Minkowski Space-Time and Galilean Space-Time

Fang Zhou

tony_zf_zf_zf@126.com

Abstract The logic for Space-Time and Space-time Transformation is as follows: Minkowski Space-Time(Min.ST) —“Set of Identical Transformation”— is contained by Galilean Space-Time(Gal.ST) which is “Set of Galilean-Zhou Transformation”, contained by the “Universe Space-Time”. Identical Transformation is ‘Null’ Transformation，which is the only Space-time Transformation defined in Min.ST by reason that the Min.ST is a “One-observer’s World”, whereas the Gal.ST is a “Multi-observer’s World”, in which the math-physical formulae of Special Theory of Relativity(STR) and General Theory of Relativity(GTR)，deduced in Min.ST, should be tested and verified, and thereby correctly physically interpreted. Lorentz Transformation, defined in Min.ST, is actually Identical Transformation which is just only available for fibre-glass light propagation. Galilean-Zhou Transformation, defined in Gal.ST, is suitable for all-around light propagation with Doppler’s Effect.

闵可夫斯基时空与伽利略时空

周 方

tony_zf_zf_zf@126.com

摘要 ‘闵可夫斯基时空’为‘只有一个观测者’的“一人世界”，故其中只可能存在“恒等变换”（‘零’变换）（‘**Null**’**Transformation**）。‘零’变换实际上就是‘无’变换。‘闵可夫斯基时空’为“恒等变换”之‘（单元素）集合’，故“恒等变换”属于‘伽利略时空’。‘伽利略时空’具有‘度规’，被包含于万物所在的“宇宙时空”（不具有‘度规’的“绝对时空”）内。“恒等变换”适应于“无多普勒效应或多普勒效应微不足道的（电磁波）有线传输或（光粒子）光纤传输”之场合，如通过显微镜、医用内窥镜、（手持）望远镜等‘物镜-目镜’无相对运动（$\vec{u}=0$）的透视系统‘直接观测’实时图景。伽利略时空为‘至少有两个观测者’的“多人世界”，在“两观测者有相对运动（$\vec{u}\neq 0$）且真空中光传播速率为有限值”的一般情况下，唯一的客观存在的时空变换为“伽利略-周方变换”。“伽利略-周方变换” 适应于“有多普勒效应的（光波，电磁波）无线传输”之场合，如通过‘太空望远镜’或‘太空飞船’、‘火星车’等‘物镜-目镜’有相对运动（$\vec{u}\neq 0$）的透视系统‘观测’遥远星系运动的实时图景。此外，文中还首次揭示了“伽利略时空”内一条重要定律：“光传播定律”— “伽利略时空”内任意时空点（‘运动质点’，‘闪光点’）上的“光传播时空弹性”恒等于 1。“光传播定律”也称为“真空中光传播速率为恒定值定律”或简称“光速不变性（绝对性）定律”— “在任意时空点（‘闪光点’），真空中光传播速率为恒定值$c=1\Big/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$，乃是光的固有属性，与光在哪个参考系内进行传播无关”。这条定律为奠定“运动观测论”的基础定律。

~~~~~~

关键词 时空 伽利略时空 相对论 狭义相对论 运动观测论 伽利略-周方变换 伽利略变换 洛伦兹变换
~~~~~~

目 录

1. 伽利略时空 $\left\{\begin{bmatrix}\vec{r}(t)\\ t\end{bmatrix},\quad t\right\}$ 内之诸定义：

（a）K 系观测者在时刻 t 观测到运动质点的位置记为 $\vec{r}(t)\equiv\{x(t),\quad y(t),\quad z(t)\}$。$\begin{bmatrix}\vec{r}(t)\\ t\end{bmatrix}$ 为‘K **系观测者在时刻 t 观测到运动质点 $\vec{r}(t)$ 时**’指向该运动质点 $\vec{r}(t)$ 的**“观测矢量”**（**Observation Vector**）。$\begin{bmatrix}\vec{r}(t)\\ t\end{bmatrix}$ 也称为 K **系观测者在时刻 t 的“时空点”**，简称**“K 系时空点”**。**函数** $\vec{r}(t)$ 为**“K 系时空轨迹”**。

（b）K' 系观测者在时刻 t' 观测到运动质点的位置记为 $\vec{r}'(t')\equiv\{x'(t'),\quad y'(t'),\quad z'(t')\}$。$\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}$ 为‘K' **系观测者在时刻 t' 观测到运动质点 $\vec{r}'(t')$ 时**’指向该运动质点 $\vec{r}'(t')$ 的**“观测矢量”**。$\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}$ 也称为 K' **系观测者在时刻 t' 的“时空点”**，简称**“K' 系时空点”**。**函数** $\vec{r}'(t')$ 为**“K' 系时空轨迹”**。

2.（一维）伽利略时空 $\left\{\begin{bmatrix}x(t)\\ t\end{bmatrix},\quad t\right\}$ 内之诸定义：

（a）t'、t 分别为 K' **系观测者**、K **系观测者**所持‘时钟’指示的‘时刻（读数）’；t' 称为‘K' 系时刻’，t 称为‘K 系时刻’。

（b）x'、x 分别为 K' **系观测者**、K **系观测者**所持‘量尺’指示的‘位置（读数）’，x' 称为‘K' 系坐标’，x 称为‘K 系坐标’。

（c）$x'(t')$ 为 K' **系观测者**在时刻 t' 观测到运动质点所处的 K' **系**内位置。

（d）$x(t)$ 为 K **系观测者**在时刻 t 观测到运动质点所处的 K 系内位置。

（e）$\begin{bmatrix}x'(t')\\ t'\end{bmatrix}$ 为 K' **系观测者**在时刻 t' 对运动质点 $x'(t')$ 的**“观测矢量”**，即**“K' 系时空点”**。**函数** $x'(t')$ 为**“K' 系时空轨迹”**。

（f）$\begin{bmatrix}x(t)\\ t\end{bmatrix}$ 为 K **系观测者**在时刻 t 对运动质点 $x(t)$ 的**“观测矢量”**，即**“K 系时空点”**。函

数 $x(t)$ 为“K 系时空轨迹”。

3.为了简化书写，略去自变量符号，即：

$x(t)$、$y(t)$、$z(t)$、$\vec{r}(t)$ 相应地简写为 x、y、z、$\vec{r}$；

$x'(t')$、$y'(t')$、$z'(t')$、$\vec{r}\,'(t')$ 相应地简写为 x'、y'、z'、$\vec{r}\,'$；

~~~~~~
~~~~~~

第一章

“闵可夫斯基时空” 与“恒等变换”

一、“时空”与“时空变换”

“时空”（Space-time）是‘空间’（**Space**）与‘时间’（**Time**）相结合，容纳万物及其活动过程于其中的**‘场所’**。笔者认为，在**‘物理学’**中，成为这种**“场所”**的必要条件是：**观测者可以使用工具（‘时钟’及‘量尺’）量测其中运动质点（‘闪光点’）的‘位置’及所处的‘时刻’**。所以，只有‘一维’、‘二维’及‘三维’的**‘欧氏空间’**才能成为**‘物理学’**中的**“空间”**。因此，在**‘物理学’**中，**“时空”**只能是**观测者可使用工具量测其中运动质点（‘闪光点’）的‘位置’及其所处‘时刻’的‘时间-空间’场所**。只具有‘概念’与相应的‘定义’，而不具有**“度规”**（**Metric**）且只服从**‘逻辑运算法则’**（**如：自反律、反对称律、传递律、交换律、结合律、分配律、*De Morgan* 定律等**）的**“时空”**称为**“绝对时空”**，**“宇宙时空”**就是**“绝对时空”**。关于**“绝对时空”**的理论只涉及**‘哲学’**与**‘逻辑学’**，而不涉及**‘数学’**与**‘物理学’**。

“时空变换”—“两观测者在各自时钟所示时刻（t' 与 t）‘同时’（$t' \equiv kt$，$k > 0$）观测到运动质点”（构成‘伽利略变换’）时，**‘运动观测者’**的观测矢量 $\begin{bmatrix} \vec{r}'(t') \\ t' \end{bmatrix}$ 与**‘静止观测者’**的观测矢量 $\begin{bmatrix} \vec{r}(t) \\ t \end{bmatrix}$ 之间的数据转换关系称为**“时空变换”**。

****

（一）“闵可夫斯基时空”与“恒等变换”

（Minkowski Space-time & Identical Transformation）

闵可夫斯基时空 $\left\{ \begin{bmatrix} \vec{r}(\tau) \\ \tau \end{bmatrix}, \quad \tau \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} x(\tau) \\ \tau \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y(\tau) \\ \tau \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z(\tau) \\ \tau \end{bmatrix}, \quad \tau \right\}$ 的一个重要特征是：

‘时刻 τ’具有**‘排它性’**，即：**在任一时刻，运动质点（‘闪光点’）只可被‘一个’观测者（运动质点处的‘抵近观测者’）观测到**。根据**‘时刻 τ’**的这一特点，**闵可夫斯基时空** $Min.ST$（**Minkowski Space-time**）可定义为如下**‘集合’**：

$$\boxed{\left\{ \quad \begin{bmatrix} \vec{r}'(\tau') \\ \tau' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \vec{r}'(\tau) \\ \tau \end{bmatrix} \quad \right\}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \quad \begin{bmatrix} \vec{r}'(\tau') \\ \tau' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \vec{r}(\tau) \\ \tau \end{bmatrix} \quad \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$Min.ST \left\{ \quad \text{恒等变换} \begin{bmatrix} \vec{r}'(\tau') \\ \tau' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \vec{r}(\tau) \\ \tau \end{bmatrix} \Bigg\| \vec{u} = 0 \quad \right\}$$

（$\vec{u}$ 为两观测者之间的相对速度）

即：闵可夫斯基时空 $Min.ST$ 是恒等变换 $\begin{bmatrix} \vec{r}'(\tau') \\ \tau' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \vec{r}(\tau) \\ \tau \end{bmatrix} \Bigg\| \vec{u} = 0$ 的‘（单元素）集合’。

恒等变换 $\begin{bmatrix} \vec{r}'(\tau') \\ \tau' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \vec{r}(\tau) \\ \tau \end{bmatrix} \Bigg\| \vec{u} = 0$ 又称为‘零’变换（‘**Null**’ **Transformation**）。‘零’变换实际上就是‘无’变换。所以，恒等变换 $\begin{bmatrix} \vec{r}'(\tau') \\ \tau' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \vec{r}(\tau) \\ \tau \end{bmatrix} \Bigg\| \vec{u} = 0$ 就是‘无’变换。

代表闵可夫斯基时空 $Min.ST \left\{ \quad \text{恒等变换} \begin{bmatrix} \vec{r}'(\tau') \\ \tau' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \vec{r}(\tau) \\ \tau \end{bmatrix} \Bigg\| \vec{u} = 0 \quad \right\}$ 的“世界线”（**World-line**）示于图 1。

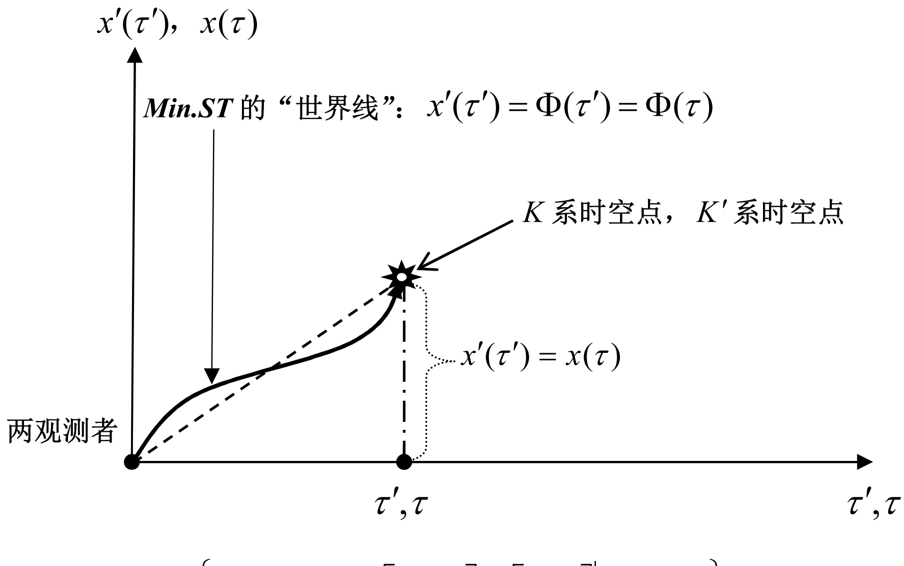


图 1 $Min.ST \left\{ \quad \text{恒等变换} \begin{bmatrix} \vec{r}'(\tau') \\ \tau' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \vec{r}(\tau) \\ \tau \end{bmatrix} \Bigg\| \vec{u} = 0 \quad \right\}$ 的“世界线”

在图 1 中，设 $x'(\tau')$ 为某个函数 $\Phi(\tau')$ ： $x'(\tau') = \Phi(\tau')$

将 $x'(\tau') = \Phi(\tau')$ 代入图中等式 $x(\tau) = x'(\tau')$，得：

$$\tau' \equiv \tau： \ x(\tau) = \Phi(\tau') = \Phi(\tau)$$

即：

$$x(\tau) = \Phi(\tau)$$

代表闵可夫斯基时空 $Min.ST \left\{ \quad 恒等变换 \begin{bmatrix} \vec{r}'(\tau') \\ \tau' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \vec{r}(\tau) \\ \tau \end{bmatrix} \Bigg\| \vec{u} = 0 \quad \right\}$ 的“世界线”为：

通过两观测者‘重合点’的单一曲线 $\tau' \equiv \tau$： $\begin{cases} x'(\tau') = \Phi(\tau') \\ x(\tau) = \Phi(\tau) \end{cases}$

闵可夫斯基时空 $Min.ST \left\{ \quad 恒等变换 \begin{bmatrix} \vec{r}'(\tau') \\ \tau' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \vec{r}(\tau) \\ \tau \end{bmatrix} \Bigg\| \vec{u} = 0 \quad \right\}$ 为“运动质点（‘闪光点’）只被‘一个’观测者（‘闪光点’处的‘抵近观测者’）观测到”的“一人世界”。

‘闵可夫斯基时空’为‘只有一个观测者’的“一人世界”，故其中只可能存在“恒等变换”（‘零’变换）。

~~~~~~

二、实为“恒等变换”的“洛伦兹变换”

（一）“洛伦兹变换”之导出

对‘全部方程都定义在闵可夫斯基时空 $Min.ST$ 内’的预设方程组（A）：

$$\begin{cases} x' = k(x - u\tau) \\ x = k(x' + u\tau') \\ x = c\tau \\ x' = c\tau' \end{cases} \qquad \text{(A)}$$

进行联立求解。

将 $x = c\tau$ 及 $x' = c\tau'$ 代入上面的方程 $x' = k(x - u\tau)$ 及 $x = k(x' + u\tau')$，得：
~~~~~~

$$\begin{cases} c\tau' = k(c\tau - u\tau) \\ c\tau = k(c\tau' + u\tau') \end{cases}$$

两式相乘，得： $$c^2\tau\tau' = k^2(c^2 - u^2)\tau\tau'$$

系数k必须为$k > 0$，故在约束条件$(0 < c^2 - u^2 \le c^2) \Leftrightarrow (0 \le u^2 < c^2)$下约去等式两边的$\tau\tau'$，得：

$$k^2 = \frac{c^2}{c^2 - u^2} = \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

从而得： $$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$s.t.$ $$0 \le u^2 < c^2$$

（1）将$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$代入方程$x' = k(x - u\tau)$，得：

空间变换式 $$x' = \frac{x - u\tau}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

（2）将$x' = \frac{x - u\tau}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$代入方程$x' = c\tau'$，得；

$$\tau' = \frac{x'}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\left(\frac{x}{c} - \frac{u}{c}\tau\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\left(\tau - \frac{u}{c}\frac{x}{c}\right)$$

即： 时间变换式 $$\tau' = \frac{\tau - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

这样，就得出**洛伦兹变换**$\left[x' = \frac{x - u\tau}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tau' = \frac{\tau - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \middle| 0 \le u^2 < c^2 \right]$

但是，**洛伦兹变换**的这种表达形式$\left[x' = \frac{x - u\tau}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tau' = \frac{\tau - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \middle| 0 \le u^2 < c^2 \right]$还不是**最终的时空变换表达式**，它仍旧是一个需待‘求解’的联立方程组，还必须进一步‘求解’联立方程组$\left[x' = \frac{x - u\tau}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tau' = \frac{\tau - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \middle| 0 \le u^2 < c^2 \right]$，才可得到时空变换的**最终表达式 —“两观测者‘同时’（$\tau' \equiv k\tau$）观测到运动质点”（构成‘伽利略变换’）时，‘运动观测者’的观测矢量**$\begin{bmatrix} x'(\tau') \\ \tau' \end{bmatrix}$**与‘静止观测者’的观测矢量**$\begin{bmatrix} x(k\tau) \\ k\tau \end{bmatrix}$**之间的数据转换关系**。

