Space, time, matter and kinematics of a point
Пространство, время, материя и кинематика точки
Часть 1

Valery Timin

(September 18, 2022)

Russia, RME

(Translated by Yandex Translator Яндекс–Переводчик)

Физика в современном естествознании играет огромную роль.

В данной работе рассматривается раздел «Кинематика». Моделью и целью изучения кинематики в данной работе будет описание механического движения материальной точки в пространстве во времени с геометрическим уклоном. При этом, как правило, не будут учитываться ее масса и другие материальные свойства, а также причины именно этого движения. Все, что имеет значение – это понятия координаты и траектории. Все остальное – производные от них.

Инструментами физика являются математика и эксперименты. С помощью экспериментов производится сбор фактических данных о взаимосвязях в физической реальности, затем формулируются абстрактные математические теории физической реальности, соответствующие проведенным эксперимента, далее опять же с помощью экспериментов проверяются эти теории на соответствие текущему состоянию физических знаний и делаются предсказания за пределами текущих знаний. И все по кругу.

Кинематика – это наиболее абстрактный раздел физики (и механики), очень близкий к абстрактной математике, задачей которой является описание возможных движений абстрактных физических объектов в пространстве и времени без учета реальных законов физики. Кинематика – более геометрия, чем физика и механика. Его объектами являются модели реальных физических объектов и описание их движения в абстрактном пространстве–времени (ПВ)[1].

Хотелось бы определить законы кинематики. Но их нет. Кинематика – это математика с материальным, физическим оттенком с набором слов из физики и механики. Можно сказать только то, что эти законы могли бы следовать из трех основных законов динамики классической механики Галилея–Ньютона (КМН) и специальной и общей теории относительности Эйнштейна (СТО и ОТО) – но и этого нельзя сказать. В ней нет понятия силы и, следовательно, причинности.

В принципе, вся кинематика умещается в одну формулу – формулу траектории:

$$\forall t, n \exists! \, q^i_{(n)} = q^i_{(n)}(t).$$

[1] Список всех сокращений см. в конце книги.

Здесь n – номер материальной точки (м.т.) Что говорит о том, что в любой момент времени м.т. может находиться только в одном месте 3–мерного подпространства пространства–времени. Ее можно усилить, дополнив постулатом причинности:

$$\frac{dS(t_n, r_n{}^i)}{dt} = \Phi[S(t, r^i)]: \begin{cases} t < t_0, \\ (t, r^i) \neq (t_0, r_0{}^i) r^i. \end{cases}$$

Это высказывание говорит о том, что событие (или состояние) $S(t_0, r_0{}^i)$ ПВ может изменяться только под воздействием уже произошедших в прошлом ($t < t_0$) событий и без самодействия в текущий момент в текущем месте ПВ. При полевом описании состояния физической системы под индексом n необходимо понимать каждую точку ПВ.

И три определения – 3–х или 4–мерной мировой линии (траектории):

$$r^i(t): i \in \{1..3\},$$
$$q^i(u)): i \in \{0..3\} \sim \left(t \sim i^0, r^i(t): i \in \{1..3\}\right).$$

и следующих из нее 3–х или 4–мерных скорости и ускорения (и других производных определений), которые должны быть непрерывными функциями координат и времени.

$$v^i = \frac{dr(t)}{dt}, w^i = \frac{d^2 r(t)}{dt^2}: i \in \{1..3\},$$
$$V^i = \frac{dr(u)}{du}, W^i = \frac{d^2 r(u)}{du^2}: i \in \{0..3\}$$

И, конечно, уравнения движения как необходимого приложения к текущей действительности, включающей в себя координаты, скорости, ускорения,…:

$$\Phi_k\left(t, r(t), \frac{dr(t)}{dt}, \dots \frac{d^n r(t)}{dt^n}\right) = 0,$$

имеющей единственное решение в соответствии с теоремой Коши. Все остальное – это интерпретация и ее объяснение.

В случае использования геометрических условий появляется необходимость использования метрических пространств – галилеевых, евклидовых, римановых и с приставками "псевдо". В этом случае в кинематике появляются условия с использованием метрически определенных объектов типа прямой линии, круга, параллельности/перпендикулярности, и т.д.

Пространство, время, материя
и кинематика точки
ЧАСТЬ 1

Оглавление

1 Введение

Физика в современном естествознании играет огромную роль.

В данной работе рассматривается ее теоретический раздел «Кинематика» с минимальным математическим багажом. Моделью и целью изучения кинематики в данной работе будет описание механического движения материальной точки и, частично, твердого тела в пространстве и времени с геометрическим уклоном (см. раздел 2.1 "Основные определения и понятия"). При этом, как правило, не будут учитываться ее масса и другие материальные свойства, а также причины именно этого движения, кроме геометрических. Все, что имеет значение – это понятия координаты, траектории и расстояния. Все остальное – производные от них.

Инструментами физика являются математика и эксперименты. С помощью экспериментов производится сбор фактических данных о взаимосвязях в физической реальности, затем формулируются абстрактные математические теории физической реальности, соответствующие результатам проведенного эксперимента, далее опять же с помощью экспериментов проверяются эти теории на соответствие текущему уровню физических знаний и делаются предсказания за пределами текущих знаний. И все по кругу.

Кинематика – это наиболее абстрактный раздел физики (и механики), очень близкий к абстрактной математике, задачей которой является описание возможных движений абстрактных физических объектов в пространстве и времени без учета реальных законов физики. Кинематика – более геометрия, чем физика и механика. Его объектами являются модели реальных физических объектов и описание их движения в абстрактном ПВ.

Хотелось бы определить законы кинематики. Но их нет. Можно сказать только то, что эти законы могли бы следовать из трех основных законов динамики классической механики Ньютона:

1. **Первый закон Ньютона – Закон инерции** (впервые сформулирован и проверен экспериментально Галилео Галилеем), или: Материальная точка (тело) (м.т.), достаточно удаленная от всех других тел и не взаимодействующая с ними, будет сохранять свое состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения [5, с.24][2],[3].

На основе этого закона формулируется определение существования инерциальных систем отсчета (ИСО).

2. **Второй закон – Основной Закон динамики:** всякое изменение состояния движения, любое ускорение есть результат действия на движущееся [или покоящееся] тело со стороны других тел [5, с.28]. Если эту "прозу" записать формально, то – "Вектор[4] силы, действующий на м.т., численно равен произведению массы на вектор ускорения, возникающего под действием силы".

$$F = mw. \tag{1.1}$$

2 Зисман, Г. А. Тодес, О. М. Курс общей физики. В 3 томах, Т.1. Механика, молекулярная физика, колебания и волны. –М., Наука, 1974. – 336 с.

3 Список всей использованной литературы см. в конце книги.

4 Понятие "вектор" имеет очень широкое применение во многих отраслях науки и техники. В общем случае это набор из нескольких чисел, объединенных каким–либо объединяющим их признаком. Обычно в символьной записи оформляется как список в скобках, элементы которой разделены "разделителями" типа запятая, пробел и т.д., например: (1, 3, 6), [1 332 6/7)]. В математике векторы используют в геометрии, векторной алгебре, линейных векторных пространствах, … с аксиоматическим определением ее свойств.

Этот закон по известным эталонам позволяет установить определенные соотношения между четырьмя основными единицами – длиной, временем, массой и силой. В СИ основными единицами являются первые три – длина(метры), время (секунда) и масса (килограмм). Сила оказывается производной единицей – Ньютон [Н]: 1 [Н] = 1 $[кг]^1[м]^1[с]^{-2}$.

3. **Третий закон – Закон противодействия**: Если м.т. m_2 испытывает со стороны м.т. m_1 силу, равную F_{12}, то m_1 испытывает со стороны m_2 силу F_{21}, равную по величине и противоположную по направлению [5, с.29][5]. Для замкнутой системы взаимодействующих тел векторная сумма всех сил равна нулю:

$$\Sigma F_n = 0, \Sigma F_{nm} = 0. \tag{1.2}$$

Поскольку в ньютоновой динамике из кинематических величин именно ускорение играет основную роль (см. второй закон Ньютона), то все уравнения механики записываются одинаково в любой ИСО – иначе говоря, законы механики не зависят от того, в какой из ИСО мы находимся, и не зависят от выбора в качестве лабораторной какой–либо конкретной из ИСО. Этот вывод называется принципом относительности Галилея – в честь Галилео Галилея, исследовавшего экспериментально "инерцию" тел. Принцип относительности по Галилею формулируется так:

4. **Четвертый** – не закон, а **принцип относительности – Галилея**:

Если в двух замкнутых лабораториях, одна из которых равномерно прямолинейно (и поступательно) движется относительно другой, провести одинаковый механический эксперимент, результат будет одинаковым.

Из этого принципа также непосредственно следует, что пространство однородно и изотропно и законы классической механики Галилея–Ньютона ковариантны в любой ИСО.

Этот принцип в несколько иной и более обобщенной формулировке действуют в релятивистских специальной (СТО) и общей (ОТО) теориях относительности Эйнштейна и практически всех современных физических теориях. В 1905 г. Эйнштейн опубликовал свой труд "К электродинамике движущихся тел, в котором расширил принцип относительности Галилея на электродинамические и оптические законы, создав Специальную теорию относительности" [18, с.7][6]:

"Не только в механике (по Галилею), но и в электродинамике никакие свойства явлений не соответствуют понятию абсолютного покоя и даже, более того, для всех инерциальных координатных систем, для которых справедливы уравнения механики, справедливы те же самые электродинамические и оптические законы".

Это значит, что если в двух замкнутых лабораторных системах отсчёта, одна из которых равномерно и прямолинейно (поступательно) движется относительно другой, провести одинаковый механический, электродинамический или оптический эксперимент, результат будет одинаковым.

Далее этот принцип вместе с принципом постоянства скорости света [6, §26, с.167][7] был обобщен и распространен на любые виды взаимодействий материи. Релятивистская

---

[5] Зисман, Г. А. Тодес, О. М. Курс общей физики. В 3 томах, Т.1. Механика, молекулярная физика, колебания и волны. –М., Наука, 1974. – 336 с.

[6] Эйнштейн, А. “К электродинамике движущихся тел”, перевод, “Собрание научных трудов” под ред. И.Е. Тамма, М, Наука, 1966, т.1 стр. 7.

[7] Зисман, Г. А. Тодес, О. М. Курс общей физики. В 3 томах, Т.3: Физика атомов и молекул, физика атомного ядра и микрочастиц. –М., Наука, 1970. 500 с.

механика СТО привнесла в физику два постулата, принятые А.Эйнштейном в качестве фундаментальных:

5. **Постулат 1** (принцип относительности Эйнштейна). Законы природы одинаковы во всех системах координат, движущихся прямолинейно и равномерно друг относительно друга. Это означает, что форма зависимости физических законов от пространственно–временных координат должна быть одинаковой во всех ИСО, то есть законы инвариантны относительно переходов между ИСО.
6. **Постулат 2** (принцип постоянства скорости света). Скорость света в вакууме одинакова во всех системах координат, движущихся прямолинейно и равномерно друг относительно друга.

Эти постулаты отличают релятивистские теории от классической механики Галилея–Ньютона. Если в механике Галилея–Ньютона взаимные скорости м.т. и ИСО в целом могут принимать любые значения от нуля и выше, то в релятивистских теориях взаимные скорости физических тел не могут достигать некоторой фундаментальной скорости c – скорости света в вакууме. И описать такое положение дел в пределах галилеева ПВ невозможно. Поэтому интуитивный "здравый смысл" в релятивистской механике не работает: при рассмотрении релятивистских задач возникает много парадоксальных ситуаций и выводов. Для этого необходимо использовать ПВ Минковского с преобразованиями Лоренца–Пуанкаре–Эйнштейна[8] и "релятивистское" мышление. А в ней – парадокс близнецов, сокращение длин, замедление времени и многое другое.

Причиной возникновения СТО стали "отрицательные" результаты опытов Майкельсона–Морли и Морли–Миллера (ММ), ставивших с начала 1887 года в течение многих лет опыты по определению наличия эфира и эфирного ветра. "Отрицательные" в апострофах означает, что другие физики сочли результаты их опытов отрицательными, несмотря на получение ими ненулевых результатов, но значительно более маленьких, чем следовало из расчетов. Опыты, поставленные другими исследователями позже, подтвердили с большой точностью "отрицательные" выводы из опытов ММ.

Из постулатов А.Эйнштейна следует известный практически каждому человеку **принцип эквивалентности** массы M и энергии E:

$$E = Mc^2, \tag{1.3}$$

и зависимость энергии м.о. от ее скорости v:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \tag{1.4}$$

где m_0 – масса покоя м.о. принцип просто говорит о том, что энергия м.о. обладает инерцией. Второй закон Ньютона для релятивистского объекта записывается с учетом релятивистского коэффициента:

$$F = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} w. \tag{1.5}$$

[8] Лоренц Х. А. (18.07.1853 – 4.02.1928), Пуанкаре Жюль–Анри (1854 – 1912), А. Эйнштейн (14.03.1879–18.04.1955), Г. Минковский (18.06.164 – 12.01.1909) – это четыре человека, внесшие наибольший вклад в понимание специальных преобразований, соответствующих релятивистским пространствам, и которые названы в честь Лоренца.

Эта "эквивалентность" является причиной возникновения ядерной энергетики и источником ядерной энергии.

Следующий эффект – замедление хода движущихся часов (штрихованный параметр) по сравнению с покоящимися (без штриха):

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-(v/c)^2}. \tag{1.6}$$

Это надо понимать следующим образом: движущийся наблюдатель, проходя мимо часов условно покоящейся с.о., заметит, что его часы отстают.

Еще один эффект – сокращение длины движущихся объектов с т.з. покоящихся:

$$\Delta l = \Delta l'\sqrt{1-(v/c)^2}, \tag{1.7}$$

Это надо понимать следующим образом: с т.з. условно покоящегося наблюдателя двигающийся быстро объект как бы "сокращается" в размерах. На самом деле эти эффекты относительны: с т.з. движущегося наблюдателя этим же эффектам подвержены часы и линейки условно покоящегося наблюдателя. Здравый смысл здесь спит! Здравый смысл релятивиста противоречий и парадоксов не видит.

Еще одним шагом в понимании законов Природы стал общий принцип эквивалентности, сформулированный А.Эйнштейном в 1915 году[9], примененный им как основополагающий в его Общей теории относительности (ОТО):

7. "**Закон равенства инертной и тяжелой масс** можно сформулировать очень наглядно следующим образом: в однородном гравитационном поле все движения происходят точно так же, как в равномерно ускоренной системе координат в отсутствии поля тяготения. Если бы этот закон выполнялся для любых явлений («принцип эквивалентности»), то это указывало бы на то, что **принцип относительности должен быть распространен на неравномерно движущиеся системы координат**, если стремится к естественной теории гравитационного поля."

Этим законом А.Эйнштейн сравнял между собой не только все ИСО, но и ускоренно движущиеся с.о. Эту эквивалентность А.Эйнштейн объяснял с помощью мысленного эксперимента, проводимого в закрытом лифте: человек, находящийся в свободно падающем лифте под действием гравитации Земли, не сможет отличить от случая своего нахождения в свободно двигающемся вдали от всех масс космическом пространстве. На практике это на деле постоянно "проверяют" космонавты на околоземной орбите.

Другим следствием этого принципа является замедление хода часов в сильном потенциальном гравитационном поле. Это, например, означает, что часы космонавтов должны "спешить" по сравнению с теми, что остались на Земле. Космонавт, вернувшийся с космического полета на околоземной орбите, должен быть более старым, чем если бы оставался на Земле. Этот эффект проявляется реально и учитывается при настройке часов спутников GPS: перед запуском на орбиту генераторы часов специально "замедляются", чтобы они ходили также, как и часы, остающиеся на Земле[10]. Еще одним следствием этого

[9] «Собрание научных трудов: Работы по теории относительности, 1905—1920» Под редакцией И. Е. Тамма, Я. А. Смородинского, Б. Г. Кузнецова. [1] — М., Наука, 1966. — Том 2. С. 404: «Некоторые замечания о возникновении общей теории относительности» = «Einiges über die Entstehung der allgemeinen Relativitätstheorie». George A. Gibson Foundation Lecture, Glasgow [20th June 1933. Glasgow–Jackson.] Гибсонова лекция, прочитанная в Университете Глазго.

[10] При этом учитывается и замедление хода быстро движущихся на орбите часов в соответствии с СТО.

является красное смещение спектральных линий звезд (и Солнца – в т.ч.): энергия фотонов уменьшается при преодолении гравитационного поля звезды.

Можно ли законы Ньютона и принципы относительности применить в кинематике? Этого нельзя сказать однозначно – силы и массы в кинематике не рассматриваются. Но что–то же должно быть!

В принципе, вся кинематика умещается в три постулата и/или условия (7 .. 9):

8. Формулу–условие траектории:

$$\forall t, n \exists! \, q^i_{(n)} = q^i_{(n)}(t). \tag{1.8}$$

(здесь n – номер м.т.), которая говорит о том, что в любой момент времени м.т. может находиться только в одном месте трехмерной[11] гиперплоскости пространства–времени. Которую можно усилить, дополнив ее

9. постулатом причинности:

$$\exists U(<, q^i_{(n)}) \colon (\forall n, t_1 < t_2 \colon q^i_{(n)}(t_1) < q^i_{(n)}(t_2). \tag{1.9}$$

Это высказывание говорит о том, что события $q_{(n)}{}^i$ в пространстве–времени событий упорядочены через понятие частичного упорядочения (U: q^i, <). Это упорядочение фактически есть упорядочение событий ПВ в соответствии с некоторой стрелой времени,

10. и уравнения движения м.т. с непрерывными производными

$$\Phi_k\left(t, r(t), \frac{dr(t)}{dt}, \ldots \frac{d^n r(t)}{dt^n}\right) = 0. \tag{1.10}$$

имеющей единственное решение в соответствии с теоремой Коши[12]. И это решение должно удовлетворять первым двум условиям. Все остальное – это интерпретация и ее объяснение.

Все эти три последних постулата–условия требуют наличия основных определений кинематики, касающихся области ее абстрактного модельного определения:

11. Пространства, времени и координат O для их абстрактного описания:

$$O\{t, r^i \colon i \in \{1..3\}\} \text{ или } O\{q^i \colon i \in \{0..3\}\} \sim O\{t, r^i \colon\} \tag{1.11}$$

,обладающая свойством непрерывности. **Непрерывность**[13] параметризации пространства предполагает, что близкие точки имеют близкие координаты, и между любыми близкими точками имеются другие близкие точки. Если по–простому, то для любого значения координаты q^i из допустимой полной области ее значений в пространстве имеется

---

[11] Далее вместо трехмерного, четырехмерного и других n–мерных "независимо чего" буду писать 3–мерный, 4–мерный и т.д. "чего–нибудь".

[12] Теорема Коши: Если уравнение $y^n = f(x, y, y', . , y^{(n-1)})$ и все ее частные производные до $\partial f/\partial y^{(n-1)}$ определены и непрерывны в некоторой области G изменения переменных x, y, . $y^{(n)}$, то для всякой внутренней точки (x_0, y_0 . $y_0{}^{(n-1)}$) этой области данное уравнение имеет единственное решение, принимающее заданное значение (y_0 . $y_0{}^{(n-1)}$) при $x = x_0$.

[13] Понятие "близкие " и "далекие" точки не имеют точного абстрактного математического определения, кроме, возможно, прилагательного "бесконечно" перед ними. Это скорее интуитивное, чем математическое, понятие, определяющее область применения или определения. Близость или далекость определяется в сравнении. Такими точками могут быть любые две точки, имеющие определенные координаты и/или расстояние между ними конечно. Но у непрерывности есть и точное определение через сечение Дедекинда.

соответствующая ей точка $P(q^i)$:

$$\text{(для) } \forall q^i \text{ (существует) } \exists P(q^i). \tag{1.12}$$

Этим достигается соответствие между абстрактным математическим пространством и моделью реального физического пространства. При этом предполагается, что пространство чисел непрерывно по определению и более того – оно полно[14]. И это можно доказать абстрактно–математически.

Траектории (мировой линии), скорости и ускорения для описания движения материальной точки в ПВ и через нее самой м.т. как абстрактной модели элементарной, реальной физической материи, но не имеющей других параметров, кроме как словами "материальная точка", которая существует и движется в ПВ вдоль траектории с определенными скоростью и ускорением, и которая фактически в 4–мерном ПВ представляет собой мировую линию (и других производных определений):

$$\begin{gathered} r^i(t){:}\left\{v^i = \frac{dr^i(t)}{dt}, w^i = \frac{d^2r^i(t)}{dt^2} : i \in \{1..3\}\right\}, \\ q^i(t) \sim \left(t, r^i(t)\right){:}\left\{V^i = \frac{dq^i(u)}{du}, W^i = \frac{d^2q^i(u)}{du^2} : i \in \{0..3\}\right\}, \end{gathered} \tag{1.13}$$

которые должны быть непрерывными функциями координат[15].

И эти условия–постулаты действуют, естественно, и в механике – и классической, и релятивистской.

В случае использования геометрических условий появляется необходимость использования метрических пространств – галилеевых, евклидовых, римановых и с приставками "псевдо". Геометричность[16] можно было бы поставить в одно из постулатов–условий кинематики, т.к. физика абсолютно геометрична и тесно связана с физическими эталонами, но при решении задач кинематики от "геометричности" иногда можно и отказаться, "забыть" о ней – в силу действия принципа Оккама "не изобретай лишнего".

[14] Полнота упорядоченного множества означает, что ее нельзя дополнить никаким другим элементом без нарушения этого свойства. В этом смысле целые числа упорядочены дискретно, рациональны числа не полны, а вещественные – полны (в смысле полноты по Дедекинду и Коши).

[15] Производные по времени (скорости, ускорения, …) буду обозначать строчными буквами, по скалярному параметру u (s, …) – прописными.

[16] "Геометричность", "геометрические", "метрические", "псевдометрические", и другие "–гео–" в данной работе обозначают свойства, изучаемые в геометрии: прямые, окружности, длины, расстояния, параллельность, перпендикулярность, углы, расстояния и многое другое, где присутствует понятие "расстояния" или что–то заменяющее его.

2 Определение предмета "кинематика"

Долгое время понятия о движениях были основаны на работах Аристотеля, в которых утверждалось, что движение в отсутствие сил невозможно и скорость падения тела в поле притяжения тел Землей пропорциональна их весу. Инерция как таковая определялась тем, что всякое движущееся тело когда–нибудь остановится. Кинематика и динамика не разделялись.

Только в конце XVI века этим вопросом подробно занялся Галилео Галилей. Изучая свободное падение (знаменитые опыты на Пизанской башне) и инерцию тел, он доказал неправильность идей Аристотеля. Итоги своей работы по данной теме он изложил в книге «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению».

Рождением современной кинематики можно считать выступление Пьера Вариньона перед Французской Академией наук 20 января 1700 года. Тогда впервые были даны понятия скорости и ускорения в дифференциальном виде.

В XVIII веке Ампер первый использовал вариационное исчисление в кинематике.

Для начала дадим

2.1 Основные определения и понятия

Кинематика (от греч. *cinema* — движение) – раздел теоретической механики, в котором изучаются свойства, в т.ч. геометрические, механического движения материальных объектов без учёта их массы и действующих на них сил. Название этому разделу дано в 1834 г. знаменитым физиком и математиком Ампером (1775–1836 г.).

Целью кинематики является наиболее точное описание и изучение основных кинематических характеристик и законов движения материи в пространстве и времени: траектории движения, скорости и ускорения, как всего тела, так и отдельных его точек.

> Судя по всему, что "люди" научились общаться между собой еще в незапамятные времена. Ранее ученые были уверены, что люди научились говорить примерно 200 тысяч лет назад. Но в научном журнале Science Advances [22, с.200][17], приводят цифру 20 миллионов лет. Это кажется очень много и неправдоподобно – но многим животным природой дана способность издавать различные звуки и жестикулировать. И "коллективные" животные наверняка пользовались этой способностью с определенной целью. Они были понятны сородичам и служили их безопасности. Именно в те времена на нашей планете только–только появились человекообразные обезьяны гоминоиды. Насколько осмысленны были эти звуки и жесты?
>
> Сейчас можно считать, что первые полноценные языки начали формироваться примерно 150–350 тысяч лет назад. Первые языки в мире формировались на основе жестов — люди показывали на предметы рукой и издавали разные звуки, которые впоследствии превратились в полноценные слова. Вы наверняка знаете язык ребенка? Помните слова типа "бум–бум", "бип–бип", "гав–гав", "ух". Это называется звукоподражание. Возможно, примерно так и говорили первые люди. Это уже можно назвать осмысленными словами.
>
> Какое это имеет отношение к нашей теме? А прямое. Человек не знал и не

[17] Sci. Adv., 2019, 5 (12), eaaw3916. DOI: 10.1126/sciadv.aaw3916. Louis–Jean etc. Which way to the dawn of speech?: Reanalyzing half a century of debates and data in light of speech science. [Электронный ресурс] // URL: https://www.science.org/doi/10.1126/sciadv.aaw3916 // (Последняя загрузка: 09.10.2021) PDF: https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/sciadv.aaw3916, (Последняя загрузка: 09.10.2021)

понимал, что представляет собой окружающий его Мир. Но он вполне осознанно осваивал его звуками, жестами, словами. Чтобы осваивать этот Мир, нет необходимости знать и понимать ее абсолютно. Да и это невозможно – невозможно описать все абсолютно точно. Поэтому человек осваивает и строит модели окружающего его мира – через звуки, жесты, слова. Известное ему сравнивает, упорядочивает, находит связи. Учится считать – и получает абсолютный механизм для сравнения и упорядочения – числа. Структурирует их – и получает новые возможности для описания законов Природы.

Пространство реальное физическое – это та сущность, о существовании которого все мы догадываемся, в котором мы живем, и знаем о ней через наши ощущения[18]. И которое мы разделяем на три структурные части.

1) Первое – это **Пространство**, характеризующееся своей протяженностью в трех направлениях, место, в которой происходит наше существование, вместилище всего того, что дано нам в наших ощущениях.

2) Второе – это **Время**. Наше достояние. Через нее познаем рождение и смерть, покой и движение.

3) Третье – это **Материя**. Это то, чем Мы является. Но не только.

Великие умы человечества на протяжении тысяч лет старались понять, что такое реальность в свете Пространства, Времени и Материи. Но этот вопрос так и остался не решенным до конца одним единственным образом. Не вдаваясь в философию, помимо только что сказанного, я определю эти понятия следующим образом.

Если **Пространство** можно связать с некоторым определенным моментальным срезом состояния "реальности", или одиночным "кадром" – по аналогии с кинематографом, то **Время** у нас с вами связано со словом "изменение", "движение", которое можно представить через непрерывную последовательность "кадров". И, наконец, **Материя** – без материи пространство и время пусты, нечему и негде вмещаться и изменяться. Все это называется **триединством Пространства–Времени–Материи** (ПВМ).

Все это – реальность. Триединство Пространства, Времени и Материи и есть наша настоящая **Реальность**. Она существовала, существует и будет существовать без нас. Хотя для каждого из нас она существует, пока мы живем.

Триединство ПВМ может определяться по разному. Выше мы определили триединство через определение трех сущностей – Пространства, Времени и Материи. Но триединство можно определить и через одну обобщенную сущность. Этим методом воспользовался А.Эйнштейн в своей Общей Теории Относительности [19][19] (1915 – 1916 гг.). Он объединил все три сущности в одну единственную сущность – 4–мерное псевдориманово пространство, в которой материя определяется через метрику единого 4–мерного Пространства–Времени (ПВ). В классической физике эти сущности разделены – но без любой из составляющих ПВМ нет реальности. В СТО А.Эйнштейна [18][20] (1905 г.). Пространство и Время объединены – Материя как бы находится отдельно от них. Но она находится в них – и без нее также нет реальности. В обоих последних случаях

[18] Реальное физическое пространство, как мы ее воспринимаем своими органами чувств, 3–мерно. В нее мы не включаем "время" (или временную координату), т.к. она не ощущается органами чувств. Она воспринимается человеком не как пространственная сущность: "вправо – влево", "вперед – назад", вверх – вниз". У нее другое направление – будущее и прошлое. Человек четко разделяет пространственные направления от временного направления

19 Эйнштейн, А. Основы общей теории относительности. Собр. науч. труд. в 4 томах, М., «Наука», 1965, т. 1, с. 457—460.

[20] Эйнштейн, А. “К электродинамике движущихся тел”, перевод, “Собрание научных трудов” под ред. И.Е. Тамма, М, Наука, 1966, т.1 стр. 7.

Пространство–Время без Материи пусто и безжизненно.

Пространство–Время–Материя (ПВМ) или **Пространство** – математическая модель реального физического 3–мерного пространства, дополненное одномерным временем, в котором происходит движение материальных объектов. Современная физика считает, что ПВМ неразделимы и не существуют по отдельности как физическая реальность. Абстрактно–математически ПВМ состоит из трех составляющих. Первые два – это собственно взятые по отдельности Пространство и Время. Третье – это материя.

2.1.1 Основные понятия физики

Пространство 3–мерно, Время одномерно. Пространство определяет свободы материального иметь три степени свободы. Математически абстрактно оно определяется тремя числами, например, в структуре (x, y, z), где x, y, z – вещественные числа. Эти числа называются координатами. Математически абстрактно эти три числа могут образовывать различные математические структуры.

Физически можно определять положение м.о. по отношению к другому произвольно выбранному м.о., который называется **телом отсчета**. Связывая с этим телом систему координат, в которой тело отсчета, естественно, покоится, получаем физическую **систему отсчета** положений м.о. **Системой отсчёта** в физике (механике) называется тело, относительно которого оценивается положение и движение объекта и его составляющих. С системой отсчёта связывают ту или иную систему координат (декартовую, полярную цилиндрическую и т.п.).

Время дает всего одну степень свободы и абстрактно определяется одним вещественным числом t, например, в структуре (t).

Время и Часы (собственные) считают количество генерируемых эталонным генератором периодов движущимися вместе с м.т. эталонными генераторами, в соответствии и синхронно с которыми происходят все физические явления. Связанные понятия: собственные координаты, собственная система отсчета, связанная с м.т. с.о., и т.д. – определяются через понятия "эталоны" длины, времени и массы[21].

Пространство и Время совместно образуют Пространство–Время (ПВ) в 4–мерной структуре (t, x, y, z), представляющее собой объединение структур (x, y, z) и (t), которые называются координатами точки. В этом случае в этой структуре эти числа называются четырехмерными координатами точки, а каждая такая точка называется "событием" 4–мерного ПВ.

Вопросы обывателя: можно ли "время" назвать координатой? Ее что – можно измерить линейкой? Как это – "время" тоже может быть координатой?

Такие вопрос обывателя очень закономерны. Действительно, время нельзя измерить линейкой. И ее свойства очень даже не совпадают со свойствами пространственных направлений. И вроде бы невозможно время обозначить тем же словом "координата", что и для пространственных направлений, т.к. их ну никак нельзя совместить на интуитивном уровне. Они – разные. Но математически эта абстракция назвать их одним именем очень даже законна. И то, и другое можно параметризовать через числа, что прекрасно практически доказывается наличием часов, циферблаты которых пронумерованы числами, и линейками, также пронумерованными числами. Следовательно, и пространственные, и временные сущности можно параметризовать числами, и назвать их координатами. В результате получим, что все, что нас окружает, вместе со временем – можно объединить в

---

[21] И других технических эталонов, а также других эквивалентных по функциям процедур отношения и привязки, прямо или косвенно связанных с метризацией в различных физических и физико-математических теориях.

одном, но только 4–мерном Пространстве–Времени событий. Только надо понимать, что в них три координаты – это пространственные точки и направления, и одно – временные точки и направления. И эта разница реализуется в их единицах измерения.

Материя – это то, что может быть определено в пространстве–времени и иметь "свободы" в ней. "Свобода" может определяться как через функциональные свойства ПВ, так и ее геометрические и топологические особенности. В зависимости от этого можно различить два типа материи. Первая – это непрерывное заполняющее все пространство поле, вторая – как ее вещественная составляющая. Первая определяется через ее (гео)метрические[22] свойства, вторая – через топологические особенности[23].

Пространство–Время–Материя – еще одна математическая структура, моделирующая реальное ПВ совместно с находящейся в ней Материей как физической системы. В ней дополнительно определяются понятия "движение" и "состояние" физической системы.

Вопрос обывателя: можно ли материю определить через координаты? Есть разные математические способы введения материи в ПВ. Наиболее известны два способа. Первый – полевой. В этом случае в ПВ задается некоторая "полевая" функция $\varphi(t, r)$. Второй – дискретный. В этом случае дискретный материальный объект задается своей координатой в ПВ. И для него определяется "траектория" или "мировая линия". Многокомпонентный способ – объединение первого и второго способов. В принципе, у каждой теории ПВМ – свой способ введения материи в ПВ. В ОТО А.Эйнштейна гравитационная составляющая материи вводится как метрическая функция ПВ + другие виды материальных составляющих. Квантовые. Есть многомерные варианты ПВМ, объединяющие все известные 4 вида взаимодействий в одно многомерное с дополнительными циклическими измерениями. Струнные, ….

