2 v^2}{c^2}, \end{aligned}$$

But by (7),

$$|\bar{A}| = \gamma^2.$$

Now we calculate the adjoints,

$$\begin{aligned} A_{xx} &= \left(1 + \frac{\gamma^2 v_y^2}{c^2}\right) \left(1 + \frac{\gamma^2 v_z^2}{c^2}\right) - \frac{\gamma^4}{c^4} v_y^2 v_z^2 = 1 + \frac{\gamma^2}{c^2} (v_y^2 + v_z^2), \\ A_{xy} &= \frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_y \left(1 + \frac{\gamma^2 v_z^2}{c^2}\right) - \frac{\gamma^4}{c^4} v_x v_y v_z^2 = \frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_y, \\ A_{xz} &= \frac{\gamma^4}{c^4} v_x v_z v_y^2 - \left(1 + \frac{\gamma^2 v_y^2}{c^2}\right) \frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_z = -\frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_z, \\ A_{yz} &= \frac{-\gamma^4}{c^4} v_y v_z v_x^2 + \left(1 + \frac{\gamma^2 v_x^2}{c^2}\right) \frac{\gamma^2}{c^2} v_y v_z = \frac{\gamma^2}{c^2} v_y v_z, \end{aligned}$$

The rest are analogous and the system with the inverted matrix remains,

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\gamma^2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma^2}{c^2} (v_y^2 + v_z^2) & -\frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_y & -\frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_z \\ -\frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_y & 1 + \frac{\gamma^2}{c^2} (v_x^2 + v_z^2) & -\frac{\gamma^2}{c^2} v_y v_z \\ -\frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_z & -\frac{\gamma^2}{c^2} v_y v_z & 1 + \frac{\gamma^2}{c^2} (v_x^2 + v_y^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma}.$$

By performing the product of the inverted matrix with the vector and introducing the value of the determinant in the resulting vector,

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma^2} a_x + \frac{v_y^2 + v_z^2}{c^2} a_x - \frac{v_x v_y}{c^2} a_y - \frac{v_x v_z}{c^2} a_z \\ -\frac{v_x v_y}{c^2} a_x + \frac{1}{\gamma^2} a_y + \frac{v_x^2 + v_z^2}{c^2} a_y - \frac{v_y v_z}{c^2} a_z \\ -\frac{v_x v_z}{c^2} a_x - \frac{v_y v_z}{c^2} a_y + \frac{1}{\gamma^2} a_z + \frac{v_x^2 + v_y^2}{c^2} a_z \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma}.$$

Changing the inverse of the squared Lorentz factor by (6),

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x - \frac{v^2}{c^2} a_x + \frac{v_y^2 + v_z^2}{c^2} a_x - \frac{v_x v_y}{c^2} a_y - \frac{v_x v_z}{c^2} a_z \\ -\frac{v_x v_y}{c^2} a_x + a_y - \frac{v^2}{c^2} a_y + \frac{v_x^2 + v_z^2}{c^2} a_y - \frac{v_y v_z}{c^2} a_z \\ -\frac{v_x v_z}{c^2} a_x - \frac{v_y v_z}{c^2} a_y + a_z - \frac{v^2}{c^2} a_z + \frac{v_x^2 + v_y^2}{c^2} a_z \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma}.$$

And, simplifying terms,

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x - \frac{v_x^2}{c^2} a_x - \frac{v_x v_y}{c^2} a_y - \frac{v_x v_z}{c^2} a_z \\ -\frac{v_x v_y}{c^2} a_x + a_y - \frac{v_y^2}{c^2} a_y - \frac{v_y v_z}{c^2} a_z \\ -\frac{v_x v_z}{c^2} a_x - \frac{v_y v_z}{c^2} a_y + a_z - \frac{v_z^2}{c^2} a_z \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma}.$$

Extracting the common factor from each speed component (in the first the x, the second the y, the third the z),

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x - \frac{a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z}{c^2} v_x \\ a_y - \frac{a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z}{c^2} v_y \\ a_z - \frac{a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z}{c^2} v_z \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma}.$$

Which acquires the vector representation,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m\gamma} \left(\vec{F} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F}) \vec{v}}{c^2} \right).$$

Annex IV: Combination of gravitational and electromagnetic forces

Let us give a sketch of how the ODEs could be established; since each force imposes its restriction in a different range of speeds. The problem would appear for speeds higher than that of the graviton. The equations would be,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\vec{v}}{\gamma'},$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m \gamma'} \left(\vec{F}_g - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F}_g) \vec{v}}{c_m^2} + \vec{F}_e - \frac{2(\vec{v} \cdot \vec{F}_e) \vec{v}}{c^2} \right).$$