为此，记$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = k$，将方程组$\left[x' = \frac{x - u\tau}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tau' = \frac{\tau - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \middle| 0 \le u^2 < c^2 \right]$换写成如下形式：

$$\begin{cases} x' = k(x - u\tau) = kx - ku\tau \\ \tau' = k\left(\tau - \frac{ux}{c^2}\right) = -\frac{ku}{c^2}x + k\tau \end{cases}$$

得：
$$\begin{bmatrix} x' \\ \tau' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx - ku\tau \\ -\frac{ku}{c^2}x + k\tau \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} x - u\tau \\ -\frac{u}{c^2}x + \tau \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 & -u \\ -\frac{u}{c^2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \tau \end{bmatrix}$$

求逆变换式：

$$\begin{cases} kx - ku\tau = x' \\ \left(-\frac{ku}{c^2}\right)x + k\tau = \tau' \end{cases}$$

解方程组：

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{bmatrix} x' & -ku \\ \tau' & k \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} k & -ku \\ -\dfrac{ku}{c^2} & k \end{bmatrix}} = \dfrac{kx' + ku\tau'}{k^2 - \dfrac{k^2u^2}{c^2}} = \dfrac{x' + u\tau'}{k\left(1 - \dfrac{u^2}{c^2}\right)} = \dfrac{1}{k\left(1 - \dfrac{u^2}{c^2}\right)} x' + \dfrac{u}{k\left(1 - \dfrac{u^2}{c^2}\right)} \tau' \\[3em] \tau = \dfrac{\begin{bmatrix} k & x' \\ -\dfrac{ku}{c^2} & \tau' \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} k & -ku \\ -\dfrac{ku}{c^2} & k \end{bmatrix}} = \dfrac{k\tau' + \dfrac{ku}{c^2} x'}{k^2 - \dfrac{k^2u^2}{c^2}} = \dfrac{\tau' + \dfrac{u}{c^2} x'}{k\left(1 - \dfrac{u^2}{c^2}\right)} = \dfrac{\dfrac{u}{c^2}}{k\left(1 - \dfrac{u^2}{c^2}\right)} x' + \dfrac{1}{k\left(1 - \dfrac{u^2}{c^2}\right)} \tau' \end{cases}$$

得：

$$\begin{bmatrix} x \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{k\left(1 - \dfrac{u^2}{c^2}\right)} & \dfrac{u}{k\left(1 - \dfrac{u^2}{c^2}\right)} \\ \dfrac{\dfrac{u}{c^2}}{k\left(1 - \dfrac{u^2}{c^2}\right)} & \dfrac{1}{k\left(1 - \dfrac{u^2}{c^2}\right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ \tau' \end{bmatrix} = \frac{1}{k\left(1 - \dfrac{u^2}{c^2}\right)} \begin{bmatrix} 1 & u \\ \dfrac{u}{c^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ \tau' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ \tau \end{bmatrix} = \frac{1}{k\left(1 - \dfrac{u^2}{c^2}\right)} \begin{bmatrix} 1 & u \\ \dfrac{u}{c^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ \tau' \end{bmatrix}$$

于是得：

$$\begin{bmatrix} x' \\ \tau' \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -u \\ -\dfrac{u}{c^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tau \end{bmatrix}$$

逆变换式：

$$\begin{bmatrix} x \\ \tau \end{bmatrix} = \frac{1}{k\left(1 - \dfrac{u^2}{c^2}\right)} \begin{bmatrix} 1 & u \\ \dfrac{u}{c^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ \tau' \end{bmatrix}$$

（a）将正变换与逆变换综合，得：

$$\begin{bmatrix} x' \\ \tau' \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 & -u \\ -\dfrac{u}{c^2} & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{k\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)} \begin{bmatrix} 1 & u \\ \dfrac{u}{c^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ \tau' \end{bmatrix}$$

即：

$$\begin{bmatrix} x' \\ \tau' \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\dfrac{u^2}{c^2}} \begin{bmatrix} 1 & -u \\ -\dfrac{u}{c^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u \\ \dfrac{u}{c^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ \tau' \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-\dfrac{u^2}{c^2}} \begin{bmatrix} 1-\dfrac{u^2}{c^2} & 0 \\ 0 & 1-\dfrac{u^2}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ \tau' \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-\dfrac{u^2}{c^2}} \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right) \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ \tau' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ \tau' \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x' \\ \tau' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x' \\ \tau' \end{bmatrix}$$

即：

$$\begin{bmatrix} x' \\ \tau' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x' \\ \tau' \end{bmatrix} \equiv 0$$

~~~~~~~~~~~~~~~~ ~~~~~~~~~~~~~~~~ ~~~~~~~~~~~~~~~~

（b）同理，将逆变换与正变换综合，得：

$$\begin{bmatrix} x \\ \tau \end{bmatrix} = \frac{1}{k\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)} \begin{bmatrix} 1 & u \\ \dfrac{u}{c^2} & 1 \end{bmatrix} k\begin{bmatrix} 1 & -u \\ -\dfrac{u}{c^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tau \end{bmatrix}$$

即：

$$\begin{bmatrix} x \\ \tau \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\dfrac{u^2}{c^2}} \begin{bmatrix} 1 & u \\ \dfrac{u}{c^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -u \\ -\dfrac{u}{c^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tau \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-\dfrac{u^2}{c^2}} \begin{bmatrix} 1-\dfrac{u^2}{c^2} & 0 \\ 0 & 1-\dfrac{u^2}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tau \end{bmatrix}$$
~~~~~~~~~~~~~~~~

$$=\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\bullet\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\\tau\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\\tau\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{bmatrix}x\\\tau\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}x\\\tau\end{bmatrix}$$

即：

$$\begin{bmatrix}x\\\tau\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\\tau\end{bmatrix}\equiv 0$$

~~~~~~~~~~~~~~~~ ~~~~~~~~~~~~~~~~ ~~~~~~~~~~~~~~~~

故有： $$\begin{bmatrix}x'\\\tau'\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x'\\\tau'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}x\\\tau\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\\tau\end{bmatrix}=0$$

即： $$\begin{bmatrix}x'\\\tau'\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\\tau\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}x'\\\tau'\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\\tau\end{bmatrix}=0$$

于是，得： $$\text{恒等变换}\begin{bmatrix}x'\\\tau'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}x\\\tau\end{bmatrix}\Bigg|u=0$$

由于闵可夫斯基时空 $Min.ST$ 为“一人世界”，在闵可夫斯基时空 $Min.ST$ 内只可能存在“恒等变换”（‘零’变换），所以必然得：

$$\boxed{\text{洛伦兹变换}\left[x'=\frac{x-u\tau}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},\tau'=\frac{\tau-\frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right]\Bigg|0\le u^2<c^2\Leftrightarrow\text{恒等变换}\begin{bmatrix}x'\\\tau'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}x\\\tau\end{bmatrix}\Bigg|u=0}$$

****

（二）“洛伦兹变换”之性质

预设方程组（A）的‘完整解’为：

$$\left[x'=\frac{x-u\tau}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},\tau'=\frac{\tau-\frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\Bigg|0\le u^2<c^2,\quad x=c\tau,\quad x'=c\tau'\right]$$

$$\Updownarrow$$
~~~~~~~~~~~~~~~~

$$\left[\text{恒等变换}\begin{bmatrix} x' \\ \tau' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x \\ \tau \end{bmatrix}\middle| u=0, \quad x=c\tau, \quad x'=c\tau'\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\frac{x'}{\tau'} \equiv \frac{x}{\tau} = c\right\}$$

很明显，**恒等变换**$\left\{\frac{x'}{\tau'} \equiv \frac{x}{\tau} = c\right\}$自然可使（建立在闵可夫斯基时空$Min.ST$ 内的）**Maxwell 电磁方程组**中的‘电磁波不变性’获得验证，即：

$$\left\{\frac{x'}{\tau'} \equiv \frac{x}{\tau} = c\right\} \Leftrightarrow \left\{\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau'^2} \equiv \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2} = 0\right\}$$

即： $$\left\{x'^2 - c^2\tau'^2 \equiv x^2 - c^2\tau^2 = 0\right\} \Leftrightarrow \left\{\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau'^2} \equiv \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2} = 0\right\}$$

~~~~~~

闵可夫斯基时空$Min.ST$ 内的恒等变换$\left\{\frac{x'}{\tau'} \equiv \frac{x}{\tau} = c\right\}$示于图 2。
~~~~~~

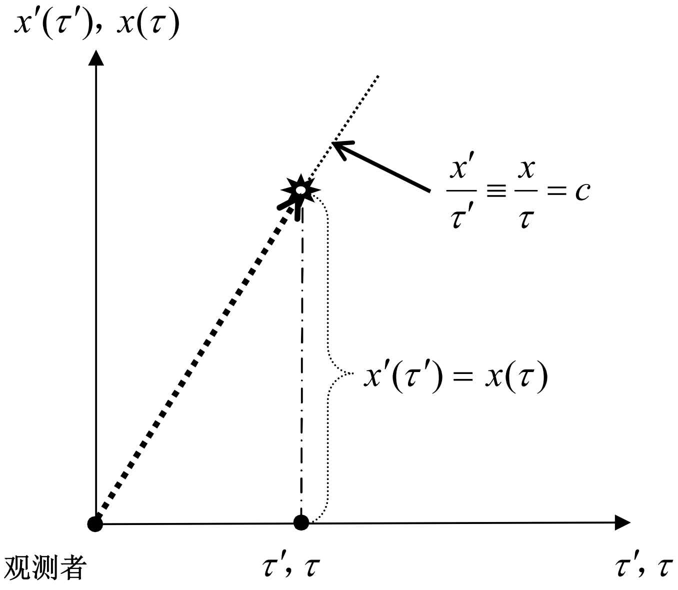


图 2 两观测者的观测矢量$\begin{bmatrix} c\tau \\ \tau \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} c\tau' \\ \tau' \end{bmatrix}$

图 2 中，恒等变换$\left\{\frac{x}{\tau} \equiv \frac{x'}{\tau'} = c\right\}$描述的过程是：“一直静止在重合点的两观测者在每一时刻‘同时’（$\tau' \equiv \tau \geq 0$）观测到运动质点E”，示于图 3。

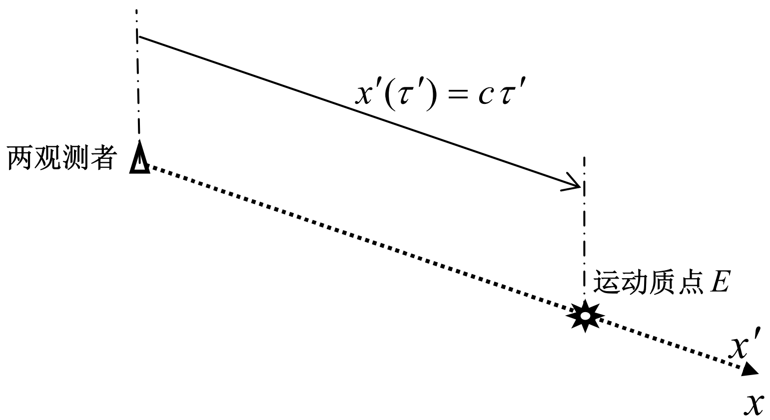


图 3 两观测者在每个时刻‘同时’（$\tau' \equiv \tau \geq 0$）观测到运动质点E

~~~~~~
~~~~~~

第二章

“伽利略时空” 与“伽利略-周方变换”

一、“光传播定律”（Law of Light Propagation）

“光传播定律”也称为“真空中光传播速率为恒定值定律”（**Law of constancy of light propagation velocity**），或简称“光速不变性（绝对性）定律”— “在任意时空点$\begin{bmatrix}\vec{r}(t)\\ t\end{bmatrix}$（运动质点，‘闪光点’），真空中光传播速率为恒定值（$c=1\big/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$），乃是光的固有属性，与光在哪个参考系内进行传播无关”。

在任意时空点$\begin{bmatrix}\vec{r}(t)\\ t\end{bmatrix}$（‘闪光点’），‘光的传播’满足“各向同性”性质：在某个时刻，某个‘光源’发出‘光波’，以‘光粒子作群体波动’的方式（表现出‘波粒二重性’）向四周传播，致使‘波阵面’（球面）上的所有各点（‘光粒子’）在传播中不断地成为‘次生光源’，各自发出‘光波’，‘光的传播’按此种方式进行下去，其效应为：‘波阵面’（球面）上的所有各点（‘光粒子’）均以同一速率$c=1\big/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=const.$作径向运动：

$$\left|\vec{r}(t)\right|=ct\,,\quad c=1\big/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=const.$$

（c为真空中光传播速率）

沿‘闪光点’四周任意方向（x）上，光波皆以平面波形式进行传播，故有：

$$x(t)=ct\,,\quad c=const.\text{（}c\text{为真空中光传播速率）}$$

故有：

$$\ln x(t)=\ln c+\ln t$$

$$d\ln x(t)=d\ln t$$

即：

$$\varepsilon_{xt}=\frac{d\ln x(t)}{d\ln t}=1$$

即：沿‘闪光点’四周任意方向（x）上的“光传播时空弹性（**Space-Time Elasticity of Light Propagation**）”恒为**1**：

$$\boxed{\varepsilon_{xt}=\frac{d\ln x(t)}{d\ln t}=1}$$

因此，有：

“光传播定律”（**Law of Light Propagation**）：

$$\because k\begin{bmatrix} x(t) \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(kt) \\ kt \end{bmatrix} \text{及 } k\begin{bmatrix} x(t) \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx(t) \\ kt \end{bmatrix}$$

$$\therefore x(kt) = kx(t)$$

$\begin{bmatrix} x(t) \\ t \end{bmatrix}$为观测者在时刻$t$对运动质点（‘闪光点’）的观测矢量

观测者在时刻t对运动质点（‘闪光点’）的观测矢量$\begin{bmatrix} x(t) \\ t \end{bmatrix}$示于图 4。

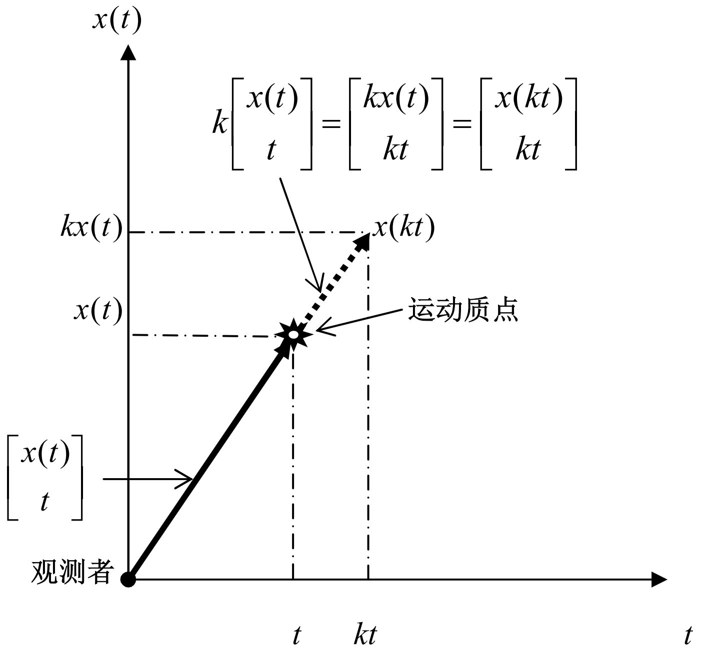


图 4 观测者对运动质点的观测矢量$\begin{bmatrix} x(t) \\ t \end{bmatrix}$增至$k\begin{bmatrix} x(t) \\ t \end{bmatrix}$

~~~~~~

二、“伽利略时空”与“伽利略变换”

伽利略时空$\left\{\begin{bmatrix} \vec{r}(t) \\ t \end{bmatrix}, \quad t\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{bmatrix} x(t) \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y(t) \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z(t) \\ t \end{bmatrix}, \quad t\right\}$的一个重要特征是：‘时刻$t$’不具‘排它性’，即：在任一时刻，运动质点（‘闪光点’）可以被‘至少两个’观测者“同时”（$t' \equiv kt, k = f(\vec{u})$，$\vec{u}$为两观测者之间的相对速度）观测到。

根据‘时刻t’的这一特性，伽利略时空$Gal.ST$（**Galilean Space-time**）可定义为
~~~~~~

如下‘集合’：

$$Gal.ST\left\{\quad \text{伽利略变换}\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{r}(kt)-\vec{u}\bullet kt\\ kt\end{bmatrix}\Bigg| k=f(\vec{u}),\vec{u}\geq 0 \quad\right\}$$

即：伽利略时空 $Gal.ST$ 是伽利略变换 $\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{r}(kt)-\vec{u}\bullet kt\\ kt\end{bmatrix}\Bigg| k=f(\vec{u}),\vec{u}\geq 0$ 为‘元素’的‘集合’。