Другой вопрос имеет фундаментальный характер. Что такое Время и Пространство?

Если без философии, то Время и Пространство присутствуют в физике двойственно. Во первых, как координаты. А во вторых – как метрические константы. В классической физике – раздельно, и в согласии с координатами ГПВ, в релятивистской – объединенно и в соответствии с принципом относительности Эйнштейна об их взаимной относительности и абсолютности при объединении. И это пугает и путает мнение многих об очевидном – по их мнению. Но это – просто разные ипостаси понятий Время и Пространство. И одна из причин этого кроется в существовании предельной скорости получения информации от удаленных точек ПВ и составлении мнения об окружающей Природе и Вселенной по этим сигналам. Другая причина – фундаментальность этой причины, по крайней мере на текущем уровне наших знаний о ней.

Вещественным материальным объектом (м.о.) называется тело, движение которого оценивается. В кинематике независимым переменным, или аргументом, в функции которого определяются все другие величины, является время t. Объектами являются материальная точка, материальное тело, твердое тело, абсолютно твердое тело, сплошная среда, и в общем случае – материальное поле, которое может быть и не вещественным объектом.

Материальной точкой (м.т.) называют простейшую модель материального тела любой формы, размеры которого достаточно малы и ими можно пренебречь, и которое можно принять за геометрическую точку, имеющую определённую массу, обычно

[22] Геометрические свойства определяются через метрические свойства пространства, в основе которых лежит понятие "метрика" или "расстояние" (см. также сноски 16 и 18).
[23] Топологические особенности – это то, что отличает одну область топологического пространства (окрестность точки) от другой. Есть окрестности, которые можно совместить некоторым непрерывным движением, и другие – особенные – которые невозможно совместить движением.

обозначаемую через m или M, возможно, с индексами[24] (обычно с нижними[25]): m_1, M_2, m_i, $M_{(n)}$.

Системой м.т. называется система, состоящая из нескольких м.т., каждая из которых движется независимо от других или движение ограничено некоторым условием. Таким условием может быть геометрическое или силовое условие. Рассматривать в кинематике (да и механике) абсолютно независимую систему м.т. не имеет смысла – их можно рассматривать независимо. Обязательно должно быть условие, ставящее их во взаимную зависимость. Хотя бы так: есть две м.т., движущиеся независимо друг от друга по определенному закону. Задача: как изменяется расстояние между ними во времени?

Материальный объект может быть и не точкой и даже не системой м.т., не имеющих размеров. Тогда это – **сплошная среда**, занимающая объем, площадь или линию. Она может быть вещественной и полевой.

Вещественная сплошная среда может быть идеальной и реальной. Идеальная не обладает вязкостью. Реальная обладает сжимаемостью и вязкостью. А также может быть твердой и не очень, пластичной, жидкой и газообразной, сыпучей. И даже плазмой. Сплошная среда в каждой своей точке обладает полем скоростей v^i и напряжений σ^{ik}. Для каждой точки r всегда можно найти с.о., в которой локально эта точка покоится, т.е. $v^i(r) = 0$. Уравнение движения с.с. следующая:

$$\rho\frac{\partial v^i}{\partial t} - \nabla_k\sigma^{ik} = 0.$$

Полевая форма материи является еще одной формой, очень напоминающей сплошную среду. Но эта форма не является вещественной и не разделяется на атомы, как в твердых, жидких и газообразных средах. Эта форма изначально имеет "релятивистские" свойства, выражающиеся в уравнении ее движения (или состояния), называемой волновым уравнением. В однокомпонентном случае оно следующее:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{c^2\partial r^2} = \mu^2\varphi.$$

Полевая материя "распространяется" с фундаментальной для нее скоростью c.

Примеры – гравитационное и электромагнитные поля. Ядерные и слабые взаимодействия также являются полевыми, но они не проявляются на уровне классической физики. Звуковое поле также обладает полевыми свойствами, но ограничена "покоящейся" сплошной средой (твердое, жидкое и газообразное).

Абсолютно твёрдым телом (а.т.т.) (идеальное т.т.) называют такое материальное тело, геометрическая форма которого и размеры не изменяются ни при каких механических взаимодействиях со стороны других тел, а расстояние между любыми двумя его точками остаётся постоянным. В связи с этим, отличие от м.т., для которой

---

[24] Идея использования индексов для именования отдельных объектов из оговоренного множества принадлежит Ньютону: m_1, M_2, … Ему же принадлежит идея обозначать точками над символом производные по времени: $\dot{x}, \ddot{y}$. Современная запись показателя степени — правее и выше основания — введена Декартом в его «Геометрии» в 1637 г. для целых чисел и степеней более двух, и распространена на все случаи (для любых чисел и степеней) И.Ньютоном.

[25] 1) В данном случае нижние индексы идентифицируют конкретную материальную точку, причем не обязательно в числовой интерпретации – возможно и символьное обозначение. Будет специально оговариваться или понятно по контексту.
2) Нижний индекс в математике обычно используется для определения нумерации так называемых ковариантных координат и индексов тензоров метрического риманова пространства.
3) При использовании (псевдо)декартовых координат вместо верхних контравариантных индексов также принято использовать нижние индексы.

важны только координаты ее нахождения, а.т.т. имеет еще два 3–мерных дополнительных параметра – (кинематическую) ориентацию и (динамический) момент инерции

Твёрдое тело (т.т.) – физическое тело, характеризующееся стабильностью своей формы. В теоретической механике пренебрегают деформациями тел и вводят понятие абсолютно твёрдого тела (см. выше). При учете деформации т.т., кроме описания ее положения, появляется полевая форма ее описания – описание ее деформации в каждой точке.

Кроме твердых тел, сохраняющих свою внешнюю и внутреннюю форму, имеются не твердые м.о. Это, жидкости, газы и их различные формы – плазма, электролит, и даже пластичные и сыпучие вещества.

Жидкости. Основным свойством жидкости, отличающим её от твердых тел, является способность неограниченно менять форму. Движение жидкости характеризуется тем, что каждая ее ограниченная область при движении практически сохраняет свой объём. При этом окрестность каждой точки жидкости при ограниченном времени движения остается ее окрестностью. Физически это означает, что плотность вещества жидкости остается постоянной. В жидкости есть диффузия, за счет чего появляется вязкость. Интерпретировать движение жидкости (и других т.т. и с.с.) можно двумя эквивалентными способами:

1) По методу Лагранжа – через движение составляющих жидкость непрерывно расположенных материальных точек – частиц жидкости (элементарных объемов жидкости). В соответствии с ним поток жидкости описывается совокупностью траекторий отдельных частиц;

2) По методу Эйлера. По этому методу описывается движение различных жидких частиц в фиксированных точках пространства через поле скоростей.

Жидкость может быть идеальной и реальной. Реальная жидкость обладает вязкостью, идеальная – нет.

Еще одна форма существования материального, вещественного – это

Газы. Основным свойством газа, как и жидкости, отличающим её от твердых тел, является способность неограниченно менять форму. Но, в отличие от жидкости, движение газа характеризуется тем, что каждая ее ограниченная область при движении может не сохранять свой объём. Но при этом окрестность каждой точки газа, как и жидкости, при ограниченном времени движения остается ее окрестностью. Физически это означает, что плотность вещества газа со временем может изменяться. В газе, как и жидкости, есть диффузия, за счет чего появляется вязкость. Поэтому газ, как и жидкость, может быть идеальной и реальной.

Реальный газ обладает вязкостью, идеальная – нет.

В идеальном газе ее частицы имеют предельно маленький, в идеале – нулевой размер, не взаимодействуют друг с другом, кроме как идеально упругими контактными соударениями. Вязкости нет – но диффузия присутствует априори, и вязкость при этом не проявляется[26].

Плазма от обычной с.с. отличается тем, что она является многокомпонентной с.с., компонентами которой являются свободные электрически заряженные компоненты, например, положительно– и отрицательно– заряженные ионы. Они подвержены раздельному взаимодействию с электромагнитным полем. Обычно это газы.

[26] Требования противоречивые, но в учебных целях полезное допущение.

Жидкости со свободными электрически заряженными компонентами называются **электролитами**, а твердые тела – **проводниками**, (ферро)**магнитами** и **диэлектриками**.

Механическим движением называют изменение с течением времени положения в пространстве точек тела и тел относительно какого–либо основного тела, с которым скреплена система отсчёта.

Траектория движения материальной точки – линия в 3–мерном пространстве, по которой движется тело во времени, и представляющая собой множество точек, в которых находилась, находится или будет находиться материальная точка при своём перемещении в пространстве относительно выбранной системы отсчёта.

Событие – точка в 4–мерном пространстве–времени Минковского. Таким образом, каждой мировой точке (событии) соответствует момент времени и точка в 3–мерном пространстве. Не нужно путать понятие события с точкой на траектории частицы в 3–мерном (или 4–мерном) пространстве, которое является просто **мировой точкой.**

Мировая линия – "траектория" м.т. в 4–мерном пространстве–времени. Не нужно путать понятие мировой линии с обычной траекторией частицы в 3–мерном пространстве.

Скорость – это векторная величина, отражающая быстроту и направление изменения положения м.т. в пространстве.

Ускорение – это векторная величина, отражающая быстроту и направление изменения скорости м.т. в пространстве.

2.1.2 Основные понятия математики

Математика и ее методы являются инструментом научного познания нашей реальной действительности. Математика позволяет наиболее точно определить связи между элементами действительности. Наиболее фундаментальные законы Природы изучаются наукой "Физика". Есть и другие науки, изучающие Природу – это Астрономия, Химия, Ботаника, Биология. Философия. История и Обществоведение. Экономика… Все они – одни больше, другие меньше – пользуются математикой как своим инструментом.

Пространство математическое – множество, имеющее структуру, определяемую аксиоматикой свойств его элементов (например, точек в геометрии, векторов в линейной алгебре, событий в теории вероятностей и так далее).

Топологическое пространство [2][27],[8][28] – пространство, аксиоматически определяемое через аксиомы открытых и замкнутых "окрестностей" своих точек.

Число (целое, положительное, рациональное, вещественное) – исторически традиционные объекты математики.

Комплексные числа – расширение вещественных чисел до решения всех алгебраических уравнений, в частности – квадратных. Они все представляют числа вида $\boldsymbol{a+b\sqrt{-1}=a+bi}$ с мнимой частью i.

Координаты – совокупность чисел, определяющих положение конкретной точки в некоторой системе отсчета или системе координат. Графически координаты в пространстве можно определить как наложенную на нее "координатную" сетку, позволяющую "визуально"–абстрактно понять ее "связь" с пространством. Конечно, в пространстве этих сеток нет.

Абстрактно положение м.о. может быть определено по отношению к некоторой

[27] Александрян Р. А. Мирзаханян, Э. А. Общая топология : учебное пособие. – М., Высшая школа, 1980. – 336 с.
[28] Келли, Дж. Л. Общая топология. М., Наука, 1981. Перевод с английского. Редактор Панькова Т. А. – 432 с.

наложенной на ПВ **координатной сетке**.

Система координат (с.к.) – комплекс определений, реализующий метод координат, то есть способ определять положение и перемещение точки или тела с помощью чисел или других символов. Для точки A в записи вида (x, y, z) как 3–мерных координат координата x (на графике, рисунке) называется **абсциссой** точки A, координата y — **ординатой** точки A, а координата z — **аппликатой** точки A.

Метрика –скалярные функции, которые определяют аксиоматически определенные положительные "расстояния" между точками пространства. В "метрике" имеют место аксиомы:

1) аксиома тождества: $r(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) аксиома симметрии: $r(x, y) \equiv r(y, x)$.

3) аксиома треугольника: $r(x, y) + r(y, z) \leq r(x, z)$;

Метрическое пространство[29] – пространство, в котором аксиоматически определена метрика (расстояние) между любыми ее точками.

В **псевдометрике** первая аксиома и условие положительности метрики не выполняются.

Псевдометрическое пространство – пространство, в котором аксиоматически определена псевдометрика (расстояние) между любыми ее точками. Псевдометрическое пространство отличается от метрического первой аксиомой, и, как следствие, расстояния в ней будут не обязательно положительно определенными.

Риманово и псевдориманово пространства – см. "метрическое" и "псевдометрическое" пространства.

Ортонормированность означает, что оси координат взаимно перпендикулярны и длина единицы оси координат пространства нормированы и равны единице длины, предполагается – эталона длины, а длина единицы оси времени также равна единице, но – единице продолжительности (длины) времени. В галилеевом пространстве (далее ГП) можно говорить об ортонормированности пространственных осей координат. В силу одномерности временной координаты, вопрос о ее ортогональности не может стоять, но она может быть нормированной. Взаимная ортонормированность пространственных и временной координаты не определена, но она может быть принята по умолчанию.

Линейная алгебра – раздел алгебры, изучающий объекты линейной природы: векторные (или линейные) пространства, линейные отображения, системы линейных уравнений, среди основных инструментов, используемых в линейной алгебре — определители, матрицы, сопряжение.

Тензорное исчисление и теория инвариантов обычно (в целом или частично) также считаются составными частями линейной алгебры. Такие объекты как квадратичные и билинейные формы, тензоры и операции как тензорное произведение непосредственно вытекают из изучения линейных пространств, но как таковые относятся к полилинейной алгебре.

Векторное (линейное) пространство* – пространство, элементами которого

[29] Формально для изучения кинематики в объеме описания расположения, скорости и ускорения м.т. достаточно числового топологического пространства. Но ее физическая метризация вносит в нее много дополнительных красок и дополнительной геометрической красоты. Тем более, физическое пространство в модели является не просто топологическим непрерывным пространством с окрестностями, но и трижды метризуемым пространством. Это связано с существованием в ней эталонов. Как минимум – длины, времени и массы. А также физических энергии и импульса.

являются векторы, удовлетворяющие определенным аксиомам. В векторном пространстве определены сложение и вычитание векторов, нулевого вектора, и их умножение на число со свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

Векторная алгебра – строится в 2–х, 3–векторном и 4–мерном векторном пространствах с дополнительными операциями скалярного и векторного произведений.

Вектор*, или полярный вектор – (от лат. vector, «несущий») в простейшем случае математический объект, характеризующийся величиной и направлением. Записывается как список значений, заключенных в общую скобку с разделителями: (a_1, a_2, …, a_n)[30]. В большинстве научных статей и учебниках выделяется жирным начертанием и/или надстрочным диакритическим знаком в виде черточки или стрелки: $\bar{A}$, $\vec{\boldsymbol{B}}$. Является одним из основополагающих понятий линейной и векторной алгебры. В геометрии и в естественных науках вектор эквивалентен направленному отрезку прямой в (псевдо)евклидовом пространстве (или на плоскости) и может иметь длину через скалярное произведение. При преобразованиях координат значения элементов вектора изменяются – говорят, вектор "поворачивается". Свойства вектора определяются аксиомами.

Слово "вектор" широко применяется не только в математике и физике, но и других науках, и не обязательно естественнонаучных, для обозначения многокомпонентного объекта. Главное – есть "множественное" "направление".

Псевдовектор, аксиальный вектор – величина типа вектора, компоненты которой преобразуются как вектор при поворотах системы координат, но меняет свой знак на противоположный при любой инверсии (обращении знака) координат.

Скаляр* – величина или параметр, не изменяющий своего значения при преобразованиях координат.

Кватернион* – объект 4–мерного векторного пространства, представляет собой гиперкомплексное число $a + bi + cj + dk$, где i, j, k – гиперединицы.

Матрица – в математике – структура, записываемая обычно в виде двухмерной таблицы, состоящей из строк и столбцов, заполненных ее элементами, или символом с индексами: $A_{12,}$ B^i_{jk}. В математике она определена как основной структурный объект матричной алгебры или исчисления. Возможно расширение до многомерной матрицы: $A_{123,}$ B^i_{jk}.

Тензор* – многомерный "вектор" как основной объект тензорного исчисления с элементами, обозначенными символом с индексами: $A_{12,}$ B^i_{jk}.. Может иметь размерность от 0 – как скаляр, до любого целого N, вплоть до бесконечного.

Аффинное пространство* – можно представить как линейное векторное пространство со свободными векторами, а векторное пространство в исходном смысле является пространством с фиксированными в начале координат векторами. В аффинном пространстве из простейших геометрических объектов определены только прямые линии, отрезки, свойство их параллельности и проекция.

Пространство Евклидово* – это линейное пространство, свойства которого описываются аксиомами евклидовой геометрии. В этом случае предполагается, что пространство имеет размерность, равную 3, то есть является трёхмерным. В современном варианте он может иметь произвольную размерность и определяет однородное изотропное пространство, в котором все точки и все направления равноправны.

[30] *Любой математический объект (любой!)может быть записан одним символом (или идентификатором) и без индексов, если в этом нет необходимости.

Интервал – псевдометрическая функция между точками в N–мерном псевдоевклидовом пространстве.

Время (промежуток времени) – "временная" координата, а также метрическая функция между точками ПВ.

Расстояние (2.1) – метрическая функция между точками в N–мерном евклидовом пространстве, а также в "пространственных" гиперпплоскостях ПВМ (про "метрика" и гиперплоскость – см. далее).

С евклидовым пространством связывают **декартову систему координат** r^i (или r_i) в котором расстояние между любыми произвольными точками определяется в соответствии с формулой

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta r^1)^2 + (\Delta r^2)^2 + .. + (\Delta r^n)^2}. \tag{2.1}$$

Здесь параметр n равен количеству измерений пространства.

Абсолютное время – координата абсолютного пространства, обладающая свойством:

$$t(q_{(1)}) = t(q_{(2)}) \rightarrow t(\varphi(q_{(1)})) = t(\varphi(q_{(2)})). \tag{2.2}$$

Это означает, что если время двух точек ПВ совпадает в одной из к.с.о., то и при любых допустимых преобразованиях координат эти времена будут совпадать.

Абсолютное расстояние – пространство, обладающее свойством:

$$\Delta l\big(q_{(1)}, q_{(2)}\big) = \Delta l\big(\varphi(q_{(1)}), \varphi(q_{(2)})\big). \tag{2.3}$$

Это означает, что расстояние между двумя точками ПВ при любых допустимых преобразованиях координат не будет изменяться. Обычно это свойство усиливается до условия использования одновременных точек, что осуществляется в ГПВ.

Абсолютное пространство – это пространство, в котором одна (или несколько) из координат не зависимы от других. Такое пространство состоит из нескольких координатных кластеров, ортонормированные преобразования которых независимы друг от друга. Например, это – галилеево пространство, в котором координата "время" преобразуется независимо от пространственных:

$$\begin{cases} t' = t - t_0, \\ r'^i = r^i - v^i t - {r_0}^i. \end{cases} \tag{2.4}$$

Несмотря на то, что преобразования пространственных координат зависимы от времени, пространственные слои при этом не изменяются, оставаясь инвариантами, и в них вкладывается сущность галилеевых преобразований галилеева пространства .

Пространство Галилеево (ГП, ГПВ) – абсолютное плоское линейное аффинное векторное пространство–время (ПВ), представляющее собой прямое произведение двух независимых (абсолютных) подпространств $P^1 \times P^3$, в котором определены галилеевы преобразования координат, и которые названы в честь итальянского физика, механика, астронома, философа, математика Галиле́о Галиле́я (15.02.1564 – 08.01.1642). Структурно оно состоит из независимых 3–мерного и одномерного пространств. И в ней определены две независимые метрики – пространственное 3–мерное "расстояние" (2.1) и одномерное временное "промежуток времени" Δt между точками:

$$\Delta t = t_{(2)} - t_{(1)}, \qquad (2.5)$$

Причем "расстояние" (2.1) определено инвариантно только между точками слоя одновременных точек $t_{(1)} = t_{(2)}$, а "промежуток времени" – для любых двух произвольных точек $t_{(1)}$, $t_{(2)}$ ГПВ и независимо от значений пространственных координат x, y, z этих точек.

Пространство Минковского (ПМ) – 4–мерное линейное векторное плоское псевдоевклидово[31] пространство сигнатуры (+ – – –), предложенное в качестве геометрической интерпретации ПВ СТО А.Эйнштейна со специальной метрикой "интервал".

Интервал[32] – псевдометрическая функция между произвольными точками в 4–мерном ПВ:

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta t)^2 - [(\Delta r^1)^2 + (\Delta r^2)^2 + .. + (\Delta r^n)^2]}. \qquad (2.6)$$

Сигнатурой "+" определяется "временное" подпространство а сигнатурой "–" (минус) – "пространственная" гиперплоскость. В ПМ определены преобразования координат Лоренца–Пуанкаре, определяющие релятивистское ПВ. Это пространство было рассмотрено Анри Пуанкаре в 1905 и Германом Минковским в 1908 году.

Гиперпространство – в математике 4–мерное евклидово пространство или более чем 4–мерное пространство–время.

Гиперплоскость — подпространство в векторном, аффинном или проективном пространстве с размерностью, на единицу меньшей, чем объемлющее пространство. В данной работе – гиперплоскость пространства Минковского – 3–мерное подпространство одновременных точек с $\Delta t = 0$ или потенциально одновременных точек (в физике – ИСО) с $\Delta s^2 \leq 0$.

Пространство – в математике имеет очень широкое применение. В данной работе по контексту может иметь значение как 3–мерное евклидово пространство или 3–мерная подпространство – гиперплоскость 4–мерного пространства–времени с пространственно–подобным метрическим интервалом между ее элементами.

Плоскость – двухмерное евклидово пространство.

Прямая (линия) – одномерное евклидово пространство.

Событие – точка 4–мерного ПВ Минковского (см. далее).

Плоское пространство – метрическое пространство с нулевой кривизной (евклидово, галилеево, минковского, цилиндрическое), в котором существует декартова с.к. с метрикой (2.6).

Не плоское пространство является метрическим неевклидовым пространством с ненулевой кривизной – положительной (риманово, например – сфера), отрицательной (Лобачевского, например – гиперболический цилиндр), неопределенной – например, тор: внутренняя поверхность – с отрицательной кривизной, внешняя – с положительной.

---

[31] Приставку "псевдо" в связи с "метрикой" применяю к пространствам со знакопеременной сигнатурой метрики, например, (+ – – –).

[32] "Интервал" наиболее просто формулируется в волновой теорий как инвариантная фаза распространяющейся в определенном направлении волн некоторой эталонной частоты – см. **Ошибка! сточник ссылки не найден.**, стр. 127.

Пространство Риманово (ПР) – в общем случае не плоское координатное пространство с положительно определенной метрикой (++..+), в котором в каждой точке определена локальная дифференциальная метрика с помощью **метрического тензора** g_{ij}:

$$ds = \sqrt{\sum_{i,j \in [1..n]}^{n} g_{ij} dr^i dr^j},$$
$$ds^2 = g_{ij} dr^i dr^j.^{33} \tag{2.7}$$

Расстояние между произвольными точками определяется путем определения некоторой "прямой" между этими точками, представляющий собой линию наименьшей длины $\boldsymbol{L_{ab} = \int_a^b ds}$ между этими точками, называемый "**прямой**" между этими точками. Метрическое "расстояние" ds является производной от более общей функции скалярного произведения $c = A \cdot B$ векторов в векторном (тензорном) пространствах.

$$p = A \cdot B = A_i B^i = g_{ij} A^i B^j. \tag{2.8}$$

В физике наиболее востребованы не просто римановы пространства с положительно определенной метрикой, а пространства (пространства–время – ПВ) со смешанной сигнатурой метрического тензора, которые назовем псевдоримановыми.

Небольшое отступление: запись скалярного произведения векторов или интервала как метрического расстояния может записываться по разному. Для евклидова пространства и других пространств с положительно определенной ортонормированной метрикой "расстояние" применяется следующий способ записи.

$$dl = \sqrt{dr^i dr^i} = \sqrt{dr_i dr^i}. \tag{2.9}$$

А в общем виде любая метрика записывается через ковариантный метрический тензор g_{ij} с соблюдением правила Эйнштейна для верхних и нижних индексов:

$$ds = \sqrt{g_{ij} dr^i dr^j}. \tag{2.10}$$

С разделением на временную и пространственную части это же уравнение запишется так:

$$ds = \sqrt{g_{00} dt^2 + g_{0j} dt dr^j + g_{i0} dr^i dt + g_{ij} dr^i dr^j}. \tag{2.11}$$

В дальнейшем, кроме этих "правильных" способов, соответствующих правилу Эйнштейна, я буду пользоваться и "неправильным" способом вычисления "интервала" псевдометрики (возможно, без уточнения):

$$ds = \sqrt{dt^2 - dr^i dr^i}, \tag{2.12}$$

в котором не соблюдается правило Эйнштейна для свертки, т.к. при пространственной части интервала ставится явно знак "минус" как признак псевдоевклидовости – он как бы опускает индекс последующего элемента, или

[33] В физике, особенно в тензорных представлениях физики, двойные индексы в представленной форме без использования знака суммы "Σ" используются для сокращенной записи сумм, представленной в первой строке (2.7). Это соглашение называется соглашением о суммах Эйнштейна. Суммирование происходит по парным верхнему и нижнему индексам. В ортонормированном евклидовом пространстве положение индексов не имеет значения, поэтому не имеет значения, где находится индекс – сверху или снизу. В не ортонормированном и римановом пространствах имеет значение.

$$ds = \sqrt{dt^2 - dr_i dr^i}, \tag{2.13}$$

в котором правило Эйнштейна для свертки соблюдается, но также присутствует символ "минус" как признак той же псевдоевклидовости.

2.2 Предмет кинематики

Кинема́тика [5, стр.5] – раздел механики, изучающий математическое описание движения материальной точки (м.т.) и других материальных объектов (м.о.) без объяснения причин этого движения. Движение м.т. происходит в пространстве и во времени. Основное пространство кинематики – непрерывное многомерное топологическое, возможно – метрическое и/или векторное, пространство–время (t, r), размеченное координатным или векторным способом, элементы которого представляют собой числа из некоторого числового поля, обычно – вещественного. Обязательный стандартный набор параметров движения – координаты (вектор), траектория, координатные (векторные)[34] скорость и ускорение. Соответственно, для анализа движения м.т. задаются поля траекторий движения $r(t, r_0)$, скорости $v(t, r)$ и ускорения $w(t, r)$. Степень детализации параметров движения может быть различной в зависимости от условий задачи.

Физика, в силу своей "приземленности", предполагает уже свою "метричность". Она скрывается в наличии различных реальных эталонов для измерения физических параметров пространства, времени и материи, которую претендует описать наиболее детализированным образом. И первые, наиболее известные эталоны "метричности" – это эталоны длины, времени и массы. А также более современное физическое понятие "интервал" – 4–мерное "расстояние". Это значит, что между любыми двумя событиями имеется определенный промежуток времени и интервал, между любыми точками пространства – расстояние. По умолчанию, расстояние определяется между одновременными точками пространства, а время и интервал – между любыми точками ПВ. Но кинематика не обязана рассматривать только метрические пространство и время, если этого не требуется. Главное – что есть N–мерное пространство R^n и 1–мерное время t.

И любое материальное имеет скалярную массу. Через массу в физике определяется понятие "действие", а через нее – наиболее общая форма уравнений движения с использованием принципа наименьшего действия. "Действие" в этом смысле определяет еще одну метрику – метрику, в которую органичным образом вплетается и материя пропорционально своей массе. Например, в СТО А.Эйнштейна действие для м.т. определяется уравнением

$$\begin{gathered} dS = mds = -m\sqrt{dt^2 - dr^2} = -m\sqrt{1 - v^2}dt = Ldt \rightarrow \\ L_{\text{сто}} = -m\sqrt{1 - v^2}, \end{gathered} \tag{2.14}$$

которое легко переносится в классическую механику Ньютона:

$$-m\sqrt{1 - v^2}_{(v \to 0)} \cong L_{\text{км}} = -m\left(1 - \frac{v^2}{2}\right)dt \rightarrow \frac{mv^2}{2}dt. \tag{2.15}$$

И даже потенциальное поле U м.т. легко включить в физическую теорию в "метрической" форме. Идем обратным путем – от классического к общерелятивистскому:

---

[34] Далее я не буду специально выделять и/или различать векторный и координатный способы задания пространства–времени, несмотря на их различие. Какой способ удобнее – тем и буду пользоваться.

$$L_{\text{км}} = m\left(\frac{v^2}{2} - U\right)_{(v\to 0)} dt \to -m\left((1+U) - \frac{v^2}{2}\right)_{(v\to 0)} dt \to$$
$$-m\sqrt{1+2U-v^2}dt \to -m\sqrt{(1+2U-v^2)dt^2} \to \tag{2.16}$$
$$L_{\text{сто}} = -m\sqrt{(1+2U)dt^2 - dr^2}.$$

Далее – различные "физические" интерпретации полученного уравнения для лагранжиана м.т. Одна из интерпретаций[35] – время в гравитационном поле вблизи материальных тел замедляется, а в пустом пространстве – максимально ускоряется.

Рассматриваемое в классической механике Ньютона ПВ является абсолютным галилеевым ПВ абсолютных 3–мерного пространства и 1–мерного времени. ПВ КМН уже является частично метрическим пространством. В гиперплоскости определены "расстояния", а в подпространстве "время" определены промежутки времени. После создания А.Эйнштейном в 1905 г. СТО и ОТО в 1915–1916 гг., показывающих, что время и пространство не абсолютны и скорость имеет принципиальное ограничение, кинематика вошла в новый этап развития в рамках релятивистской механики. В пространстве СТО и ОТО дополнительно определяется метрический параметр "интервал" (2.6), объединяющий в себе и "расстояние", и "время", и ПВ становится (псевдо)метрическим. Метрический интервал объединяет 3–мерное пространство и время в одну общую 4–мерную конструкцию, которые нельзя рассматривать раздельно.

С созданием А.Эйнштейном общей теории относительности само ПВМ, ранее принимавшееся как плоское евклидово пространство, превратилось в (псевдо)риманово ПВ. "Материя" объединилась с пространством–временем и материализовалась в метрике искривленного псевдориманова пространства ОТО. Возможность использования риманова пространства в качестве модели ПВ имелось и ранее, но ее использование в принципе ограничивалось только вложенными в объемлющее евклидово плоское ПВ гиперповерхностями. С принятием ОТО это ограничение снялось само собой, т.к. используемое в ОТО псевдориманово пространство превращало ПВ ОТО в общем случае в произвольное непрерывное топологическое не плоское 4–мерное метрическое ПВ.

Еще одним очень важным понятием должно быть понятие системы отсчета и преобразований координат из одной с.о. в другую. Определение понятия система отсчёта в физике и механике включает в себя совокупность, которая состоит из тела отсчёта, системы координат и координаты времени. Именно по отношению к этим параметрам изучается движение материальной точки или же состояние её равновесия.

Если рассматривать все системы отсчета относительно кинематики – они равноправные. Все системы отсчета получаются из всех возможных преобразований (координат) систем отсчета между собой. В кинематике не указываются преимущества одной системы отсчета при сравнении с другой. Для удобства решения выбирается наиболее приемлемая или удобная для анализа система.

И все это – только кинематика. Куча определений – и все требуют своего определения. То ли еще будет. И по каждой из них написаны книги, учебники, монографии и диссертации на научные звания. Кто–то за это ругает физиков (за сложность, заодно и математиков, дающих свой "сложный" инструмент им), а кто–то жить не может без них. Не претендуя на охват всего, начну с

[35] Последний абзац, конечно, сплошные манипуляции, но через них проясняется тернистый путь физика в изучении законов Природы. Математика имеет много способ эквивалентно описать одно и то же абстрактное, а физика – интерпретировать это абстрактное.

2.3 Чем занимается кинематика

Определение кинематики со всеми вытекающими было дано выше. Поэтому коротко: **Кинематика м.т. — раздел механики, изучающий математическое описание движения м.т.**

Материальная точка изотропна. В модели материальной точки не рассматриваются не изотропные структурные характеристики частиц: момент инерции, дипольный момент, собственный момент, спин и др. Но эти параметры не являются предметом рассмотрения кинематики. Поэтому каждая м.т. сама по себе характеризуется набором только скалярных параметров – масса, электрический заряд и др.

Но скалярные параметры определяют только параметры самой м.т. Но м.т. существует в пространстве и времени. И это "сосуществование" определяется параметрами описания его "сосуществования". Такими параметрами являются параметры нахождения в пространстве через координаты, и его изменения (или движения) во времени через траекторию, векторные и координатные (тензорные) скорость и ускорение. Соответственно, для анализа движения м.т. задаются поля

1) траекторий движения $r(t)$,
2) скорости $v(t,r) = \frac{dr(t)}{dt}$,
3) ускорения $w(t,r) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2r(t)}{dt^2}$.

По отношению к преобразованиям с.о. координата r (точнее, ее дифференциал, или разности координат близких точек), скорость v и ускорение w ведут себя как контравариантные векторы: r^i, v^i, w^i.