Where the vector 'Fg' is the gravitational force and 'Fe' the electromagnetic force. The two that appears with the restriction of the electromagnetic forces is due to the fact that, as we have indicated, in a gravitational field the maximum speed is that of the graviton, and the problem requires time scaling. But the restriction for the electromagnetic forces requires that we put the real speed of the object, not that of the graviton, so that each speed term is accompanied by a factor root of two. This two can be absorbed within the speed of light to give,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\vec{v}}{\gamma'},$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m \gamma'} \left(\vec{F}_g - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F}_g) \vec{v}}{c_m^2} + \vec{F}_e - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F}_e) \vec{v}}{c_m^2} \right).$$

O,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\vec{v}}{\gamma'},$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m \gamma'} \left(\vec{F} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F}) \vec{v}}{c_m^2} \right).$$

With the vector 'F' grouping all the forces, and the relativity expressions for the gravitational field. The relativity expressions for the photon field would only be used when there is no gravitational field.

It is a tentative proposal, waiting to find some test with which to verify it.

Annex V: Shapiro delay integration in Viking landers

The equation we are going to integrate is,

$$\frac{d\Delta t}{dt} = -\frac{\Delta U}{c_m^2}.$$

For the outward path, the potential takes the form,

$$U = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (X_e - c_m t)^2}}.$$

For the return path, the potential takes the form,

$$U = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (X_p - c_m t)^2}}.$$

The reference potential is calculated from the point of view of the earth,

$$U_o = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + X_e^2}}.$$

Let's solve the outbound path, we apply a change of variables,

$$\Delta t_{ida} = \frac{GM}{c_m^2} \int_0^{\frac{R_{ep}}{c_m}} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + (X_e - c_m t)^2}} - \frac{1}{r_e} \right) dt = \left(\begin{matrix} \tau = X_e - c_m t \\ d\tau = -c_m dt \end{matrix} \right) = \frac{GM}{c_m^3} \int_{-X_p}^{X_e} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + \tau^2}} - \frac{1}{r_e} \right) d\tau,$$

knowing that,

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{R^2 + \tau^2}} = \ln |\tau + \sqrt{\tau^2 + R^2}|.$$

It turns out,

$$\Delta t_{ida} = \frac{GM}{c_m^3} \left(\ln \left| \frac{X_e + r_e}{-X_p + r_p} \right| - \frac{R_{ep}}{r_e} \right),$$

For the way back,

$$\Delta t_{vuelta} = \frac{GM}{c_m^2} \int_0^{\frac{R_{ep}}{c_m}} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + (X_p - c_m t)^2}} - \frac{1}{r_e} \right) dt = \left(\begin{matrix} \tau = X_p - c_m t \\ d\tau = -c_m dt \end{matrix} \right) = \frac{GM}{c_m^3} \int_{-X_e}^{X_p} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + \tau^2}} - \frac{1}{r_e} \right) d\tau,$$

we get,

$$\Delta t_{vuelta} = \frac{GM}{c_m^3} \left(\ln \left| \frac{X_p + r_p}{-X_e + r_e} \right| - \frac{R_{ep}}{r_e} \right),$$

Adding both times,

$$\Delta t = \frac{GM}{c_m^3} \left(\ln \left| \frac{(r_e + X_e)(r_p + X_p)}{(r_e - X_e)(r_p - X_p)} \right| - \frac{2 R_{ep}}{r_e} \right).$$

We get the total delay.

Referencias

- [1] http://en.wikipedia.org/wiki/Relativistic_mechanics
- [2] Extensión alternativa de la relatividad especial. <https://vixra.org/abs/2302.0124>
- [3] Desplazamiento en frecuencia gravitacional de fotones en relatividad especial. <https://vixra.org/abs/2211.0117>
- [4] Retardo shapiro en relatividad especial. <https://vixra.org/abs/2303.0133>

- [5] Mercury perihelion precession with special relativity of fields.
<https://vixra.org/abs/2305.0030>
- [6] Análisis del experimento gravity probe b con relatividad especial de campos.
<https://vixra.org/abs/2307.0013>
- [7] <https://farside.ph.utexas.edu/teaching/em/lectures/node48.html>
- [8] Alley, C.O. (1979). “Relativity and Clocks”.
https://user.it.uu.se/~marlu734/relativity/Alley1979-relativity_and_clocks.pdf
Disponible en varias webs.
- [9] Deflection of photons in gravitational field. <https://vixra.org/abs/2211.0075>