代表伽利略时空 $Gal.ST\left\{\quad \text{伽利略变换}\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{r}(kt)-\vec{u}\bullet kt\\ kt\end{bmatrix}\Bigg| k=f(\vec{u}),\vec{u}\geq 0 \quad\right\}$ 的“世界线”（**World-line**）示于图 5。

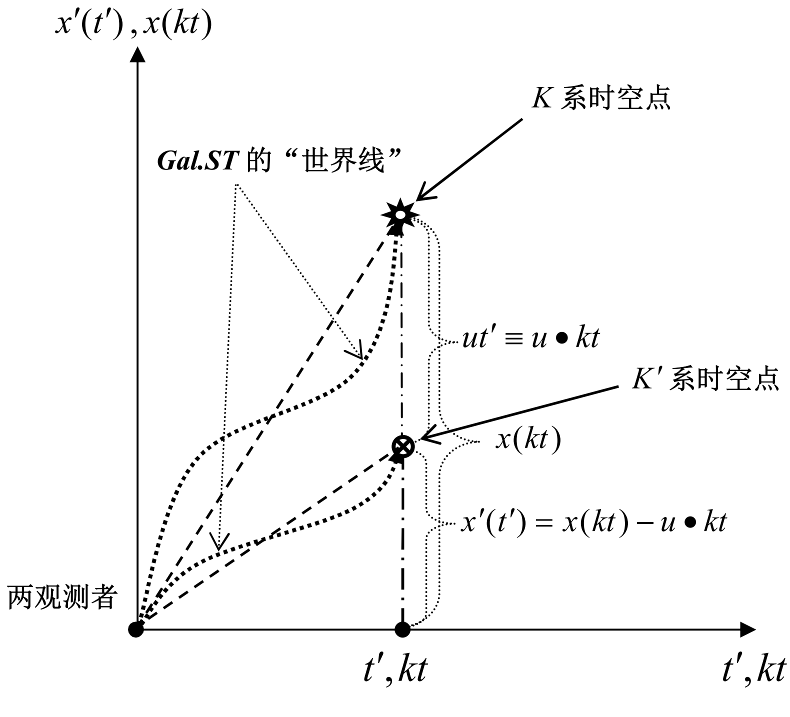


图 5 $\left\{\quad \text{伽利略变换}\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{r}(kt)-\vec{u}\bullet kt\\ kt\end{bmatrix}\Bigg| k=f(\vec{u}),\vec{u}\geq 0 \quad\right\}$ 的“世界线”

在图 5 中，设 $x(kt)$ 为某个函数 $\Phi(kt)$： $x(kt)=\Phi(kt)$

将 $x(kt)=\Phi(kt)$ 代入等式 $x'(t')=x(kt)-u\bullet kt$，得：

$$\begin{aligned}t'\equiv kt : x'(t') &= \Phi(kt)-u\bullet kt\\ &=\Phi(t')-u\bullet t'\end{aligned}$$

即：$$x'(t') = \Phi(t') - ut'$$

代表伽利略时空 $Gal.ST$ $\left\{ \quad 伽利略变换\begin{bmatrix} \vec{r}'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}(kt) - \vec{u} \bullet kt \\ kt \end{bmatrix} \middle| k = f(\vec{u}), \vec{u} \geq 0 \quad \right\}$

的“世界线”为：

通过两观测者‘重合点’的呈簇状的多条相似曲线

$$t' \equiv kt$$

$$\begin{cases} x(kt) = \Phi(kt) \\ x'(t') = \Phi(t') - ut' \end{cases}$$

伽利略时空 $Gal.ST$ $\left\{ \quad 伽利略变换\begin{bmatrix} \vec{r}'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}(kt) - \vec{u} \bullet kt \\ kt \end{bmatrix} \middle| k = f(\vec{u}), \vec{u} \geq 0 \quad \right\}$

为“运动质点（‘闪光点’）可被至少两个观测者（‘闪光点’处的‘抵近观测者’与至少一个离开‘闪光点’的‘远处观测者’）‘同时’观测到”的“多人世界”。

~~~~~~~~~~~~~~~~ ~~~~~~~~~~~~~~~~ ~~~~~~~~~~~~~~~~

小结

（1）根据闵可夫斯基时空 $Min.ST$ 内‘时刻 τ 有排它性’之特点，闵可夫斯基时空 $Min.ST$（**Minkowski Space-time**）可定义为如下‘集合’：

$$Min.ST \left\{ \quad 恒等变换\begin{bmatrix} \vec{r}'(\tau') \\ \tau' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \vec{r}(\tau) \\ \tau \end{bmatrix} \middle| \vec{u} = 0 \quad \right\}$$

（$\vec{u}$ 为两观测者之间的相对速度）

即：闵可夫斯基时空 $Min.ST$ 是恒等变换 $\begin{bmatrix} \vec{r}'(\tau') \\ \tau' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \vec{r}(\tau) \\ \tau \end{bmatrix} \Big| \vec{u} = 0$ 为‘元素’的‘（单元素）集合’。

恒等变换 $\begin{bmatrix} \vec{r}'(\tau') \\ \tau' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \vec{r}(\tau) \\ \tau \end{bmatrix} \Big| \vec{u} = 0$ 又称为‘零’变换（‘**Null**’ **Transformation**）。‘零’变换实际上就是‘无’变换。

闵可夫斯基时空 $Min.ST$ $\left\{ \quad 恒等变换\begin{bmatrix} \vec{r}'(\tau') \\ \tau' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \vec{r}(\tau) \\ \tau \end{bmatrix} \middle| \vec{u} = 0 \quad \right\}$ 为“运动质点只
~~~~~~~~~~~~~~~~

被‘一个’观测者（‘闪光点’处的‘抵近观测者’）观测到”的“一人世界”。

（2）根据伽利略时空 $Gal.ST$ 内‘时刻 t 无排它性’之特点，伽利略时空 $Gal.ST$（**Galilean Space-time**）可定义为如下‘集合’：

$$\boxed{Gal.ST\left\{ \text{伽利略变换}\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{r}(kt)-\vec{u}\bullet kt\\ kt\end{bmatrix}\middle| k=f(\vec{u}),\vec{u}\ge 0 \right\}}$$

即：伽利略时空 $Gal.ST$ 是伽利略变换 $\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{r}(kt)-\vec{u}\bullet kt\\ kt\end{bmatrix}\Bigg| k=f(\vec{u}),\vec{u}\ge 0$ 为‘元素’的‘集合’。

$$\text{伽利略时空 } Gal.ST\left\{ \text{伽利略变换}\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{r}(kt)-\vec{u}\bullet kt\\ kt\end{bmatrix}\middle| k=f(\vec{u}),\vec{u}\ge 0 \right\}$$

为“运动质点（‘闪光点’）可被至少两个观测者（‘闪光点’处的‘抵近观测者’与至少一个离开‘闪光点’的‘远处观测者’）‘同时’观测到”的“多人世界”。

~~~~~~~~~~~~~~~~ ~~~~~~~~~~~~~~~~

将图 1 与图 5 重叠在一起，即得闵可夫斯基时空 $Min.ST$ 的“世界线”与伽利略时空 $Gal.ST$ 的“世界线”之间的关系，示于图 6。

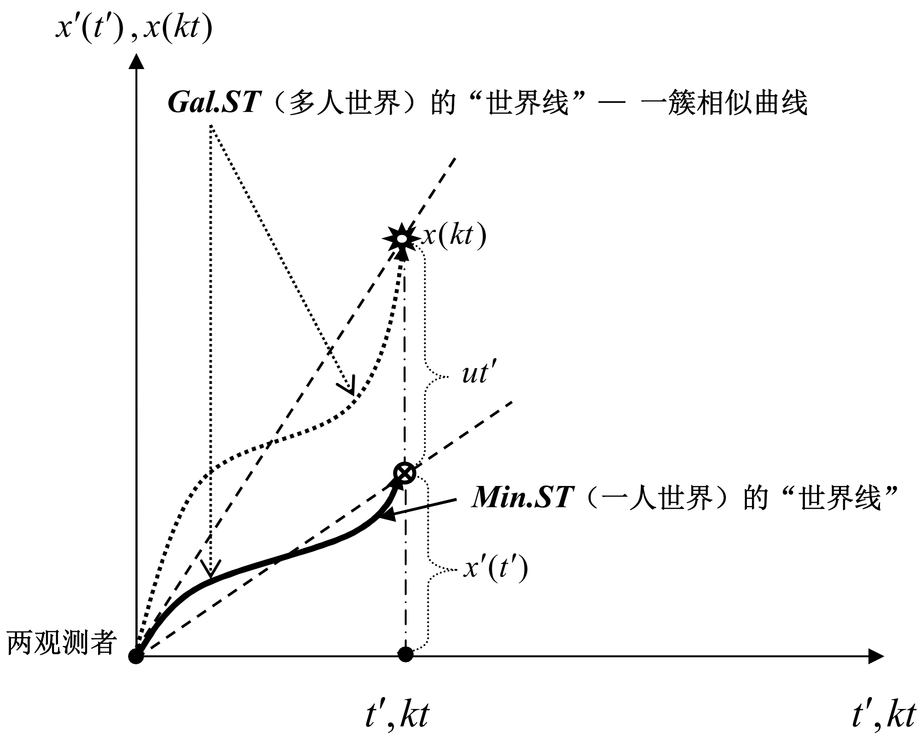


图 6 ***Min.ST*** 的“世界线”与 ***Gal.ST*** 的“世界线”之关系
~~~~~~~~~~~~~~~~

显然，有：

$$
\begin{aligned}
&Min.ST\left\{\quad \text{恒等变换}\begin{bmatrix}\vec{r}'(\tau')\\ \tau'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\vec{r}(\tau)\\ \tau\end{bmatrix}\Bigg\|\vec{u}=0\quad\right\}\\
&\subset Gal.ST\left\{\quad \text{伽利略变换}\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{r}(kt)-\vec{u}\bullet kt\\ kt\end{bmatrix}\Bigg\|k=f(\vec{u}),\vec{u}\geq 0\quad\right\}\\
&\subset \text{“宇宙时空”（“绝对时空”）}
\end{aligned}
$$

因为 $Min.ST$ 为恒等变换 $\begin{bmatrix}\vec{r}'(\tau')\\ \tau'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\vec{r}(\tau)\\ \tau\end{bmatrix}\Bigg\|\vec{u}=0$ 的‘（单元素）集合’，故有：

$$
\begin{aligned}
&\text{恒等变换}\begin{bmatrix}\vec{r}'(\tau')\\ \tau'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\vec{r}(\tau)\\ \tau\end{bmatrix}\Bigg\|\vec{u}=0\\
&\in Gal.ST\left\{\quad \text{伽利略变换}\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{r}(kt)-\vec{u}\bullet kt\\ kt\end{bmatrix}\Bigg\|k=f(\vec{u}),\vec{u}\geq 0\quad\right\}
\end{aligned}
$$

从而有：

$$
\text{恒等变换}\begin{bmatrix}\vec{r}'(\tau')\\ \tau'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\vec{r}(\tau)\\ \tau\end{bmatrix}\Bigg\|\vec{u}=0\Leftrightarrow\text{伽利略变换}\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{r}(kt)-\vec{u}\bullet kt\\ kt\end{bmatrix}\Bigg\|k=f(\vec{u}),\vec{u}=0
$$

~~~~~~
~~~~~~

三、“伽利略-周方变换”之导出（A）

（1）在 $t' = t = 0$ 时，K' 系观测者（K' 系原点）与 K 系观测者（K 系原点）相重合。

（2）在 t'，$t \geq 0$ 时，K' 系相对于 K 系始终作速度为 $\vec{u}$ 的平移运动。

（3）两观测者持有相同的‘**时钟**’及相同的‘**量尺**’。

在时刻 t'，K' **系观测者**对 K **系观测者**的距离为 $\vec{u}t'$，在此时刻，处在 K **系观测者**前方的 K' **系观测者**率先观测到运动质点（K' **系时空点**）。如果光传播速度为‘无穷大’，则两观测者将‘**同时**’（$t' \equiv t$）观测到运动质点，构成“**伽利略变换**”。“**伽利略变换**”的 K' 系时空点与 K 系时空点示于图 7。

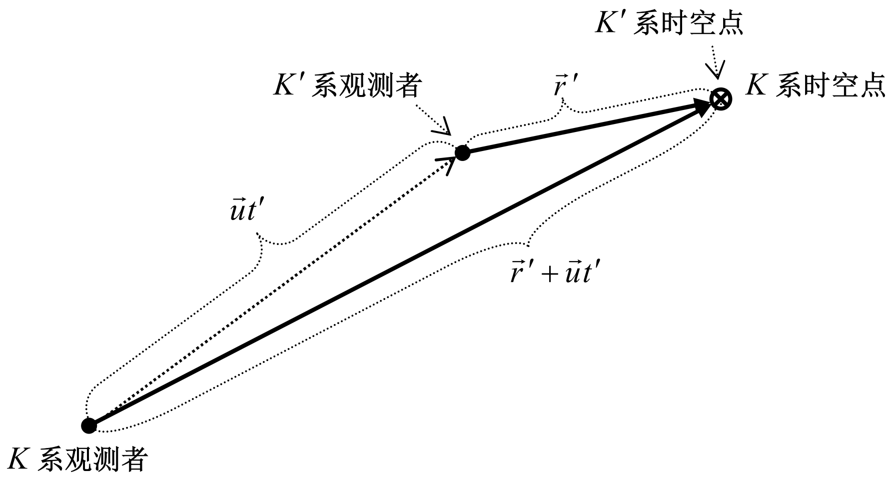


图 7 “伽利略变换”的 K' 系时空点与 K 系时空点

可是，由于光传播速度为‘有限值 c’（$c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$），所以，与 K' **系观测者**的距离为 $\vec{u}t'$ 的 K **系观测者**不能在时刻 t' 与 K' **系观测者**‘**同时**’观测到运动质点，而只能在延后于时刻 t' 的时刻 $t = t' + \dfrac{|\vec{u}|t'}{c} = \left(1 + \dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)t'$ 与 K' **系观测者**‘**同时**’观测到运动质点。

根据“**光传播定律**”，有：

$$\left\{t'\text{变为}\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)\bullet t'\right\} \Rightarrow \left\{\vec{u}t'\text{变为}\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)\bullet \vec{u}t'\right\} \Rightarrow \left\{\vec{r}'\text{变为}\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)\bullet \vec{r}'\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{(\vec{r}' + \vec{u}t')\text{变为}\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)\bullet (\vec{r}' + \vec{u}t')\right\}$$

“伽利略-周方变换”的 K 系时空点示于图 8。

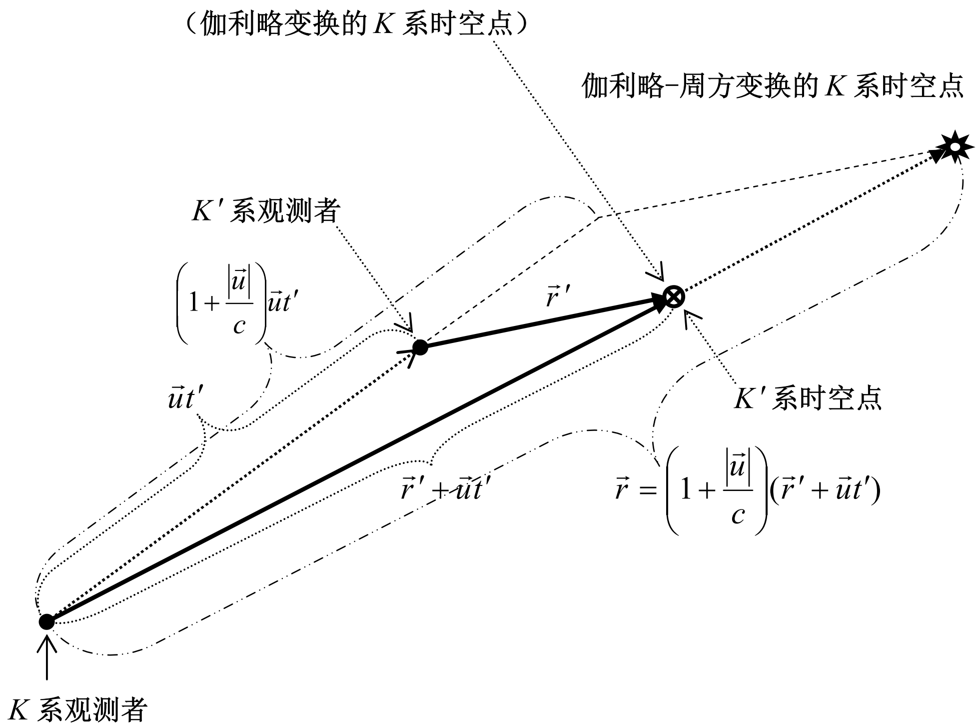


图 8 “伽利略-周方变换”的 K 系时空点

从图 8 可得伽利略-周方变换：

$$\begin{cases} \vec{r}=\left(1+\dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)(\vec{r}\,'+\vec{u}t') \\ t=\left(1+\dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)t' \end{cases}$$