Основной задачей кинематики является описание движения при помощи математического аппарата без выяснения причин, вызывающих это движение. Область определения кинематики – описание траектории движения материи, в отношении которых можно определить понятия координата, скорость, ускорение, не обязательно в метризованном и не обязательно плоском пространстве.

Задачи кинематики очень похожи на геометрические, но ее отличие заключается в существовании "офизичивающего" его параметра "время", и именно через нее определяется "движение", в отличие от геометрии. Каких либо ограничений на характер движения м.т. в пространстве, параметризацию и метрические соотношения этого пространства нет. Причина этого в том, что в кинематике нет законов движения, а есть только само движение:

$$r^i = r^i(t) : i \in \{1..3\}. \tag{2.17}$$

Ограничения появляются при наложении определенных условий на это движение. Эти ограничения определяются геометрией траектории – например, по прямой или по окружности, равномерно или неравномерно, прямолинейно или не прямолинейно, и топологией пространства движения – например, по поверхности сферы, цилиндра, окружности.

Модельными пространствами, применяемыми и рассматриваемыми в кинематике, могут быть ПВ без определенной метрики, но обладающие топологическими свойствами непрерывности, представляющие собой композицию 3–мерного пространства и 1–мерного времени. Такими пространствами являются произвольные координатно размеченные пространства, или координатные системы отсчета – КСО (к.с.о.), без каких либо особых свойств. Но очень часто появляется необходимость рассмотрения задач с конкретными "метрическими" условиями. Да и сама физика очень "метрична". И "просто пространства" обретают контекстную "метричность". Частными случаями таких пространств являются ГПВ и пространство Минковского, А также 4–мерное (4=3+1) риманово метрическое пространство произвольной топологии.

В метризованном пространстве появляются понятия вектора, тензора, внешнее и внутреннее (свертка) произведения векторов и тензоров, модуль вектора, скалярного и векторного произведения. Появляются дополнительные понятия, связанные с метрикой – прямой, окружности, равномерности, параллельности и перпендикулярности. Можно включить и понятие ИСО – но оно слишком материализует с.о., вводя в нее понятие "инерционности". А в кинематике этого не должно быть. В ИСО имеется понятие физической "причины" равномерного прямолинейного или криволинейного движения. Появляются понятия эталона и процесса измерения, длины и продолжительности, ортонормированности/искривленности применяемой системы координат. В связи с этими понятиями появляются дополнительные задачи, возлагаемые на кинематику. Но эти понятия можно ввести и в кинематику – для этого, правда, придется в кинематику вместо ИСО ввести понятия геометрической "прямой" риманова пространства и движения м.т. по прямой. Это не противоречит предмету кинематики как о движении м.т. без упоминания о его массе и силах, действующих на нее. По контексту, если есть метрика – есть и прямая, и ИСО. Об этом – в конце работы.

Задача кинематики в метризованном пространстве определяется метрическими условиями. Самые простые условия – метрические условия равномерного или равноускоренного движения по прямой или окружности в ортонормированном пространствах. Или движение во вращающейся с.о. В римановом пространстве в общем случае можно поставить вопрос о движении только по геодезической прямой. Любое другое движение является специфическим, если риманово пространство не плоское.

Несмотря на все мои старания исключить "физичность" кинематики и ее беспричинность, элементы "физичности" и "причинности" все же проявились. А это уже динамика. В некоторой степени "физичность" и "причинность" можно исключить применением метрических понятий в ПВ рассмотрением соответствующих алгебраических зависимостей – например, ее линейности, квадратичности, ...

2.4 Есть ли законы кинематики

Движение по прямой лежит в основе первого закона Ньютона, через которое определяется ИСО.

Первый закон Ньютона: Материальная точка (тело), достаточно удаленная от всех других тел и не взаимодействующая с ними, будет сохранять свое состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения [5, с.24]. Равномерное и прямолинейное движение м.т. при отсутствии внешних воздействий называется **движением по инерции**, а система отсчета, связанная с такой м.т., называется **инерциальной системой отсчета (ИСО)**. При этом покой следует рассматривать лишь как частный случай равномерного и прямолинейного движения, когда $v^i = 0$. И этот закон справедлив независимо от того, маленькое тело с маленькой массой, или тело большое и имеет большую массу.

Справедлив ли этот закон в кинематике? Т.к. кинематика не интересуется взаимодействием м.о. между собой, то этого закона в ней не может существовать. И единственное, что мешает сделать его законом кинематики – наличие слов "не взаимодействующая с другими телами". Можно ли снять это ограничение? Можно – но для этого кинематику надо рассматривать в пространстве с определенной геометрией и метрикой. В таком пространстве это ограничение можно снять и сделать закон кинематическим, просто удалив упоминание на "взаимодействие":

Первый закон кинематики.

Материальная точка в пространстве и времени между двумя точками своей мировой линии движется равномерно и прямолинейно по наикратчайшему пути.

В пространстве без определения метрики ее определить невозможно. В ней нет ни прямых, ни наикратчайших траекторий. Есть только линии и траектории. И стрела времени. И в ней

Второй закон кинематики.

Материальная точка в пространстве и времени между двумя точками своей мировой линии движется по упорядоченной в соответствии со стрелой времени и непрерывной до своих производных мировой линии.

Если отказаться от этих постулатов, то кинематика превращается в чистую математику. Отказ от непрерывности уведет нас от классической кинематики в сторону квантовой. Отказ от стрелы времени разрешит беспричинные события, не предопределенные более ранними событиями и отказ от детерминированности. Отказ от наикратчайшего пути приведет нас к учету статистически определенных траекторий. Это опять сторона, связанная с квантовой механикой.

3 Пространство и материя

Кинематику и динамику движения м.т. можно разделить на несколько больших класса: классическую, релятивистскую, на метрических и не метрических пространствах, в плоском и не плоском пространствах различной размерности и топологии. В не метрических пространствах расстояния или заменяющие ее другие геометрики не определены и такие пространства в физике практически не рассматриваются.

От размерности используемого пространства различают линейную (1–мерную), плоскую (2–мерную), пространственную (3–мерную) и т.д. В метрическом отношении пространство может быть евклидовым, псевдоевклидовым, римановым (псевдоримановым).

Классические кинематика и динамика определяются в плоском галилеевом абсолютном пространстве с использованием абсолютных эталонов, которые не зависят от состояния движения с.о. В ней возможно движение с произвольной ничем не ограниченной скоростью.

Релятивистская кинематика и динамика строятся в плоском пространстве Минковского с использованием релятивистских эталонов, которые зависят от их состояния движения. Это означает, что нельзя сравнивать взаимно подвижные материальные объекты без потери инвариантности отношения параметров. Особенностью этого пространства является ограничение на предельно допустимую скорость м.о. – не более скорости света. В силу этого определить, что понимать под релятивистской кинематикой, можно только на уровне соглашений. Например, что понимать под равноускоренным движением м.т.? Если под ним понимать классическое определение, то непременно выйдем за пределы разрешенной скорости. Поэтому в СТО под равноускоренным движением понимается постоянное, неизменяющееся ускорение в собственной с.о. м.т., т.е. локально покоящейся касательной относительно м.т. с.о. Да и определение релятивистской скорости довольно специфическое.

Динамика, базирующаяся на СТО Эйнштейна в плоском пространстве Минковского, также называется релятивистской. СТО – наиболее обобщенная форма законов Природы "классического" типа. Его отличие от классической ньютоновой механики в том, что устанавливаются релятивистский принцип относительности и эквивалентность между массой и энергией м.т.

В электродинамике, основой которой является все то же пространство Минковского, рассматривается движение м.т. под действием электромагнитных сил. Электромагнитное поле – это векторное силовое поле, через градиент (точнее, 4–ротор) которой определяется ее силовое действие на заряженные тела.

ОТО рассматривает движение м.т. в псевдоримановом пространстве под действием гравитационных сил, имеющих "метрическую" природу. Гравитационное поле – это симметричное 4–мерное тензорное поле ранга 2, определяющее кривизну ПВ, в которой движется м.т. Динамика движения м.т. в таком пространстве переходит в кинематику движения в римановом 4–мерном пространстве.

На уровне микромасштабов – молекулярном и атомном – появляется квантовая механика, исчезает материальная точка и ее кинематика и динамика, исчезает ее координаты и силы, из механических понятий главными становятся энергия и момент импульса. Появляются понятия "состояние" и "вероятность состояния". Фактически, вместо м.т. остается дискретная полевая система с дискретным множеством состояний. Динамика в микромасштабе – это изменение вероятности нахождения системы в определенном состоянии во времени и пространстве. В физике элементарных частиц[36] появляется совершенно новая ситуация – элементарные частицы при взаимодействии могут изменить "элементарную" сущность, превращаясь в другие частицы.

В пределе нулевых расстояний и промежутков времени ПВ в классическом понимании вообще может исчезнуть вместе с причинностью и детерминизмом.

3.1 Пространство кинематики

Действительно ли классическая механика определена в ГПВ, релятивистская – в пространстве Минковского, а ОТО – в псевдоримановом? Да, конечно. Исторически так сложилось. Отголоски от евклидова пространства и декартовых координат. В принципе, совершенно не важно, в каком пространстве они определены. Для классической механики важно, что в точке, любой точке, где находится материальная точка (объект), локально выполняются законы Ньютона с учетом сил инерции. Абсолютно то же самое и для релятивистской механики, основанной на специальной и общей теориях относительности (СТО, ОТО) А.Эйнштейна. И в ближайшей (доступной) окрестности выполняются точно так же законы Ньютона в классической и релятивистской формах. И в любом другом месте и его ближайшей окрестности – тоже. И в любом локальном ИСО и даже НСО.

Что может объединять любые две точки пространства, в которых законы механики, что ньютоновой, что релятивистской – выполняются? А объединяет их принцип относительности. В классической – галилеев принцип относительности, в релятивистской – релятивистский принцип относительности: ПВ однородно и изотропно и законы Природы одни и те же в любой точке ПВ.

Что это может означать с т.з. физики? Вы все знаете, что существуют эталоны. Эталоны длины, времени, массы. Принцип относительности говорит о том, что в каждой точке ПВ можно пользоваться одними и теми же эталонами без каких либо ограничений. А также то, что при перемещении эталонов из одной сточки ПВ в другую по любой траектории при их сравнении (в состоянии взаимного покоя) никаких отличий не будет. Что из этого следует?

А из этого следует, что пространство не обязано быть ни пространством галилеевым, ни пространством Минковского. Оно может быть любым метризованным пространством. Это всего лишь означает, что в любом месте ПВ однозначно определены расстояния и промежутки времени, и они полностью соответствуют эталонам. Местным эталонам. Что на Земле, что на Луне, что на Солнце. И в любой другой точке Космоса как в далеком пространстве, так и времени. И эти точки (а также их ближайшие окрестности), будучи сравниваемы с однажды определенными в каком либо месте эталонами, отличить друг от друга невозможно: все местные эталоны при совмещении совпадают.

Посмотрим, в каком пространстве определена общая теория относительности А.Эйнштейна. А она определена практически если не в любом, то, во всяком случае, метризованном пространстве. Римановом. Точнее – не плоском псевдоримановом. Метрика определяется распределением материи. Не только вещества – но полевой формы материи. И такое пространство называется римановым.

Если галилеево и Минковского пространства плоские, как и евклидово пространство, то риманово пространство не плоское – а искривленное. Пример искривленного пространства – сфера – это поверхность шара. Более того, в ней возможны особенности – "черные дыры". А ни искривленное пространство, ни пространство с черными дырами (или червоточинами – как пишут иногда) не противоречат условию "неизменности"

[36] Квантовую механику и физику элементарных частиц со всеми их подразделами объединю в общую "квантовую физику".

эталона длины и времени при перемещениях в ПВ в соответствии с принципом относительности. Неизменность гарантирована определенностью метрических отношений через заданность или определенность метрического тензора. Неопределенность может скрываться только в неопределенности зависимости метрических отношений от распределения материи. И в дополнительных свойствах материи. Наиболее яркая из них – в существовании электромагнитных взаимодействий.

Ну а дальше – другая неопределенность. Наличие элементарных частиц. Квантовая неопределенность параметров материальных объектов. И наличие других типов взаимодействий.

3.2 Пространство: одна и та же точка? Событие

Пространство состоит из точек. Из множества точек. Целого континуума точек. И разные точки пространства как минимум отличаются друг от друга только тем, что они различимы. В математическом координатном представлении это отличие заключается в разных значениях координат. Если хотя бы одна координата – любая – отличаются, то имеется причина думать о них как о разных точках. В математике это не вызывает каких либо вопросов. Это с первого взгляда. Хотя …

Но в физике ситуация несколько меняется. И это связано с существованием дополнительных сущностей – материи и времени. Причем с одновременно раздельным и в то же время одновременным существованием и пространства, и времени, и материи. Действительно, возьмем какую–либо точку (x, y, z). Это пространственная точка. Можем предположить, что пространственная точка с координатами (x, y, z) во времени t остается всегда в одном и том же месте – если во времени эта точка покоится, точнее – движется, сохраняя свои пространственные координаты. И это, очевидно, "одна и та же пространственная точка во времени".

Но существует принцип относительности. Это значит, что преобразования координат никак не влияют на законы физики (и механики). И на определения тоже. Следовательно, мы должны предположить, что любые ИСО равноправны, и в движущейся со скоростью v ИСО также существует своя "одна и та же точка во времени". И она также должна покоиться. Если эти две точки в разных с.о. когда–то были одной и той же точкой, что очень возможно, то в разных ИСО они во времени пространственно расходятся, нарушая свойство "быть одной и той же точкой ПВ" и переходя в разряд "разных" точек. И это соображение подтверждается законом преобразования координат:

$$r^i(t) = {r_0}^i(t) - vt. \tag{3.1}$$

С другой стороны, некоторые две точки ПВ, определенные в своих двух ИСО в некоторый момент времени как "не одна и та же точка", со временем могут совместиться, превратившись в "одну и ту же точку":

$$r^i(t) + vt = {r_0}^i(t). \tag{3.2}$$

Вопрос: можно ли в пространстве и времени в свете вышесказанного определить инвариантное понятие "та же точка" и "другая точка"? Ответ заключается в следующем предложении: е**сли забыть первоначальную разметку ПВ, то уже будет невозможно восстановить "индивидуальность" определенной точки ПВ в пространстве и времени.**

Поэтому – Нет. Понятия "та же точка" и "другая точка" как пространственные точки можно определить для определенного момента времени в определенной с.о., но невозможно определить для разновременных точек. В ПВ все точки разные – и одновременно любые две точки можно сделать "одной и той же точкой" выбором с.о. Даже если эта точка находится в состоянии покоя (в какой–то с.о), сказать, что эта точка одна и та же точка ПВ в разные моменты времени, невозможно: для движущегося относительно этого объекта ИСО его положение постоянно меняется. Она не одна и та же. Она не инвариантна.

С 4–мерной т.з. понятие "событие" 4–мерного ПВ как точка ПВ определена не как одно и то же событие: они все различные. И они все равноправны. Определив класс эквивалентности "одна и та же точка ПВ" в свете вышесказанного как класс всех точек, которые можно соединить непрерывной координатной линией, мы получим класс связных точек ПВ. Множество всех таких точек определяет некоторое связное топологическое пространство. И такое топологическое пространство можно определить как однородное и изотропное в каждой своей точке ПВ.

3.3 А где материя? В чем она проявляется?

В свете сказанного – можно ли каждую точку ПВ объявить материальной? Ответ на этот вопрос требует определения, что такое "материя". Частично мы это определили в части **Основные понятия физики** как полевая и вещественная формы.

Из предыдущего рассмотрения понятия "одна и та же точка" можно сделать вывод, что свойство "быть материей", точнее – быть вещественной м.т., не может быть основано на свойстве однородности и изотропности ПВ. Вещественность предполагает "индивидуальность", "отличимость" точек ПВ или хотя бы тех, которые приняты как вещественные, в любой с.к. и любой с.о. Для этого в ней необходимо выделить особенность, обладающую свойством индивидуальности – и она не может быть выделена как локальная точка ПВ. Физически возможность выделения материи можно определить двумя способами.

1) Через задание в каждой точке некоторого "полевого" значения Φ как функции, зависящей от координаты точки:

$$\Phi = \Phi(t,r) = \Phi(q). \tag{3.3}$$

Этот способ широко применяется в физике. Таким образом задается, например, потенциальное гравитационное поле U:

$$U = U(t,r,m) = -g_{gr}\frac{m}{r}. \tag{3.4}$$

где g_{gr} – гравитационная постоянная,

m – гравитационная масса (заряд) тела,

r – расстояние от гравитирующего тела.

Гравитационный потенциал не является вещественной формой материи. Но и вещественные формы материи можно описать таким же образом. Например, поле плотности и скорости непрерывной сплошной среды (с.с.) (ρ, p^i) описывается 4–мерным векторным полем:

$$(\rho,V) = \left(\rho(t,r),p^i(t,r)\right) = \rho(t,r)\cdot\left(1,v^i(t,r)\right). \tag{3.5}$$

Здесь ρ(t, r) – скалярное поле плотности с.с.,

v^i(t, r) – 3–мерное векторное поле скоростей с.с.

А сами полевые функции могут иметь произвольную математическую форму и/или структуру, в частности – числовую. Выше определили скалярную и конечномерную векторную числовые формы.

2) Другой способ – через выделение "особой" "выколотой" точки в пространстве (возможно, и ПВ[37] – !) или другой топологической особенности. С одной стороны – она не может быть точкой ПВ – она из нее "выколота". Т.е. "материальная точка" или "особенность" выделяется и индивидуализируется топологически[38] – и при этом не принадлежит ей. Например, как "выколотая" точка или "удаленная" область пространства произвольной формы и размерности из некоторого объемлющего пространства – такая область, в принципе, уже не принадлежит полученному пространству. Но является ее предельным, граничным, объектом.

С другой стороны – можно не только "выкалывать", но и "сшивать" особенности или уже иметь готовую особенность, присутствующую в топологических характеристиках исходного пространства. Такими особыми формами являются двухмерные сфера и тор. И определенную таким образом топологическую "особенность" можно определить как точку, являющуюся "материальной точкой" или более сложным объектом. И при преобразованиях координат (т.е. при смене с.о.) она (форма) не должна терять свойство "быть выделенной " в силу своей постулированной материальности, что заключается в отличии свойства выделенности быть выделенным и в силу этого наблюдаемым и/или детектируемым. Относительно нее можно определить законы материальной природы. И она будет обладать определенными координатами, скоростью, ускорением при координатном представлении Пространства. Возможно, переменными – в зависимости от времени. Такими примерами можно считать так называемые "черные" ("белые") дыры и "кротовые норы".

И выделенная материальная точка ("дыра", "нора", объект) или сшиваемая область в нее вкладывается, делая ее не однородным[39].

Вкладывается. Вкладывается? Значит, м.о., пространство и время существуют раздельно от материи. Ну а как быть с триединством ПВ–материи? Триединство, или реляционность описания материи и пространства, при этом никуда не девается. Слово "вкладывается" не совсем верное. ПВ в каждой своей точке в этом смысле не обладает свойством материальности. Но оно однородно и изотропно. И симметрично. А ее "материальность" проявляется в ее особенностях. Структурных, топологических – некоторые из которых можно определить как "вырезание" или "вкладывание" особенности в ТП. Другие – как "сшивание" особенностей с границами.

С т.з. метрики – точнее, "псевдометрики" – в метрическом ПВ возможно существование трех различающихся типов векторных объектов. Они определяются знаками своих метрических характеристик (точнее, их квадратов) – т.е. они могут быть положительно и отрицательно определенными и равными нулю. Причем "свойства определенности" таких векторов при преобразованиях координат не могут измениться. И их можно связать с видами материи:

1) Объекты с положительно определенными "метриками" можно связать с

---

[37] В этом случае можно постулировать возможность изменения со временем количества материальных точек в результате "аннигиляции" и обратного к нему процесса. И даже закон Гюйгенса "каждая точка ПВ является вторичным источником волны" вполне в это вписывается.

[38] Такое выделение может осуществляться автоматически в точках и областях сингулярности при полевом задании особенности.

[39] Однородность, конечно, сохраняется во внутренних точках топологического пространства. Но особенности при этом никуда не деваются – они остаются особенностями. Но эти точки (области) будут обладать особыми предельными свойствами в пределах собственно топологических пространств, являясь пределами соответствующих последовательностей окрестностей как множества связных предельных точек.

вещественными объектами – только их можно "остановить" и перевести в состояние "покоя" выбором системы координат и локализовать. "Интервалы" в этом случае становятся чисто "временными" и причинно–связанными. Есть ход времени между концами вектора.

2) Нуль–определенные связать с полевой материей – ни при каких преобразованиях координат их невозможно перевести в состояние покоя и локализовать. Очень похоже на решение вопроса "одна и та же точка?" "Интервалы" в этом случае становятся нейтральными нулевыми.

3) Отрицательно определенные – их можно связать с гипотетическими "тахионами" или просто назвать тахионоподобными. "Интервалы" в этом случае становятся чисто пространственными и не связанными причинно в традиционном понимании. Насчет их реальности и связи с какой–либо материей у физики пока нет ответа.

3.4 Понятие материального объекта

Ранее[40] я описал, что такое материальная точка (м.т.), система материальных точек (с.м.т.), сплошная среда (далее "с.с."), твердое тело (т.т.) и вообще что такое материальный объект (далее "м.о.").

Математически материальность пространства (или ее области) описывается функцией плотности, имеющей смысл "количества материального (количества м.т. или чего–то еще) в единице объема физического пространства". Мощность этого материального в любой области пространства может быть конечной, счетной и континуальной и в принципе более чем континуальной[41].

М.т. и состоящие из них с.м.т., и с.с., и т.т., и м.о. – все это, конечно, идеализированные физические материальные объекты (м.о.). М.т. – наиболее элементарная из них. Физически материальная точка – это материальное тело или другой физический объект, размерами и внутренней структурой которого можно пренебречь при описании его движения. При определении координатной системы каждая м.т. получает определенные значения координат. С точки зрения математического описания, м.т. – это выделенная точка геометрического пространства, которому приписаны материальные свойства, и она обладает свойством неделимости. С.м.т. – это несколько м.т. Материальные точки из с.м.т. можно нумеровать (индексировать).

С.с. – это уже область геометрического пространства, где каждой ее "континуальной" точке приписываются материальные и кинематические свойства, и она обладает предельными свойствами "плотности". Наиболее известными параметрами с.с. являются газ, жидкость и т.т. Каждая точка с.с. может иметь свои кинематические параметры движения, при этом форма ограниченной с.с. может меняться во времени как внешне, так и внутренне. И такое изменение структуры с.с. не может происходить чисто кинематически. Такое изменение происходит под действием внутренних сил, называемых "давлением". И, возможно, внешних сил. Т.к. кинематика не изучает внутренние силы, то движение газа и жидкости исключаем из рассмотрения.

Но т.т. можно оставить. Точнее, абсолютно твердое тело (а.т.т.) – это та же с.с. в форме т.т., но она, в отличие от с.с., не может изменять своей формы, как внешней, так и внутренней. И ее положение вполне можно определить через кинематические параметры максимум не более четырех принадлежащих ей точек, связанных не изменяющейся геометрической связью "расстояние" и ориентацией.

---

[40] Основные типы м.о. были рассмотрены в разделе 2.1.1 "Основные понятия физики".

[41] Множество всех возможных функций плотности в пространстве–времени имеет мощность более чем континуум. Но не всякая функция плотности может соответствовать реальности.

И вообще, с математической точки зрения м.о. – это особые выделенные структурированные объекты пространства. Их взаимосвязь с самим ПВ, в котором они находятся, может быть различным. Они могут быть как структурной частью ПВ как топологического, так и вложениями в нее как отдельных "вкладываемых" объектов. На них в некотором смысле нарушается однородность и изотропность пространства, эти точки и области пространства отличаются от других, не материальных, областей.

3.5 Свойства материи

Физическая материя является "вложенным" в ПВ (но неразрывно соединенным, объединенным с ним) объектом и имеет особые свойства. Она обладает индивидуальностью, ей можно приписать координаты, скорость и ускорение, в то время как область пространства не обладает этим свойством. Любые две области ПВ как окрестности точки ТП, можно, конечно, выделить, и даже отследить их перемещения при преобразованиях, но их невозможно индивидуализировать. Если забыть первоначальную разметку ПВ, то уже будет невозможно восстановить ее "индивидуальность". В частности, м.т. является особенностью пространства, его особой, реперной точкой. И поэтому эту м.т. в связи с ее "физической", "материальной" выделенностью невозможно потерять как "м.т.". Ее материальная структура не потеряется. И невозможно ее окрестности спутать с другими окрестностями. Произвольная однородная изотропная точка ПВ таким свойством не обладает.

Вопрос: насколько реальны физические пространство, время, материя?

Ответ: настолько, насколько мы можем воспринимать их и изучать, измерять и сравнивать, помнить прошлое и предвосхищать будущее. Т.е., они реальны. Восприятие физического пространства у нас отождествляется с математическим числовым 3–мерным евклидовым пространством. Материя воспринимается нами как вложенные в это пространство "материальные объекты" в интерпретации "выделенная объемная особенность пространства"[42], обладающая некоторым предельным свойством, отличающим ее от других, которая в каждый момент времени t находится в конкретной точке (ограниченной области) пространства, определяемой координатами (x, y, z). Этот факт может быть записан в форме уравнения движения (см. далее):

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \tag{3.6}$$

или в эквивалентной форме с индексами:

$$r^i = r^i(t), \tag{3.7}$$

где индекс i пробегает значения от 1 до 3. Эта запись эквивалентна следующей[43]:

$$x \sim r^1 = r^1(t), y \sim r^2 = r^2(t), z \sim r^3 = r^3(t). \tag{3.8}$$

[42] Это определение разрушает однородность и изотропность пространства, выделяя в ней некоторую "материальную точку". Но не времени. Эта точка в пространстве может быть определена топологически как "выколотая", не принадлежащая пространству, но идентифицирующая ее "предельную" особенность.

[43] Верхний индекс в математике обычно используется для 1) обозначения показателя степени и 2) определения нумерации так называемых контравариантных координат и индексов тензоров метрического риманова пространства. 3) Свободная интерпретация маловероятна, но возможна и будет специально оговорена или понятна по контексту.

3.6 Взаимоотношения ПВ и материи

То, что мы рассматривали ранее, никаким образом не касалось геометрии (и косвенно – физики) процесса движения. Оно касалось только общего математического описания этого движения в непрерывных координатах, причем достаточно произвольного. В ней невозможно определить тип траектории движения, потому что нет инструментов для этого. В ней невозможно определить движение по прямой линии, по окружности или по другим типам траектории: все траектории движения одинаково равноправны. Для такого описания необходимы дополнительные определения, а именно – метрических отношений типа "расстояния" и "промежутков времени", параллельных, угла и перпендикуляра.

На практике довольно часто встречаются задачи на движение м.т. по определенного типа траектории. Примеры: движение по прямой, окружности, параболе. "Движение по прямой", "движение по окружности", "криволинейное движение", а также движение по любой другой траектории с определенными заранее свойствами, предполагает наложение на форму траектории некоторых алгебраических условий и уже по определению предполагает определенные геометрические свойства пространства описания движения, оставляющие эти свойства инвариантными относительно некоторых преобразований.

В реальной кинематике кроме 3–мерного пространства, еще рассматривается и 1–мерное время. В связи с этим появляется еще два понятия – равномерность и неравномерность, и связанное с ним метрическое понятие "промежуток времени". И дополнительные кинематические понятия типа "равномерное и неравномерное" движение.

Вместе с этими свойствами появляется вопрос – каковы свойства применяемого нами математического пространства и времени? Оказывается, самым общим свойством применяемого нами математического пространства и времени как образа реального является ее метризуемость. А также их однородность и изотропность. Как известно из школьной геометрии, "метризуемость через "расстояния" позволяет сравнивать геометрические, а следовательно, и физические объекты, у которых есть геометрические свойства. А возможность сравнивать – основное свойство физического объекта. Недаром придуманы эталоны, основная роль которых – сравнение сравнимых. А просто пространство и время и их объекты – несравнимы. Со сравнениями связаны и координатные системы, которые накладываются на ПВ с целью ее изучения.

И эти описания даются геометрией. Именно в ней определены понятия прямой, плоскости, угла и многих других производных от них понятий. А также метрические понятия – расстояния, длины, А через нее – и окружности. И даже промежутка времени.

4 Кинематика движущегося материального объекта

Для начала –

4.1 Что такое динамика в кинематике

Динамика в механике – (греч. δύναμις — сила) – раздел механики, изучающий движение тел под действием приложенных к ним сил и причины возникновения механического движения.

Динамика в кинематике – это сочетание в кинематике не применяется. Хотя вполне могла бы быть применена в ней. Могло бы иметь такое определение: динамика в кинематике – раздел кинематики, изучающий движение тел под действием приданных (приложенных?) к ним траекторий, скоростей и ускорений без выяснения причины возникновения траекторий, скоростей и/или ускорений. И вообще: движение во времени – уже динамика. Но – нет. Можно было и так: раздел кинематики, изучающий движение тел по известной зависимости скорости и ускорения от времени (и т.д. и даже без ускорения). Тогда собственно под кинематикой можно было понимать просто зависимость положения тела от времени. Но – все же нет. Кинематика все это включает в себя, но и решает конкретные задачи (1.10):

1) по известной траектории найти скорость и ускорение;

2) по известной скорости найти траекторию и ускорение;

3) по известному ускорению найти скорость и траекторию;

4) по известной зависимости координаты, скорости и ускорения (возможно, интегральных–дифференциальных) в пространстве и времени (с учетом всех связей, ограничений и начальных условий) найти реальные траекторию, скорость и ускорение.

В отношении к движению м.т. "динамику" движения м.т. в кинематике можно применять для изучения ее "ускоренного" (неравномерного) движения как в евклидовых плоских, так и в НСО и/или и неевклидовых криволинейных пространствах с определенной геометрией. В таких с.о. существует причина, которая заставляет свободную[44] материальную точку изменять свое состояние прямолинейного и равномерного движения (скорость и ускорение) даже в отсутствие внешних сил, причем вполне однозначным способом: это криволинейность с.о. Криволинейность предполагает "метричность". Т.е. наличие понятий 3–мерное "расстояние", "продолжительность" временных промежутков и "интервал". Действующие здесь "причины" – это поля скоростей и ускорений. Естественно, здесь у понятий "масса", "сила", "импульс", "энергия" изменяется их физический смысл и/или вовсе теряется и не применяются. Может, это не кинематика? И да, и нет – но здесь аналогично КМН можно ввести новые понятия – "силы" ускорения кинематической инерции, действующей против метрических ускорений, если следовать третьему закону Ньютона о противодействии.

Динамика как раздел классической механики дополнительно оперирует такими понятиями, как масса, сила, импульс, энергия и их моментами. Именно сила в соответствии с открытыми И.Ньютоном законами является причиной движения. Метризация просто необходима для изучения движения под действием сил хотя бы потому, что многие физические понятия определяются через метрические (посредством, или с помощью эталонов) "время", "расстояние", "интервал". В частности, "энергия" и "работа" определяется через скалярное произведение.

---

[44] "Свободная" означает не взаимодействующая ни с какими другими м.о. м.т.

Состояние движения с.м.т. определяется параметрами движения каждой отдельно взятой м.т. Состояние движения абсолютно твердого тела определяется движением любой ее выделенной точки и дополнительно ориентацией в пространстве и вращением, моментом импульса и моментом силы. В отличие от абсолютно твердого тела, движение твердого деформируемого (да и не твердого тоже) тела определяется ее плотностью и скоростью в каждой точке пространства, им занимаемой, и проявляется геометрически и физически в ее деформации.

Динамика, базирующаяся на законах Ньютона, называется классической. Здесь же рассматриваются гравитационные силы взаимодействия между телами. Математически пространство механики Ньютона – евклидово, или, точнее, галилеево[45]. И ограниченно векторное и тензорное.

Движение одной м.т. определяется силами, действующими на нее со стороны сил инерции (см. выше) и внешних сил. Например, гравитационными или электромагнитными, контактными силами трения, вязкости и сопротивления. Гравитационное и электрическое взаимодействия определяются через скалярное потенциальное силовое поле, электромагнитное – через векторное потенциальное поле, градиенты которых определяют их силовое действие на другие массы. В ОТО Эйнштейна гравитационные силы отождествляются с силами инерции искривленного ПВ, при малых скоростях переходящее в векторное потенциальное или даже скалярное потенциальные поля. Есть теории, в которых электромагнитное взаимодействие отождествляется с силами инерции, но в более многомерном – 5–мерном – пространстве.

Есть динамика нескольких м.т., или системы м.т. Движение каждой м.т. в такой системе определяется законами взаимодействия. Примеры – те же. Только источниками сил уже являются сами эти м.т.

Есть динамика твердых тел. Движение твердого тела происходит в эквивалентном 6–мерном (6=3·2·1) пространстве: три – обычные координаты ее выделенной точки, две циклические, эквивалентные координатам на сфере с выделенной осью и центром в выделенной точке, и одна – повороту этого тела. Наиболее яркий пример твердого тела со сложным движением – гироскоп.

Есть динамика сплошных не твердых сред. Это аэро–, гидро– и газодинамика. Есть много других специализаций динамики, изучающих движение объектов типа сплошной среды в особых состояниях, например, динамика плазмы. Движение с.с. определяется статическим давлением и ее градиентом (плотность массы и заряда, температура), силой инерции и током (от скорости), тензором упругости и вязкостью, а также внешними силами, действующими на поверхности и объемы среды. А также концентрационными параметрами многокомпонентной с.с. и диффузии.

В кинематике **движение с.м.т.** имеет смысл рассматривать только в контексте наличия пространственных связей между ними типа "шарниров", "опор" и т.д. Но без обоснования причины наличия этой связи. В противном случаев нет причин для рассмотрения их "совместного" движения, т.к. каждая м.т. системы движется независимо.

4.2 Описание состояния движения материи

Мировая линия м.т. или ее траектория движения полностью определяется функцией координат r^i от времени t: $r^i = r^i(t)$. Особенностью мировой линии $(t, r^i(t))$ является ее непрерывность и однозначность. Непрерывность мировой линии определяется практически так же, как и в (1.12):

[45] ПВ является аффинным пространством, или векторным со свободными векторами.

$$\text{для } \forall t \text{ из } (dt \to 0) \text{ следует } (dq^i \to 0). \quad (4.1)$$

Разница dq^i берется вдоль мировой линии

Однозначность предполагает, что каждому значению t соответствует единственная точка $r^i(t)$. Единственность этой точки диктуется тем, что 1) м.т. не может одновременно находиться в более чем одной точке ПВ и 2) существует стрела времени и никакой материальный объект не может возвратиться назад во времени и оказаться в другой точке. Да и в той же точке тоже: нет определения для "та же точка" и "другая точка" ПВ, потому что для этого надо выделить какую–то с.о. и/или материализовать эту точку. "Та же точка" и "другая точка" ПВ – понятия относительные.

Эти требования диктуются из того, что наблюдаемые нами движении м.о. происходят достаточно непрерывно, т.е. ни координаты, ни ее дифференциалы вдоль мировой линии не могут изменяться скачками[46]. Во всяком случае, реальное движение в пространстве во времени обязано определяться непрерывной сходящейся в каждой точке функцией. В принципе это же можно сказать и по любому другому параметру реального движения – скорости, ускорения и дифференциала большего порядка вдоль мировой линии.

Понятия "скорость" и "ускорение" являются производными от "траектории" и "мировой линии" понятиями. Скорость и ускорение – это величины, характеризующие величину и направление движения материальной точки в данной системе координат или системе отсчета. Классически скорость определяется через изменение координаты места нахождения $r(t)$ м.о. в пространстве во времени t. Пространственными скоростью v^i и ускорением w^i м.т. называются кинематические параметры м.т., определяемые через первую и вторую производные параметров пространственного положения м.т. r^i по временному параметру t:

$$v^i = \frac{dr^i(t)}{dt}, w^i = \frac{d^2r^i(t)}{dt^2}. \quad (4.2)$$

(в некоторой литературе определяется еще ускорение "рывка" через третью производную координат по времени). В силу определения скорости и ускорения через производные на вид мировой линии накладывается ограничение о достаточной гладкости/непрерывности мировой линии и существования производных по времени как минимум второго порядка.

Для определения основных понятий кинематики – координаты, события, траектории, мировой линии, скорости, ускорения – нет необходимости в метрических отношениях ПВ. Но без метрики нет сравнения и нет знания физического смысла, т.к. вся физика (и механика) построена на сравнениях и измерениях. И как только появляется некий скалярный параметр типа расстояния или промежутка времени, измеряемые с использованием эталонов длины и времени, появляется метрика и физический смысл. В частности, время и расстояние являются такими параметрами. Такими параметрами могут быть любые измеримые параметры ПВ. Математический аналог измеримости – существование метрической функции.

[46] Теоретические в учебных задачах скорости и ускорения могут быть и ступенчатыми функциями координат.

4.2.1 Координаты

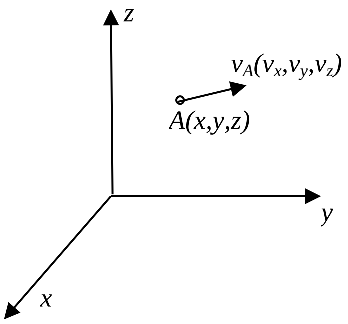

Рисунок 4.1

Координаты в пространстве. Для точки А показаны ее координаты и вектор скорости.

Координаты любой м.т. в реальном физическом пространстве, независимо от 3–мерного или 4–мерного подхода, в любой момент времени t определяются тремя вещественными числами, проиндексированными числами от 1 до 3. Часто координаты в 3–мерном пространстве обозначают символами x, y, z, причем с правой ориентацией с.к. (см. Рисунок 4.1).

В классической механике движение м.т. определяется его координатами в произвольный момент времени t:

$$r^i = r^i(t){:}\ i \in \{1..3\}.$$

В данном уравнении индексы задаются символом i. Если материальных точек много, т о состояние с.м.т. полностью определяется $3N$ координатами – по 3 координаты на каждую м.т. Действительно, для определения положения системы из N классических м.т. в пространстве необходимо задать N 3–мерных радиус–векторов r^1, r^2, r^3, или N 3–мерных координат $R_n(t)$:

$$\begin{cases} R_1(t) = r_1^1(t) \quad r_1^2(t) \quad r_1^3(t), \\ R(t) = r_2^1(t) \quad r_2^2(t) \quad r_2^3(t), \\ R_{...}(t) = \cdots \qquad \ldots \quad \ldots\ , \\ R_N(t) = r_N^1(t) \quad r_N^2(t) \quad r_N^3(t). \end{cases} \tag{4.3}$$

в каждый момент времени t. Эти $3N$ величин R_1, R_2, … , R_N, где каждое R_n состоит из трех значений координат каждой из N м.т., называются обобщенными координатами, а производные от них по времени – обобщенными скоростями, ускорениями, ... Число $3N$ называется количеством степеней свободы системы N материальных точек, далее – с.м.т. При этом время t более выступает в качестве инвариантного параметра, объединяющего траектории движения м.т., чем какой–то координаты. Физический смысл этой инвариантности – одновременность события нахождения каждой м.т. в определенной точке пространства в определенный момент времени (надеюсь, смысл "одновременности" понятна по умолчанию и с детства). На практике в физических теориях ему формально можно придать смысл дополнительной координаты, описывающей динамику. При этом некоторые свойства "одновременности", понятные в смысле "в здравом уме и твердой памяти", могут измениться (сравните, например, ГТО, СТО и ОТО), заменяясь на более абстрактное математическое понятие "упорядочение" по "стреле времени".

Для сплошной среды (далее с.с.) одномоментно определяется функция плотности среды в каждый момент времени и ее скорости в каждой точке среды:

$$\begin{gathered} \rho = \rho(t; r^1, r^2, r^3) = \rho(t; r^i), \\ v^i = v^i(t; r^1, r^2, r^3) = v^i(t; r^j). \end{gathered} \tag{4.4}$$

где r^1, r^2, r^3 – координаты точки пространства в момент времени t.

ρ – плотности в произвольный момент времени,

r^i – координаты материальной области пространства в произвольный момент времени *t*. Одновременно выполняет роль континуального индекса элементарной материальной области м.о.

Надо сказать, что такое описание не совсем полно – оно не учитывает эффекты броуновского движения и диффузии, которое может присутствовать в с.с. При этом еще надо иметь ввиду, что с.с. может быть многокомпонентной. Могут появиться и другие статистически значимые параметры с.с.

Но даже зная все статистические параметры состояния с.м.т. и с.с., эти функции не дают закона изменения (движения) с.м.т. и с.с. в пространстве и времени. Для этого надо знать динамические законы движения с.с. Кинематика способна рассмотреть только движение объектов с известными траекториями, мировыми линиями, скоростями и/или ускорениями. А также другими "производными" параметрами геометрического характера, ограничениями на взаимное положение объектов с.м.т. и параметров с.с. без учета силовых параметров движения.

4.2.2 Особенности 3–мерного подхода

3–мерный подход предполагает, что время и пространство являются независимыми друг от друга пространствами. Это говорит также о том, что время и пространство являются абсолютными, и преобразование пространственных и временных координат можно проводить независимо (в соответствии с уравнениями **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, **Ошибка! Источник ссылки не найден.**). Такими пространствами являются ГПВ с преобразованиями Галилея **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и пространство с преобразованиями Тангерлини **Ошибка! Источник ссылки не найден.**. И даже более того – в каждый момент времени координатная система может быть независима от предыдущих разметок. С точностью до (1.12) – непрерывности координат от точки к точке.

И это полностью соответствует парадигме триединства ПВМ именно как триединство – пространство, время и материя едины, но все же для обозначения этого принципа используем три буквы – П для пространства, В для времени и М – для материи. Каждый элемент, каждая буква – по отдельности. Время – отдельно, пространство – отдельно, материя – отдельно, только уравнение – одно для всех сущностей ПВМ, и только оно их объединяет. Со всеми вместе, но все же – с каждым врозь. И через ГПВ можно смотреть на триединство ПВМ именно таким образом. Время и пространство в ней независимы, т.к. преобразуются независимо. Но через понятие ИСО и движение материи в них все три сущности объединяются в единое целое. Такой подход имеет и свое оправдание.

Практика показывает, что свойства физического пространства хорошо описываются 3–мерной евклидовой геометрией по крайней мере в привычных нам масштабах и скоростях. Наиболее простой реализацией параметризации этого пространства являются декартовы ортонормированные координаты пространства. Координаты в пространстве не обязательно должны быть декартовыми координатами м.т. с определенными метрическими свойствами. Также для параметризации пространства широко применяются некоторые другие ортонормированные с.к. В частности, полярные и сферические. 3–мерное пространство может быть представлено и как риманово пространство с криволинейными координатами.

Т.к. 3–мерное евклидово пространство теоретически может задавать только "застывшие" состояния физической системы, а реально мы видим, что состояние этой системы меняется во времени[47], то для определения этого движения вводится координата

[47] Некоторые уверены, что и это "изменение состояния во времени" также входит в понятие 3–мерного пространства, определяя ее динамику.

"время". Та же практика показывает, что и время хорошо описывается евклидовым пространством, но только одномерным. Притом опять та же практика показывает, что (в классическом случае) пространство и время абсолютны и независимы.

У 3–мерного подхода имеется несколько очень сильных следствия, относящихся к интерпретации реальности, точнее – к измерениям времени и расстояний. И в ГПВ, и в пространстве Тангерлини (ПТ):

1) Время синхронизированных изначально часов ИСО не изменяется при преобразованиях координат. В любом ИСО, в любом месте, в любое время. И в ГПВ пространстве, и в ПТ. Фактически это означает, что любая информация о времени и пространственных координатах распространяется с бесконечной скоростью или по крайней мере имеется (или существует) везде и одновременно – если не говорить о скорости распространения информации – и, пожалуй, это даже лучше.
2) Пространство одновременных событий при преобразованиях координат остается инвариантом: два одновременных события одного ИСО остаются одновременными и в любой другой ИСО.

В ГПВ: $\begin{cases} t' = t, \\ r'^i = -vt + r^i, \end{cases}$ Ошибка! Источник В ПТ: $\begin{cases} t' = t\sqrt{1-v^2}, \\ r'^i = \dfrac{-v^i t + r^i}{\sqrt{1-v^2}}, \end{cases}$ Ошибка! Источник ссылки

А вот со временем и расстояниями имеются свои особенности. В ГПВ:

3) Промежутки времени остаются неизменными при преобразованиях координат.
4) Расстояния остаются инвариантными только в пределах слоя одновременности, т.е. в "пространстве".
5) Закон сложения скоростей ГПВ допускает любую скорость ИСО и м.о.
6) ГП однородно и изотропно.

В ПТ свои особенности, существенно отличающие ее от ГПВ. Во первых, с принципом триединства. Несмотря на то, что время и пространство преобразуются независимо, параметр "скорость преобразования" v влияет на метрику (и эталоны) получающихся в результате пространств, но не смешивая сами координаты.

1) Пространство Тангерлини является пространством с абсолютной с.о., которую можно назвать системой покоя, и максимальной допустимой скоростью движения ИСО, меньшей некоторой фундаментальной скорости c. При скоростях ИСО больших или равных фундаментальному значению c координаты теряют свое изначальное свойство быть вещественными положительными числами, становясь "мнимыми", что может говорить о невозможности таких скоростей ИСО. В силу этого,
2) В пространстве Тангерлини время и расстояния подвергаются релятивистским преобразованиям.
3) Фактически в ПТ существуют две фундаментальные скорости – фундаментальная бесконечная для передачи/получения информации[48] о состоянии системы и

[48] "Бесконечная скорость передачи/получения информации" говорит о том, что в любой с.о. информация об изменении состояния объектов (на гиперплоскости одновременности) известна всем сразу в тот же момент (изменения). В противном случае эта информация дойдет до потребителя через время $\Delta t = \Delta l/c$.

фундаментальная предельная скорость c для скорости движения ИСО и тел. Наиболее ярко это прослеживается в процессе выполнения двух последовательных преобразований координат, которое эквивалентно выполнению второго через возврат в "систему покоя".

4) Пространство Тангерлини однородно в каждом выделенном ИСО, но не изотропно.

4.2.3 Особенности 4–мерного подхода

Четырехмерный подход предполагает, что время и пространство не являются независимыми друг от друга пространствами. Это говорит о том, что преобразование пространственных и временных координат проводится в соответствии с общими уравнениями, "смешивающими" пространственные и временные координаты. И, конечно – с соблюдением непрерывности координат близких точек.

У этого определения 4–мерного подхода имеются очень сильные фундаментальные следствия, относящиеся к отношению с реальностью, точнее – к эталонам и их связью к измерениям времени и расстояний.

1) Время, синхронизированное в одной ИСО, оказывается не инвариантным в другой системе отсчета.

2) Расстояния между любыми точками в одно и то же время в другой системе отсчета оказываются уже совершенно другими и даже более – относящиеся к двум другим не одновременным событиям.

3) Одновременные события одной системы отсчета оказываются не одновременными в другой. Т.е. 3–пространство одновременных событий одного ИСО не совпадает с таким же 3–пространством другого ИСО (сравните с 3–мерным подходом).

Все это фактически означает, что любая информация о времени и пространственных координатах распространяется со скоростью, меньшей, чем бесконечная. Координатные время и расстояния становятся относительными. Реальные физические часы разных с.о. оказываются не связанными. У движущегося физического тела можно определить свои собственные часы и время, в каждой точке своей траектории имеющие свой независимый ход и показания, но – совпадающие своим ходом с собственными часами связанного с ним "попутного" ИСО.

4.2.4 Траектория движения и мировая линия м.т.

Движение м.о. – такое же основное понятие кинематики, как и ее положение. Даже более: и положение, и движение – суть одно понятие. Положение описывает статическое состояние объекта во времени, и время в ней выступает как фиксирующий момент, а движение фокусирует нас на ее изменении во времени и пространстве (см. Рисунок 4.2). Здесь время присутствует уже в динамике. Тем более, при преобразованиях координат покоящееся тело получает скорость, а может оказаться и покоящимся. Таким образом, движение – относительно.

Кроме положения в каждый момент времени, параметрами движения м.т. являются скорость и ускорение. Скорость и ускорение зависимы от системы отсчета и траектории.

Линия, определяющая положение в пространстве м.т. в каждый момент времени, называется траекторией, а линия, определяющая положение в ПВ в каждый момент времени – мировой линией. Движение м.т. между точками A и B называется перемещением.

Основное свойство траектории и мировой линии – их непрерывность и однозначность (см. (1.12) и (4.1)). Еще одно, но уже физическое и одновременно очень геометрическое, условие – их метризуемость. Метризуемость определяет их измеримость. И физическую интерпретируемость.

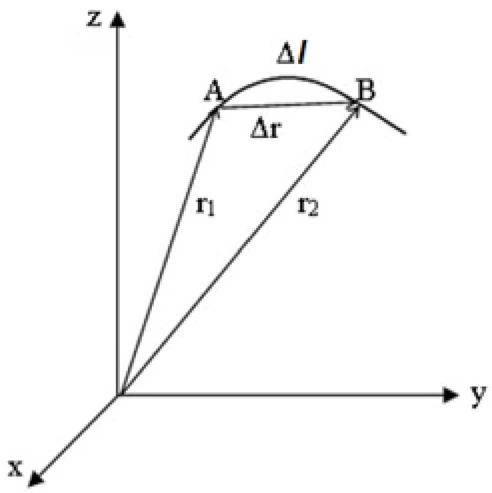

Рисунок 4.2

Параметры траектории движения м.т.

Траектория или мировая линия задается условиями кинематической задачи или определяется как решение уравнения движения м.т. (1.10):

$$\Phi(t, v^i, w^i, \dots) = 0. \qquad (4.5)$$

Понятие "траектория" применяется в 3–мерной механике и задает линию движения м.т. в 3–мерном пространстве. Для описания движения существенным является особая роль координаты "время" t: в процессе движения в каждый момент времени t м.т. может иметь одно единственное значение координат (4.1). Поэтому линия движения в 4–мерном ПВ не может быть замкнутой: линия начинается в прошлом и продолжается в будущем. Но ее проекция на 3–мерное пространство, или три пространственные координаты, во времени могут повторяться – траектория в 3–мерном пространстве может быть и замкнутой.

Понятие "мировая линия" применяется в специальной и общей теории относительности (СТО и ОТО) и задает линию движения в 4–мерном ПВ. Каждая точка "мировой линии" называется "событием". Здесь особая роль координаты t несколько модифицируется: мировая линия начинается в прошлом и продолжается в будущем, причем так, что интервал между любыми ее точками может быть только времениподобным. Но ее проекция на 3–мерная гиперплоскость во времени могут повторяться – траектория в 3–мерной гиперпплоскости может быть и замкнутой.

4.2.5 Траектория и стрела времени. Ее однозначность и направленность.

В классической 3–мерной механике траектория обычно параметризуется через время t. Это наиболее естественный параметр, имеющий "эталонный" для классической механики смысл, связанный с практическим эталоном времени, по которой можно отследить движение м.т. Через нее определяются кинематические параметры движения м.т. – скорость dr/dt и ускорение d^2r/dt^2. Исключительное положение параметра t в этом вопросе объясняется тем, что он является если и не абсолютным, не неизменным, даже, возможно, зависящим от с.о. и смены эталона и/или системы единиц измерения, но "однозначным" и "направленным" параметром.

Иногда встречается параметризация траектории движения через длину линии траектории[49] l, при наличии кругового движения – углом поворота[50] φ. Или даже координатой проекции точки траектории на некоторую координатную ось, например – на ось высоты над поверхностью земли h. Причем эти параметры будут тесно связаны с эталоном длины и расстояний, т.е. с "метрикой" пространства. Они в основном применяются для замены 3–мерных координат и уменьшения размерности модельного пространства до 1 (единицы) с целью упрощения задачи.

"Однозначность" и "направленность" времени определяется существованием стрелы

[49] В так называемой "естественной системе координат" (см. далее). Например, спидометр автомобиля показывает именно эту "координату" как основную и скорость движения.
[50] В полярной системе координат (см. далее 5.2.1 "Полярная система координат").

времени. Для однозначного определения траектории и/или мировой линии движения необходимо, чтобы движение во времени как координате происходило только в одном направлении – в направлении стрелы времени. Причина этого – одна и та же м.т. не может раздваиваться и находиться одновременно (в один и тот же момент времени) в двух точках пространства, а потом сходиться. Стрелу времени можно определить через следующее "логическое" высказывание–уравнение:

$$\forall t, n \exists!\, q^i = q_{(n)}{}^i(t). \tag{4.6}$$

Здесь n – идентификатор конкретного м.о. Это высказывание–уравнение говорит о том, что для любого конкретного времени существует единственное положение, в котором может оказаться уникальный идентифицированный материальный объект. Движение в обратном направлении координатного времени не является движением обратно во времени, и оно тоже должно происходить с увеличением параметра собственного времени τ вдоль направления мировой линии. И в этом смысле м.о., однажды "выбравший" направление своего движения по стреле времени, не может изменить ее.

4.3 Способы задания движения точки

Важным при описании движения м.т. является определиться со способом описания или задания движения точки во времени. Существуют три способа задания движения точки:

• координатный.

• векторный;

• естественный;

Практически все три способа являются в той или иной мере способами координатными и эквивалентными друг другу. Но с различными абстрактно–теоретическим и определительно–описательным аппаратом. Первый способ – это просто три числа. Второй способ – это более геометрический способ, и он основан на понятии вектора как некоторого направленного отрезка в евклидовом пространстве. Но сам отрезок опять же можно описывать тремя числами. Естественный способ знаком очень многим, особенно автомобилистам – здесь параметром движения является показание спидометра, независимо от того, как и какими дорогами двигалась машина. Но это опять же число. Правда, только одно. Но есть "поверни направо", "поверни налево", "двигайся прямо". Или даже – "поверни вправо на 45°", "смени курс на азимут 65°".

Про координаты очень часто говорят, что это сетка. Хочу успокоить некоторых очень придирчивых: координатных сеток в той реальности, в которой мы живем, нет. И не предвидится. Она – только воображаемая. Поэтому никто в них запутаться не может. Также там нет и различных абстрактных математических пространств, таких как евклидовых, релятивистских, криволинейных и искривленных. И вообще страшных топологических, многомерных, с червяками математических конструкций. Все это существует только в головах ученых, которые хотят разобраться, как же устроен тот Мир, в котором мы живем, и хотят разобраться, используя доступные им и для них достаточно простые аналогии, с которыми можно "работать" в формально–абстрактном ключе логических выводов. Модели – иначе. Даже чисел в реальном пространстве не наблюдается – всем этим оперирует человек с достаточно прозрачной целью. Например, 3 км до соседней деревни, прошло пять дней с начала месяца, пульс 75 ударов в минуту. Чтобы не придираться, достаточно понимать, что ученые математики и физики не путают образы и модели с реальностью. И понимают разницу между своими моделями и реальностью.

Начнем с того, что все люди имеют имена, фамилии и отчества. Так и математики и физики обозначают то, с чем они имеют дело – каждой точке пространства и времени – дают имя, фамилию и отчество – это три координаты для каждой точки. Если имена пишутся с помощью последовательности букв, из которых состоят имена–слова, то координаты задаются с помощью трех чисел, а числа – это последовательности цифр. Действительно, наиболее естественным является параметризация с помощью числового поля. Свойства чисел таковы, что они позволяют определить наиболее оптимально реальные отношения между точками ПВ: спереди – сзади, слева – справа, снизу – сверху. Дальше – ближе. Раньше – позже. И даже между тем–то и тем–то.

Положение каждой м.т. в таком пространстве описывается ее числовыми значениями координат в каждый момент времени. Числовые координаты – это тоже отношения. Если выше я определил это отношение достаточно неоднозначно, то числа задают эти отношения очень точно. Или даже абсолютно точно: "Три дня назад – в пяти метрах вперед в сторону реки – в четырех метрах вправо – в одном метре вниз – от отдельно стоящего дерева возле реки у водоворота – я закопал клад". Дерево – это начало координат. Метры – расстояния в единицах измерения, названных "метрами". Метр – это длина чего–то очень определенного и принятого за эталон предмета (или явления). День – очень древняя единица измерения промежутка времени. Вот рассуждениями такого рода и вводятся координаты. 4–мерные координаты.

Несмотря на то, что Пространство (как реальное, так и модельное) как объект исследования определен однозначно, ее конкретная координатная параметризация может быть определена достаточно произвольно. Одной и той же ее точке можно задать любое произвольное значение из некоторого допустимого моделью множества, вплоть до того, что оно не будет связано никакими условиями. Но все же математика и физика накладывают на нее определенные условия, диктуемые свойствами математической модели и ее физической интерпретацией. Это – определенность точки начала координат, направления и масштаба координатной оси, и конечно, ее метрических отношений на основе эталонных определений длины и времени. Определенность точки начала координат определяет выбор с.о. С.о. – для физика это выбор материального объекта в качестве начала системы отсчета. И этот предмет условно будет "неподвижным" – например, то же дерево на поверхности Земли, а можно выбрать каюту корабля без окон в безграничном море или широкой реке. И они будут отличаться друг от друга одним – корабль с каютой может двигаться по отношению к точке суши, где находится дерево. Получили две системы отсчета – подвижная и неподвижная, или два ИСО. А может, и не ИСО – а НСО – действительно, если принять дерево неподвижным ИСО, то корабль может носить ветрами и течениями по поверхности воды туда–сюда – и, в принципе, пассажир этого может и не заметить и думать, что он неподвижен в море, но он движется достаточно беспорядочно по отношению к дереву. Математик начало с.о. может и не связывать с м.о.

Имеется два принципиально разных подхода (как минимум) к параметризации пространства и времени. Первый – это абсолютные независимые время плюс 3–мерное пространство. И четырехмерный – когда три пространственные координаты и время объединяются в одно абстрактное 4–мерное ПВ. С абстрактно–логической точки зрения никакой разницы. Только некоторые обыватели и даже ученые очень этому противятся. Из–за нетривиальности такого взгляда. И даже представить время как дополнительную координату – сложно, потому что нетривиально и не зримо. Для математиков и физиков абстракция от "очевидности" и "здравого смысла" является нормой – они не оперируют "здравым смыслом" и "очевидным". Конечно, не все – некоторым людям довольно сложно понять различие и сходство между этими двумя способами описания.

Первый – 3–мерный. В этом случае пространство и время параметризуются независимо и абсолютно. В случае применения ортонормированной с.к. (декартовой в евклидовом пространстве) параметризация соответствует эталонной: в единице любой координаты умещается ровно одна единица эталона длины или времени. При этом "время" исключается из понятия "пространство". Это пространство классической механики. Время – отдельно. Независимо и абсолютно. Конечно, их можно объединить. Формально и абстрактно. Но многие этого не могут принять – как это можно объединить расстояние и время? Они же такие разные. Одно можно пощупать, а другое – нет.

А множество всех 3–мерных точек за все время движения м.т. называется траекторией этой материальной точки.

Такое пространство есть галилеево пространство. Формально "время" здесь существует как отдельное "скалярное" пространство размерности один с метрикой Δt. А в "пространстве" существует метрика "расстояние" $\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ для одновременных событий.

Второй – 4–мерный (или даже произвольной размерности). Все координаты – и пространственные, и временные – объединяются в одно 4–мерное. Каждая точка такого 4–пространства называется событием, а множество 4–мерных точек движения м.т. – мировой линией этой точки. По аналогии можно ввести понятие "мировой полосы" движения произвольного объекта.

В классической механике такое объединение ни к чему новому не приводит. Но вот в релятивистской СТО есть большие и важные следствия. Здесь нет независимости пространственных и временной координат друг от друга, как в классической механике. Это пространство Минковского СТО. А объединение происходит на основе 4–мерного скалярного "интервала" Δs: $\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$ как универсальную замену скалярному промежутку времени Δt совместно с расстоянием $(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$.

Особый случай – общая теория относительности Эйнштейна. Здесь уже нет какой–то привязки значений координат к эталонам: эталоны будут косвенно присутствовать только в метрике ПВ. Такое пространство называется римановым (или псевдоримановым) пространством. При применении пространства с произвольной метрикой для параметризации координат оси времени все равно применяются эталонные понятия "время" и "расстояние". Произвольная метрика допускает использование не традиционных пространств – метрических топологических пространств. Это очень большой класс пространств с самыми причудливыми формами и свойствами. Например, 3–мерная сфера. Или пространство с черной дырой (или многими черными дырами) – это чем–то похоже на 3–мерное пространство с вырезанными дырками со специальной метрикой. Кстати, материальную точку можно отождествить с такой дыркой – только нульмерной (точечной) пространственной дыркой. Такая "дырка" по определению будет обладать свойством топологической "выделенности". И с ней вполне можно связать материальную точку.

4.3.1 Координатный способ задания движения точки

основывается на задании положения точки в каждый момент времени N числовыми значениями, задающими значения "координат" тела на осях координат x, y и z:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \quad (4.7)$$

(см. Рисунок 4.3) Этот способ не требует, чтобы пространство было метрическим. Единственное – чтобы оно было размечено с помощью чисел. И этого вполне достаточно. Если пространство метрическое, и метрика физически определена в единицах эталона длины, то единица измерения координаты выражается в метрах: [м].

Если точка движется в плоскости, то её движение описывается двумя уравнениями, если движение точки прямолинейное, то получаем одно уравнение движения. Но для начала все же необходимо выбрать начало отсчета координат – точку, обозначаемую, например, как точку O в ПВ, относительно которой отсчитываются значения координат, со значениями координат (0,0,0,…). В механике эта точка обычно связывается с некоторым телом отсчета, и координатная система отсчета получает название "система отсчета".

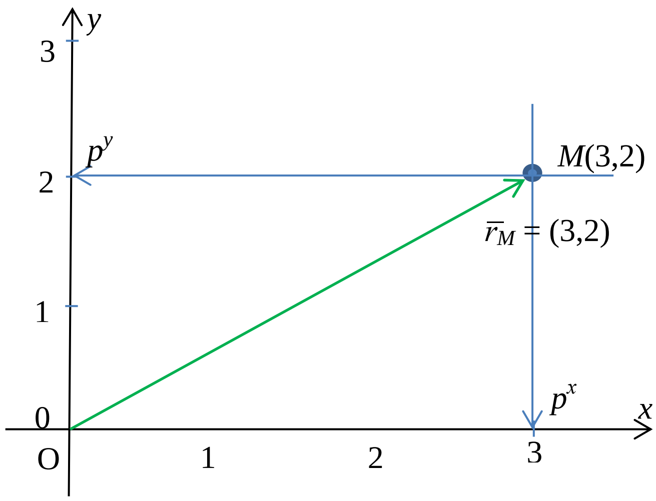

Рисунок 4.3

Координаты в пространстве. Для точки M показаны ее координаты и вектор скорости: $M(3,2)$. Символ p показывает, что эта точка получается проекцией точки M на эту ось.

Если пространство аффинное, то необходимо ввести "единичные" отрезки на всех осях координат (Рисунок 4.3). С помощью "единичных отрезков" в аффинном пространстве вводятся геометрические понятия "прямых", "параллельных" и "проекций" и, естественно, координаты как таковые на прямой, но не "перпендикуляров" и "углов". В ней нет также понятий типа "поворот" и "вращение". И все это не определяет метрику – хотя и может определить ее, но только отдельно на каждой прямой и классе параллельных ей прямых как разность координат. Тогда можно определить координаты произвольной точки M как проекции p^i этой точки на выделенные оси координат:

$$M\colon p^{\mathrm{x}} = \mathrm{x}, p^{\mathrm{y}} = \mathrm{y}, p^{z} = z. \qquad (4.8)$$

Для определения "проекций" точки на координатные оси в аффинном пространстве имеется понятие "прямых" и "параллельных" линий с использованием прямых, параллельных осям координат и проходящих через определяемую нами точку. Т.е. происходит частичная геометризация на основе этих понятий. Дальнейшая геометризация происходит на основе евклидова пространства с декартовыми координатами.

Евклидово пространство обладает всеми свойствами аффинного пространства. Если про аффинное пространство можно говорить только как о математически однородном ПВ, то евклидово ПВ уже является еще и изотропным метрическим пространством, потому что в ней однозначно определены повороты и вращения.

4.3.2 Векторный способ задания движения точки

Если в координатном способе каждая из N координат точки задается как отдельный параметр, то в векторном способе все N чисел, задающих координаты, объединяются в одно, но многокомпонентное "число", которое называется "радиус–вектором" $\bar{r}_M$. На Рисунок 4.3 он выделен зеленым цветом. Если координатный способ может быть и не связан метрическими отношениями, то векторный способ уже по определению обременен этими свойствами и определяется в векторном ПВ со скалярным произведением. В ней определены и расстояние, и промежутки времени, и интервал. И векторная алгебра как математический аппарат.

В письме конкретный вектор можно записать многими способами. Первый способ – списком:

$$(t, x, y, z) \text{ или } (t, r^1, r^2, r^3), \ldots \qquad (4.9)$$

Другой способ – с диакритическим знаком.

$$r = \bar{r} = \bar{r}^x + \bar{r}^y + \bar{r}^z \ . \qquad (4.10)$$

Вместо "черточки" можно пользоваться "стрелками", если шрифт позволяет[51]. Дополнительно можно выделять полужирным начертанием. Или записать в векторной или алгебраической форме записи многокомпонентных гиперкомплексных чисел:

$$r = \bar{r} = r^x \bar{\imath} + r^y \bar{\jmath} + r^z \bar{k}. \qquad (4.11)$$

Здесь $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$ – соответствующие комплексным осям единичные векторы.