可以表示为：

$$\begin{bmatrix} \vec{r} \\ t \end{bmatrix}=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)\begin{bmatrix} \vec{r}\,'+\vec{u}t' \\ t' \end{bmatrix}$$

逆变换为：

$$\begin{bmatrix} \vec{r}\,' \\ t' \end{bmatrix}=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix} \vec{r}-\vec{u}t \\ t \end{bmatrix}$$

伽利略-周方变换$\begin{bmatrix} \vec{r}\,' \\ t' \end{bmatrix}=\left(1+\dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix} \vec{r}-\vec{u}t \\ t \end{bmatrix}$为“（一般）伽利略-周方变换”（**General Galilean-Zhou Transformation**），可表为：

（一般）伽利略-周方变换

（General Galilean-Zhou Transformation）

$$\vec{r}' = \frac{\vec{r} - \vec{u}t}{1 + \frac{|\vec{u}|}{c}}, \quad t' = \frac{t}{1 + \frac{|\vec{u}|}{c}}$$

在（一维）**伽利略时空**之场合下，**“伽利略-周方变换”**表为：

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} x - ut \\ t \end{bmatrix}$$

于是，就得到**伽利略-周方变换**：

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} x - ut \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} x - ut \\ t \end{bmatrix}$$

逆变换式：

$$\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = \left(1 + \frac{u}{c}\right) \begin{bmatrix} x' + ut' \\ t' \end{bmatrix}$$

或表为：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - ut}{1 + \frac{u}{c}} \\ t' = \dfrac{t}{1 + \frac{u}{c}} \end{cases}$$

~~~~~~

四、“伽利略-周方变换”之导出（B）

从标准的**‘空间变换式’**出发进行演绎推导。

“时空变换”的数学表达式必须反映以下物理事实：

（1）在$t' = t = 0$时，K'**系**观测者（K'**系原点**）与K**系**观测者（K**系原点**）相重合。

（2）在t'，$t \geq 0$时，K'**系**相对于K**系**做速度为u的平移运动。

（3）两观测者持有相同的**‘时钟’**及相同的**‘量尺’**。
~~~~~~

因此，‘**空间变换式**’必须描述如下事实：“ K **系内** $x = ut$ **之点就是** K' **系之原点** $x' = 0$ ”。相应地，‘**空间变换式**’必须是‘**方程** $x' = k(x - ut)$ ， $k > 0$ ’。下面就从这个标准的‘**空间变换式**’ $x' = k(x - ut)$ ， $k > 0$ ’出发进行演绎，推导出客观存在的‘**时空变换**’。

空间变换式 $x' = k(x - ut)$ 的‘**逆函数**’为：

$$x = \frac{x'}{k} + ut = \frac{1}{k}(x' + kut)$$

即：

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{k}(x' + kut) = \dfrac{1}{k}(x' + ut') \\ t = \dfrac{1}{k}t' \end{cases}$$

换写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{k}\begin{bmatrix} x' + ut' \\ t' \end{bmatrix}$$

由此得到‘**互为正、逆函数**’的两组方程：

$$\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{k}\begin{bmatrix} x' + ut' \\ t' \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} x - ut \\ t \end{bmatrix}$$

下面确定系数 k 。

在某个时刻 t' ， K' **系观测者**观测到运动质点，形成**观测矢量** $\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix}$ ，由于光传播速率 c 为有限值（ $c \approx 3.0\times 10^5$ 仟米/秒），故在同一时刻 t' ，与 K' **系观测者**的距离为 ut' 的 K **系观测者**尚不能观测到该运动质点。直到 K' **系观测者**发出光波（电磁波）信号的时刻 t' 之后的时刻 t ： $t = t' + \dfrac{ut'}{c}$ ， K **系观测者**才观测到该运动质点。故有关系式：

$$t = t' + \frac{ut'}{c} = \left(1 + \frac{u}{c}\right)t'$$

将方程组中的关系式 $t = \dfrac{1}{k}t'$ 与此关系式 $t = \left(1 + \dfrac{u}{c}\right)t'$ 相对照，得 $k = \left(1 + \dfrac{u}{c}\right)^{-1}$ 。

将 $k = \left(1 + \dfrac{u}{c}\right)^{-1}$ 代入上面的两组方程 $\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = \dfrac{1}{k}\begin{bmatrix} x' + ut' \\ t' \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} x - ut \\ t \end{bmatrix}$ ，得**伽利略-周方变换**：

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} x-ut \\ t \end{bmatrix}$$

逆变换式：

$$\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = \left(1+\frac{u}{c}\right) \begin{bmatrix} x'+ut' \\ t' \end{bmatrix}$$

~~~~~~

五、“伽利略-周方变换”之导出（C）

我们还可以更简捷地推导出**伽利略-周方变换** $\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} x(t)-ut \\ t \end{bmatrix}$。

(1)在时刻 t': $x(t') = ut' + x'(t')$

(2) 在时刻 $t = t' + \frac{ut'}{c} = \left(1+\frac{u}{c}\right)t'$： $x(t) = ut + x'(t)$

$$= u\left(1+\frac{u}{c}\right)t' + x'(\left(1+\frac{u}{c}\right)t')$$

根据“光传播定律”得： $x(t) = u\left(1+\frac{u}{c}\right)t' + \left(1+\frac{u}{c}\right)x'(t') = \left(1+\frac{u}{c}\right)[ut' + x'(t')]$

于是，得： $$\begin{bmatrix} x(t) \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1+\frac{u}{c}\right)[ut' + x'(t')] \\ \left(1+\frac{u}{c}\right)t' \end{bmatrix}$$

即“伽利略-周方变换”：

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ t \end{bmatrix} = \left(1+\frac{u}{c}\right) \begin{bmatrix} x'(t')+ut' \\ t' \end{bmatrix}$$

逆变换式：

$$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} x(t)-ut \\ t \end{bmatrix}$$
~~~~~~

伽利略-周方变换$\begin{bmatrix} x(t) \\ t \end{bmatrix} = \left(1+\frac{u}{c}\right)\begin{bmatrix} x'(t')+ut' \\ t' \end{bmatrix}$的 K' 系时空点$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix}$与 K 系时空点$\begin{bmatrix} x(t) \\ t \end{bmatrix}$示于图 9。

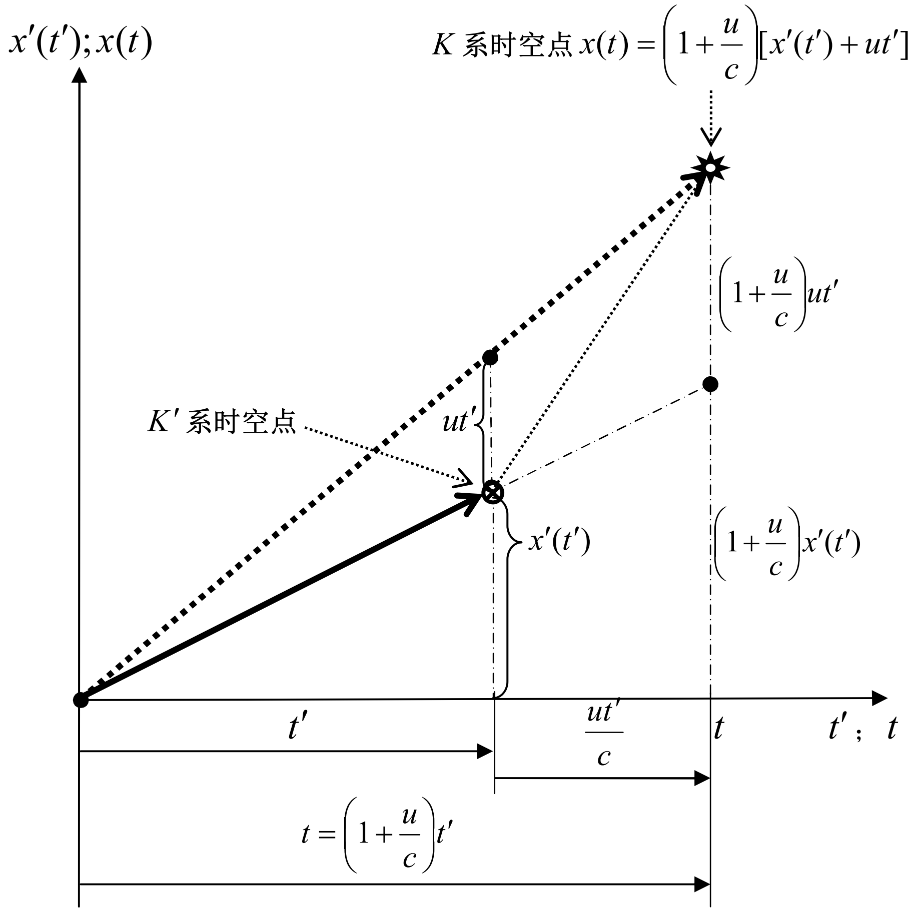


图 9 伽利略-周方变换的 K' 系时空点$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix}$与 K 系时空点$\begin{bmatrix} x(t) \\ t \end{bmatrix}$

~~~~~~~~~~~~~~~~ ~~~~~~~~~~~~~~~~ ~~~~~~~~~~~~~~~~

伽利略-周方变换的“速度变换式”——

将 $t' = \dfrac{t}{1+\frac{u}{c}}$ 代入 $x'(t') = \dfrac{x(t)-ut}{1+\frac{u}{c}}$：

$$x'\left(\frac{t}{1+\frac{u}{c}}\right) = x\left(\frac{t}{1+\frac{u}{c}}\right) - u\frac{t}{1+\frac{u}{c}}$$

$$x'(t') = x(t') - ut'$$

即：

$$x(t') = x'(t') + ut'$$
~~~~~~~~~~~~~~~~

在伽利略时空内，有：

$$t \equiv t' : x(t) = x'(t') + ut'$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx'(t')}{dt'}\frac{dt'}{dt} + \frac{d}{dt'}(ut')\frac{dt'}{dt}$$

得：
$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx'(t')}{dt'} + u$$

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx'(t')}{dt'} + u \text{（矢量合成三角形）}}$$

~~~~~~

六、“伽利略-周方变换”之性质

（A）伽利略-周方变换之‘正’变换 ——

将 $x = ct$ 代入 $\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} x - ut \\ t \end{bmatrix}$，得：

$$\begin{cases} x' = \left(1 + \dfrac{u}{c}\right)^{-1}(x - ut) = \left(1 + \dfrac{u}{c}\right)^{-1}(c - u)t \\ t' = \left(1 + \dfrac{u}{c}\right)^{-1} t \end{cases}$$

将 $t = \left(1 + \frac{u}{c}\right)t'$ 代入，得：

$$x' = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1}(c - u)t = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1}(c - u)\left(1 + \frac{u}{c}\right)t' = (c - u)t' = ct' - ut'$$

（B）伽利略-周方变换之‘逆’变换 ——

将 $x' = (c - u)t'$ 代入 $\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = \left(1 + \frac{u}{c}\right) \begin{bmatrix} x' + ut' \\ t' \end{bmatrix}$，得：

$$\begin{cases} x = \left(1 + \dfrac{u}{c}\right)(x' + ut') = \left(1 + \dfrac{u}{c}\right)[(c - u)t' + ut'] = \left(1 + \dfrac{u}{c}\right)ct' \\ t = \left(1 + \dfrac{u}{c}\right)t' \end{cases}$$
~~~~~~

将$t'=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t$代入，得：$x=\left(1+\frac{u}{c}\right)ct'=\left(1+\frac{u}{c}\right)c\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t=ct$

综合上述（A）及（B）之变换，可得：**伽利略-周方变换**$\{x=ct,\quad x'=(c-u)t'\}$。

伽利略时空$Gal.ST$ 内的**伽利略-周方变换**$\{x=ct,\quad x'=(c-u)t'\}$示于图 10。

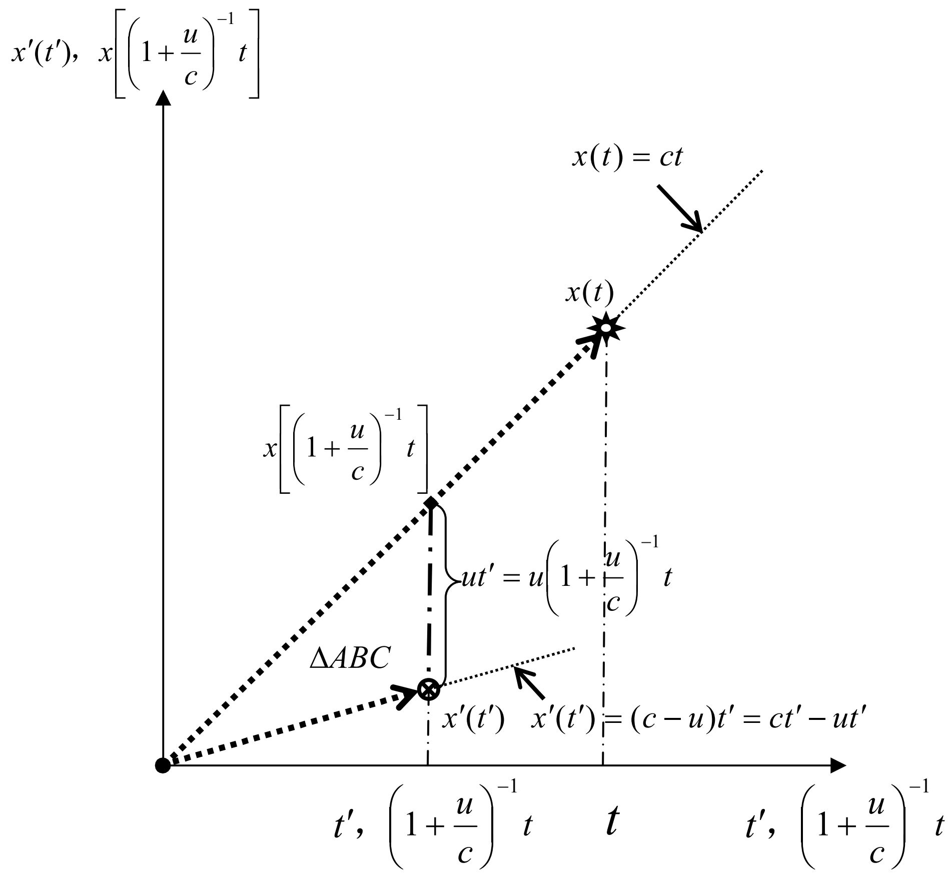


图 10 两观测者的观测矢量$\begin{bmatrix}ct\\t\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}ct'-ut'\\t'\end{bmatrix}$

（与图 2 对照）在图 10 中，在每个时刻$t'=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t$，两观测者**‘同时’**观测到运动质点（构成**‘伽利略变换’**）。在此时刻t'，K'系观测者的**观测矢量**$\begin{bmatrix}x'(t')\\t'\end{bmatrix}$与$K$系观测者的**观测矢量**$\begin{bmatrix}x\left[\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t\right]\\\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t\end{bmatrix}$通过两观测者之间的**距离**$ut'=u\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t$构成**‘矢量合成三角形**$\Delta ABC$**’**。

根据**“光传播定律”**，**伽利略-周方变换**$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} x(t)-ut \\ t \end{bmatrix}$可表示为：

$$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} x(t)-ut \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\left[\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} t\right] - u\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} t \\ \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} t \end{bmatrix}$$

由此得：

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{伽利略-周方变换} \begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} x(t)-ut \\ t \end{bmatrix} \\ \Updownarrow \\ \text{伽利略变换} \begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\left[\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} t\right] - u\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} t \\ \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} t \end{bmatrix} \end{array}}$$

伽利略-周方变换$\begin{bmatrix} \vec{r}'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \left(1+\dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} \vec{r}(t)-\vec{u}t \\ t \end{bmatrix} \Bigg\|_{\vec{u} \neq 0}$实际上就是在**‘两观测者有相对运动且真空中光传播速率为有限值（$u>0$）’**场合下，由于**‘多普勒效应’**导致两参考系之间的**‘时空度规比’**发生变动而在每个时刻$t' = \left(1+\dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)^{-1} t$下形成的**“伽利略变换”**

$$\begin{bmatrix} \vec{r}'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}\left[\left(1+\dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)^{-1} t\right] - \vec{u}\left(1+\dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)^{-1} t \\ \left(1+\dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)^{-1} t \end{bmatrix} \Bigg\|_{\vec{u} \geq 0} 。$$

所以，**伽利略时空**$Gal.ST$是**伽利略-周方变换**$\begin{bmatrix} \vec{r}'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \left(1+\dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} \vec{r}(t)-\vec{u}t \\ t \end{bmatrix} \Bigg\|_{\vec{u} \geq 0}$为**‘元素’**的**‘集合’**：

$$\boxed{Gal.ST \left\{ \quad \text{伽利略}-\text{周方变换} \begin{bmatrix} \vec{r}'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} \vec{r}(t)-\vec{u}t \\ t \end{bmatrix} \Bigg\|_{\vec{u} \geq 0} \quad \right\}}$$