Это – абстрактные способы задания. Положение произвольной точки M определяется заданием радиуса–вектора r_M этой точки в функции скалярного аргумента t.

$$\bar{R} = \bar{R}_M(t) = \bar{M}(t). \qquad (4.12)$$

Для записи конкретных значений координат и векторов все значения можно записать списком в скобках:

$$\bar{R}_M = \bar{M}(t) = (5, 2, 7). \qquad (4.13)$$

Представленные способы представляет собой векторный способ задания движения точки. Радиус–вектор $\bar{r}$, имеющий начало в неподвижной точке O (полюсе) и конец в точке M, может меняться как по модулю, так и по направлению. Конец радиус–вектора описывает траекторию точки M.

4.3.3 Естественный способ задания движения точки

При естественном способе задания движения точки предполагается определение параметров движения точки в подвижной системе отсчета, начало которой совпадает с движущейся точкой, а осями служат касательная, нормаль и бинормаль к траектории движения точки в каждом ее положении. Если известна траектория точки, начало отсчёта О, направление отсчёта и зависимость дуговой координаты ОМ от времени (Рисунок 4.3):

$$OM = s(t, M), \qquad (4.14)$$

то это уравнение представляет собой естественный способ задания движения точки. В этом случае с траекторией точки связывают естественный базис. Он может быть координатным, а может быть и векторным. Начало координат этой с.о. постоянно находится в точке M и движется вместе с точкой по траектории, ось касательной $\bar{\tau}$ направлена по касательной к траектории в сторону движения, ось $\bar{n}$ главной нормали направлена перпендикулярно касательной внутрь кривой, ось бинормали $\bar{b}$ – перпендикулярна плоскости $(\bar{\tau}, \bar{n})$.

С.о. естественного способа задания движения точки изначально является криволинейным. С другой стороны, оси n и b являются ортогональными нормированными "виртуальными" координатами, Реальное движение в этих направлениях невозможно, т.к.

---

[51] В дальнейшем я не буду пользоваться специальными способами указания на "векторность", "координатность" и "естественность" (см. далее) параметра, предполагая, что оно ясно из контекста использования.

любое отклонение от "естественной" траектории интерпретируется как движение в "естественном" направлении.

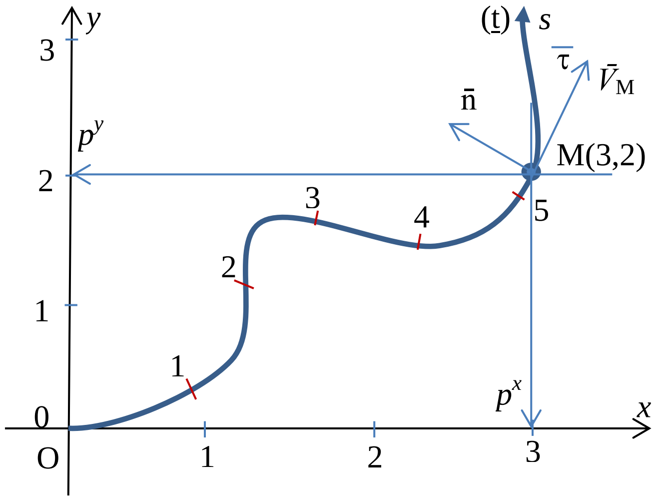

Рисунок 4.4

Естественные координаты движения м.т. в пространстве двух измерений (обозначены красными штрихами). Для точки М показаны ее двухмерные траектория, координаты и вектор скорости. Единичные векторы этой системы: касательная – τ, главной нормали – *n* и бинормали – *b* к траектории.

Естественный способ задания движения м.т. также можно назвать "движением в собственной с.о.".

Основными параметрами движения м.т. являются ее координаты в каждый момент времени, скорость и ускорение. Иногда (редко) встречается параметр движения "рывок".

4.3.4 4–мерная мировая линия и ее параметризация.

В 4–мерном ПВ привилегированное положение координаты *t* теряется в связи с тем, что она принимается таким же равноправным четвертым элементом, задающим координаты м.т., как и три пространственные координаты. Вместо траектории появляется понятие "мировая линия". И в общем абстрактном математическом смысле она может быть параметризована достаточно произвольно. Но при этом (координата *t*) должна продолжать моделировать свойства "физического" времени, и поэтому она должна сохранять свою "однозначность" и "направленность" – или должно существовать что–то другое, что моделирует физическое "время" на ней. В ГПВ – пространстве классической механики – с этим проблем нет. Здесь просто постулируется эквивалентность времени четвертой координате. И этот выбор хорошо ложится на свойства реального ПВ при малых скоростях движения м.о. Но при больших скоростях, близких к скорости распространения света, этот выбор дает трещину. С задачей моделирования времени в этом случае прекрасно справился А.Эйнштейн в своих двух дополняющих друг друга релятивистских теориях – СТО и ОТО.

В принципе совершенно не важно, как параметризуется ПВ и линия движения м.о. в ней. От этого зависит только сложность исходных уравнений, задающих ее. Все зависит от удобства. Единственное требование к этой параметризации – те же однозначность и направленность в будущее: м.о. не может находиться одновременно в двух местах при любой параметризации ПВ. И пространственно–временные петли, связанные с м.о., должны быть невозможны[52]. Для этого должен быть параметр, с помощью которого за этим можно проследить. Если в ГПВ таким параметром является сама координата "время" и связанное с ней параметризация траектории, то в общем случае для мировой линии это не так. Следовательно, мировую линию необходимо параметризовать с помощью другого, независимого и однозначного, параметра *u*, заменяющего время ГПВ.

$$r^i = r^i(u) \rightarrow q^i = q^i(u): \{q^0 = t, q^i = r^i: i \in 1..3\}. \quad (4.15)$$

При параметризации линии движения с помощью параметра *u* свойство параметра *t*

[52] В физике элементарных частиц это не так.

быть однозначным" и "направленным" должно сохраняться. Для сохранения этого свойства необходимо постулировать свойство:

$$\frac{du}{dt} > 0. \tag{4.16}$$

В качестве параметра u в уравнениях движения могут выступать параметры, имеющие определенный инвариантный 4–мерный физический смысл. Такими параметрами являются скаляры. Например, в классической и галилеевой механике им является эталонное время τ : $u = \int d\tau \approx \tau$, представленное как "координата" t. Такое представление вполне логично в силу ее абсолютности, и, следовательно, скалярности[53]. В СТО и ОТО это скалярный интервал s : $u = \int ds = s$. Этот параметр можно определить и как "собственное время" τ м.т., связанные с часами, находящимися постоянно при ней.

Задача – только за способом выбора параметра u (и/или du). Ее можно ввести функционально и с помощью интеграла и/или дифференциала. Примером функционального задания параметризации траектории движения является параметризация временем движения t (или τ):

$$\begin{gathered} u = t, \\ r^i = r^i(t), \\ dr^i = v^i dt. \end{gathered} \tag{4.17}$$

Выбор способа задания параметра u можно сделать через задание параметра траектории с помощью интеграла и/или дифференциала с использованием метрических тензоров $g_{ij\ldots n}(q)$. Наиболее "осмысленным" вариантом в этом случае является линейный дифференциальный способ:

$$\begin{gathered} du = du(q,dq) = g_i(q)dq^i : \frac{du}{dt} > 0, \\ du^2 = du^2(q,dq) = g_{ij}(q)dq^i dq^j : du=\sqrt{du^2}. \\ \ldots, \\ du^n = du^n(q,dq) = g_{ij}.\ldots n(q)dq^i dq^j \ldots dq^n : du = \sqrt[n]{du^{\mathrm{n}}}. \end{gathered} \tag{4.18}$$

где du – инвариантный скалярный дифференциал параметра вдоль линии движения. Далее этот параметр будем обозначать: через du – в общем случае, $d\tau$ – в случае применения линейной метрики, определенной одномерным векторным метрическим полем g_i, ds или dl – в случае применения биметрики, определенной тензором g_{ij} ранга 2.

dq^i – виртуальное перемещение м.т. при изменении параметра u на du,

$g_i(q)$ – векторное поле линейной метрики, или ковариантное векторное поле стрелы собственного времени пространства,

$g_{ij}(q)$ – метрический тензор пространства,

…

[53] Скалярными свойствами обладает промежуток времени dτ, а сама координата τ определена с точностью до некоторой, опять же – скалярной, величины $\tau_{(0)}$, зависящей от выбора с.о. или ее начала координат.

$g_{ij\cdot\cdot kl}(q)$ – полиметрический тензор.

При таком выборе значение параметра u можно вычислить простым интегрированием du вдоль траектории между двумя точками вдоль траектории:

$$u_B = u_A + \int_A^B du\,. \tag{4.19}$$

Направление стрелы времени определяется увеличением значения параметра u вдоль мировой линии.

Если задана мировая линия движения м.т. по параметру u, то можно определить полный дифференциал по этой линии:

$$dq^i = \frac{dq^i}{du}\cdot du = V^i du, \tag{4.20}$$

где $V^i = dq^i/du$ – скорость м.т. по параметру u мировой линии м.т.,

Примерами дифференциального задания способа параметризации траектории движения являются:

1) наиболее естественный способ параметризации – через прошедшее по абсолютным (галилеевым) часам время:

$$du = d\tau = dt; \tag{4.21}$$

2) естественный способ параметризации длиной 3–мерной дуги траектории движения l евклидова пространства

$$du = dl = +\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}; \tag{4.22}$$

3) параметризация траектории движения интервалом СТО s пространства Минковского

$$du = ds = +\sqrt{dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)}; \tag{4.23}$$

4) параметризация траектории движения интервалом ОТО s псевдориманова пространства

$$du = ds = +\sqrt{g_{ij}dq^i dq^j}. \tag{4.24}$$

4.4 Скорость и ускорение

Одной из основных кинематических характеристик движения материальной точки является ее скорость v^i. Но не только – не менее важным кинематическим параметром является ускорение м.т. w^i как величина, отражающая быстроту изменения положения точки в пространстве и ее направление. В некоторой литературе есть еще ускорение "рывка" через третью производную координат по времени. Координатные скорость, ускорение и рывок определяются следующими формулами:

$$v^i = \frac{dr^i(t)}{dt}, w^i = \frac{d^2r^i(t)}{dt^2}, \dddot{r}^i = \frac{d^3r^i(t)}{dt^3}. \qquad (4.25)$$

Понятие рывка применяется при перевозке пассажиров, а также хрупких и ценных грузов. Это связано с тем, что груз, к которому приложено ускорение, деформируется. Частое и быстрое изменение ускорения означает частую и быструю деформацию, что может привести к разрушению хрупкого груза. Частично рывок можно уменьшить, использовав амортизирующую упаковку. Это – техническое значение рывка. Для многих приборов и устройств в технических условиях нормируется предельное значение рывка.

Но есть и вопрос безопасности человека, например, при пассажирских перевозках. И даже водителя транспорта. Часто пассажиры в автобусах (метро, …) едут, не находясь на специально установленных для них креслах с удерживающими устройствами. Рассмотрим такой пример.

Пассажир, едущий на транспорте, приспосабливается к малым ускорениям, которые присутствуют на движущемся транспорте, напрягая мышцы и подбирая позу. При изменении ускорения поза, естественно, тоже меняется. Пассажиру нужно дать время, чтобы отреагировать и сменить её — иначе стоячий пассажир потеряет равновесие, а сидячий — ударится. Типичный пример — момент полной остановки вагона метро после процесса торможения: стоячие пассажиры, наклонившиеся вперёд в процессе торможения, не успевают приспособиться к новому ускорению, возникающему в момент остановки, и наклоняются назад.

4.4.1 Скорость точки

Следующим (после координатного) уровнем изучения кинематических параметров движения м.т. является введение дифференциальных параметров–понятий "скорость" v^i и "ускорение" w^i. **Скорость** v^i – это величина, отражающая быстроту изменения положения точки в пространстве и ее направление. Количество параметров, определяющих скорость, равна размерности пространства. Скорость точки, в зависимости от способа описания движения, выражается следующим способом через производную по времени:

$$v^i(t) = \dot{r}^i(t) = \frac{dr^i(t)}{dt}. \qquad (4.26)$$

(количество точек над символом координаты r говорит о степени производной координаты во времени). Здесь r^i – координаты в принятой системе координат.

Такие скорость и ускорение принято называть координатной. Но такое возможно только при параметризации ПВ, не учитывающей наличие "эталонов", в частности – произвольной. В отличие от координатной, возможно определение физически более значимой "эталонной" скорости, которое считается в единицах эталона расстояния в единицу эталонного времени. Единица измерения в СИ [30][54] – [м/с]. Оно прямо пропорционально количеству эталонных единиц в координатной единице длины и обратно пропорционально количеству эталонных единиц в координатной единице времени. В римановом ПВ принципиально невозможно параметризовать координаты ПВ согласованно с эталонами длины и времени. В таких пространствах необходимо

---

[54] Система единиц измерения СИ является общепризнанной международной системой единиц измерения, принятой в 1960 11–й Генеральной конференцией по мерам и весам (ГКМВ). В ней 7 основных единиц измерения: длина L[м], время T[с], масса M[кг], сила тока I[A], термодинамическая температура Θ[К], количество вещества N[моль] и сила света J[кд], см. Международная система единиц измерения СИ. [Электронный ресурс]. //URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Международная_система_единиц#Основные_единицы

использовать метрические тензоры, которые позволяют формализовать переход к эталонным скорости и ускорению и наоборот.

Понятие "скорость" может быть применено не только к скорости перемещения м.т. в ПВ. Ее можно определить и более обобщенно: "скорость" – это физическая величина, характеризующая быстроту v_φ изменения какого либо параметра – например, φ – во времени t:

$$v_\varphi = \frac{d\varphi(t, r)}{dt}. \tag{4.27}$$

Например, φ – угол поворота вала, сила тока I или напряжение U в электрической цепи, энергия E материальной точки. В зависимости от структуры параметра φ скорость может быть скаляром, вектором, тензором или другой произвольной числовой структурой, связанной и/или не связанной с пространством.

В качестве параметра t для определения скорости также может быть использовано и что–нибудь другое. Например, вектор Δr^i – направление на земной поверхности для измерения скорости изменения геодезической высоты h в определенном этим вектором направлении:

$$v_r{}^i = \frac{dh(r^i)}{dl} = \lim_{r_2 - r_1 \to 0}\left(\frac{h\left(r_2{}^i\right) - h\left(r_1{}^i\right)}{|r_2 - r_1|}\right). \tag{4.28}$$

Здесь $h(r)$ – значение функции геодезической высоты в точке с координатами r,

$r = r_2 - r_1$ – вектор направления определения геодезического наклона,

r_2 и r_1 – координаты бесконечно близких точек в выделенном направлении (траектории).

Данная "скорость" не связана со скоростью, интуитивно связанной со временем. Это скорость изменения высоты ландшафта вдоль некоторого направления, и уравнение имеет смысл только в том случае (да и прежние тоже), если в ней определена функция двух точек $dl = |r_2 - r_1|$ – "расстояние между двумя точками", которая не является временем, но заменяет ее тесно связана с понятием скалярной "метрики" du, заменяющей "время", которое я уже использовал ранее (4.22):

$$\Delta l = |r_2 - r_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y + \Delta z^2}. \tag{4.29}$$

Для бесконечно близких точек эта функция записывается следующим образом:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy + dz^2}. \tag{4.30}$$

В противном случае определяемая так скорость будет иметь только абстрактный математический смысл без физической интерпретации. Но обычно в физике любые формулы имеют определенный физический смысл, т.к. применяются к определенным ситуациям.

В общем случае (при произвольной параметризации плоского пространства) в ней определяется специальная метрическая функция $l(t, r)$, что выражается в существовании измеримого расстояния и промежутка времени между любыми двумя точкам ПВ. Для бесконечно близких точек эта функция записывается следующим образом:

$$(dl(t,r))^2 = g_{ij}dr^idr^j. \tag{4.31}$$

где g_{ij} – метрический тензор. Через метрику (4.30) и (4.31) также можно определить степень искривленности ПВ, но только локальную.

4.4.2 3–мерная скорость в абсолютном ПВ

Но чаще всего человек все же припоминает, что скорость – это величина, характеризующая быстроту и направление движения материальной точки в 3–мерном ПВ, в котором мы существуем. Для физика и математика – в данной системе координат или системе отсчета. Классически скорость и ускорение определяются через изменение координаты места нахождения $r(t)$ м.о. в пространстве от независимого (скалярного) времени t. Пространственными (3–мерными векторными) скоростью v^i и ускорением w^i м.т. называются параметры м.т., определяемые через первую и вторую производные параметров пространственного положения м.т. r^i по временному параметру t В качестве параметра φ здесь используются координаты м.т. в ПВ. Параметр t соответствует временной координате, r – пространственным координатам. Эти определения соответствуют 3–мерным векторным уравнениям:

$$\begin{aligned} dr^i &= v^i dt, \\ dv^i &= w^i dt, \\ dw^i &= \dddot{r}^i dt. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Скорость, определяемая по отношению к скалярному параметру t, тождественно равна единице, ускорение и рывок тождественно равны нулю, являются инвариантными скалярами и в 3–мерной кинематике (и механике тоже) не могут вызывать к себе большого интереса.

Формально 3–скорость, определенная таким образом, в строгом смысле не является вектором. Это всего лишь элементы производных ранга 3 по координате времени вдоль 4–мерной мировой линии: $v^i \sim dr^i/dt^0 = v^i{}_0$: $i \in \{1..3\}$. Доказательством этого факта является то, что преобразованием координат абсолютного ПВ 3–скорость можно обнулить. Для этого достаточно произвести преобразование координат в с.о., движущуюся с этой скоростью v^i, что соответствует собственной с.о. м.о.

Скорость и ускорение, определенные выше по отношению к временной координате t, в общем случае в свете современных взглядов на ПВ не отражают реальные скорость и ускорение в эталонных единицах, т.к. координаты ПВ могут быть реализованы произвольно, да и само ПВ может быт римановым. Но реальное физическое ПВ очень близко по геометрии к евклидовому плоскому пространству и координатная сетка строится специальным образом, называемым декартовым, согласованным с классическими эталонами длины и времени: единицы осей координат соответствуют эталонным единицам длины и времени. Поэтому можно считать, что уравнения (4.25) с некоторой несущественной долей ошибки показывают реальные кинематические параметры м.т.

В математике из непрерывности линии траектории не следует, что она гладкая и имеет производные. Многие непрерывные линии в математике имеют фрактальную везде и в каждом масштабе структуру, не имеющую производной нигде. Но реальные траектории должны быть непрерывны и ограниченны в любой промежуток времени, и быть гладкими и дифференцируемыми до второго порядка почти везде. М.о. не может перескакивать моментально из одного места в другое, моментально изменять свою скорость. Условие дифференцируемости линии траектории гарантирует существование скорости и ускорения м.т. в любой момент времени и возможность применения математических методов анализа. Но слово "почти" допускается ограниченно в некоторых специально оговоренных как "допустимые" случаях. В статистической и квантовой физике эти требования совершенно не уместны: у квантовой "м.т." в принципе нет определенной траектории и параметров движения. В классической механике максимум неопределенности – это предброуновское (колебательное) и броуновские молекулярные (атомные) тепловые движения или другие "почти случайные" движения. Эта неопределенность может также определяться информационной неполнотой о состояний практически бесконечного числа объектов и/или ограниченной точностью определения их параметров. А также "разрывностью" функции описания траектории от параметров м.т. Поэтому в этих случаях можно говорить только о средней статистической скорости. Но это уже область физики с.с.

Задание координат м.о. в определенный момент времени, однако, еще не определяет механического состояния системы, т.е. не позволяет предсказать положение системы в любой другой момент времени. При заданных значениях текущих координат система может обладать произвольными текущими скоростями, а при известных текущих скоростях – ускорениями и т.д. С математической точки зрения положение системы однозначно определяется

1) заданием ее начальных текущих и всех будущих координат в любой момент времени:

$$r^i = r^i(t)\ ; \tag{4.33}$$

2) заданием ее начальных текущих координат и поля скоростей в любой точке ПВ:

$$\begin{cases} {r_{(0)}}^i = r^i(0)\ , \\ v^i = v^i(t,r); \end{cases} \tag{4.34}$$

3) заданием ее начальных текущих координат и скоростей и поля ускорений в любой точке ПВ;

$$\begin{cases} {r_{(0)}}^i = r^i(0)\ , \\ {v_{(0)}}^i = v^i(0), \\ w^i = w^i(t,r); \end{cases} \tag{4.35}$$

4) … (эту закономерность можно продолжить далее). И, в общем,

5) по теореме Коши знание текущих значений координат, всех ее производных по времени в начальный момент времени и поля наиболее старшего производного во времени в начальной точке позволяет найти положение (и состояние) системы в любой момент времени в будущем.

Траектория или мировая линия определяется решением дифференциального уравнения соответствующего порядка. Для реальной взаимодействующей м.т. порядок дифференциального уравнения заканчивается числом два (что соответствует случаю 3), потому что динамика движения системы полностью определяется взаимодействиями через силу взаимодействия f, которое, по второму закону Ньютона, прямо пропорциональную ускорению w и обратно пропорциональную массе m: $f = mw$. Как отмечено выше, заданием ее текущих координат и скоростей и поля ускорений в любой точке ПВ позволяет однозначно найти состояние системы в любой момент времени.

Поэтому уравнение (4.33) не требует решения, уравнение (4.34) при постоянной скорости имеет решение

$$r^i(t) = r_{(0)}{}^i + \int_0^t v^i dt = r_{(0)}{}^i + v^i t, \tag{4.36}$$

а уравнение (4.35) при постоянном ускорении имеет решение

$$\begin{gathered} v^i(t) = v_{(0)}{}^i + \int_0^t w^i dt = v_{(0)}{}^i + w^i t, \\ r^i(t) = \int_0^t \left(v_{(0)}{}^i + w^i t\right) dt = r_{(0)}{}^i + v_{(0)}{}^i t + \frac{v^i t^2}{2}. \end{gathered} \tag{4.37}$$

Решение кинематической задачи с известной силой воздействия на м.т. решается с применением второго закона Ньютона. Сила, действующая на м.т., пропорциональна масса и ускорению и может зависеть только от ее массы m и заряда (зарядов) e_i, положения r^i, скорости v^i и, конечно, времени[55]:

$$\begin{gathered} f_n = f_n(t, m_n, e_n, r_n^i, v_n^i), \\ w = \frac{1}{m} f(t, \ldots). \end{gathered} \tag{4.38}$$

Для с.м.т. в качестве параметров должны пониматься обобщенные параметры, включающие в себя параметры всех м.т. системы. Решив эту задачу, мы будем знать положение, скорость и ускорение м.т. в каждый момент времени.

Кроме определения вектор–скорости, можно определить понятие модуля скорости м.т. Модуль скорости м.т. определяется по формуле

$$|v| = \sqrt{v_i v^i}. \tag{4.39}$$

Замечу: в 4–мерном пространстве 3–мерные координаты, разность координат и скорость не являются настоящими векторами. Об этом чуть дальше. Одна из причин банальна: они как минимум всего лишь 3–мерны.

4.4.3 Скаляры, векторы и тензоры в галилеевом пространстве

В галилеевом 3–мерном пространстве классической ньютоновой механики не имеет значения положение индекса при векторном параметре, потому как метрический тензор, переводящий их между собой, единичный, и поэтому допустимо считать, что $v^i = v_i$.

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}^i} = \sqrt{(\boldsymbol{v}^i)^2}. \tag{4.40}$$

Но считать, что в ГПВ векторы обладают всеми векторными свойствами, а скаляры – скалярными, неверно. При евклидовых преобразованиях координат, в т.ч. и времени, векторы и скаляры (и другие тензоры), не являющиеся "координатами", обладают свойствами векторов и скаляров, но при галилеевых преобразованиях при ненулевой

---

[55] Исключением является радиационное сопротивление ускоренному движению заряженного тела. Радиационное сопротивление – это сила, действующая на заряженную точечную частицу (например, электрон), со стороны её собственного электромагнитного излучения, вызываемого неравномерностью движения этой частицы.

скорости это уже неверно. Например, координата не является вектором, т.к. нулевой вектор–координата теряет свой "нуль" при смещении координат, скорость теряет свой "нуль" при галилеевых преобразованиях, но ускорение – не теряет своего "нуля". Со скалярами так же. Т.к. скаляры получаются из векторов с помощью скалярного произведения, то соответственно векторам меняются и их "скалярные" свойства. Например, расстояние всегда является скаляром (в т.ч. и дифференциалы координат), а вот кинетическая энергия – нет. И т.д.

При 4–мерной интерпретации ГПВ все приходит в порядок: скаляры и векторы (и все тензоры) сохраняют свои "тензорные" свойства. Но для этого в ГПВ необходимо ввести четвертую координату. Ранее (раздел **Ошибка! Источник ссылки не найден.** "**Ошибка! Источник ссылки не найден.**") мы уже определили 4–мерное ПВ Галилея, включив в нее на равных правах и координату "время". В галилеевом 4–мерном пространстве со временем t, где координата t признается равноправной с пространственными 4–ой координатой, элементы скорости соответствуют элементам соответствующего 4–мерного вектора V^i, при этом появляется векторное 4–мерная векторная скорость с дополнительным 4–м элементом v^0 с нулевым индексом координаты t по собственной же координате, соответствующей эталону времени $t \sim \tau$ с единичным скалярным значением.

4.4.4 Скорость по 4–ой координате "время" в пространстве

Точно также формально мы можем определить "координатную" скорость м.т. в абсолютном галилеевом 4–мерном пространстве. Для этого достаточно координату "время" формально приравнять по правам с пространственными координатами и дать ему определенный индекс. Например, индекс 0 – как я обычно делаю, или индекс 4 – как делают другие. Зная координаты траектории м.т. в любой момент времени, можно вычислить его координатную скорость по временной координате:

$$v^i = v_0^i = \frac{dr^i(t)}{dt}, \tag{4.41}$$

(здесь индекс "0" применяется для выделения производной по направлению координаты времени t с индексом 0, в отличие от производной по параметру u – см. далее). Таким образом определяется классическая 3–мерная скорость м.т. Фактически это косинус угла наклона графического изображения мировой линии в плоскости (t, r^i). А сама скорость уже будет не вектором, а тензором ранга 2.

Классическая скорость $v_{(t)}{}^i = v_0{}^i$ через них определяется, как и ранее, по формуле

$$v_0^i = \frac{dr^i(t)}{dt} = \frac{dr^i(t)}{du}\frac{du}{dt} = g_0\frac{dr^i(t)}{du} = g_0 v^i, \tag{4.42}$$

Здесь g_0 – метрический коэффициент. В однородном изотропном пространстве предполагается постоянной в пространстве и времени. Здесь как дань четырем координатам, добавляется еще одна координатная скорость – dt/dt, тождественно равная единице для любого движения:

$$v^0 = v_0^0 = \frac{dt(t)}{dt} = \frac{dt}{dt} = 1. \tag{4.43}$$

В соответствии с этой формулой, g_0 = 1. Из этого уравнения видно, что четвертый элемент скорости не зависит от координат м.т. и ее траектории, что говорит о ее независимости и скалярности. И, следовательно, параметр t можно использовать при расчетах скорости и ускорения в галилеевом нормированном пространстве как скалярный метрический параметр.

4.4.5 4–мерная векторная скорость м.т.

Конечно, никто не может запретить пользоваться 3–мерной скоростью м.т. и в данном случае. Если фиксировать ИСО, то практически никакой разницы в результатах не будет.

Векторная 3–мерная скорость по времени (4.25) в случае рассмотрения ГПВ как 4–мерного уже не может считаться определением скорости, т.к. все четыре координаты (три пространственных и одна временная) – в этом случае равноправны, и выделять одну из координат для определения 4–мерной скорости в форме (4.25) не совсем правильно. Для определения скорости необходимо принять какую–то другую, но уже не 3–мерную, а 4–мерную форму, в каком–то смысле ковариантную, аналогичную 3–мерной в абсолютном пространстве (4.25), но без выделения какой–то координаты. За основу такого определения можно взять уравнение, аналогичное (4.32):

$$\begin{gathered} dq^i = V^i du \to V^i = \frac{dq^i}{du}, \\ dV^i = W^i du \to W^i = \frac{dV^i}{du}. \end{gathered} \tag{4.44}$$

Здесь второе уравнение – для определения ускорения. Только в таком случае скорость, ускорение и все другие высшие производные вдоль траектории будут обладать свойствами векторов, т.е. будут 4–векторами, в чем и заключается их ковариантность.

Для получения скорости со свойствами вектора необходимо (но не достаточно), чтобы делимое dq^i выражения (4.44) был 4–вектором, что, конечно, выполняется всегда, а делитель du в знаменателе выражения скорости dr/du был скаляром и определялся однозначно для любых двух близких точек пространства в направлении движения:

$$du = du(q, dq). \tag{4.45}$$

Роль параметра u может быть различной. Таким параметром также может быть любая скалярная функция $u(q)$ или линейная от дифференциалов функция координат u: $du = du(q, dq)$. В частности – галилеево абсолютное время t. Но чаще всего в такой роли выступают метрические функции "расстояния" между двумя точками. Тогда параметр u выполняет роль некоего "метрического" скаляра вдоль траектории с метрическим коэффициентом. Таким параметром классической механики является эталонное время. В частности, им может быть время $\tau \sim t$ по галилеевым абсолютным часам, которые можно "привязать" к м.о.

Таким образом, роль параметра u – метрическая, т.е. он "метризует" ПВ.

Для 4–мерной векторной скорости движения $V^i = (V^0, V^i)$ будут выполняться следующие соотношения:

$$V^i = \frac{dq}{du}, \tag{4.46}$$

при этом:

$$V^0 = \frac{dq^0}{du} = \frac{dt}{du} = g^0, \tag{4.47}$$

где g^0 –коэффициент пересчета параметра u в эталонное время $s \sim u$. Параметр u можно назвать "собственным" "временем" s м.о. В принципе он определяет некоторую "временную" метрику в ПВ.

Преобразования соответствия между этими скоростями следующие:

$$V^i = \frac{dq^i}{du} = \frac{dq^i}{dt}\frac{dt}{du} = \frac{dq^i}{dt} g^0 = g^0 v_0^i, \tag{4.48}$$

Применим это определение 4–скорости к релятивистской скорости, определяемой в СТО. Для этого в последних уравнениях заменим параметр u на интервал СТО s (4.23). В результате имеем:

$$\begin{cases} V^0 = \dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \\ V^i = \dfrac{dq^i}{dt}\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{v^i}{\sqrt{1-v^2}} = \dfrac{dt}{\sqrt{dt^2-(dx^2+dy^2+dz^2)}} v^i. \end{cases} \tag{4.49}$$

В определении релятивистской скорости по параметру s появился релятивистский множитель g^0. Всегда встает вопрос: как интерпретировать (4.49)? Можно оставить без интерпретации. Но многие физики, особенно в начале XX в., пытались (и сейчас пытаются) это определенным образом интерпретировать. В классической механике есть формула определения импульса:

$$p^i = m\frac{dr^i}{dt} = mv^i. \tag{4.50}$$

В релятивистском случае (4.49) по аналогии с (4.50) можно записать в виде

$$P^i = \frac{mdr^i}{du} = \frac{mv^i}{\sqrt{1-v^2}} \to \tag{4.51}$$

Можно попытаться приписать релятивистский множитель либо к массе m, либо к скорости v^i.

$$\begin{gathered} 1) = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} v^i = Mv^i; \\ 2) = m\frac{v^i}{\sqrt{1-v^2}} = mV^i. \end{gathered} \tag{4.52}$$

В первом случае получим, что у движущегося тела увеличивается масса при неизменной галилеевой скорости, что очень логично. А во втором – масса остается неизменной и скалярной, но изменяется скорость, превращаясь в релятивистскую V^i, которая может иметь любое значение от нуля до бесконечности. В начале XX в. победило первое мнение, и считали, что изменяется именно масса. В конце XX – начале XI в. считают, что масса не изменяется, и что масса является скаляром и соответствует массе m_0 в состоянии покоя м.о. Релятивистская скорость V^i интуитивно не очень понятна – но можно понять ее как скорость м.о. в ИСО наблюдателя в собственном времени м.о. А можно вообще ее не интерпретировать.

Теперь насчет "неполной", или релятивистской, пространственной части скорости

V^i:$\{i \in 1..3\}$. Релятивистская скорость – это проекция 4–мерной скорости на координаты какой–либо гиперплоскости ПВ. В частности, это классическая 3–мерная скорость в 3–мерном пространстве. Выполнить условие неравенства нулю при произвольном преобразовании координат неполной скорости невозможно. Действительно, если взять любые две близкие точки близких слоев этой гиперплоскости, соответствующих параметрам u и $u + du$, соответствующим преобразованием координат этим точкам можно придать одинаковые значения внутренней координаты по этой гиперплоскости (3–пространству) при различных значениях дополнительных координат (времени), соответственно получим нулевую неполную скорость вдоль линии, соединяющей эти две точки. Следовательно, неполная скорость не является ни вектором, ни тензором, но в пределах слоя гиперплоскости для преобразований, оставляющих этот слой инвариантным (при фиксированном t), он будет обладать векторными (тензорными) свойствами.