伽利略-周方变换$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\left[\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} t\right] - u\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} t \\ \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} t \end{bmatrix}$示于图 11。

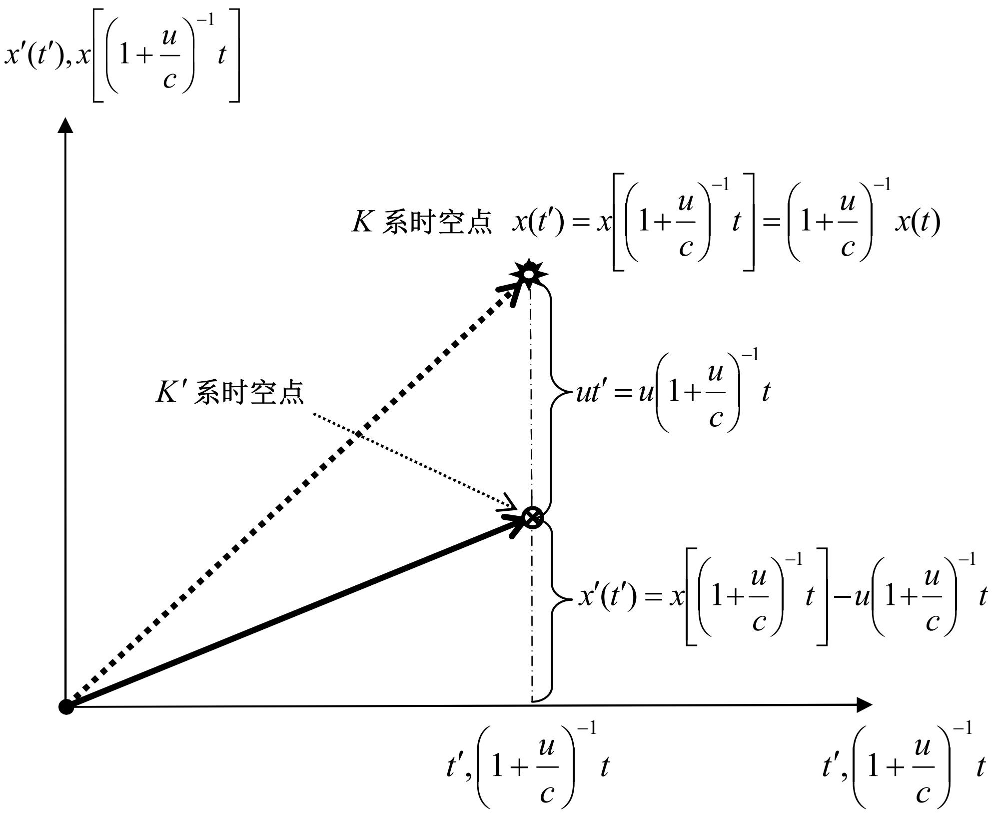


图 11 伽利略-周方变换$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\left[(1+u/c)^{-1} t\right] - u(1+u/c)^{-1} t \\ (1+u/c)^{-1} t \end{bmatrix}$

伽利略-周方变换可表为时刻$t' = \left(1+\dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)^{-1} t$时的伽利略变换：

$$\begin{bmatrix}\vec r'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec r\left[\left(1+\frac{|\vec u|}{c}\right)^{-1}t\right]-\vec u\left(1+\frac{|\vec u|}{c}\right)^{-1}t\\ \left(1+\frac{|\vec u|}{c}\right)^{-1}t\end{bmatrix}$$

逆变换为：

$$\begin{bmatrix}\vec r(t)\\ t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec r'\left[\left(1+\frac{|\vec u|}{c}\right)t'\right]+\vec u\left(1+\frac{|\vec u|}{c}\right)t'\\ \left(1+\frac{|\vec u|}{c}\right)t'\end{bmatrix}$$

伽利略-周方变换$\begin{bmatrix}x'\\ t'\end{bmatrix}=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix}x-ut\\ t\end{bmatrix}$的逆变换$\begin{bmatrix}x\\ t\end{bmatrix}=\left(1+\frac{u}{c}\right)\begin{bmatrix}x'+ut'\\ t'\end{bmatrix}$示于图 12。

（与图 3 对照）

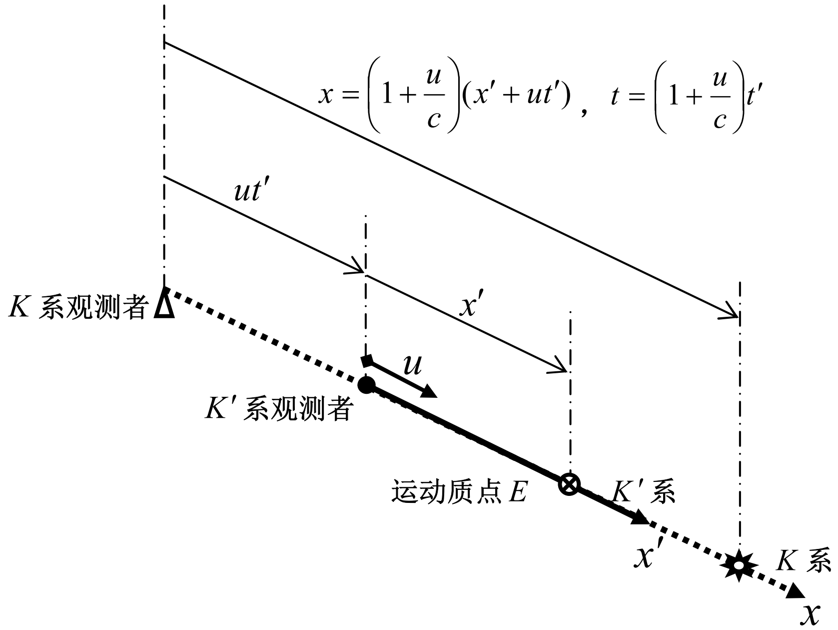


图 12 伽利略-周方变换$\begin{bmatrix}x\\ t\end{bmatrix}=\left(1+\frac{u}{c}\right)\begin{bmatrix}x'+ut'\\ t'\end{bmatrix}$

伽利略-周方变换$\begin{bmatrix}x(t)\\ t\end{bmatrix}=\left(1+\frac{u}{c}\right)\begin{bmatrix}x'(t')+ut'\\ t'\end{bmatrix}$的 K' 系时空点$\begin{bmatrix}x'(t')\\ t'\end{bmatrix}$与 K 系时空点$\begin{bmatrix}x(t)\\ t\end{bmatrix}$示于图 13。

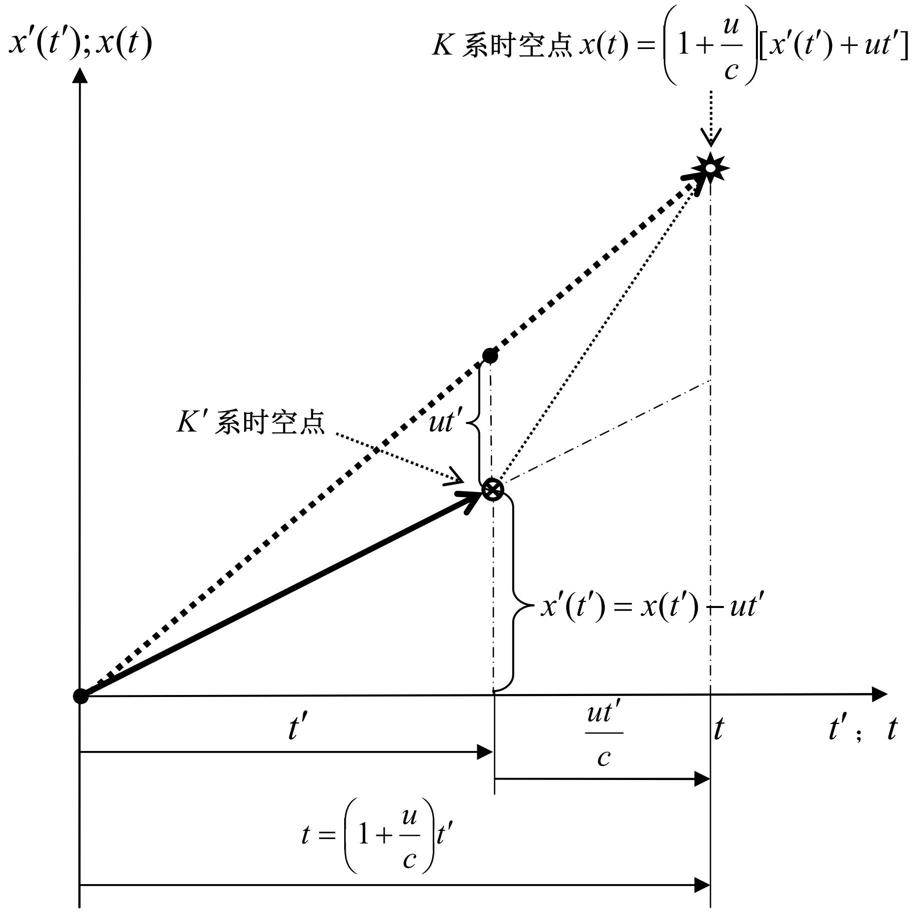


图 13 伽利略-周方变换的 K' 系时空点 $\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix}$ 与 K 系时空点 $\begin{bmatrix} x(t) \\ t \end{bmatrix}$

解读图 13：（参看图 11、图 12）

（1）在 t'，$t \geq 0$ 时，K' 系对 K 系沿 $x(x')$ 轴正方向始终作速度为 u 的相对运动。

（2）在时刻 t'，**运动质点**（**闪光点**）在 K' 系内的位置为 $x'(t') = x(t') - ut'$，而此时 K' 系**观测者**在 K 系内的位置为 ut'，故**运动质点**（**闪光点**）在 K 系内的位置为 $x(t') = x'(t') + ut'$。若不考虑光的传播速率（或假设光以无穷大之速率进行传播），则在 K' 系**观测者**‘接收’并‘发出’运动质点信息之时刻 t'，K **系观测者**可以与在他前方距离为 ut' 的 K' **系观测者**同时观测到该**运动质点**（**闪光点**）。可是，因为光的传播速率为有限值，所以 K **系观测者**在时刻 t' 尚不能与 K' **系观测者**同时观测到该**运动质点**，而只能在滞后于时刻 t' 的时刻 $t = \left(1+\frac{u}{c}\right)t'$ 观测到该**运动质点**。根据**“光传播定律”**，**伽利略时空内任意时空点** $\begin{bmatrix} x(t) \\ t \end{bmatrix}$ 的

“传播时空弹性”恒为$\varepsilon_{xt} = \dfrac{d\ln x(t)}{d\ln t} = 1$，故在延迟时刻$t = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)t'$，运动质点（闪光点）在$K$系内的位置相应地为$x(t) = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)[x'(t') + ut']$。

~~~~~~~~~~~~~~~　　~~~~~~~~~~~~~~~　　~~~~~~~~~~~~~~~

下面验证，**伽利略-周方变换**满足“**相对性原理**”：

取**伽利略-周方变换**$\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)\begin{bmatrix} x'+ut' \\ t' \end{bmatrix}$，记$\left(1+\dfrac{u}{c}\right) = k'$，则**伽利略-周方变换**$\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)\begin{bmatrix} x'+ut' \\ t' \end{bmatrix}$可以换写成方程组：

$$\begin{cases} x = k'(x'+ut') \\ t = k't' \end{cases}$$

求‘**逆函数**’：

$$\begin{cases} k'x' + k'ut' = x \\ 0x' + k't' = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\begin{vmatrix} x & k'u \\ t & k' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k' & k'u \\ 0 & k' \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{k'}(x-ut) \\[4ex] t' = \dfrac{\begin{vmatrix} k' & x \\ 0 & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k' & k'u \\ 0 & k' \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{k'}t \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \frac{1}{k'}\begin{bmatrix} x-ut \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix} x-ut \\ t \end{bmatrix}$$

~~~~~~~~~~~~~~~　　~~~~~~~~~~~~~~~　　~~~~~~~~~~~~~~~

计算示例：设 K' 系时空轨迹为 $x'(t') = 1 + \sin t'$，代入伽利略–周方变换 $\begin{bmatrix} x(t) \\ t \end{bmatrix} = \left(1 + \frac{u}{c}\right)\begin{bmatrix} x'(t') + ut' \\ t' \end{bmatrix}$ 的方程组：$x(t) = \left(1 + \frac{u}{c}\right)[x'(t') + ut']$ 及 $t = \left(1 + \frac{u}{c}\right)t'$，则 K 系时空轨迹为：

$$x = \left(1 + \frac{u}{c}\right)(1 + \sin t' + ut') = \left(1 + \frac{u}{c}\right)(1 + \sin t') + \left(1 + \frac{u}{c}\right)ut' = \left(1 + \frac{u}{c}\right)(1 + \sin t') + ut$$

$$= \left(1 + \frac{u}{c}\right)\left(1 + \sin \frac{t}{1 + \frac{u}{c}}\right) + ut 。$$

计算结果示于图 14。

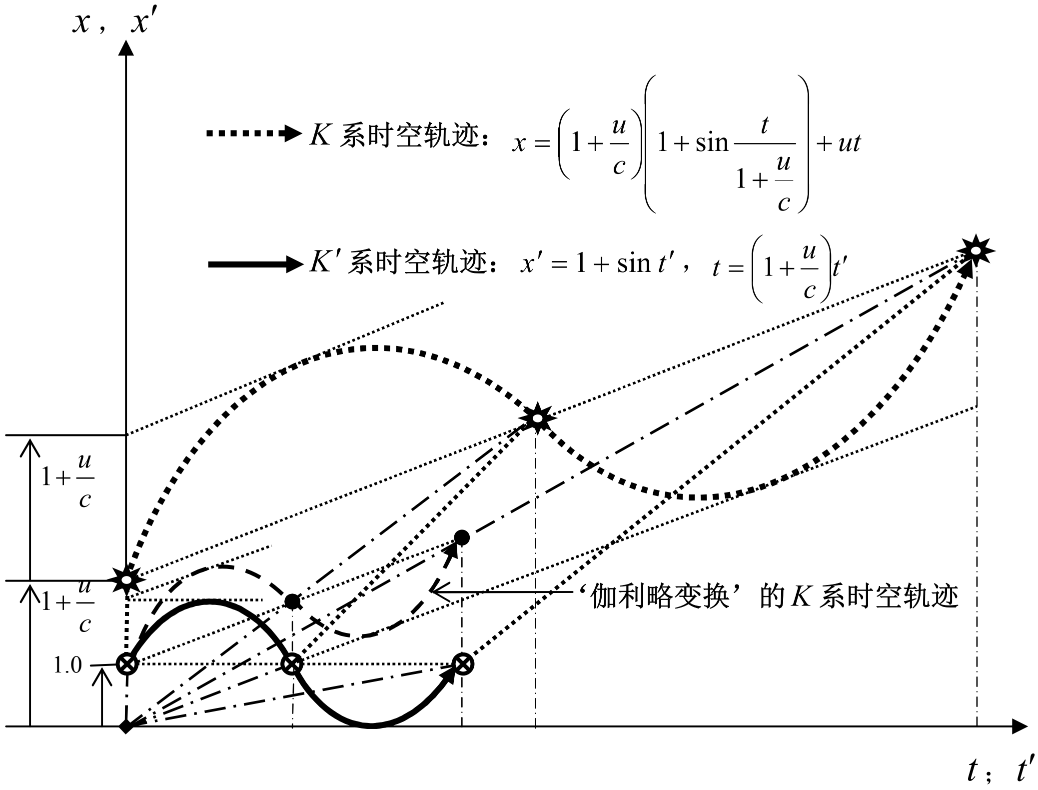


图 14 伽利略–周方变换下 K' 系时空轨迹与 K 系时空轨迹之间的‘协变’

图 13 与图 14 展示了运动质点（‘闪光点’）的 K' 系时空轨迹 $x' = 1 + \sin t'$ 在伽利略-周方变换下与 K 系时空轨迹 $x = \left(1 + \frac{u}{c}\right)\left(1 + \sin \frac{t}{1 + \frac{u}{c}}\right) + ut$ ‘协变’（‘形状相似’）情况。

（1）由于 K' 系观测者与 K 系观测者之间有相对运动（u）且真空中光传播速率为有限值

（c），因而使得从K'系观测者向K系观测者传播的波动产生‘多普勒效应’（“红移”）。

因此，在K系观测者看来，K'系中的波动变慢至$\left(1+\frac{u}{c}\right)$倍[即频率变低至$\left(1+\frac{u}{c}\right)$倍]，

这等同于波动周期变大至$\left(1+\frac{u}{c}\right)$倍。

（2）K系观测者的K系时空点$\begin{bmatrix} x(t) \\ t \end{bmatrix}$满足‘光传播定律’：“光传播时空弹性”为

$\varepsilon_{xt}=\dfrac{d\ln x(t)}{d\ln t}=1$，所以，在$K$系观测者看来，$K'$系中的波动周期变大至$\left(1+\frac{u}{c}\right)$倍，

就使得波长与振幅均变大至$\left(1+\frac{u}{c}\right)$倍。

总体情况是：在K系观测者看来，K'系中的波动是：频率变低至$\left(1+\frac{u}{c}\right)$倍，即周期

变大至$\left(1+\frac{u}{c}\right)$倍，致使波长及振幅均变大至$\left(1+\frac{u}{c}\right)$倍。

~~~~~~

七、两观测者之间的‘相离运动’与‘相向运动’

在两观测者相对速度为$\vec{u}=\begin{bmatrix} u & 0 & 0 \end{bmatrix}^T=const.$的场合下，（一般）伽利略-周方变换（**General Galilean-Zhou Transformation**）的变换方程组$\begin{bmatrix} \vec{r}'(t') \\ t' \end{bmatrix}=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix} \vec{r}(t)-\vec{u}t \\ t \end{bmatrix}$便成为以下形式的（特殊）伽利略-周方变换（**Special Galilean-Zhou Transformation**）：

$$\begin{cases} x=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)(x'+ut') \\ y=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)y' \\ z=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)z' \\ t=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)t' \end{cases} \qquad \begin{cases} x'=\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}(x-ut) \\ y'=\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}y \\ z'=\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}z \\ t'=\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}t \end{cases}$$
~~~~~~

****

（一）两观测者之间的相离运动

两观测者相离运动下**伽利略-周方变换**的 K 系时空点示于图 15、图 16、图 17。

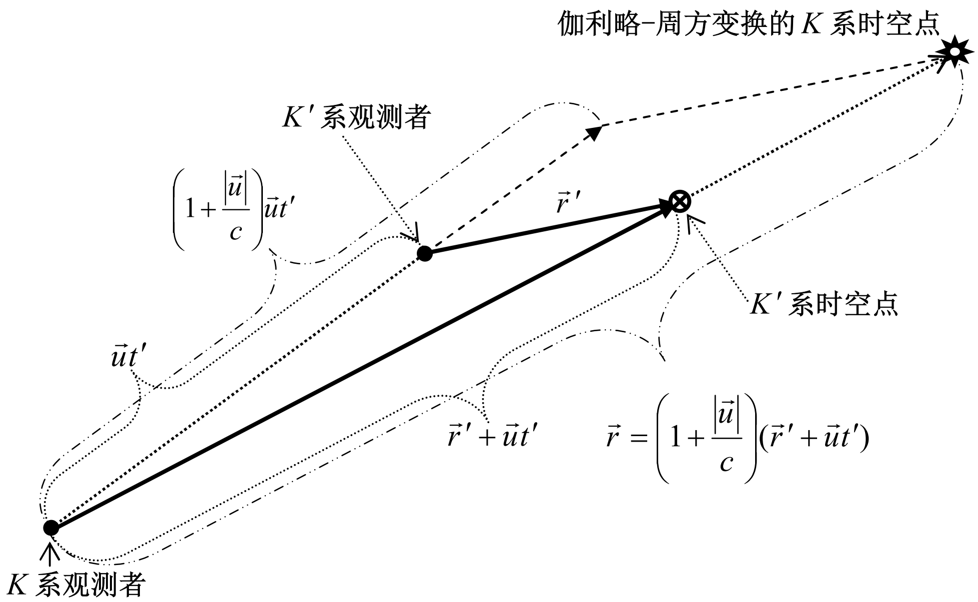


图 15 两观测者相离运动下伽利略-周方变换的 K 系时空点

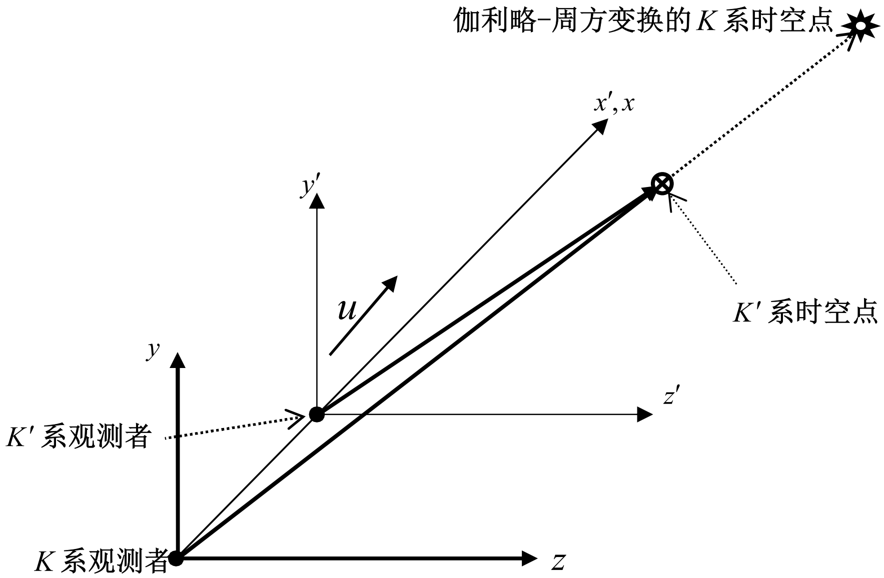


图 16 两观测者相离运动下伽利略-周方变换的 K 系时空点

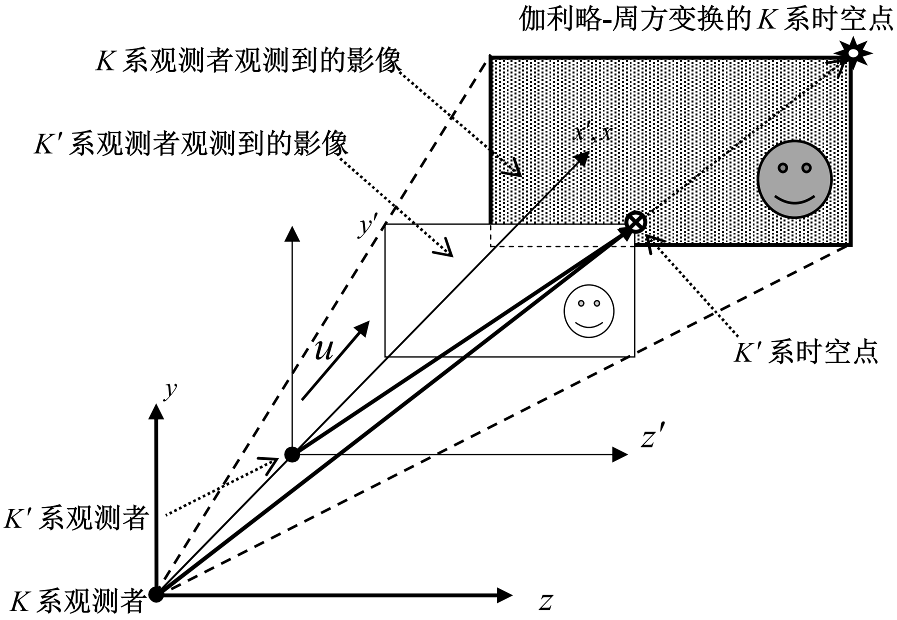


图 17 两观测者相离运动下伽利略-周方变换的 K 系时空点

****

（二）两观测者之间的相向运动

两观测者相向运动下伽利略-周方变换的 K 系时空点示于图 18、图 19、图 20。

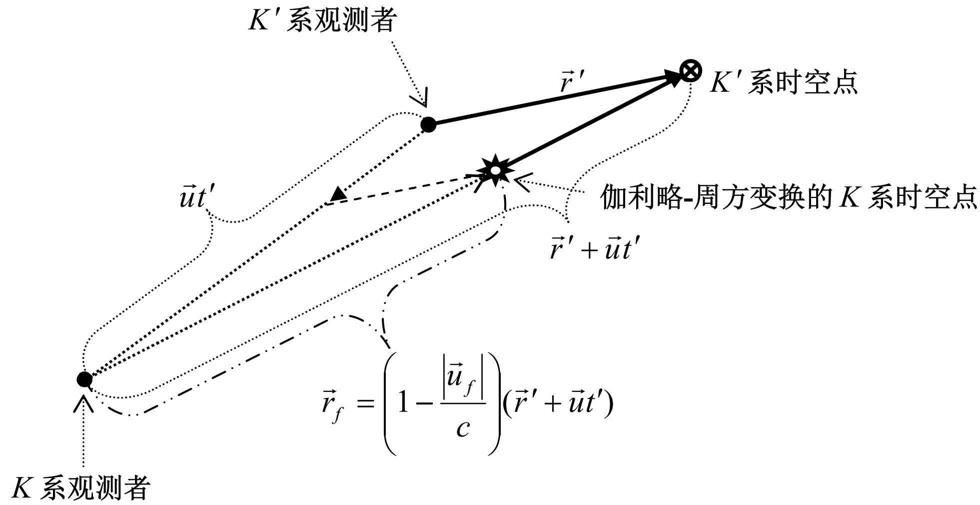


图 18 两观测者相向运动下伽利略-周方变换的 K 系时空点

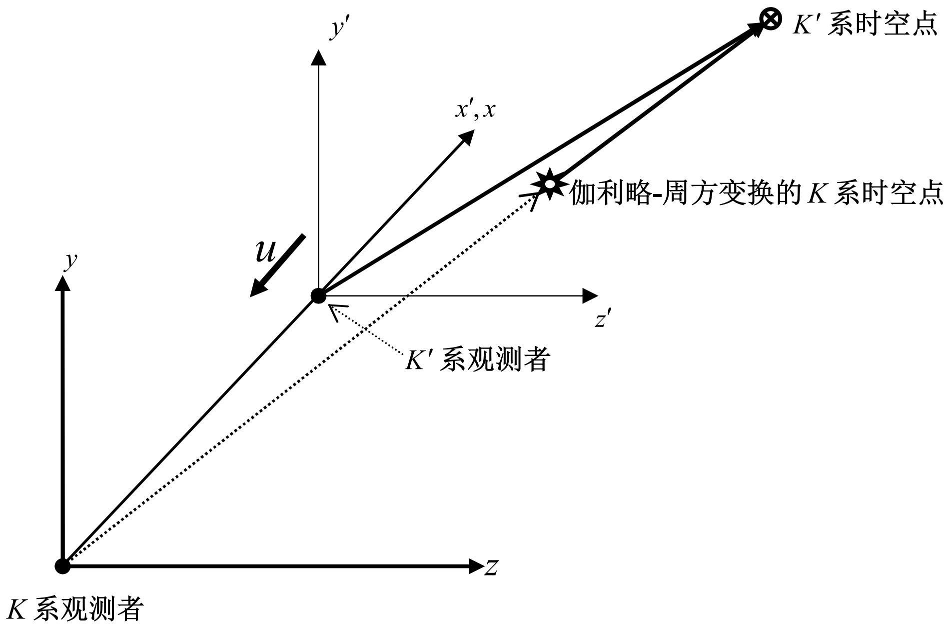


图 19 两观测者相向运动下伽利略-周方变换的 K 系时空点

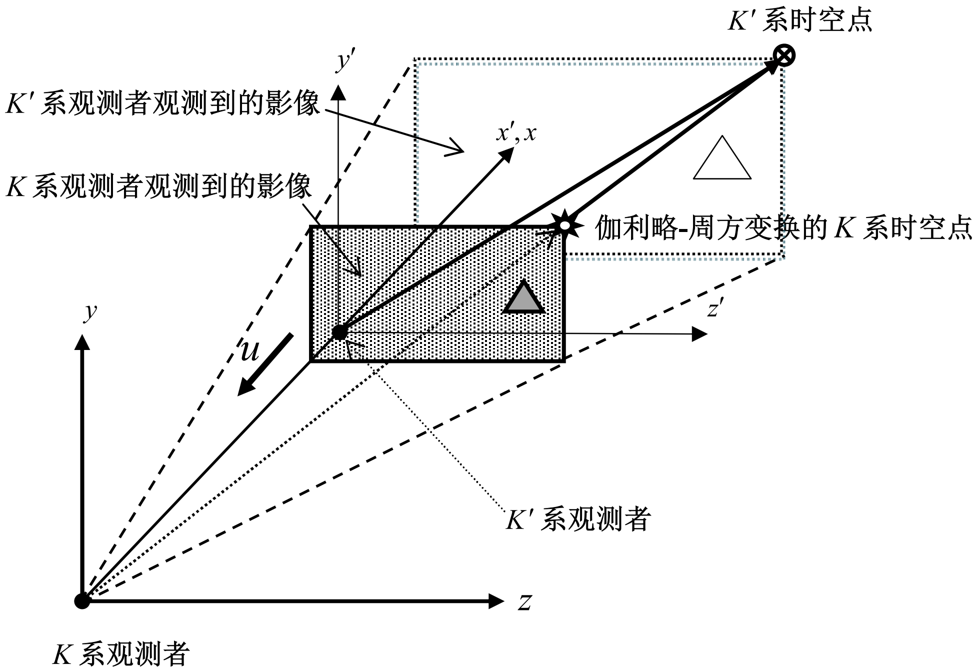


图 20 两观测者相向运动下伽利略-周方变换的 K 系时空点

~~~~~~

八、（特殊）伽利略-周方变换计算示例

设：某运动质点的 K' 系时空轨迹为 $x'(t') = 1 + \sin t'$， $y'(t') = at'^2$， $z'(t') = bt'^3$ 。

将 $x'(t') = 1 + \sin t'$， $y'(t') = at'^2$， $z'(t') = bt'^3$ 代入（特殊）伽利略-周方变换方程组：
~~~~~~

$$\begin{cases} x = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)(x'+ut') \\ y = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)y' \\ z = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)z' \\ t = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)t' \end{cases}$$

得出该运动质点的 K 系时空轨迹：

$$\begin{cases} x(t) = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)[x'(t')+ut'] = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)(1+\sin t'+ut') = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)\left(1+\sin\dfrac{t}{1+\dfrac{u}{c}}\right)+ut \\ y(t) = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)at'^2 = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)at^2\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-2} = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}at^2 \\ z(t) = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)bt'^3 = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)bt^3\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-3} = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-2}bt^3 \\ t = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)t' \end{cases}$$

反之，将 $x(t) = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)\left(1+\sin\dfrac{t}{1+\dfrac{u}{c}}\right)+ut$，$y(t) = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}at^2$，$z(t) = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-2}bt^3$ 代入

“逆变换”：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}(x-ut) \\ y' = \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}y \\ z' = \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}z \\ t' = \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}t \end{cases}$$

得出该运动质点的 K' 系时空轨迹：

$$
\begin{cases}
x'(t') = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}\left[\left(1+\dfrac{u}{c}\right)\left(1+\sin\dfrac{t}{1+\dfrac{u}{c}}\right)+ut-ut\right] = 1+\sin\dfrac{t}{1+\dfrac{u}{c}} = 1+\sin t' \\
y'(t') = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} y(t) = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}\left(1+\dfrac{u}{c}\right)at'^2 = at'^2 \\
z'(t') = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} z(t) = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-2} bt^3 = bt'^3 \\
t' = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} t
\end{cases}
$$

~~~~~~~~~~~~~~~ ~~~~~~~~~~~~~~~ ~~~~~~~~~~~~~~~

计算结果 —K'系时空轨迹[$x'(t')$, $y'(t')$, $z'(t')$]与相应的K系时空轨迹[$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$] — 示于图 21、图 22、图 23。

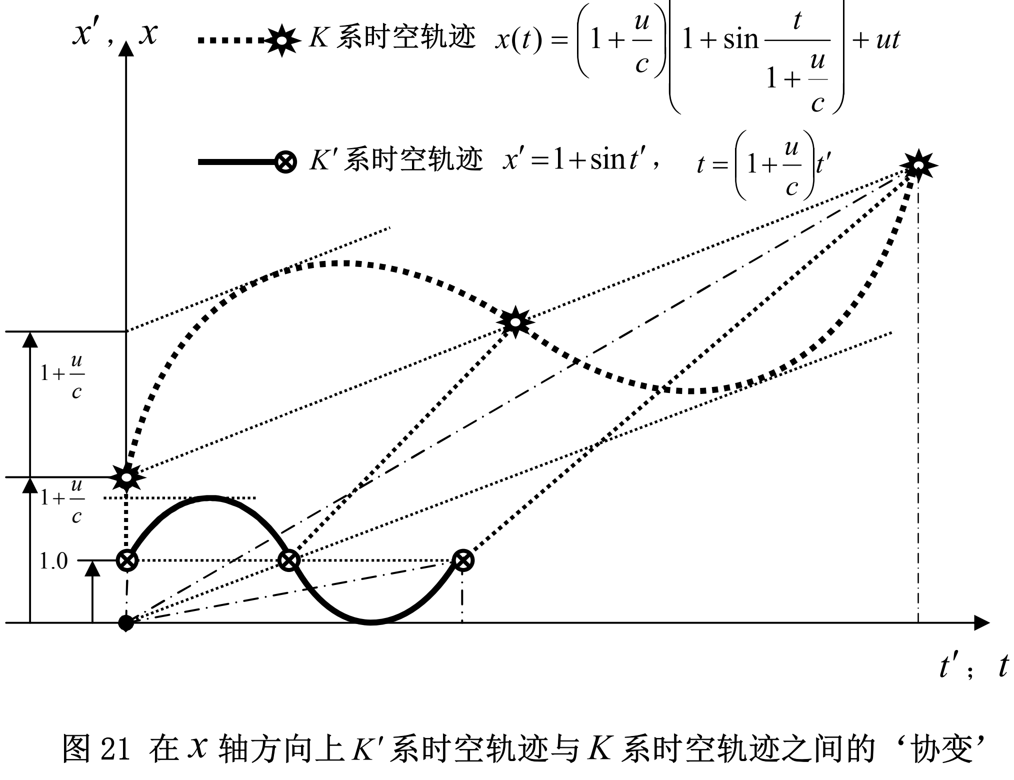


图 21 在x轴方向上K'系时空轨迹与K系时空轨迹之间的‘协变’
~~~~~~~~~~~~~~~