А вот у полной релятивистской скорости есть одно интересное свойство – его 4-мерная "длина" не может измениться и тем более превратиться в нуль, и при любом движении сохраняет свое скалярное значение, равное "1". Действительно, из (4.49) имеем:

$$V^{0^2} - V^{i^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)^2 - \left(\frac{v^i}{\sqrt{1-v^2}}\right)^2 = \frac{1-v^{i^2}}{1-v^2} \equiv 1. \tag{4.53}$$

А это говорит о том, что 4-скорость является $(1, V^i)$ является вектором.

4.5 Ускорение м.т.

При изучении движения часто необходимо знать, как быстро меняется скорость по величине и направлению. Не просто часто – ускорение естественным образом входит в определение второго закона Ньютона: сила, действующая на м.т., пропорциональна массе и ее ускорению [5, с.27]:

$$F^i(t) = mw^i(t)\,. \tag{4.54}$$

4.5.1 3–мерное ускорение м.т. в абсолютном ГП

Ускорение w^i – это векторная величина, характеризующая быстроту изменения вектора скорости с течением времени. Количество параметров, определяющих ускорение, равна размерности пространства. Ускорение точки, в зависимости от задания способа описания движения, выражается следующим способом через производные по времени $t \sim \tau$:

$$w^i(t) = \ddot{r}^i(t) = \frac{dv^i(t)}{dt} = \frac{d^2r^i(t)}{dt^2}\,. \tag{4.55}$$

В отличие от координатной, здесь также возможно определение "эталонного" ускорения, которое считается в единицах эталона расстояния в единицу эталонного времени. Единица измерения в СИ – [м/с^2]. Оно прямо пропорционально количеству эталонных единиц в координатной единице длины и обратно пропорционально квадрату количества эталонных единиц в координатной единице времени. Другие замечания по координатам, скорости и ускорению прежние – как ранее по скорости.

А "ускорение" в общем случае – это физическая величина, характеризующая быстроту w_φ изменения "скорости" некоторого параметра φ – во времени $t \sim \tau$:

$$w_{\varphi} = \frac{dv_{\varphi}(t,r)}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{d\varphi(t,r)}{dt} = \frac{d^2\varphi(t,r)}{dt^2}. \tag{4.27}$$

4.5.1 Ускорение по индексу 0 в абсолютном ГП

В галилеевом 4–мерном пространстве со скалярным временем t, где координата t признается равноправной с пространственными 4–ой координатой, элементы ускорения соответствуют элементам соответствующего 4–мерного вектора W^i, при этом появляется векторное 4–мерное векторное ускорение с дополнительным 4–м элементом w^0 для скалярной координаты t по этой же координате соответствующей эталону времени $t \sim \tau$:

$$w^0 = \frac{d^2t}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dt}{dt} = \frac{d}{dt}1 = 0. \tag{4.56}$$

Из этого уравнения видно, что четвертый элемент ускорения w^0, как и скорость v^0, не зависит от пространственных координат м.т. и ее траектории, что говорит о ее независимости и скалярности. Это позволяет использовать 4–ю координату t как скалярный метрический параметр τ при расчетах скорости и ускорения в галилеевом нормированном с помощью метрики пространстве.

4.5.2 4–мерное релятивистское ускорение м.т. W_{ut}

Второй закон Ньютона в классическом исполнении с использованием импульса p^i записывается так:

$$F^i = m\frac{dv^i}{dt} = \frac{dmv^i}{dt} = \frac{dp^i}{dt}. \tag{4.57}$$

В литературе по СТО применяется определение ускорения м.т., "согласованное" со вторым законом Ньютона. Разберемся с релятивистским ускорением, связанным с СТО А.Эйнштейна и косвенно с ускорением классической механики Ньютона.

Таким уравнением является релятивистский аналог этого уравнения, который записывается в следующем виде:

$$F^i = mW_{ut}{}^i = \frac{dP_u{}^i}{dt} = \frac{d}{dt}mV_u{}^i = m\frac{d}{dt}V_u{}^i = m\frac{d}{dt}\left(\frac{dq^i}{du}\right) = m\frac{d^2q^i}{dtdu}. \tag{4.58}$$

Здесь m – масса = const, P – импульс м.о. В соответствии с этим выражением сила равна полной производной по времени импульса вдоль траектории рассматриваемого лабораторного ИСО, о чем говорит форма производной d/dt вдоль мировой линии в ИСО.

В кинематике ни сила, ни импульс, ни масса не рассматриваются, что соответствует неизменности и равенству единице значения массы m. Вместо импульса используется скорость V, а вместо силы используется ускорение W. С учетом всего этого можем определить смешанное ускорение м.о. через координатные скорость и ускорение. Оно будет равно:

$$W_{ut}{}^i = \frac{d}{dt}\left(\frac{dq^i}{du}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dq^i}{dt}\frac{dt}{du}\right) =$$
$$= \frac{d}{dt}\frac{dq^i}{dt}\cdot\frac{dt}{du} + \frac{dq^i}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\frac{dt}{du} = w^i g^0 + v^i\cdot\frac{dg^0}{dt} \rightarrow$$

$$\to \begin{cases} W_{ut}{}^{i} = g^0 w^i + v^i \dfrac{dg^0}{dt}. \\ W_{ut}{}^{0} = g^0 w^0 + v^0 \dfrac{dg^0}{dt} = \dfrac{dg^0}{dt}. \end{cases} \qquad (4.59)$$

Подставим вместо g^0 выражение релятивистского множителя $\mathbf{1/\sqrt{1-v^2}}$:

$$W_{ut}{}^{0} = \frac{dg^0}{dt} \to \frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{-\dfrac{2vw}{2\sqrt{1-v^2}}}{(1-v^2)} = -\frac{v^i w^i}{(1-v^2)^{3/2}}. \qquad (4.60)$$

$$\begin{gathered} W_{ut}{}^{i} = g^0 w^i + v^i \frac{dg^0}{dt} \to \frac{w^i}{\sqrt{1-v^2}} + v^i \frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \\ = \frac{w^i}{\sqrt{1-v^2}} + v^i \frac{-\dfrac{-2vw}{2\sqrt{1-v^2}}}{(1-v^2)} = \frac{w^i}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{v^i(vw)}{(1-v^2)^{3/2}}. \end{gathered} \qquad (4.61)$$

Как видно из последнего уравнения, вектор 4–ускорения состоит из двух частей и по своему направлению не соответствует ни направлению 3-мерного ускорения d^2r/d^2t, ни направлению скорости своего движения dr/dt. В связи с этим появляется соблазн определить два типа ускорения – продольного и поперечного.

Эти ускорения отличаются от векторного ускорения (4.66) отсутствием метрического множителя g^0. В качестве признака этого отличия это ускорение я пометил дополнительным индексом *u* как напоминание о "силе" и "ускорении" в соответствии со вторым законом Ньютона.

4.5.3 Релятивистская сила

Если мы в определении второго закона Ньютона в применении к СТО используем определение ускорения в виде (4.61), то второй закон Ньютона должен быть записан в виде:

$$F_{ut}{}^{i} = mW^i = \frac{dP_u{}^{i}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}\left(w^i + \frac{v^i(v^i w^i)}{1-v^2}\right). \qquad (4.62)$$

В современных учебниках принято вместо обобщенного уравнения для ускорения (4.61) использовать форму с разделением ускорений в поперечном и продольном направлениях. И очень часто без детального проведения этого процесса разделения. Алгоритм этого вывода можно посмотреть в [20, с.57][56]. Конечные формулы следующие [10, с.149][57]:

1. Скорость м.т. изменяется только по направлению, сила направлена перпендикулярно к скорости:

---

[56] Якута, А. А. Механика. Лекции. //Редактор Алексей Александрович Якута (конспект подготовлен студентами, не проходил проф. редактуру и может содержать ошибки). Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова. – 157 с. [Интернет–ресурс]. URL: https://teach–in.ru/file/synopsis/pdf/mechanics–yakuta–M.pdf. Последняя загрузка: 21.10.2021.

[57] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Краткий курс теоретической физики : т. 1. – Механика, электродинамика, М. : Наука, 1969. – 272 с.

$$\frac{dP_u{}^i}{dt} = \frac{mw_\perp{}^i}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} w_\perp{}^i. \tag{4.63}$$

2. Скорость меняется только по величине, сила направлена по скорости:

$$\frac{dP_u{}^i}{dt} = \frac{mw_{||}{}^i}{(1-v^2)^{3/2}} = \frac{m}{(1-v^2)^{3/2}} w_{||}{}^i. \tag{4.64}$$

Ускорения (4.61) точно так же можно разделить на продольную и перпендикулярную части.

Такая форма записи наводит на некоторые мысли, касающиеся вопросам интерпретации этих формул физиками. Это во многом связано с тем, что в (4.63) и (4.64) легко увидеть "переменность", "изменчивость" массы при "классических поперечном и продольном ускорениях, выражающих "релятивистскую" силу. В связи с этим появлялась возможность рассматривать "продольную" и "поперечную" массу м.о. как реальные, которые оказывались не равными между собой, что создавало трудности восприятия теории СТО. Поэтому раньше многие физики считали, что масса зависит от скорости м.о. Но в последнее время от этого мнения отказались, и считается, что масса постоянна и не зависит от скорости м.о. (см. Окунь Л.Б. [11][58]). Правда, при этом интерпретация "поперечности" и "продольности" переносится на ускорение. Этим переносом закрывается вопрос об интерпретации массы как "продольная" и "поперечная". И это более соотносится с релятивистским сокращением размеров объектов как геометрическим в пространстве Минковского, чем если бы это соотносилось с массой[59]. И даже с тем, что при выводе этих формул мы по умолчанию принимали неизменность массы м.т.

4.5.4 4–мерное ускорение м.т. W_{uu}

В настоящее время в качестве модели физического пространства в основном используется (и это правильно) 4–мерное математическое пространство, где вместо "три пространственные координаты r^i: $i \in \{0..3\}$ плюс одна независимая абсолютная "временная" координата t как параметр состояния объекта" используются четыре равноценные объединенные координаты q^i: $i \in \{0..3\}$, где координата q^0 соответствует координате t. В частности, это СТО и ОТО А.Эйнштейна. Формулы, приведенные выше для 3–мерного случая, верны и для 4– мерного случая, только вместо трех координат r^i должны использоваться четыре координаты q^i:$\{i \in 0\ ..3\}$. Формально при этом координатная 4–скорость v^i относительно 4–й координаты "время" t, уже становятся просто элементами 4–тензора ранга 2: $V^i_j \sim V^i_0$. И не представленный в них элемент скорости v^0_0, определяющий скорость относительно этой дополнительной координаты – координаты "время" t – в этом случае принимает тривиальное значение: $v^0_0 = dt/dt = 1$, а ускорение $w^0_{00} = d^2t/dt^2 = 0$.

---

[58] Морин, Дэвид (2008). "Глава 11: Теория относительности (кинематика)" (PDF). Введение в классическую механику: с проблемами и решениями. Издательство Кембриджского университета. С. 539–543. ISBN 978-1-139-46837-4. [Электронный ресурс] //URL: https://web.archive.org/web/20180404002006/http:/www.people.fas.harvard.edu/~djmorin/chap11.pdf. Архивировано 4 апреля 2018 года.
Окунь Л.Б. Понятие массы (Масса, энергия, относительность) / Успехи физических наук, 1989, т.158 – №3. – с. 511–530

[59] Можно отнести и к массе, но тогда в кинематике появляется некая "объемная" "плотность" элемента объекта рассмотрения кинематики. Но м.т. – основной объект данной работы – не обладает объемом и плотностью, поэтому эту возможность не будем рассматривать.

Работать с 16 элементами тензора скорости V^i_j ранга 2 и 64 элементами тензора ускорения V^i_{jk} ранга 3 для описания движения м.т. вдоль одномерной мировой линии, описываемой просто 4 элементами вектора направления движения и одним скалярным параметром u, параметризующим траекторию $q^i(t) \to q^i(u)$, думаю, будет сложновато и бессмысленно. Для решения данной проблемы применяется параметрический метод описания движения м.т. через скалярный параметр u вдоль траектории.

Через вторую производную по скалярному параметру u определяется 4–мерное векторное ускорение м.т. W^i вдоль мировой линии. Именно векторное – потому что производная любого порядка по скалярному параметру u для любого тензора не изменяет ни его свойство оставаться тензором, ни ранг тензора. Поэтому и это "ускорение" является 4–вектором:

$$W_{uu}{}^i = \frac{d^2q^i}{du^2} = \frac{dV^i}{du}. \tag{4.65}$$

Формально эти ускорения $W_{uu}{}^i$ являются элементами вектора: $i \in \{0..3\}$.

Пересчитаем векторное ускорение через координатные скорость и ускорение.

$$\begin{aligned} W_{uu}{}^i &= \frac{d^2q^i}{du^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{dq^i}{dt}\frac{dt}{du}\right) = \left(\frac{d}{du}\frac{dq^i}{dt}\right)\frac{dt}{du} + \frac{dq^i}{dt}\cdot\frac{d}{du}\frac{dt}{du} = \\ &= \left(\frac{d}{du}\frac{dq^i}{dt}\right)g^0 + \frac{dq^i}{dt}\frac{dg^0}{dt}g^0 = \left(\frac{d}{dt}\frac{dq^i}{dt}g^0 + \frac{dq^i}{dt}\frac{dg^0}{dt}\right)g^0 \to \end{aligned}$$

$$W_{uu}{}^i = \left(w^i g^0 + v^i\frac{dg^0}{dt}\right)g^0 = \left(g^0 w^i + v^i\frac{dg^0}{dt}\right)g^0. \tag{4.66}$$

при этом:

$$\begin{aligned} W_{uu}{}^0 &= \frac{d^2q^0}{du^2} = \frac{d}{du}\frac{dq^0}{du} = \frac{d}{du}\frac{dt}{du} = \frac{dg^0}{du} = \\ &= \frac{dg^0}{dt}\frac{dt}{du} = \frac{dg^0}{dt}g^0 = \frac{1}{2}\frac{d(g^0)^2}{dt}. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Здесь (и далее):

$$\begin{aligned} &g^0 = \frac{dt}{du}, \\ &V^i = \frac{dq^i}{dt},\ v^i = \frac{dr^i}{dt} \sim \frac{dq^i}{dt}, v^0 = \frac{dt}{dt} = 1, \\ &W^i = \frac{d^2q^i}{dt^2}, w^i = \frac{d^2r^i}{dt^2} \sim \frac{d^2q^i}{dt^2}, w^0 = \frac{d^2t}{dt^2} = 0. \end{aligned} \tag{4.68}$$

(заметьте: при подстановке в эти формулы вместо i значения 0 имеем уравнение (4.67)).

Из этой формулы видно, что векторное ускорение в общем случае даже не коллинеарно координатному ускорению и выражается наиболее просто (и коллинеарно) через координатное, если $v^i{}_0 = 0$: $i \in \{1..3\}$ или коэффициент g^0 не зависит от u, что равносильно $g^0 = \text{const}$. Т.к. обеспечить тождественное равенство нулю скорости v^i практически невозможно, остается один вариант – $g^0 = \text{const}$ – тогда координатное и векторное ускорения будут вычисляться по следующим формулам:

$$
\begin{aligned}
W^i &= w^i = \frac{d^2q^i}{dt^2}.\\
W^0 &= w^0 = \frac{d^2t}{dt^2} = 0.
\end{aligned}
\tag{4.69}
$$

(сравните с (4.55), (4.56)). Таким пространством является галилеево пространство.

Выразим результат (4.66) для конкретного вида параметра $u = s$, подставив вместо g^0 выражение релятивистского множителя $1/\sqrt{1-v^2}$:

$$
W_{uu}{}^0 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g^0)^2 \rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{1}{1-v^2} = -\frac{1}{2}\frac{2v^i}{(1-v^2)^2}\frac{dv^i}{dt} = -\frac{v^iw^i}{(1-v^2)^2}. \tag{4.70}
$$

$$
W_{uu}{}^i = g^0\left(g^0w^i + v^i\frac{dg^0}{dt}\right) \rightarrow = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{w^i}{\sqrt{1-v^2}} + v^i\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{w^i}{\sqrt{1-v^2}} + v^i\frac{-\dfrac{-2v^iw^i}{2\sqrt{1-v^2}}}{(1-v^2)}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{w^i}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{v^i(v^iw^i)}{(1-v^2)^{3/2}}\right) =
$$

$$
= \frac{1}{1-v^2}\left(w^i + v^i\frac{(v^iw^i)}{1-v^2}\right). \tag{4.71}
$$

Конечная формула получилась достаточно простой и без радикала $1/\sqrt{1-v^2}$. Но соответствует ли ускорение м.т. в этом виде второму закону Ньютона в релятивистском исполнении?

Второй закон Ньютона в классическом исполнении с использованием импульса p^i мы записывали в форме (4.57).

$$
F^i = m\frac{dv^i}{dt} = \frac{dmv^i}{dt} = \frac{dp^i}{dt}.
$$

В СТО сила, действующая на м.о., определяется в соответствии с уравнением, соответствующим второму закону Ньютона. В СТО релятивистский аналог этого уравнения должен быть записан в следующем виде:

$$
F_{uu}{}^i = mW_{uu}{}^i = \frac{dP_{uu}{}^i}{du}.
$$

При определении ускорения м.т. в представленном выше виде (4.70) второй закон Ньютона должен быть записан в следующем виде:

$$
F_{uu}{}^i = mW_{uu}{}^i = \frac{dP_{uu}{}^i}{du} = \frac{m}{1-v^2}\left(w^i + \frac{v^i(v^iw^i)}{1-v^2}\right) = \tag{4.72}
$$

$$
= \frac{mw^i}{1-v^2} + \frac{mv^i(v^iw^i)}{(1-v^2)^2}. \tag{4.73}
$$

Из сравнения этой формы представления силы с релятивистским (4.62) видно, что она только на "релятивистский" коэффициент $\mathbf{1/\sqrt{1-v^2}}$. Поэтому она не соответствует "учебному" определению релятивистской силы от скорости, ускорения и массы м.т.

Здесь также может возникнуть вопрос об отнесении "релятивистского" коэффициента $\mathbf{1/(1-v^2)}$ к массе и/или элементам ускорения в скобке. Вопрос снимается, если это выражение рассматривать исключительно кинематически. Тогда должны констатировать, этот коэффициент мы должны полностью отнести к ускорению $W_{uu}{}^{i}$, следовательно, масса m должна быть константой. По умолчанию при выводе этих уравнений мы это и имели в виду.

5 Виды кинематического движения м.т.

Если известны уравнения движения м.т. и начальное состояние в некоторый момент времени, то траекторию (мировую линию) и параметры движения м.т. можно определить решением соответствующего алгебраического или интегрального уравнения движения. Если закон движения задан некоторым дифференциальным уравнением, то уравнения движения м.т. определяются решением соответствующего дифференциального уравнения. Общим выражением уравнения движения является следующее дифференциальное уравнение n–й степени

$$\Phi_k\left(t, r(t), \frac{dr(t)}{dt}, \dots \frac{d^n r(t)}{dt^n}\right) = 0, \tag{5.1}$$

или при параметрическом задании линии движения:

$$\Phi_k\left(u, q(u), \frac{dq(u)}{du}, \dots \frac{d^n q(u)}{du^n}\right) = 0. \tag{5.2}$$

Сам вид уравнения $\Phi_k(\dots)$ зависит от постановки задачи.

Общее решение уравнения дает семейство линий движения м.т. Конкретное решение определяется начальными значениями параметров уравнения. По теореме Коши, решение дифференциального уравнения единственно, если известен полный набор начальных параметров системы дифференциальных уравнений.

Зависимость уравнения движения от производных $d^n q(u)/du^n$ говорит о возможной зависимости закона движения м.т. от скорости, ускорения и других высших производных. В механике обычно степень дифференциального уравнения ограничивается числом $n = 2$, т.е. законы движения зависят от координаты, времени (взаимодействие с внешним силовым полем), скорости и ускорения м.т. Зависимость от скорости определяется релятивизмом, зависимость от ускорения – взаимодействиями. Количество уравнений K зависит от количества степеней свободы системы взаимодействующих м.т.:

$$K = 3L(N+1)\,, \tag{5.3}$$

где 3 – размерность базового геометрического пространства, в котором происходит движение,

L – количество взаимодействующих м.о.,

N – степень дифференциального уравнения,

Если наложенные связи на систему принимать как дополнительные уравнения движения, то количество уравнений движения будет равно:

$$K = 3L(N+1) - M. \tag{5.4}$$

Здесь M – количество наложенных связей на систему. Наложенные связи в кинематике не могут иметь "силовой" вид. Они могут быть наложены на скорости, ускорения и, естественно, на траекторию ее движения.

Если имеются "силовые" связи, то уравнения движения м.т. могут быть получены из законов движения Ньютона с применением законов сохранения. Кроме собственно законов Ньютона — а именно второго — в уравнения движения ньютоновой механики входят кинематические уравнения, уравнения связей и конкретные законы сил, такие, как например закон всемирного тяготения или закон Гука. Другими способами получения законов движения являются применение уравнений Лагранжа–Эйлера к системе м.о. или уравнений Гамильтона–Якоби. Эти уравнения получены на основе теоремы о минимальности действия на траектории м.т.

5.1 Кинематика движения и геометрия

То, что мы рассматривали ранее, никаким образом не касалось физики процесса движения. Оно касалось только общего математического описания этого движения, причем достаточно произвольного. В ней невозможно определить тип траектории движения, потому что нет инструментов для этого определения. В ней невозможно определить движение по прямой линии, по окружности или по другим типам траектории. Все это – геометрические понятия. Для такого описания необходимы дополнительные определения. А для геометрических понятий необходимо определение метрических понятий: прямой, окружности, кривой, и т.д..

На практике довольно часто встречаются задачи на движение м.т. по определенной траектории. Примеры: движение по прямой, окружности, параболе. "Движение по прямой", "движение по окружности", а также движение по любой другой траектории с определенными заранее геометрическими свойствами, предполагает наложение на форму траектории некоторых алгебраических условий и уже по определению предполагает определенные геометрические свойства пространства описания движения, оставляющие эти свойства инвариантными относительно некоторых преобразований.

И эти описания даются геометрией. Именно в ней определены понятия прямой, плоскости, угла и многих других производных от них понятий. А также метрические понятия – расстояния, длины. А через них – и окружности. И дополнительные кинематические понятия типа "движение по прямой", движение по окружности", "криволинейное движение" как следствия метрических понятий "расстояние", "длина".

В кинематике, кроме 3–мерного пространства, еще рассматривается 1–мерное время. В связи с этим появляется метрическое понятие "промежуток времени", а с ней дополнительные понятия – равномерность, неравномерность, равноускоренность, и т.д.

Дадим некоторые определения.

5.1.1 Виды движения м.т.

Прямолинейным движением в произвольном пространстве называется движение по линии, определяемой как "прямая". В линейном метрическом пространстве прямую можно задать линейным векторным уравнением:

$$r^i = A^i u + r_0^i \colon A^i = \mathrm{const}, u \in \{-\infty\,..+\infty\}. \tag{5.5}$$

Здесь A_i – ненулевой направляющий вектор прямой линии,

$u = u(t)$ – параметр точки траектории,

r^i – координата точки траектории, или событие прямой,

$r_0{}^i$ – точка, определяющая прямую на траектории при значении параметра $u = 0$.

В применении к движению м.т. в кинематике к координатам r^i должна быть добавлена еще одна координата – координата времени t, и уравнение (5.5) примет вид:

$$(t, r^i) = (A^0, A^i)u + (t^0, r_0^i) \colon u \in \{-\infty\,..+\infty\}. \tag{5.6}$$

Решение этого уравнения можно считать решением для траектории движения м.т. по прямой в ПВ. Но у этого уравнения есть недостаток – она не дает информации о месте нахождения нашей м.т. при движении в ПВ в конкретный момент времени. Этот недостаток можно исправить, задав зависимость параметра u от времени: $u = u(t)$.

$$\begin{gathered}(t, r^i) = (A^0, A^i)u(t) + (t^0, r_0^i) \to \\ (t - t_0, r^i - r_0^i) = (A^0, A^i)u(t).\end{gathered} \tag{5.7}$$

Прямолинейное движение не обязательно является равномерным. Поэтому в зависимости от вида функции $u(t)$ можно классифицировать тип прямолинейного движения как неравномерное или равномерное. Если эта зависимость линейна, то движение является равномерным и прямолинейным, иначе – неравномерны прямолинейным.

5.1.1 Равномерное движение по прямой

В качестве линейной зависимости примем зависимость $t = t_0 + A^0u$. Решим ее с таким допущением:

$$\begin{gathered}\begin{cases} t - t_0 = A^0 u, \\ r^i - r_0^i = A^i u. \end{cases} \to u = \frac{t - t_0}{A_0} \to \\ r^i - r_0^i = \frac{A^i}{A_0}(t - t_0).\end{gathered} \tag{5.8}$$

В результате мы получили уравнение прямолинейного и равномерного движения м.т. по траектории, задаваемой прямой. Нормировав вектор (A^0, A^i) делением ее на свой первый элемент A^0 и назвав ее вектором скорости v^i, получим уравнение движения м.т. по прямой с постоянной скоростью:

$$r^i = v^i (t - t_0) + r_0^i. \tag{5.9}$$

Это уравнение говорит о том, что через время $t - t_0$ м.т. передвинется на расстояние $r^i - r_0^i = v^i(t - t_0)$ в точку с координатами r^i. При этом скорость имеет постоянное значение, а ускорение м.т. равняется нулю (см. 4.4 "Скорость и ускорение").

Равномерное движение по прямой лежит в основе первого закона Ньютона, через которое определяется ИСО.

Равномерное движение по прямой является наиболее простой формой движения. Равномерное движение по прямой осуществляется в соответствии с первым законом Ньютона по инерции при отсутствии внешних возмущении, а также при взаимной компенсации возмущающих сил. В любом пространстве – евклидовом ли, косоугольном или произвольном метрическом (римановом) пространстве – прямолинейному движению соответствует движение между двумя точками по самой короткой траектории, которое не может быть задано уравнением (5.5). Прямолинейное движение м.т. является наиболее простым способом движения. В криволинейном и римановом пространствах уравнение движения обязано быть более сложным, чем (5.5) – (5.9). Это замечание применимо и к дальнейшему.

Следующей наиболее простой формой движения является **равноускоренное движение по прямой**. При постоянном ускорении w^i = const прямолинейное равноускоренное движение происходит в соответствии с уравнениями (см. 4.4.2 "3–мерная скорость в абсолютном ПВ")

$$\boldsymbol{w^i} = \mathbf{const},$$
$$\boldsymbol{v^i} = \boldsymbol{v_0^i} + \boldsymbol{w^i t}, \qquad (5.10)$$
$$\boldsymbol{r^i} = \boldsymbol{r_0^i} + \boldsymbol{v_0^i t} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{w^i t^2}.$$

Равноускоренное движение по прямой лежит в основе второго закона Ньютона, через которое определяется движение м.т. в ИСО под действием постоянной, не изменяющейся со временем, силы.

Естественным продолжением классификации прямолинейного движения является неравномерное прямолинейное движение. В этом случае

При неравномерном прямолинейном движении точки в определенном направлении, определяемой направлением траектории, скорости и/или ускорения, критерием ускоренного движения является условие, что векторы скорости v^i и ускорения w^i направлены в одну сторону. При разных направлениях движение точки замедленное. Алгебраически это может быть определено знаком скалярного произведения $v^i \cdot w^i$: в первом случае больше 0, во втором – меньше 0. Более того – алгебраическое условие верно в любом случае. При равенстве нулю движение будет равномерным, но не обязательно прямолинейным.

5.1.2 Движение по криволинейной траектории

Начну опять с определений.

Криволинейным называется движение, происходящее с переменной по направлению и модулю скоростью (см. Рисунок 5.1). Если при этом меняется и модуль скорости, то такое движение называется неравномерным криволинейным движением.

Если на траектории точки известны начальные координаты r_0^i и вектор скорости v_0^i в какой–либо момент времени t_0, а также зависимость ускорения от времени $a(t)$, то, интегрируя это уравнение, можно получить координаты и скорость точки в любой момент времени t (как до, так и после момента t_0):

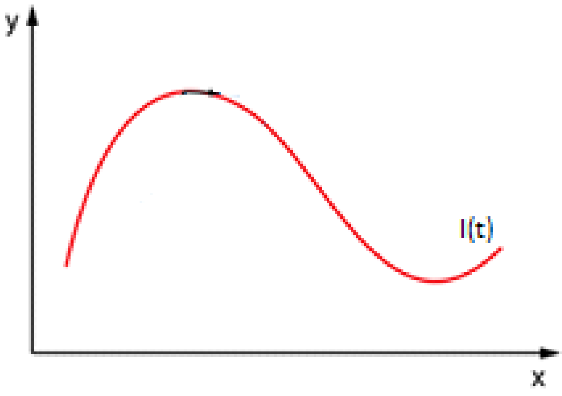

Рисунок 5.1

К определению касательного и нормального видов ускорения.

$$v^i(t) = v_0^i + \int_{t_0}^{t} w^i dt\,, \qquad (5.11)$$
$$r^i(t) = r_0^i + v_0^i(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} w^i dt^2.$$

Очень многие практические задачи формулируются таким образом, что зависимость скорости $v(t)$ и/или ускорения $w(t)$ от времени неизвестна. Но если известна какая либо другая зависимость $v(t, r)$ и/или $w(t, r)$, то положение тела в любой момент времени можно найти решением соответствующего интегрального или дифференциального уравнения.

Равномерным движением называется движение с постоянной алгебраической скоростью вдоль траектории.

Приведенное выше уравнение движения ничего не говорит о скорости и ускорении, следовательно, о равномерности или неравномерности движения. В них известно только направление движения, соответствующее направляющему вектору уравнения движения. Для определения равномерности/неравномерности движения необходимо ввести в уравнение "время" как еще один дополнительный параметр движения. Тогда равномерному движению будет соответствовать соблюдение условия:

$$|v_t| = \left|\frac{dr}{dt}\right| = \text{const}. \qquad (5.12)$$

Здесь v_t – скорость движения точки.

Движением по окружности в двухмерном пространстве называется движение по траектории, задаваемой решением квадратного уравнения (5.1):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \qquad (5.13)$$

где x, y – координаты точки траектории,

x_0, y_0 – координаты центра окружности траектории,

R – радиус окружности траектории.

Движение по окружности также по своей сути является движением по криволинейной траектории. И это еще более подтверждается, если эта "окружность" движется в некотором ИСО.

5.1.3 Виды ускорения криволинейного движения

Движение по криволинейной траектории, так же как и любое другое движение, в т.ч. по окружности, происходит по определенной траектории, с определенной скоростью и, естественно, ускорением. При движении по криволинейной траектории как движении общего вида, кроме скорости движения, определяемого как касательная скорость, выделяются три вида ускорения (Рисунок 5.2).

Касательное (тангенциальное) ускорение w_τ есть ускорение м.т. в направлении движения м.т. (т.е. вдоль окружности, по касательной).

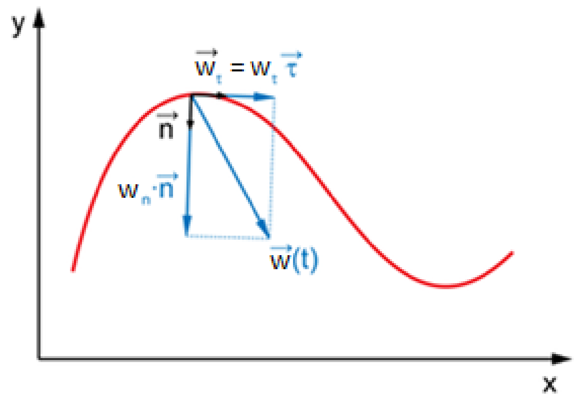

Рисунок 5.2

К определению касательного и нормального видов ускорения.

Нормальное (центростремительное) ускорение w_n есть ускорение в перпендикулярном к направлению движения направлении. Можно подумать, что нормальное ускорение всегда равно нулю – т.к. тело не движется в этом направлении. Но это не так – нормальное ускорение на самом деле определяет криволинейность траектории в точке движения и определяется радиусом кривизны траектории и ее скоростью.

В общем 3–мерном случае можно было бы подумать, что существует еще одно направление ускорения (обозначаемое как w_b) – в перпендикулярном к определенным выше двум ускорениям, что соответствует количеству пространственных измерений 3–мерного ПВ. Но оказывается, что это ускорение w_b тождественно равно нулю.

Т.к. траекторию любого сложного движения локально (в окрестности каждой точки) можно аппроксимировать как движение по дуге окружности, то изучение криволинейного движения полезно начинать с движения по окружности.

Для классификации криволинейного движения можно применить уже введенные выше определения. Это – движения равномерное и равноускоренное криволинейные движения. Равномерным называется движение с постоянной алгебраической касательной скоростью v_τ вдоль траектории движения. Равноускоренным (или равнопеременным) движением называется движение с постоянным алгебраическим касательным ускорением w_τ вдоль траектории движения. Движение по окружности как по криволинейной траектории характеризуется постоянным значением радиуса траектории в форме круга R.

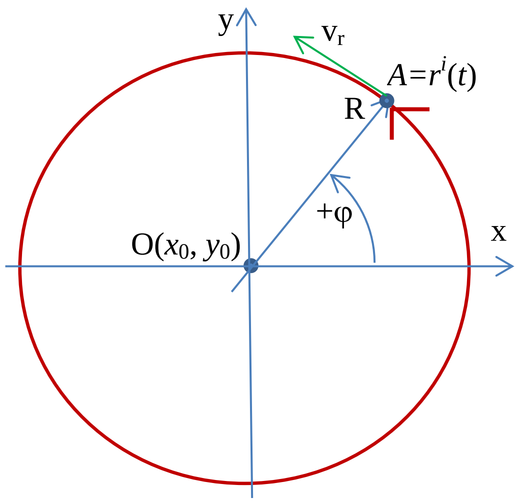

Рисунок 5.3

К определению движения по окружности. Красным выделена траектория м.т. А. Зеленым выделен вектор скорости м.т.

5.2 Кинематика двухмерного движения по окружности

Движением по окружности в двухмерном пространстве называется движение по криволинейной траектории, называемой окружностью. Окружностью называется кривая на плоскости с постоянным радиусом R в ее центре с координатами (x_0, y_0) (Рисунок 5.3). Алгебраически окружность можно определить как решение уравнения (5.1) для случая квадратного алгебраического уравнения

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2, \qquad (5.14)$$

Ее решение следующее:

$$y=\pm\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}+y_0, \qquad (5.15)$$

где x, y – координаты точки траектории,

x_0, y_0 – координаты центра окружности,

R – радиус окружности траектории.

Движение по окружности может быть равномерным и неравномерным. При равномерном движении скорость v_φ м.т. по окружности будет иметь постоянное значение. При этом скорость вдоль радиуса будет равна нулю.

Уравнение не равномерного движения по окружности во времени можно записать в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi(t), \\ y = R\sin\varphi(t). \end{cases} \qquad (5.16)$$

Здесь φ(t) – угол поворота точки A траектории от оси x в момент времени t.

А уравнение равномерного движения по окружности во времени можно записать в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t, \\ y = R\sin\omega t. \end{cases} \tag{5.17}$$

где ω – частота, или скорость изменения углового параметра φ круговой траектории, по которой движется м.т. При этом за положительное направление отсчета угла φ принимается направление от оси x к оси y – что соответствует направлению "против" хода часовой стрелки и "правой" ориентации с.о. при направлении "виртуальной" третьей оси z на нас (см. 7.1.1 "Выбор направления отсчета положительного двухмерного угла поворота").

Траекторию движения м.т. по окружности удобнее рассматривать в **полярных координатах** относительно ее центра. В параметрическом пространстве (r, φ), где φ – угол поворота в двухмерном пространстве, траектория задается уравнениями:

$$\begin{cases} \varphi = \varphi(t), \\ r = R_0 = \text{const}. \end{cases} \tag{5.18}$$

Про полярную с.к. см. 5.2.1 "Полярная система координат".

5.2.1 Полярная система координат

Для описания движения по окружности часто применяется специальная система координат, называемая **полярной**. Замечу – полярная с.к. является криволинейной, но ортогональной, и не нормированной. Пространства с не ортонормированными с.к. на ней принято считать криволинейными. Криволинейные координаты не противопоставляются прямолинейным, последние являются частным случаем первых. Применяются обычно на плоскости (n = 2) и в пространстве (n = 3) по практическим соображениям удобства использования; число координат равно размерности пространства n. Наиболее известным примерами криволинейных систем координат являются полярные координаты на плоскости и сферические в 3–мерном случае. Другими известными примерами являются параболические, гиперболические, эллиптические, цилиндрические с.к. и многие другие, имеющие и не имеющие специальных названий.

Рассмотрим, как определяется **полярная система координат**.

На Рисунок 5.4 одновременно показаны две системы координат – декартова (x, y), о которой мы говорили ранее, и полярная (r, φ), с общим началом координат O. Угол поворота φ по умолчанию отсчитывается от оси x в сторону оси y по ближайшей соединяющей их дуге и может измеряться или в градусах – ° (соответственно, минутах – ' и секундах – "), или в радианах – [рад]. В научной и технической литературе обычно применяется радианная мера угловой координаты, в которой полный круг соответствует 2π рад, в астрономии часто применяются угловые (полный угол 360°), технической и прикладной науках – долевые ("обороты" [об.] – полный оборот это 1 (один) оборот) координаты и скорости. Например, частота электрического напряжения в наших розетках 220 В – это тоже в оборотах (точнее, колебаниях в секунду), но названных "Герц" [Гц][60].

В связи с определением полярных координат (и в дальнейшем – сферических (r,θ,φ) – см. далее), похожих на полярные, но в 3–мерном пространстве) появляются специальные понятия, применимые к движению в таких координатах. Это **угловая скорость** v, которое приравнивается к изменению угла положения м.т. в единицу времени: $v = d\varphi(t)/dt$, и

[60] В честь немецкого учёного–физика XIX века Генриха Герца (22.04.1857– 01.01.1894), который внёс важный вклад в развитие электродинамики. Название было учреждено Международной электротехнической комиссией (МЭК) в 1930 году. В 1960 году XI Генеральной конференцией по мерам и весам вместе с учреждением СИ это название было принято для единицы частоты в СИ.

угловое ускорение, определяемая как вторая производная угла поворота $w = d^2\varphi(t)/dt^2$, как первая и вторая производные значения радиальной координаты $r(t)$ м.т. во времени (см. Рисунок 5.4, выделены зеленым цветом).

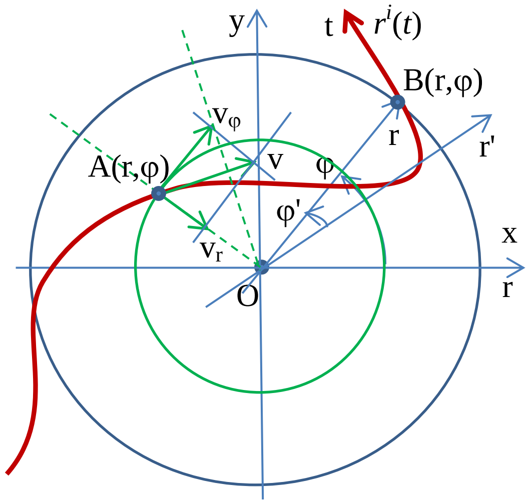

Рисунок 5.4

К определению полярной системы координат. Красным выделена траектория м.т., А и В – две точки на ней. Зеленым выделены элементы, ответственные за определение мгновенной скорости.

Рассмотрим, как преобразуется полярная система координат. Если декартова система координат преобразуется ортонормированно, что достигается при смещениях точки начала отсчета и поворотах с.к., то при преобразованиях полярной с.к. допустимы точно эти же преобразования относительно нового начала координат. Если не смещать точку начала отсчета, то эти преобразования упрощаются и они имеют следующий вид:

$$\begin{cases} r = r', \\ \varphi = \pm\varphi' + \varphi_0. \end{cases} \tag{5.19}$$

Эти преобразования основаны на том, что радиальная координата точки не может измениться – т.к. оно однозначно по определению равно расстоянию точки от начала координат, а угол φ' может измениться только на определенную величину, зависящую только от нового нулевого направления оси *r*' при φ' = 0. На Рисунок 5.4 это выражается в том, что ось *r*', соответствующая точкам с нулевой координатой, повернется на угол φ_0, и второе – отсчет нового значения угла φ' может изменить свое направление[61]. Следовательно, при преобразованиях координат из двух полярных координат меняется только угол φ, под которым окажется значение нового угла.

5.2.1 Равномерное движение м.т. по окружности

Рассмотрим случай равномерного движения м.т. по окружности. Для описания положения точки в этом случае удобно пользоваться не прямоугольной декартовой системой координат, а углом φ, который образован радиусом, проходящим через эту точку с координатной осью, проведенной через центр окружности вращения (см. Рисунок 5.5). В ходе движения угол φ изменяется во времени. Аналогично введенному выше понятию скорости введем понятие скорости вращательного движения. Назовем ее угловой скоростью вращения и будем обозначать буквой ω. По аналогии со скоростью v

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \text{или } \omega = \dot{\varphi}. \tag{5.20}$$

Время, за которое материальная точка совершает полный оборот, называется **периодом обращения** *T*. За это время точка оборачивается по окружности на угол 2π радиан, следовательно,

$$\omega = 2\pi/\mathrm{T}\,. \tag{5.21}$$

[61] Но чаще всего полярная с.к. применяется при фиксированных начале координат и направлении отсчета углов.

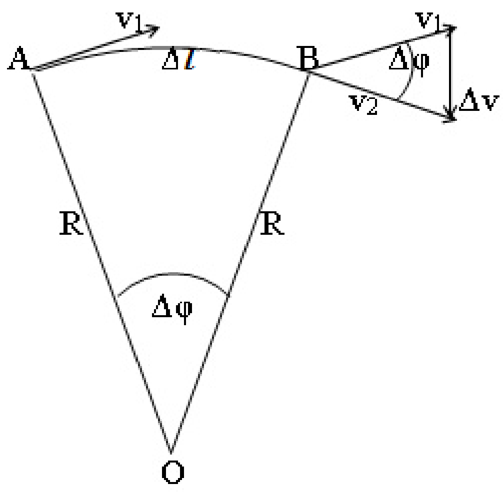

Рисунок 5.5

Движение м.т. по окружности.

Величина, обратная к периоду T – число оборотов n, совершаемых в единицу времени, характеризует **угловую скорость вращения** (n = 1/T). Отсюда следует, что

$$\omega = 2\pi n. \tag{5.22}$$

Выше упоминалось, что вектор скорости v всегда направлен по касательной к траектории движения. Следовательно, при вращательном движении скорость v материальной точки направлена по касательной к окружности и перпендикулярна радиусу, проведенному из центра вращения в нашу точку. Ее называют **линейной скоростью вращения**. Найдем связь этой линейной скорости с угловой скоростью ω.

На Рисунок 5.5 показано перемещение материальной точки из положения A в положение B по дуге Δl. Линейная скорость такого перемещения равна $v = \Delta l/\Delta t$, где Δt – время перемещения. Учитывая связь длины дуги Δl с ее радианной мерой, то есть углом поворота $\Delta\varphi$

$$\Delta l = R\Delta\varphi, \tag{5.23}$$

получим уравнение расчета скорости м.т. на круговой траектории[62]:

$$v = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega. \tag{5.24}$$

Параметр R здесь выступает как скалярный параметр, переводящий углы в пройденное расстояние вдоль траектории, но без учета его двухмерного направления.

При равномерном вращении скорость v остается неизменной, но направление ее в двухмерной плоскости непрерывно меняется. Такое изменение скорости определяется нормальным или центростремительным ускорением м.т. На Рисунок 5.5 в точках A и B, между которыми произошло перемещение, отложены соответствующие векторы скорости v_1 и v_2 . Чтобы показать приращение скорости на этом промежутке, перенесем начало вектора v_1 в точку B. Тогда вектор приращения скорости Δv будет соединять концы векторов v_1 и v_2 и будет направлен вдоль радиуса[63] R. Угол между векторами v_1 и v_2 равен углу поворота $\Delta\varphi$ нашей материальной точки при ее движении из A в B. Для малых углов $\Delta\varphi$ можно принять $\Delta v = \Delta\varphi v$,. Найдем нормальное ускорение w_n на участке AB. Оно равно отношению приращения скорости на этом участке ко времени прохождения участка (см. (5.24):

[62] Данное уравнение для скорости и следующая для ускорения без искусственных предположений, не выводящих за пределы двумерного плоского пространства, хорошо разрешаются в пространстве трех измерений с помощью методов 3–мерной векторной алгебры: в 3–мерном пространстве параметр ω откладывается в перпендикулярном к плоскости направлении. Это относится и к дальнейшему тексту.

[63] На Рисунок 5.5 изменение скорости Δv не параллельно радиусу R. Но если мы Δv устремим к нулю, то эта параллельность будет очевидна.

$$w_{\mathrm{n}} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega). \tag{5.25}$$

В выполнении этого дифференцирования имеется подводный камень. Попробуем продифференцировать в лоб:

$$w = \frac{d}{dt}(R\omega) = R\frac{d\omega}{dt} = 0 = w_{\tau}. \tag{5.26}$$

Это прямое дифференцирование определяет ускорение, соответствующее ускорению вдоль направления движения, т.е. круговому или тангенциальному ускорению. Т.к. у нас ω = const, то, естественно, получим равное нулю ускорение. Для получения ускорения в перпендикулярном направлении – в сторону центра окружности – дифференцирование должно проводиться по другому. В этом случае мы должны учитывать, что параметр R здесь должен быть переменным, т.к. он при движении постоянно меняется. Т.е. R – это вектор $\bar{R}$. Тогда имеем:

$$w = \frac{d}{dt}(R\omega) = \frac{dR}{dt}\omega + R\frac{d\omega}{dt} = \frac{dR}{dt}\omega. \tag{5.27}$$

Но изменение радиуса–вектора R равно изменению скорости м.т. на круговой орбите. Поэтому окончательно имеем:

$$w_n = \frac{dR}{dt}\omega = v\omega. \tag{5.28}$$

Ускорение w_{n} является вектором, направленным вдоль радиуса к центру вращения, то есть по нормали к вектору скорости v. В связи с этим его называют нормальным или центростремительным ускорением и обозначают w_{n}. Учитывая, что $v = \omega R$, имеем:

$$w_{\mathrm{n}} = \omega^2 R, \tag{5.29}$$

А учитывая, что $\omega = v/R$, имеем:

$$w_{\mathrm{n}} = v^2/R. \tag{5.30}$$

5.2.2 Неравномерное движение м.т. по окружности

М.о. может двигаться по окружности не только равномерно, но и не равномерно. Рассмотрим неравномерное движение материальной точки по окружности. Введенные нами понятия угловой скорости и нормального ускорения, выражаемые формулами (5.21) .. (5.30) предыдущего параграфа, и в этом случае сохраняют свою силу. Однако теперь линейная скорость движения материальной точки меняется не только по направлению, но и по величине. В этом случае векторы v_1 и v_2 , соответствующие каким–либо двум близким положениям материальной точки в ходе ее движения, имеют разную длину, и можно говорить, что имеется некоторая составляющая Δv_τ приращения скорости вдоль текущего направления движения, то есть по касательной к окружности. С приращением Δv_τ связывают понятие **тангенциального ускорения** $w_\tau = \Delta v_\tau/\Delta t$. Более строго (см. также сноску 62 стр.75)

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}. \qquad (5.31)$$

где v – длина вектора мгновенной скорости материальной точки с учетом его направления. С учетом (5.24)

$$w_\tau = \frac{Rd\omega}{dt}. \qquad (5.32)$$

(можно также вернуться к выводу (5.26)). Величину $d\omega/dt$ называют угловым ускорением и обозначают w_ω:

$$w_\omega = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (5.33)$$

При неравномерном движении точки вдоль окружности знак ("+" или "–") касательного ускорения не свидетельствует об ускоренном или замедленном движении точки. Критерием ускоренного движения здесь является условие, что знаки алгебраической скорости и касательного ускорения w_r одинаковы. При разных знаках движение точки замедленное.

Вывод нормального ускорения w_{n} для неравномерного движения вдоль круговой траектории полностью соответствует уравнению (5.27). Более того уравнение (5.27) дает уравнение **полного ускорения** м.т., движущейся неравномерно вдоль круговой траектории:

$$w = \frac{d}{dt}(R\omega) = \frac{dR}{dt}\omega + R\frac{d\omega}{dt} = w_n + w_\tau. \qquad (5.27)^*$$

Здесь результат состоит из двух взаимно перпендикулярных слагаемых. Первая слагаемая определяет нормальное ускорение w_τ м.т., а вторая – тангенциальное w_{n}.

Итак, при неравномерном движении материальной точки по окружности ускорение имеет составляющую, направленную вдоль радиуса (**нормальное ускорение**) и по касательной к окружности (**тангенциальное ускорение**). Полное ускорение является векторной суммой этих составляющих:

$$w = w_\tau + w_n. \qquad (5.34)$$

Поскольку векторы w_τ и w_n перпендикулярны друг другу, то

$$w^2 = w_\tau^2 + w_n^2. \qquad (5.35)$$

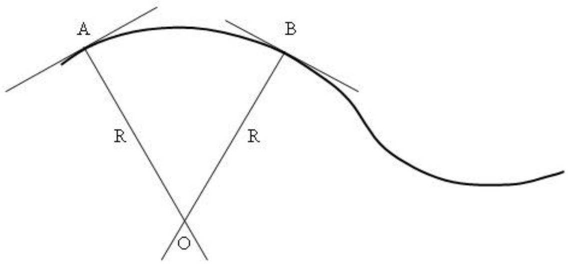

Рисунок 5.6

Криволинейное движение м.т. на двухмерной плоскости

Мы рассмотрели случаи равномерного и неравномерного движения материальной точки по окружности. Полученными результатами можно пользоваться и в более общем случае криволинейного движения – движении материальной точки по траектории, представляющей собой произвольную плоскую кривую, то есть кривую, все точки которой принадлежат одной плоскости. Действительно, достаточно малый участок такой траектории всегда можно приближенно представить (аппроксимировать) в виде дуги окружности некоторого радиуса.

Чтобы найти положение центра и величину радиуса этой окружности необходимо в пределах данного участка траектории взять две точки A и B, провести через них касательные к этой траектории и восстановить к ним перпендикуляры (см. Рисунок 5.6). Точка пересечения O перпендикуляров и будет центром аппроксимирующей окружности, а расстояние R от касательных до точки пересечения – радиусом окружности. Величину этого радиуса называют радиусом кривизны плоской кривой на данном малом участке. Если устремить длину дуги этого участка к нулю, то в пределе мы получим радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке. А изменение радиуса кривизны и ее направления будет определять "ускорение рывка", которая определяется через третью производную координат траектории во времени.

Теперь движение материальной точки по произвольной плоской кривой на любом достаточно малом ее участке можно представлять как движение по окружности с соответствующим радиусом кривизны, и формулы (5.31) .. (5.35) могут быть использованы для нахождения нормального, тангенциального и полного ускорения.

5.3 Движение в естественной (собственной) с.к.

Если траектория и закон движения точки задан как пройденное расстояние вдоль этой траектории, то при исследованиях часто пользуются так называемыми "естественными координатами". Естественные координаты – это как–раз то самое только что упомянутое "расстояние вдоль этой траектории". А сама траектория при этом параметризуется с помощью этого самого параметра "длина пути или расстояние вдоль этой траектории " l, и ее значение называется дуговой координатой.

Во всякой точке к кривой можно провести только одну касательную и бесчисленное множество (целую плоскость, перпендикулярную к кривой в этой точке) нормалей. Нормаль, лежащую в соприкасающейся плоскости, называют главной нормалью, а перпендикулярную к ней — бинормалью (см. Рисунок 5.7).

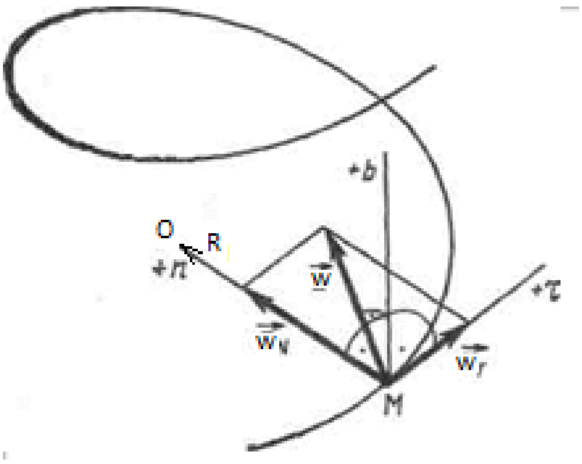

Рисунок 5.7

Естественный трехгранник. Естественными осями называют прямоугольную систему осей, направленных по касательной, главной нормали и бинормали к траектории.

Пусть точка движется по какой–либо неплоской траектории, представленной на Рисунок 5.7 винтовой линией, и в данное мгновение находится в точке M своей траектории. Построим прямоугольную систему координат с началом в этой точке M, направив ось абсцисс M_x по касательной, ось ординат M_y по главной нормали и ось аппликат M_z по бинормали. Такие координатные оси, называемые осями естественного трехгранника, можно построить в каждой точке траектории. Выберем положительные направления на осях. В механике обычно принимают направление вектора скорости за положительное направление касательной, положительное направление главной нормали считают в сторону вогнутости кривой, а бинормаль направляют так, чтобы получившаяся система прямоугольных координат являлась правой системой. Значение координаты вдоль оси M_x при этом будет равна значению l. Несмотря на то, что в каждой точке траектории определены все три координатные оси, м.т. при движении будет иметь нулевые координаты по нормальным к траектории осям M_y и M_z.

Если точка меняет свое движение на возвратное, например, если точка совершает колебательные движения на каком–либо участке кривой, то обычно не меняют положительного направления естественных осей, а приписывают скорости знак минус, если точка движется в сторону уменьшения дуговой координаты. Так в естественном способе задания движения точки вместо модуля скорости появляется "алгебраическая скорость", по абсолютной величине равная модулю, но имеющая собственный знак ("+" или "–"). Это обстоятельство сказывается и на определении касательного ускорения точки при естественном способе задания ее движения. Проекция ускорения на касательную характеризует изменение в данное мгновение алгебраической скорости:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 l}{dt^2}. \tag{5.36}$$

Но реальное ускорение не обязательно будет касательным, т.к. траектория является не прямой линией: проекция ускорения на главную нормаль выражает нормальное ускорение

$$w_n = v^2/R. \tag{5.37}$$

и определяется радиусом кривизны дуги. В естественной с.к. координатные ускорения вдоль нормальных к сопутствующей плоскости криволинейной траектории осей (бинормалям) будут равны нулю по определению.

$$w_b \equiv 0. \tag{5.38}$$

Но так называемое "ускорение рывка", определяющее положение касательной к траектории винтовую линию, не равна нулю. Нулевое ускорение рывка определяет плоское движение.

Как видно, вектор ускорения расположен в соприкасающейся плоскости. При разложении ускорения по осям естественного трехгранника получаем две составляющие (касательное и бинормальное ускорения), как и при векторном способе задания движения. Однако при естественном способе задания движения касательное ускорение понимают несколько иначе, чем при других способах задания движения.

Если движение точки задано в естественной форме, т. е. заданы траектория и дуговая координата $l = l(t)$, то первая производная дуговой координаты по времени определяет алгебраическую скорость v_l точки, вторая производная от дуговой координаты по времени является первой производной от алгебраической скорости и характеризует быстроту изменения алгебраической скорости. При таком способе задания движения ее тоже называют касательным, или тангенциальным, ускорением. При естественном способе задания движения точки знак ("+" или "–") касательного ускорения не свидетельствует об ускоренном или замедленном движении точки. Критерием ускоренного движения здесь является условие, что знаки алгебраической скорости и касательного ускорения w_r одинаковы. При разных знаках движение точки замедленное.

Другая составляющая (нормальное ускорение) характеризует изменение в данное мгновение вектора скорости по направлению. Эта составляющая направлена по главной нормали и по модулю определяется выражением.

$$\boldsymbol{w_n} = \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{R}}. \tag{5.39}$$

Ввиду того что квадрат модуля скорости равен квадрату алгебраической скорости, при естественном способе определения движения точки нормальное ускорение выражают формулой (5.36). Абсолютную величину полного ускорения определяют по формуле

$$w = +\sqrt{{w_\tau}^2 + {w_n}^2}. \tag{5.40}$$

Координата, скорость и ускорение по бинормали будут в любой точке траектории равны нулю по определению естественных координат.

Нетрудно определить направление вектора ускорения при естественном способе задания движения точки. Вектор находится в соприкасающейся плоскости и составляет с главной нормалью угол μ, определяемый по тангенсу:

$$\mathrm{tg}\mu = \frac{w_\tau}{w_n}. \tag{5.41}$$

При любом движении вектор ускорения лежит с той же стороны касательной, с которой расположена траектория.

Если траектория м.т. задана координатным способом, то касательное (тангенциальное) и нормальное ускорения можно определить через производные координатные скорость и ускорение.

Касательное ускорение, как известно, характеризует изменение модуля скорости, оно соответствует изменению длины вектора скорости вдоль его направления, и для определения касательного ускорения надо спроецировать вектор ускорения на направление вектора скорости, а для этого модуль ускорения помножить на косинус угла между направлениями скорости и ускорения: $w_\tau = w\cos(v,w)$. Поэтому касательное ускорение (с применением формул векторной алгебры) определяется по формуле:

$$w_\tau = \frac{(vw)}{+|v|}. \qquad (15.6)$$

А нормальное ускорение определяется по формуле:

$$w_n = \frac{(v \times w)}{+|v|}. \qquad (5.42)$$

Иногда требуется определить радиус кривизны траектории точки, движение которой задано в координатной форме. Если траектория плоская, то приравнивая равенство (5.42) к выражению (5.39), получаем выражение для радиуса кривизны**:**

$$R = \frac{v^2}{w_\tau} = \frac{v^3}{[v \times w]}. \qquad (5.43)$$

6 Движение в неинерциальных системах отсчета

Фундамент классической механики строится для инерциальной – абсолютной – системы отсчета, которую без ограничения общности удобно считать неподвижной. Раздел кинематики, устанавливающий взаимосвязь абсолютных и относительных параметров движения, называется теорией сложного движения. Но очень большое количество практических задач движения механических систем рассматривается в подвижных системах отсчета. Такое усложнение задач описания движения кинематики проявляется в том, что физически, кроме покоящихся и движущихся равномерно и прямолинейно ИСО, могут существовать движущиеся с ускорением и вращающиеся равномерно или неравномерно с.о. Причем они при этом в каждый момент времени они могут, а могут и не являться евклидовыми и с декартовыми координатами. Такие с.о. вполне и реально существуют.

Самой, пожалуй, известной такой системой является лифт с находящимся внутри нее человеком как наблюдателем. Лифт может двигаться равномерно и ускоренно, при этом возможны два варианта ускоренного движения. При движении вниз в самом начале лифт резко начинает двигаться вниз – и появляется эффект уменьшения веса. Если лифт при этом падает свободно – то вес тела практически исчезает и на секунду человек в ней может оказаться в состоянии невесомости. При движении вверх, наоборот, человек может почувствовать перегрузку. Как пример можно привести также с.о., связанные с движущимся автомобилем, поездом, автобусом, и т.д. Но самой, пожалуй, известной, но мало осознаваемой, НСО, является с.о., связанная с поверхностью Земли, или с подвижным объектом, перемещающимся относительно Земли: с.о., связанная с поверхностью Земли, является вращающейся. Более того, координатная система, которая используется для описания поверхности Земли, является криволинейной, и даже более того – римановой[64], которая называется сферической с.о.

Повторю – особенностью неинерциальных с.о. (или НСО) является их возможное движение относительно других с.о., в частности, взаимно вращающихся. Сами по себе эти с.о. с геометрической т.з. в каждый момент времени являются евклидовыми, более того – с декартовыми координатами, с физической т.з. являются НСО. Движение системы в некоторой подвижной системе координат называется относительным.

Если рассматривать движение именно в этих, пусть и вращающихся, абстрактных с.о., то каких либо особенностей в описании кинематики движения м.т. в них не имеется. При этом все, и даже покоящиеся, и даже взаимно вращающиеся с.о., будут равноправны. Основными параметрами движения по–прежнему остаются траектория движения, координатные скорость и ускорение в этой с.о. Даже уравнения кинематического движения не изменяются. Факт кинематического вращения с.о. определить кинематическими средствами невозможно – определяется только факт взаимного вращения или взаимной не инерционности. И все же – чем–то ведь отличаются друг от друга вращающиеся и не вращающиеся с.о. физически? Можно ли определить, что рассматриваемая с.о. физически вращается или покоится?

С математической абстрактной т.з. здесь просто выделяются некоторые с.о. как покоящиеся и/или движущиеся и условно принятые за ИСО, удовлетворяющие некоторым условиям, например, галилеевости ПВ – на условиях аксиоматизации. Математика экспериментов не ставит – она работает с аксиомами и некоторым выбором начальных условий типа "Пусть.…", в применении к физике, точнее – к ее теоретической части – все это постулируется.

---

[64] Риманова поверхность, как и пространство, не являются плоскими, в отличие от евклидовых. И число π (Пи) для окружностей конечного радиуса на ней не обязаны равняться 3,145962…

С реально–физической т.з. кое–какие особенности проявляются реально. Причиной этих особенностей является реальное существование выделенных ИСО, гарантированных первым законом Ньютона, и ответ на вопрос будет касаться свойств траектории, скоростей и ускорений именно в этих ИСО. Даже "покоящаяся" в НСО м.т. обладает скоростью и ускорением, которые реально проявляются в необходимости силового удержания ее в состоянии "относительного покоя" или "движения", что определяется экспериментально. Как следствие, это означает, что свободная м.т. в НСО. движется неравномерно и с ускорением, а в инерциальной, в соответствии с первым законом Ньютона, покоится либо движется прямолинейно и равномерно. Если с.о. удовлетворяет законам Ньютона – значит, она является ИСО и является объектом классической механики. И именно в этом принципиальное отличие физической с.о. от произвольного – в ней определены прямолинейность и равномерность, что соответствует как минимум аффинному ПВ. А второй закон Ньютона наделяет свойства пространства метрическими условиями, которыми обладают метрические пространства. Самые простые такие пространства – Галилеево и Минковского ПВ. Есть еще пространство Тангерлини – но о ней должен быть особый разговор. Он двойственен и не так прост.

Приступая к изучению этого вопроса, напомним, что в рамках ньютоновой механики длина масштабов времени как эталонов считаются абсолютными. Это же касается и эталонов длины, которые также одинаковы во всех с.о. Любой эталон одинаков везде, всюду и во всех системах отсчета, в т.ч. вращающихся и любых других НСО, т. е. не зависит ни от места, ни от времени, ни от движения. Сравнения и /или их измерения должны происходить одномоментно в любой с.о. Только это гарантирует неизменность и эталонов, и объектов измерения/сравнения, и результатов измерения/сравнения. Сравнение и синхронизацию часов можно производить непосредственно в конкретной точке ПВ, и это в галилеевом пространстве гарантирует их идентичность в любых других точках ПВ в силу ее абсолютности.

Одной из задач кинематики является по известным траектории $r(t)$, скорости v и ускорению w некоторой точки A в одной из этих с.о. ответить на вопрос, каковы соответствующие значения *скорости* и *ускорения* этой же точки в другой с.о.? Далее последовательно рассмотрим наиболее важные случаи взаимного движения двух систем отсчета друг относительно друга, начиная с простой и постепенно усложняя задачу. Постановка ситуаций будет начинаться предложением с вариациями скорости и ускорения типа:

Пусть имеются две произвольные ортонормированные системы отсчета условно неподвижная *K* с началом координат *O* и условно подвижная *K*' с началом координат *O*'. Пусть в системе *K* начало отсчета *K*'–системы характеризуется радиусом–вектором $\boldsymbol{r_0}$, а ее скорость и ускорение – векторами $\boldsymbol{v_0}$ и $\boldsymbol{w_0}$. И пусть *K*'–система дополнительно вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг оси, неподвижной в *K*–системе и проходящей через ее начало координат *O*'. Найдем преобразования координат между этими с.о.

Здесь также хочу сделать небольшое уточнение рассматриваемой модели. Предполагается, что и штрихованная, и не штрихованная с.о. в дальнейшем связаны с конкретными физическими системами отсчета. Более того, штрихованная с.о. связывается не просто с с.о, связанной с точкой отсчета в начале координат *O*', а с с.о., связанной с ориентированным твердым телом (т.т.) *T* с фиксированной точкой (для двухмерного случая – плоским тведым телом), и поэтому штрихованная с.о. вращается вместе с этим твердым телом. И уравнения преобразования будут связаны с координатами точек т.т. в условно неподвижной с.о. *O*.

6.1 Поступательное движение систем отсчета

Пусть система K' движется поступательно по отношению к системе K. Пусть в системе K начало отсчета K'–системы характеризуется радиусом–вектором r_0, а ее скорость и ускорение – векторами v_0 и w_0. Если положение точки A в K–системе определяется радиус–вектором r, а в K'–системе — радиус–вектором r', то $r = r'_0 + r'$ (см. Рисунок 6.1).