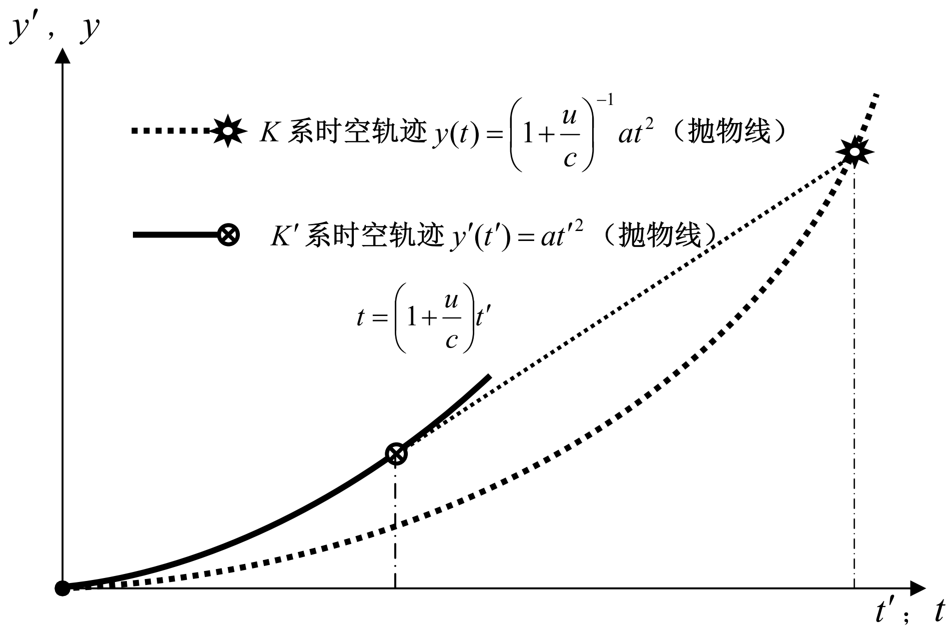


图 22 在 y 轴方向上 K' 系时空轨迹与 K 系时空轨迹之间的‘协变’

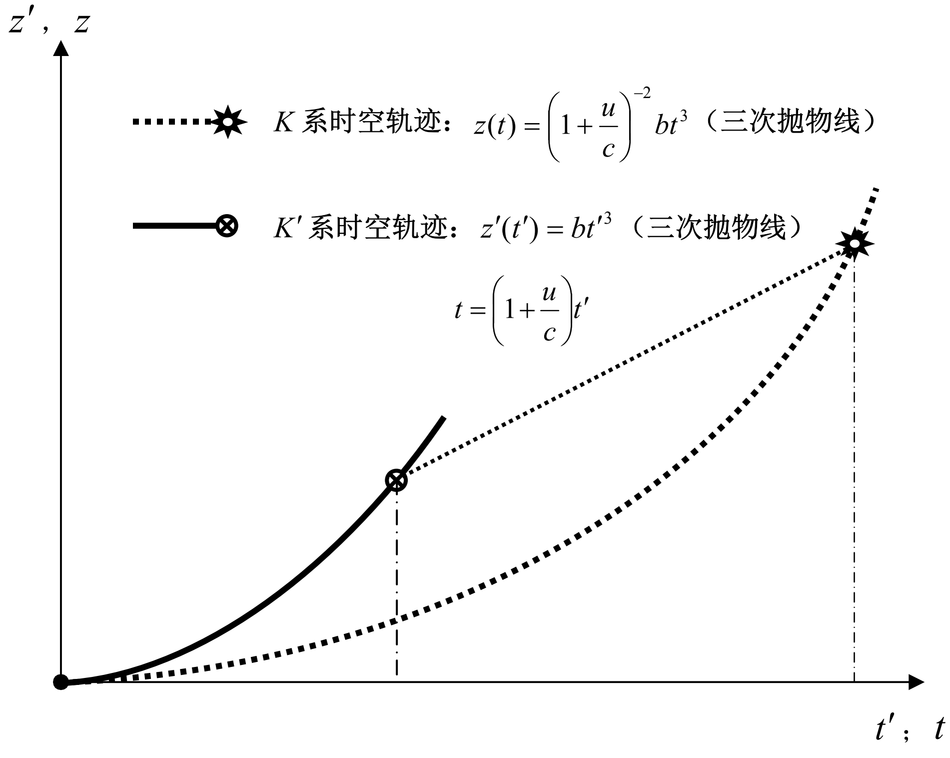


图 23 在 z 轴方向上 K' 系时空轨迹与 K 系时空轨迹之间的‘协变’

图 21、图 22 及图 23 揭示了 K 系时空轨迹与 K' 系时空轨迹之间的‘**协变**’关系，展示了‘**两观测者**’场合下的“**世界线**”（**两条相似的曲线**），证明了“**伽利略相对性原理**”，

即验证了所谓的**‘伽利略大船’**现象。

~~~~~~

结 论

（1）根据闵可夫斯基时空 $Min.ST$ 内‘时刻 τ 有排它性’之特点，闵可夫斯基时空 $Min.ST$（**Minkowski Space-time**）可定义为如下‘集合’：

$$Min.ST\left\{\quad \text{恒等变换}\begin{bmatrix}\vec{r}'(\tau')\\ \tau'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\vec{r}(\tau)\\ \tau\end{bmatrix}\Bigg\|\vec{u}=0\quad\right\}$$

（$\vec{u}$ 为两观测者之间的相对速度）

即：闵可夫斯基时空 $Min.ST$ 是恒等变换 $\begin{bmatrix}\vec{r}'(\tau')\\ \tau'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\vec{r}(\tau)\\ \tau\end{bmatrix}\Bigg\|\vec{u}=0$ 为‘元素’的‘（单元素）集合’。

恒等变换 $\begin{bmatrix}\vec{r}'(\tau')\\ \tau'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\vec{r}(\tau)\\ \tau\end{bmatrix}\Bigg\|\vec{u}=0$ 又称为‘零’变换（**‘Null’ Transformation**）。‘零’变换实际上就是‘无’变换。

闵可夫斯基时空 $Min.ST\left\{\quad \text{恒等变换}\begin{bmatrix}\vec{r}'(\tau')\\ \tau'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\vec{r}(\tau)\\ \tau\end{bmatrix}\Bigg\|\vec{u}=0\quad\right\}$ 为“运动质点（‘闪光点’）只被‘一个’观测者（‘闪光点’处的‘抵近观测者’）观测到”的“一人世界”。

（2）伽利略时空 $Gal.ST$ 是伽利略-周方变换 $\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\vec{r}(t)-\vec{u}t\\ t\end{bmatrix}\Bigg\|\vec{u}\geq 0$ 为‘元素’的‘集合’：

$$Gal.ST\left\{\quad \text{伽利略}-\text{周方变换}\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\vec{r}(t)-\vec{u}t\\ t\end{bmatrix}\Bigg\|\vec{u}\geq 0\quad\right\}$$

伽利略时空 $Gal.ST$ 为“运动质点（‘闪光点’）可以被至少两个观测者（‘闪光点’处的‘抵近观测者’与至少一个离开‘闪光点’的‘远处观测者’）‘同时’观测到”的“多人世界”。
~~~~~~

（3）参看图 6：

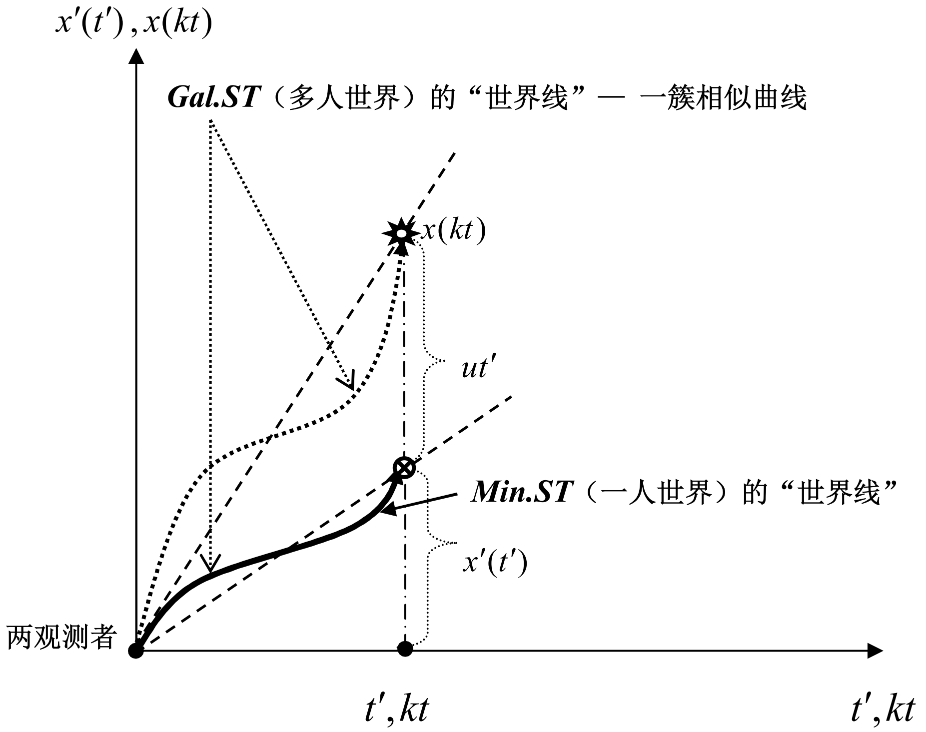


图 6 ***Min.ST*** 的“世界线”与 ***Gal.ST*** 的“世界线”之关系

显然，有：

$$Min.ST\left\{\quad 恒等变换\begin{bmatrix}\vec{r}'(\tau')\\ \tau'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\vec{r}(\tau)\\ \tau\end{bmatrix}\Bigg|\vec{u}=0\quad\right\}$$

$$\subset\ Gal.ST\left\{\quad 伽利略-周方变换\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\vec{r}(t)-\vec{u}t\\ t\end{bmatrix}\Bigg|\vec{u}\geq 0\quad\right\}$$

$\subset$ “宇宙时空”（“绝对时空”）

因为 $Min.ST$ 为恒等变换 $\begin{bmatrix}\vec{r}'(\tau')\\ \tau'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\vec{r}(\tau)\\ \tau\end{bmatrix}\Bigg|\vec{u}=0$ 的‘（单元素）集合’，故有：

$$恒等变换\begin{bmatrix}\vec{r}'(\tau')\\ \tau'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\vec{r}(\tau)\\ \tau\end{bmatrix}\Bigg|\vec{u}=0$$

$$\in\ Gal.ST\left\{\quad 伽利略-周方变换\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\vec{r}(t)-\vec{u}t\\ t\end{bmatrix}\Bigg|\vec{u}\geq 0\quad\right\}$$

从而有：

$$\text{恒等变换}\begin{bmatrix}\vec{r}'(\tau')\\ \tau'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\vec{r}(\tau)\\ \tau\end{bmatrix}\Bigg|\vec{u}=0 \Leftrightarrow \text{伽利略-周方变换}\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\vec{r}(t)-\vec{u}t\\ t\end{bmatrix}\Bigg|\vec{u}=0$$

伽利略时空$Gal.ST$为“多人世界”。因此，在闵可夫斯基时空$Min.ST$（“一人世界”）内推导出的‘数学（物理）公式’（如 **Maxwell** 电磁方程组以及‘狭义相对论’、‘广义相对论’的各种数学‘结论’、‘判断’及‘预言’）都必须通过伽利略时空$Gal.ST$（“多人世界”）内的“伽利略-周方变换”作出‘验证’，才能使这些‘数学（物理）公式’及‘结论’具有确切而现实的物理涵义，否则这些公式只不过是一种数学上的“猜测”而已。

（4）

a. 洛伦兹变换$\left[x'=\frac{x-u\tau}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},\tau'=\frac{\tau-\frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right]\Bigg|0\le u^2<c^2 \Leftrightarrow$ 恒等变换$\begin{bmatrix}x'\\ \tau'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}x\\ \tau\end{bmatrix}\Bigg|u=0$，适应于“无多普勒效应或多普勒效应微不足道的（电磁波）有线传输及（光粒子）光纤传输”之场合，如通过显微镜、医用内窥镜、（手持）望远镜等‘物镜-目镜’无相对运动（$\vec{u}=0$）的透视系统‘直接观测’实时图景。

b. 伽利略-周方变换$\begin{bmatrix}x'\\ t'\end{bmatrix}=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix}x-ut\\ t\end{bmatrix}\Bigg|u>0$适应于“有多普勒效应的（光波，电磁波）无线传输”之场合，如通过‘太空望远镜’或‘太空飞船’、‘火星车’等‘物镜-目镜’有相对运动（$\vec{u}\neq 0$）的透视系统‘观测’遥远星系运动的实时图景。

c. 在闵可夫斯基时空$Min.ST$内推导出的‘狭义相对论’、‘广义相对论’的数学‘理论’有两种：‘微观理论’（关于微观粒子运动的理论）与‘宏观理论’（关于太空星系运动的理论）。‘微观理论’只能使用‘光信号有线传输方式’通过恒等变换$\begin{bmatrix}x'\\ \tau'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}x\\ \tau\end{bmatrix}\Bigg|u=0$进行‘验证’。‘宏观理论’及‘宇观理论’无法使用‘（光子）信号有线传输方式’通过恒等变换$\begin{bmatrix}x'\\ \tau'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}x\\ \tau\end{bmatrix}\Bigg|u=0$进行‘验证’，而必须运用‘（光波即电磁波）信号无线传输方式’（如太空望远镜、‘太空飞船’、‘火星车’等）通过伽利略-周方变换

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} x-ut \\ t \end{bmatrix} \Bigg\| u>0$$ 进行‘验证’。

d. 只有通过伽利略时空 $Gal.ST$ 内惟一的客观存在的‘时空变换’— 伽利略-周方变换

$$\begin{bmatrix} \vec{r}'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} \vec{r}(t)-\vec{u}t \\ t \end{bmatrix}$$ 才能揭示太空星系以往的实时图景。

~~~~~~~~~~~~~~~~ ~~~~~~~~~~~~~~~~ ~~~~~~~~~~~~~~~~

此外，文中还首次揭示了“伽利略时空”内一条重要定律：“光传播定律”— “伽利略时空”内任意时空点（‘运动质点’，‘2 闪光点’）上的“光传播时空弹性”恒等于 1。“光传播定律”也称为“真空中光传播速率为恒定值定律”或简称“光速不变性（绝对性）定律”— “在任意时空点（‘闪光点’），真空中光传播速率为恒定值 $c=1\Big/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$，乃是光的固有属性，与光在哪个参考系内进行传播无关”。这条定律为“运动观测理论”的基础定律。

~~~~~~

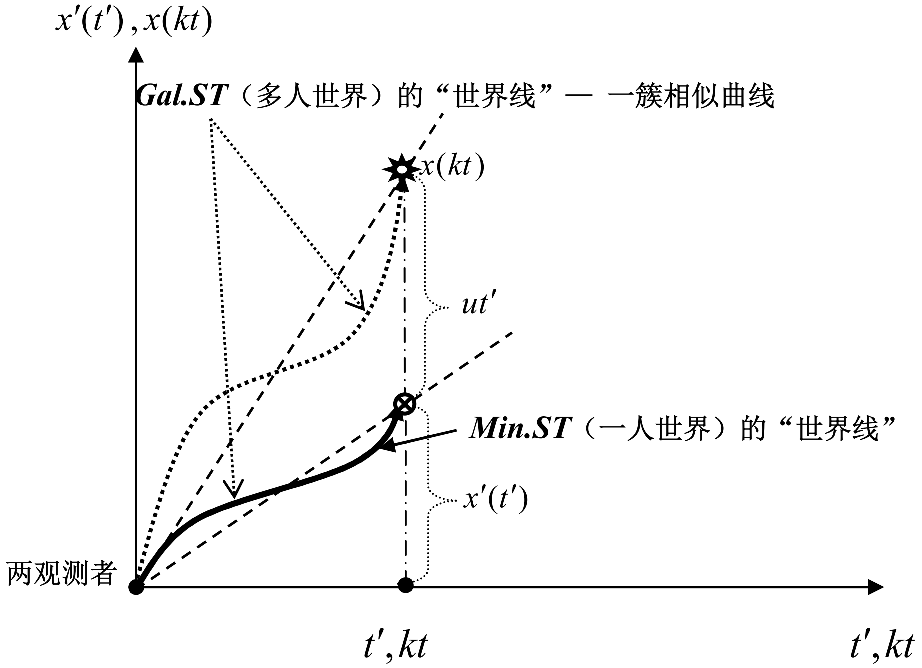
	特　　性　　与　　定　　义
$Min.ST$	‘时刻τ’具有‘排它性’：在任一时刻，运动质点（‘闪光点’）只可被‘一个’观测者（运动质点处的‘抵近观测者’）观测到。$Min.ST$（**Minkowski Space-time**）可定义为‘集合’： $$\boxed{\left\{ \begin{bmatrix} \vec{r}'(\tau') \\ \tau' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \vec{r}'(\tau) \\ \tau \end{bmatrix} \right\}}$$ $\Updownarrow$ $$\boxed{\left\{ \begin{bmatrix} \vec{r}'(\tau') \\ \tau' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \vec{r}(\tau) \\ \tau \end{bmatrix} \right\}}$$ $\Updownarrow$ $$\left\{ \text{恒等变换} \begin{bmatrix} \vec{r}'(\tau') \\ \tau' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \vec{r}(\tau) \\ \tau \end{bmatrix} \Bigg\|_{\vec{u}=0} \right\}$$ （$\vec{u}$ 为两观测者之间的相对速度） 即：$Min.ST$ 为恒等变换$\begin{bmatrix} \vec{r}'(\tau') \\ \tau' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \vec{r}(\tau) \\ \tau \end{bmatrix} \Bigg\|_{\vec{u}=0}$ 的‘（单元素）集合’。
$Gal.ST$	‘时刻t’不具‘排它性’：在任一时刻，运动质点（‘闪光点’）可以被‘至少两个’观测者 “同时”（$t' \equiv kt, k = f(\vec{u})$，$\vec{u}$ 为两观测者之间的相对速度）观测到。$Gal.ST$（**Galilean Space-time**）可定义为‘集合’： $$\boxed{Gal.ST \left\{ \text{伽利略变换} \begin{bmatrix} \vec{r}'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}(kt) - \vec{u} \bullet kt \\ kt \end{bmatrix} \Bigg\|_{k = f(\vec{u}), \vec{u} \geq 0} \right\}}$$ 即：$Gal.ST$ 为伽利略变换$\begin{bmatrix} \vec{r}'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}(kt) - \vec{u} \bullet kt \\ kt \end{bmatrix} \Bigg\|_{k = f(\vec{u}), \vec{u} \geq 0}$ 的‘集合’。

<table>
<tr><td></td><td>“世界线”</td></tr>
<tr><td>Min.ST</td><td>“运动质点只被‘一个’观测者（运动质点处的‘抵近观测者’）观测到”的“一人世界”，“世界线”为：

通过两观测者‘重合点’的单一曲线
$\tau' \equiv \tau$：
$$\begin{cases} x'(\tau') = \Phi(\tau') \\ x(\tau) = \Phi(\tau) \end{cases}$$
（参看图 1）</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Gal.ST</td><td>“运动质点可被至少两个观测者（运动质点处的‘抵近观测者’与至少一个离开运动质点的‘远处观测者’）‘同时’观测到”的“多人世界”，“世界线”为：

通过两观测者‘重合点’的呈簇状的多条相似曲线
$t' \equiv kt$
$$\begin{cases} x(kt) = \Phi(kt) \\ x'(t') = \Phi(t') - ut' \end{cases}$$
（参看图 5）</td></tr>
</table>

参看图 6：



$$Min.ST\left\{\quad \text{恒等变换}\begin{bmatrix}\vec r'(\tau')\\ \tau'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\vec r(\tau)\\ \tau\end{bmatrix}\Bigg|_{\vec u=0}\quad\right\}$$

$$\subset\ Gal.ST\left\{\quad \text{伽利略}-\text{周方变换}\begin{bmatrix}\vec r'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\left(1+\frac{|\vec u|}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\vec r(t)-\vec u t\\ t\end{bmatrix}\Bigg|_{\vec u\geq 0}\quad\right\}$$

$\subset$ “宇宙时空”（“绝对时空”）

因为 $Min.ST$ 为恒等变换 $\begin{bmatrix}\vec r'(\tau')\\ \tau'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\vec r(\tau)\\ \tau\end{bmatrix}\Bigg|_{\vec u=0}$ 的‘（单元素）集合’，故有：

$$\text{恒等变换}\begin{bmatrix}\vec r'(\tau')\\ \tau'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\vec r(\tau)\\ \tau\end{bmatrix}\Bigg|_{\vec u=0}$$

$$\in\ Gal.ST\left\{\quad \text{伽利略}-\text{周方变换}\begin{bmatrix}\vec r'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\left(1+\frac{|\vec u|}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\vec r(t)-\vec u t\\ t\end{bmatrix}\Bigg|_{\vec u\geq 0}\quad\right\}$$

$$\begin{bmatrix}\vec r'(\tau')\\ \tau'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\vec r(\tau)\\ \tau\end{bmatrix}\Bigg|_{\vec u=0}\Leftrightarrow \text{伽利略-周方变换}\begin{bmatrix}\vec r'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\left(1+\frac{|\vec u|}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\vec r(t)-\vec u t\\ t\end{bmatrix}\Bigg|_{\vec u=0}$$

参 考 文 献

[1]《狭义与广义相对论浅说》，（美）**A.**爱因斯坦/著　杨润殷/译　北京大学出版社　**2006** 年版

[2]《狭义相对论（第二版）》，刘辽 费保俊 张允中 编著 科学出版社 **2008** 年版

[3]《牛顿力学的新时空变换》，周 方/著　经济科学出版社　**2013** 年版

[4]《现代牛顿力学的运动观测理论—兼评狭义相对论之“洛伦兹变换”》，周 方/著　经济科学出版社　**2014** 年版

[5]《现代牛顿力学的运动观测理论—兼评狭义相对论之“洛伦兹变换”》（第二版），周 方/著　经济科学出版社　**2016** 年版

[6]《相对运动观测理论》，周 方/著　经济科学出版社　**2018** 年版

附录 A:

“速度、加速度及

高阶加速度不变性（绝对性）”定律

周 方

tony_zf_zf_zf@126.com

设：K 系观测者与 K' 系观测者处在不同地点。他们之间的距离（矢量）为 $\vec{s} \neq 0$。两观测者‘同时’（$t \equiv t'$）观测到运动质点 E 之情况示于图 1。

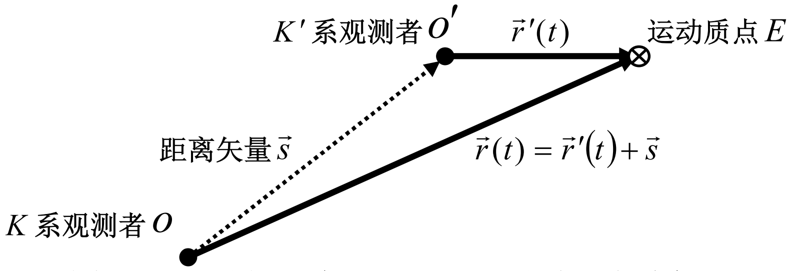


图 1 两观测者同时（$t \equiv t'$）观测到运动质点 E

图 1 中，K 系观测者在时刻 t 对运动质点 E 的观测矢量 $\vec{r}(t)$ 与 K' 系观测者‘同时’（$t \equiv t'$）对同一运动质点 E 的观测矢量 $\vec{r}'(t')$ 通过距离（矢量）$\vec{s}$ 形成（在时刻 t 的）‘观测矢量合成三角形 $\Delta OO'E$’。两观测者‘同时’（$t \equiv t'$）观测到运动质点 E’。

因此有：
$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t') + \vec{s}$$

即：
$$\vec{r}(t) - \vec{s} = \vec{r}'(t')$$

在图 1 中：

（1）$\overline{O'E}$ 为“在时刻 t，运动质点 E 对 K' 系观测者之相对位置 $[\vec{r}(t) - \vec{s}]$”：

$$\overline{O'E} = [\vec{r}(t) - \vec{s}] = \vec{r}'(t)$$

（2）$\overline{O'E}$ 同时又是“在时刻 t'（$t' \equiv t$），运动质点 E 在 K' 系内之坐标 $\vec{r}'(t')$”：

$$\overline{O'E} = \vec{r}'(t')$$

因此，有：
$$\vec{r}'(t) \equiv \vec{r}'(t')$$

从而有：

$$t' \equiv t: \frac{d^n\left[\vec{r}'(t)\right]}{dt^n} \equiv \frac{d^n\left[\vec{r}'(t')\right]}{dt'^n}, \qquad n = 1,2,......$$

由此可以得到以下结论：不论是 K 系观测者进行观测，还是 K' 系观测者进行观测推算，两者得到的被观测的质点之速度、加速度、⋯ 是一致的：$\frac{d^n\left[\vec{r}'(t)\right]}{dt^n} \equiv \frac{d^n\left[\vec{r}'(t')\right]}{dt'^n}$，$n = 1,2,......$。也就是说，在伽利略时空内，被观测质点 $\left[\vec{r}'(t'),\ t'\right]^T$ 的运动速度及加速度等，均不随观测者而变，简言之，被观测质点的运动速度及加速度等，是绝对的，不随观测者所处地点而变。

由此得到一个十分重要的结论：质点的运动速度及各阶加速度均是绝对的，与观测者在何处对该质点进行观测无关，也就是说，与参考系所处位置无关。此定律可称为“速度、加速度及高阶加速度不变性（绝对性）”定律。

“速度、加速度及高阶加速度不变性（绝对性）”定律是一条普适的‘自然定律’，同样也适用于“真空中光传播速率”—“真空中光传播速率为恒定值（约为 3.0x10^5 仟米/秒），乃是光的固有属性，与它在哪个参考系内进行传播无关”。笔者将此定律称为“光传播定律”，或称为“真空中光传播速率为恒定值定律”（**Law of constancy of light propagation velocity**），或简称“光速不变性（绝对性）定律”— “在任意时空点（‘闪光点’），真空中光传播速率为恒定值（约为 3.0x10^5 仟米/秒），乃是光的固有属性，与光在哪个参考系内进行传播无关”。这条定律为“运动观测论”（“狭义相对论”）的基础定律。

实际上，“速度、加速度及高阶加速度不变性（绝对性）”定律与“相对性原理”是相通相容的。

伽利略变换以及伽利略型的时空变换均满足伽利略时空内之“速度、加速度及高阶加速度不变性（绝对性）”定律。

“速度、加速度及高阶加速度不变性（绝对性）”定律是建立“运动观测论”的基础定律。

***************　　***************　　***************

附录 B:

“质量不变性（绝对性）”定律

周 方

tony_zf_zf_zf@126.com

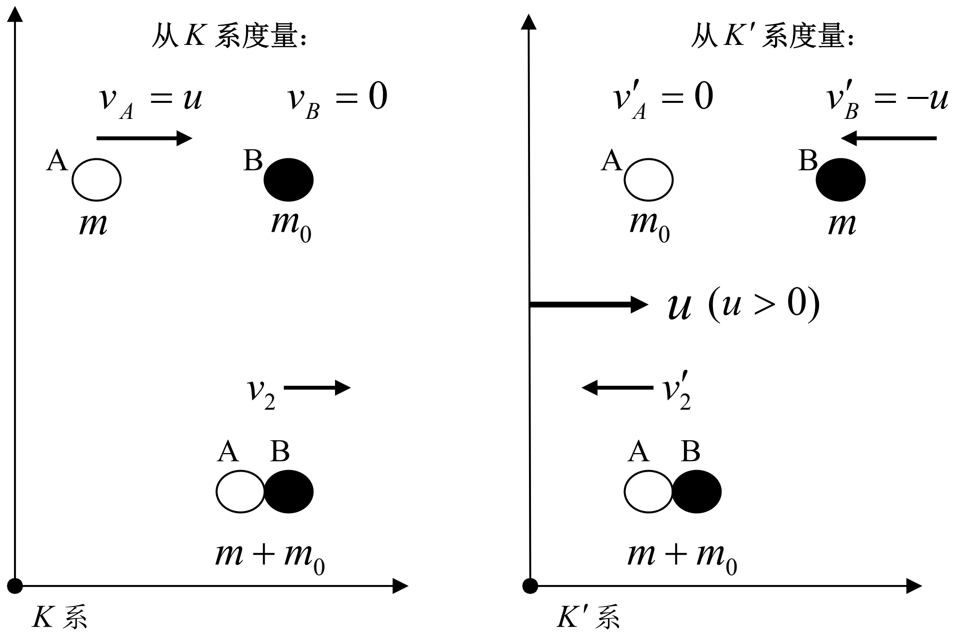
设有两个球：A 球 ○ 和 B 球 ● ，（静止）质量均为 m_0；两球始终位于一条与 x 轴平行的直线上。又设：在 K 系内，B 球静止（$v_B = 0$），A 球向右运动，以速度 $v_A = u$（速度 v_A 的方向沿 x 轴正方向）与 B 球碰撞。在两球碰撞过程中：

从 K 系度量： B 球静止（$v_B = 0$），其质量为 m_0；A 球作速度为 v_A（$v_A = u$）的匀速运动，其质量为 m；

从 K' 系度量： A 球静止（$v'_A = 0$），其质量为 m_0；B 球作速度为 v'_B（$v'_B = -u$）的匀速运动，其质量为 m 。

又设两球发生的碰撞是完全非弹性碰撞，在碰撞后合为一体，以同一速度运动。

K' 系相对于 K 系的匀速直线平移运动示于图 1。



u — K' 系对 K 系的相对速度

图 1 K' 系相对于 K 系作匀速直线平移运动

A．从 K 系度量：

B 球静止（$v_B = 0$），A 球向右运动，以速度 $v_A = u$ 与 B 球碰撞。在两球碰撞合一之后，结合体的运动速度为 v_2。

根据**动量守恒定律**及**质量守恒定律**，有：

$$m_0 v_B + m v_A = (m + m_0) v_2$$

$$m_0 \times 0 + mu = (m + m_0) v_2$$

$$mu = (m + m_0) v_2$$

$$v_2 = \frac{m}{m + m_0} u \tag{A}$$

B．从 K' 系度量：

A 球静止（$v'_A = 0$），B 球向左运动，以速度 $v'_B = -u$ 与 A 球碰撞。

在碰撞之前，两球的运动速度分别为 v'_A 和 v'_B：

$$v'_A = v_A - u = u - u = 0$$

$$v'_B = v_B - u = 0 - u = -u$$

在两球碰撞合一之后，结合体的运动速度为 v'_2。

根据**动量守恒定律**及**质量守恒定律**，有：

$$m_0 v'_A + m v'_B = (m + m_0) v'_2$$

$$m_0 \times 0 - mu = (m + m_0) v'_2$$

$$-mu = (m + m_0) v'_2$$

$$v'_2 = -\frac{m}{m + m_0} u \tag{B}$$

在**伽利略-周方变换**下，两球结合体之（K 系）速度 v_2 与（K' 系）速度 v'_2 服从**“矢量叠加法则”**，即满足以下关系式：

$$v'_2 = v_2 - u \tag{C}$$

将（A）式$v_2=\dfrac{m}{m+m_0}u$及（B）式$v_2'=-\dfrac{m}{m+m_0}u$代入（C）式，得：

$$-\frac{m}{m+m_0}u=\frac{m}{m+m_0}u-u$$

$$\frac{2m}{m+m_0}u=u$$

$$m+m_0=2m$$

得：

$$m=m_0$$

$$\boxed{m=m_0}$$

由此可得，物体的质量不随坐标系及物体的运动状态而变；物体的质量**是绝对的**，符合牛顿对‘质量’的定义。

“物体的质量是一个绝对量，不随参考系及物体运动状态而变化”。

由此可得，“速度合成服从矢量叠加法则”是“不存在质速关系”（即“物体的质量不随参考系及物体运动状态而变化”）的充分必要条件。由于“速度合成服从矢量叠加法则”是一条普适的自然定律，所以“不存在质速关系”（即“物体的质量不随参考系及物体运动状态而变化”）随之也是一条普适的自然定律。

*************** *************** ***************

作 者 简 介

周 方 教授、博士生导师。毕业于莫斯科航空学院飞机设计与制造系。著述涉及的专业领域：航空工程、系统工程、数理经济学与经济计量学、理论物理学与运动观测论。