Если с.о. K' движется равномерно и прямолинейно в с.о. K, то радиус–вектор r_0 начала с.о. K' в системе K будет изменяться в соответствии с уравнением[65]

$$r = r_0 + v_0 t. \tag{6.1}$$

Тогда координата произвольной точки A в системе K будет иметь координаты

$$r = r' + (r_0 + v_0(t' - t_0)). \tag{6.2}$$

Здесь r_0, t_0 – координаты начала системы отсчета K' в момент времени $t = 0$.

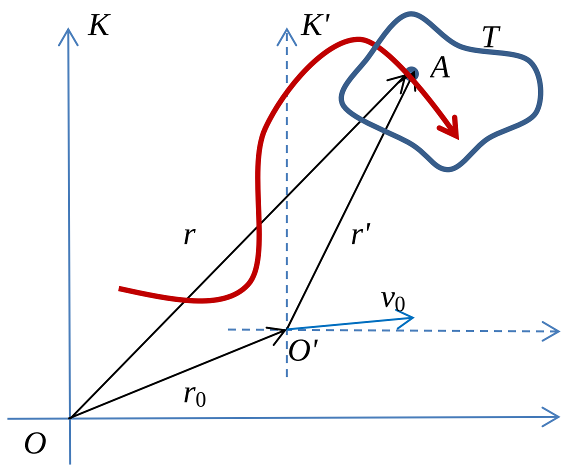

Рисунок 6.1

Взаимное расположение двух взаимно параллельных с.о. K и K'.

Пусть далее за промежуток времени dt точка A совершит в K–системе элементарное перемещение dr. Это перемещение складывается из перемещения dr_0 вместе с K'–системой и перемещения dr' относительно K'–системы, т. е.

$$dr = dr_0 + dr'. \tag{6.3}$$

Поделив это выражение на dt, получим следующую формулу преобразования скорости:

$$v = (v_0 + v'). \tag{6.4}$$

Эта формула есть формула сложения скоростей в ГПВ. Это же можно было получить, продифференцировав (6.2) по времени.

Продифференцировав (6.4) по времени, получим формулу преобразования ускорения. Учитывая, что $v_0 = \text{const}$, имеем:

$$w = w'. \tag{6.5}$$

Здесь t', r', v' и w' – координаты, скорость и ускорение пробной точки в штрихованной с.о. Отсюда видно, что если обе с.о. являются ИСО, то ускорения одной и той же точки A в обеих системах отсчета будут одинаковыми.

С.о. K и K' могут двигаться друг относительно друга ускоренно и к тому же криволинейно. Это возможно, если $v_0 \neq \text{const}$. Продифференцировав (6.4) по времени с учетом этого, получим формулу преобразования для ускорения:

---

[65] Внимание! Здесь и далее параметры r с любыми индексами и штрихами – переменные, зависящие от времени, т.к. система K' движется в системе K.

$$w = (w_0 + w'). \tag{6.6}$$

Ускорение w_0 называется поступательным ускорением с.о K'.

Из уравнений (6.4) и (6.6) видно, что скорости и ускорения в двух поступательно движущихся с.о. складываются.

С.о. K и K' могут располагаться по отношению друг к другу и более сложным образом. Для этого имеются две возможности: 1) координатные линии располагаются не параллельно и 2) угол между координатными линиями изменяется во времени. Важными частными случаями такого расположения являются вращающиеся с.о. Первый случай всегда можно свести к только что рассмотренному. Разница лишь в том, что дополнительно необходимо учесть постоянно существующее преобразование взаимного поворота с.о., которое не меняется со временем, и взаимное равномерное и/или неравномерное движение начал координат в с.о. друг друга. Второй случай связан не просто с поворотом, а с взаимным вращением с.о., также равномерным и/или неравномерным, и именно оно является наиболее общим и интересным для подробного рассмотрения.

6.2 Равномерно вращающаяся с.о.

Пусть K'–система вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, неподвижной в K–системе и проходящей через ее начало координат $O = O'$. Найдем преобразования координат между этими с.о.

Возьмем начала отсчета K и K' систем отсчета в произвольной точке $O = O'$ на оси вращения (см. далее Рисунок 6.2.а) с параллельными осями координат. Тогда радиус–вектор произвольной точки A в обеих системах отсчета будет один и тот же: $r = r'$. Зная скорость вращения ω и определяемой им же осью вращения K'–системы, мы можем найти новые координаты произвольной точки A пространства. Выражение матрицы 3–мерного поворота через угол поворота φ и единичный вектор оси поворота $\omega = (\omega^x, \omega^y, \omega^z)$. Зная время вращения $t = t'$, начальный угол φ_0 поворота системы K', можно определить угол поворота φ:

$$\varphi(t) = \frac{d\varphi}{dt}t = v^{\varphi}t + \varphi_0. \tag{6.7}$$

В декартовых координатах матрица поворота M^i_j на угол φ вокруг оси ω (нормированной до единицы) имеет вид (7.51):

$$M(\omega, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi + \omega_x{}^2(1-\cos\varphi) & -\omega_z\sin\varphi + \omega_x\omega_y(1-\cos\varphi) & \omega_y\sin\varphi + \omega_x\omega_z(1-\cos\varphi) \\ \omega_z\sin\varphi + \omega_y\omega_x(1-\cos\varphi) & \cos\varphi + \omega_y{}^2(1-\cos\varphi) & -\omega_x\sin\varphi + \omega_y\omega_z(1-\cos\varphi) \\ -\omega_y\sin\varphi + \omega_z\omega_x(1-\cos\varphi) & \omega_x\sin\varphi + \omega_z\omega_y(1-\cos\varphi) & \cos\varphi + \omega_z{}^2(1-\cos\varphi) \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

(можно воспользоваться и другими уравнениями раздела 7.3 "Преобразования поворота координат 3–мерного евклидова пространства"). А сам поворот осуществляется формулой:

$$r^i = M^i_j\, r'^j. \tag{6.9}$$

Как пример, приведу матрицу поворота вокруг оси z на угол φ. В этом случае $\omega_z = 1$, $\omega_x = \omega_y = 0$:

$$M(\omega,\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow(x,y,z)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}. \qquad (6.10)$$

С расшифровкой до координат точки имеем:

$$\begin{cases}x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi,\\ y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi,\\ z=z'.\end{cases} \qquad (6.11)$$

Напомню: x, y, z – координаты точек тела в условно покоящейся с.о., x', y', z' – координаты точек тела в с.о. самого вращающегося тела, φ – угол поворота тела вокруг оси поворота ω. Можно заметить, что предыдущие уравнения просто есть обратные преобразования координат.

Поворот на угол φ вокруг оси ω вектора r (или точки твердого тела) в векторной форме можно записать следующим уравнением (7.50):

$$\begin{gathered}r=r_{\perp}\cos\varphi+(\omega\times r_{\perp})\sin\varphi=\\ =\big(r-\omega(\omega r)\big)\cos\varphi+(\omega\times r)\sin\varphi+\omega(\omega r)=\\ =r\cos\varphi+(\omega\times r)\sin\varphi+\omega(\omega r)(1-\cos\varphi).\end{gathered} \qquad (6.12)$$

6.2.1 Взаимосвязь вектора угловой скорости вращения ω и угла поворота φ

При анализе уравнений (6.7)..(6.12) встает такой вопрос: направление угла поворота на угол φ вокруг вектора оси поворота ω можно принимать в разных направлениях. Какое направление предпочтительее? В правой системе в двухмерном пространстве за положительное направление вращения принято направление против движения часовой стрелки, в трёхмерном пространстве принято он направлен по оси вращения согласно правилу буравчика, то есть в ту сторону, в которую ввинчивался бы буравчик или винт с правой резьбой, если бы вращался в эту сторону. Другой мнемонический подход для запоминания взаимной связи между направлением вращения и направлением вектора угловой скорости состоит в том, что для условного наблюдателя, находящегося на конце вектора угловой скорости, выходящего из центра вращения, само вращение выглядит происходящим против часовой стрелки. Об этом можно посмотреть ранее в 7.1.1 "Выбор направления отсчета положительного двухмерного угла поворота" и 7.3.1 "Ориентация осей координат и системы векторов в 3–мерном пространстве".

Рассмотрим саму связь между осью вращения ω, углом поворота $d\varphi$ и скоростью вращения точки тела вокруг центра вращения. В двухмерном пространстве ось вращения вырождается в точку как "центра" вращения, и угловая скорость вращения равна изменение угла поворота тела за единицу времени dt.

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}, \text{или } \omega=\dot{\varphi}. \qquad (6.13)$$

В трехмерном пространстве вполне явно выделяется **ось вращения** как линия в пространстве, точки которой не изменяют свое положения. Ее можно задать как единичный вектор направления этой линии ω_i**. Сам поворот** можно определить углом поворота φ тела вокруг этого направления. А **скорость вращения** определяется через бесконечно малый поворот dφ вокруг оси ω_i. **Бесконечно малый поворот вокруг оси** ω_i

в матричной форме с помощью трех вращений выполняется с помощью уравнений (7.55) части 7.3.6 "Бесконечно малые повороты в пространстве". В соответствии с ним, приняв во внимание, что cosφ: (φ →0) → cosφ = 1, sinφ: (φ →0) → sinφ = φ, из (6.8) получим следующий результат:

$$M_z(\hat{v},\theta)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -\omega_z \sin d\varphi & \omega_y \sin d\varphi \\ \omega_z \sin d\varphi & 1 & -\omega_x \sin d\varphi \\ -\omega_y \sin d\varphi & \omega_x \sin d\varphi & 1 \end{pmatrix}_{\varphi\to 0} \to \begin{pmatrix} 1 & -\omega_z d\varphi & \omega_y d\varphi \\ \omega_z d\varphi & 1 & -\omega_x d\varphi \\ -\omega_y d\varphi & \omega_x d\varphi & 1 \end{pmatrix}. \qquad (6.14)$$

Сравнивая (6.13) и (6.14), можно сделать вывод о следующих равенствах относительно углов поворота вокруг осей координат: Это соответствует бесконечно малому повороту $d\varphi = (d\varphi^x, d\varphi^y, d\varphi^z)$ вокруг соответствующих осей:

$$\begin{aligned} d\varphi^x &= \omega_x d\varphi, \\ d\varphi^y &= \omega_y d\varphi, \\ d\varphi^z &= \omega_z d\varphi. \end{aligned} \qquad (6.15)$$

Как следствие, можно сделать вывод о том, что три бесконечно малых угла поворота ($d\varphi^x$, $d\varphi^y$, $d\varphi^z$) коллинеарны оси вращения ω_i и определяют координаты вектора оси вращения бесконечно малого поворота, длина которой задает угол поворота вокруг этой оси. Из них как следствие, получаем скорость вращения:

$$v^{\varphi} = \left(\frac{d\varphi^x}{dt}, \frac{d\varphi^y}{dt}, \frac{d\varphi^z}{dt}\right) = \omega_{(1)} \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (6.16)$$

Т.к. обычно символ скорости v^i уже используется для обозначения координатной скорости, то на практике для обозначения угловой скорости используют не этот символ, а уже мнемонически понятный символ обозначения оси поворота ω, уже примененную в обозначениях к уравнению (6.13). Она обосновывается отмеченным выше свойством коллинеарности скорости вращения тела вектору оси вращения ω, но при этом ее длина берется равной модулю скорости вращения – при этом со знаком, соответствующим направлению вращения:

$$v^{(\varphi)} \to \omega = \omega_{(1)} \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (6.17)$$

Здесь φ – ориентированный угол поворота вокруг оси вращения,

$\omega_{(1)}$ – направляющий вектор оси вращения единичной длины.

6.2.2 Получение координатной скорости точки тела из угловой

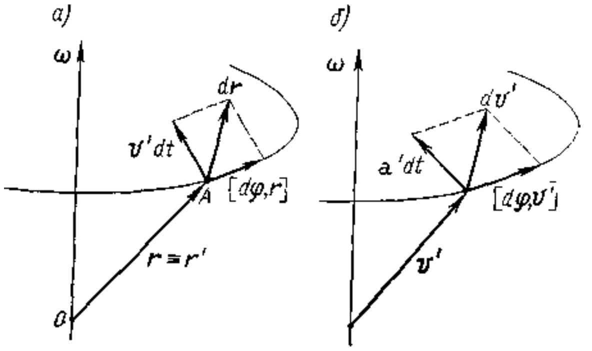

Рисунок 6.2

Параметры равномерно вращающихся с.о. (размеры векторов в перпендикулярном к скорости направлениях сильно преувеличены).

Возьмем начала отсчета *K* и *K'* систем отсчета в произвольной точке *O* на оси вращения (Рисунок 6.2.а). Тогда радиус–вектор точки *A* в обеих системах отсчета будет один и тот же: $r = r'$.

Если точка *A* неподвижна в *K'*–системе, то это значит, что ее перемещение dr в *K*–системе за время dt обусловлено только поворотом радиуса–вектора r на угол $d\varphi$ (вместе с *K'*–системой) и равно векторному произведению

$$dr = [d\varphi \times r] = [\omega dt \times r] = [\omega \times r]dt. \quad (6.18)$$

Если же точка *A* движется относительно *K'*–системы со скоростью v', то за время dt она совершит дополнительное перемещение $v'dt$ (Рисунок 6.2.а) и тогда

$$dr = v'dt + [d\varphi\times r]. \quad (6.19)$$

Поделив это выражение на dt, получим следующую формулу преобразования скорости:

$$v = v' + [\omega\times r]. \quad (6.20)$$

где v и v' – скорости точки *A* в системах отсчета *K* и *K'*– соответственно.

6.2.3 Получение координатного ускорения точки тела из угловой

Теперь перейдем к ускорениям. В соответствии с (6.20) приращение dv вектора v за время dt в *K*–системе должно складываться из суммы приращений векторов v и $[\omega \times r]$, т.е.

$$dv = dv' + [\omega \times dr]. \quad (6.21)$$

Найдем dv'. Если точка *A* движется в *K'*–системе с $v' = \text{const}$, то приращение этого вектора в *K* –системе обусловлено только его поворотом на угол $d\varphi$ (вместе с *K'*–системой) и равно, как и в случае с r, векторному произведению $[d\varphi \times v']$. В этом нетрудно убедиться, совместив начало вектора v' с осью вращения (Рисунок 6.2.б). Если же точка *A* имеет ускорение w' в *K'*–системе, то за время dt вектор v' получит еще дополнительное приращение $w'dt$, и тогда

$$dv' = w'dt + [d\varphi \times v']. \quad (6.22)$$

Здесь v' и w' – скорость и ускорение пробной точки в штрихованной с.о.

Подставим (6.22) и (6.19) в равенство (6.21) и полученное выражение разделим на dt. В результате найдем следующую формулу преобразования ускорения:

$$w = w' + 2[\omega\times v'] + [\omega\times[\omega\times r]]. \quad (6.23)$$

Первое слагаемое в правой части этой формулы называется поступательным ускорением. Второе слагаемое в правой части этой формулы носит название кориолисова ускорения (или поворотного) w_{cor}, а третье слагаемое — осестремительного ускорения:

$$w_{cor} = 2[\omega\times v'], w_{cs} = [\omega\times[\omega\times r]]. \tag{6.24}$$

Таким образом, ускорение w точки относительно K–системы равно сумме трех ускорений: ускорения w' относительно K'–системы, кориолисова ускорения w_{cor} и осестремительного ускорения w_{cs}.

Осестремительное ускорение можно представить в виде $w_{cs} = \omega^2\rho$, где ρ — радиус–вектор, перпендикулярный оси вращения и характеризующий положение точки A относительно этой оси. Тогда формулу (6.23) можно записать так:

$$w = w' + 2[\omega\times v'] - \omega^2\rho. \tag{6.25}$$

Эти виды ускорений будут встречаться и далее.

6.3 Равномерно вращающаяся и поступательно перемещающаяся с.о.

K'–система вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перемещающейся поступательно со скоростью v_0 и ускорением w_0 по отношению к K–системе. Этот случай объединяет два предыдущих. Введем вспомогательную S–систему отсчета, которая жестко связана с осью вращения K'–системы и перемещается поступательно в K–системе. Пусть v и v_s — скорости точки A в K– и S–системах отсчета, тогда полная скорость точки, в соответствии с законом сложения скоростей в ГПВ: $v = v_0 + v_s$. Заменив v_s, согласно (6.20), выражением $v_s = v + [\omega\times r]$, где r – радиус–вектор точки A относительно произвольной точки на оси вращения K'–системы, получим следующую формулу преобразования скорости:

$$v = (v' + v_0) + [\omega\times r']. \tag{6.26}$$

Аналогичным образом, используя (6.25), найдем формулу преобразования ускорения:

$$w = (w' + w_0) + 2[\omega\times v'] - \omega^2 r'. \tag{6.27}$$

Здесь v_0 и w_0 – поступательные скорость и ускорение начала подвижной с.о. в условно неподвижной с.о., v' и w' – скорость и ускорение пробной точки в штрихованной с.о.

6.4 Неравномерно вращающаяся и поступательно перемещающаяся с.о.

Если K'–система вращается с переменной угловой скоростью ω вокруг оси, то в формулы преобразования скорости (6.25) и ускорения (6.27) добавится еще один член (выделен синим цветом), соответствующий ускоренному вращению:

$$\begin{aligned} w &= \left(w' + w_0 + \frac{\partial\omega\times r'}{\partial t}\right) + 2[\omega\times v'] - \omega^2 r' = \\ &= \left(w' + w_0 + \frac{\partial\omega}{\partial t}\times r'\right) + 2[\omega\times v'] - [\omega\times[\omega\times r']]. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Здесь также v_0 и w_0 – поступательные скорость и ускорение начала подвижной с.о. в условно неподвижной с.о., v' и w' – скорость и ускорение пробной точки в штрихованной с.о.

Первое слагаемое в правой части этой формулы называется поступательным ускорением. Второе слагаемое в правой части этой формулы носит название кориолисова ускорения (или поворотного) w_{cor}, а третье слагаемое — осестремительного ускорения.

7 Преобразования координат евклидова пространства

7.1 Общие и частные виды преобразований координат пространства–времени

Преобразования координат есть преобразования из одной системы пространственных координат K в другое K': $K \rightarrow K'$. Преобразованные координаты – это просто другая параметризация точек пространства. Преобразования координат должны удовлетворять тому же условию (1.12) – непрерывности: близкие точки должны отображаться в близкие же точки, без разрушения топологических окрестностей и непрерывности параметров скорости и ускорения. Наиболее простыми преобразованиями координат "время" и "расстояние", удовлетворяющими выдвинутым условиям (кроме евклидовости), являются общие линейные преобразования координат аффинного ПВ[66]:

$$\begin{cases} t' = \alpha t - \lambda_i r^i - t_{(0)}, \\ r'^i = -\gamma^i t + \beta^i_j r^j - r_{(0)}{}^i. \end{cases} \tag{7.1}$$

Здесь значения $t_{(0)}$ и $r_{(0)}{}^i$ соответствуют смещению начала координат новой с.о. в точку с координатами ($t_{(0)}$, $r_{(0)}{}^i$).

В здравом уме и твердой памяти можно объяснить только те значения этих коэффициентов, которые соответствуют преобразованиям галилеева пространства. Все остальные интерпретации не очевидны и не объяснимы здравым умом. Но Природа богаче, чем воображают наши мозги, и здравый смысл не всегда и не каждому человеку может помочь понять ее. И новые интерпретации абстрактных преобразований координат модельного математического ПВ для описания реального ПВ начали появляться и осмысливаться в трудах великих ученых только в конце XIX – начале XX веков.

Из представленных уравнений преобразований координат (7.1) общего вида можно получить пять видов "ортонормированных" и/или "почти" ортонормированных преобразований координат, связанных с евклидовостью или псевдоевклидовостью ПВ – от галилеева и до релятивистского, от ортонормированных до общего вида:

1) общего вида с относительными координатами;
2) общего вида с абсолютными координатами;
3) **релятивистское** ПВ СТО А.Эйнштейна;
4) **галилеево** – считается ПВ классической механики Ньютона (КМН);
5) **Тангерлини** – одно из альтернативных абсолютных типа галилеевых ПВ и одновременно релятивистского типа;
6) **дорелятивистское** – реально соответствует пространству КМН.

Про первый тип преобразований координат пространств нельзя сказать никаких предположений о его геометрических свойствах. Можно только предположить, что они просто могут быть. Могут быть, в частности, ортогональными и нормированными, однородными и изотропными. Ортонормированность означает, что оси координат ИСО ПВ ортогональны и "метки" осей координат нормированы. Следующие типы пространств предполагают существование особых геометрических свойств по своему определению.

---

[66] Если быть строже, то коэффициенты α, β, λ и γ должны быть представлены как элементы матрицы (или тензора) преобразования координат: $\alpha \sim \alpha^0{}_0$, $\beta \sim \beta^0{}_0$, $\lambda \sim \lambda^0{}_0$, $\gamma \sim \gamma^0{}_0$, а не как скаляр, вектор и матрица – как можно подумать из записи этих уравнений. Здесь индекс 0 соответствует временной координате и индексу, соответствующего ему, а ненулевые индексы соответствует пространственным координатам. При преобразованиях координат такие параметры преобразуются по законам преобразования тензоров ранга 2.

Второй тип предполагает, что при преобразованиях координат свойство одновременности двух событий является инвариантом.

Третий тип – релятивистское пространство, которое является ортонормированным ПВ.

Четвертый тип – галилеево ПВ – есть абсолютное пространство–время, в котором 1) свойство одновременности двух событий является инвариантом и 2) разность времен также является инвариантом.

Оставшиеся два можно считать соответствующими ограниченно ортогональными и нормированными, что означает, что "метки" осей координат этих типов ПВ осей координат нормированы и ортогональны (хотя и имеются замечания и особенности) только при некоторых предельных условиях (например, достаточно малых скоростях). Дополнительно к этим свойствам можно поставить вопрос об однородности и изотропности этих ПВ как по временной, так и по пространственным направлениям.

В интерпретации соответствия этих пространств реальному физическому ПВ это означает, эксперименты с реальными часами и линейками должны соответствовать этим математическим моделям ПВ. Но ведь этого не может быть? Модели разные – и свойства реального ПВ могут соответствовать не более чем одному из них. В современной физике, во всяком случае ортодоксальной в 4–мерном представлении, считается, что реальное ПВ однородно и изотропно и является локально релятивистским ПВ[67].

7.1.1 Ортонормированные преобразования координат общего вида

Среди всех преобразований имеется группа ортонормированных преобразований координат. В таком случае уравнения преобразования координат общего типа (7.1) пространств первая строка будет определять условие синхронизации часов в новой системе координат и относительную скорость ее хода, определяя этим слой одновременности, а вторая – перемещение начала координат во времени и ее новую разметку, через которую определяются расстояния. При этом подпространство t = const для каждой из ИСО будет подпространством одновременных событий.

Для (7.1) это означает выполнение некоторых условий. Из линейной алгебры известно, что п**араметры группы общих ортонормированных преобразований координат** пространств (7.1) в двухмерном случае обладают следующими свойствами:

$$\alpha\beta - \lambda\gamma = 1. \tag{7.2}$$

Употребление без индекса соответствует двухмерному ПВ[68]. В многомерном случае это выражение является детерминантом матрицы преобразований координат. Здесь параметры λ и γ являются направляющими векторами новых осей координат и должны писаться с пространственным индексом i, а β – пространственным тензором 3×3 с двумя индексами. Это уравнение говорит о том, что определитель матрицы преобразований координат должен быть равен единице. Оно говорит о том, что координатный "объем" возможных преобразованных объектов не может измениться. Дополнительные свойства относятся к строкам и столбцам матрицы преобразований:

$$\begin{cases} \alpha^2 \pm \lambda^2 = 1, \\ \beta^2 \pm \gamma^2 = 1, \\ \alpha\gamma \pm \beta\lambda = 0. \end{cases} \begin{cases} \alpha^2 \pm \gamma^2 = 1, \\ \beta^2 \pm \lambda^2 = 1, \\ \alpha\lambda \pm \beta\gamma = 0. \end{cases} \tag{7.3}$$

[67] Во всяком случае, во всех учебниках для студентов ВУЗов и всеми признанными учеными всего мира.

[68]. Употребление без индексов говорит о преобразовании двухмерного ПВ или пространственно–временного буста при преобразовании точек ПВ в продольном к скорости V^i направлении. Преобразование координат в поперечном направлении требует отдельного рассмотрения и зависит от выбора и скорости течения эталона времени.

Отрицательные знаки в формуле соответствуют гиперболической (псевдоевклидовой) метрике соответствующего ПВ, а положительные – евклидовой. Уравнения первых двух строк являются квадратами соответствующих строк и столбцов псевдоевклидова и евклидова пространств. Они должны быть равны единице – в силу своей нормированности. Третьи строки есть перекрестные произведения первых строк или столбцов друг на друга. Они должны быть равны нулю – в силу их взаимной ортогональности.

Это общие свойства тензоров. Из них следует только то, что α и β, а также λ и γ должны быть попарны равны друг другу или иметь противоположные знаки. Действительно, для последней строки можем записать:

$$\begin{cases}\alpha\gamma-\beta\lambda=0\\ \alpha\lambda-\beta\gamma=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\alpha\gamma\lambda-\beta\lambda\lambda=0\\ \alpha\gamma\lambda-\beta\gamma\gamma=0\end{cases}\rightarrow$$

После вычитания из верхней строки нижней имеем:

$$0-\beta\lambda\lambda+\beta\gamma\gamma=0\rightarrow$$
$$-\beta\left(\lambda^2-\gamma^2\right)=0\rightarrow$$
$$\gamma=\pm\lambda.$$

Точно также можем определить, что $\alpha = \beta$. И общее решение уравнения для ортонормированных преобразований координат будет следующим:

$$\begin{cases}\alpha=\beta,\\ \gamma=\pm\lambda\rightarrow\alpha=\sqrt{1\mp\gamma^2},\beta=\sqrt{1\mp\lambda^2}.\end{cases}\tag{7.4}$$

Несмотря на большое количество уравнений с условиями, они не могут дать однозначного решения для параметров уравнений группы ортонормированных преобразований координат. Но есть общий вывод, который можно получить из этих свойств и решений: знание любого из параметров α, β, λ и γ полностью определяет все остальные параметры матрицы преобразований, и они все зависят от одного единственного параметра. Для примера рассмотрим следующую простую зависимость, при условии, что параметр γ нам известен. Тогда, в соответствии с приведенными свойствами, (7.1) для псевдоевклидова пространства имеет единственное решение:

$$\begin{cases}t'=\sqrt{1+\gamma^2}t-\gamma r^i,\\ r'^i=-\gamma t+\sqrt{1+\gamma^2}r^i.\end{cases}\tag{7.5}$$

А для евклидова случая следующее решение:

$$\begin{cases}t'=\sqrt{1-\gamma^2}t+\gamma r^i,\\ r'^i=-\gamma t+\sqrt{1-\gamma^2}r^i.\end{cases}\tag{7.6}$$

Можно проверить, что эти преобразования ортогональны и нормированы при любом значении параметра γ. И притом единственны – нет других общих типов преобразований координат (но есть более частные преобразования координат абсолютных пространств – но об этом далее). Далее нас будут интересовать только евклидово пространство.

7.1 Евклидова интерпретация ортонормированных преобразований координат

Здесь коротко рассмотрим геометрическую интерпретацию преобразований (7.1) для евклидова пространства. Для этого надо рассмотреть уравнения (7.6):

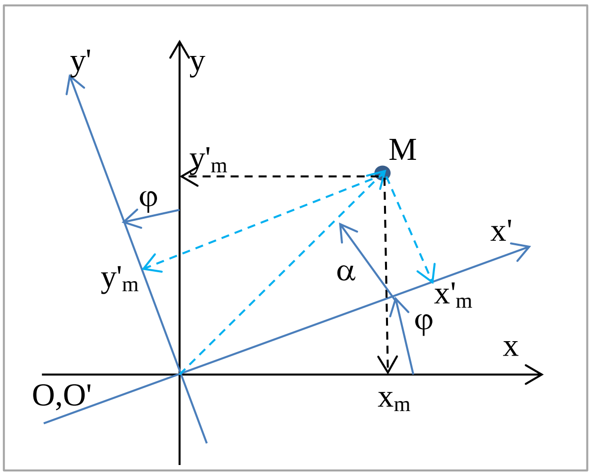

Рисунок 7.1

Поворот осей координат
в двухмерном пространстве на
примере т. *M*: *M*(x, y) → *M*(x', y')

$$\begin{cases} x' = \sqrt{1-\gamma^2}x + \gamma y, \\ y' = -\gamma x + \sqrt{1-\gamma^2}y. \end{cases} \quad (7.6)$$

Интерпретация этих преобразований координат становится достаточно прозрачной при проведении следующих замен:

$$\gamma = \sin\varphi, \\ \sqrt{1-\gamma^2} = \cos\varphi. \quad (7.7)$$

Здесь φ – угол поворота оси *x* в направлении оси *y*. В результате уравнения (7.6) преобразования осей координат *x* и *y* перепишется в виде:

$$\begin{cases} x' = \cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y, \\ y' = -\sin\varphi \cdot x + \cos\varphi \cdot y. \end{cases} \quad (7.8)$$

Полученные уравнения есть евклидовы повороты координатной системы 3-мерного пространства на угол φ в направлении от оси *x* в сторону оси *y*.

В ПВ их можно применять к преобразованиям отдельно пространственных координат ПВ, ибо ПВ без "временной" координаты есть евклидово пространство. Необходимо осознать, что это есть преобразования координат точки с координатами (*x*, *y*) в новую систему координат (*x*′, *y*′). А само уравнение представляет собой уравнение преобразования, которое используется для выполнения вращения в евклидовом пространстве, точнее – уравнение (формулу) тригонометрического вычитания углов. В данном случае (см. Рисунок 7.1) для точки *M* из исходного угла (α + φ) его видимости в исходной с.к. вычитается угол α – угол поворота новой с.к.: (α + φ) – φ = α. В этом случае координата *x* будет косинусом, а *y* – синусом угла (α + φ), умноженным на длину *OM*. Для примера приведу расчет новых координат точки с координатами (*x*, *y* = (1,0) при повороте с.к. на φ = +30°. Ее новые штрихованные координаты с использованием формулы (7.8) будут иметь координаты (см. Рисунок 7.1):

$$(x', y') == \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} * x + \frac{1}{2} * y \\ -\frac{1}{2} * x + \frac{1}{2} * y \end{cases} = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} * 1 + \frac{1}{2} * 0 \\ -\frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{2} * 0 \end{cases} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Обратные преобразования осуществляются следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \cos\alpha \cdot x' - \sin\alpha \cdot y', \\ y = \sin\alpha \cdot x' + \cos\alpha \cdot y'. \end{cases} \quad (7.9)$$

Эти преобразования получаются заменой знака при угле α.

Есть и другая интерпретация – уравнение (7.10) вращает точки в плоскости (*x*, *y*) против часовой стрелки на угол φ относительно оси *x* вокруг начала двухмерной декартовой системы координат (для Рисунок 7.2 точка *M* переносится в т. *M*′).

Если *x* и *y* – координаты конечной точки вектора, где *x* – косинус, а *y* – синус, то приведенные выше уравнения становятся формулами тригонометрического суммирования углов α и φ.

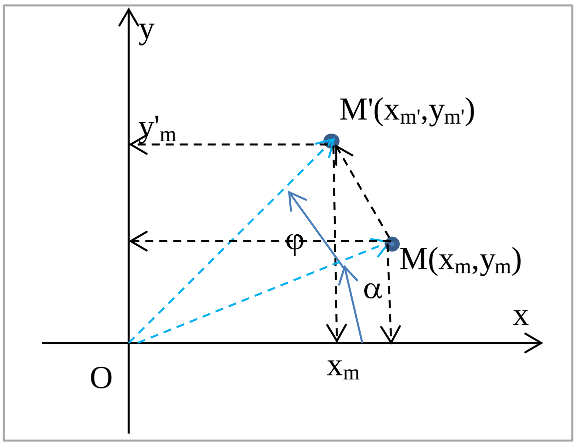

Рисунок 7.2

Поворот вектора *OM*(*x*,*y*) в положение *OM'*(*x'*,*y'*) в двухмерном пространстве на угол φ.

$$\begin{cases} x' = \cos\varphi \cdot x - \sin\varphi \cdot y, \\ y' = \sin\varphi \cdot x + \cos\varphi \cdot y. \end{cases} \qquad (7.10)$$

Это преобразование можно интерпретировать как изменение координат точек вращаемого твердого тела при повороте на угол φ.

Обратные преобразования в этом случае осуществляются следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \cos\varphi \cdot x' + \sin\varphi \cdot y', \\ y = -\sin\varphi \cdot x' + \cos\varphi \cdot y'. \end{cases} \qquad (7.11)$$

Эти преобразования получаются заменой знака при угле φ. Других типов преобразований координат не существует.

Обратите внимание на разницу в знаках при элементах в уравнениях (7.8) .. (7.11)!

7.1.1 Выбор направления отсчета положительного двухмерного угла поворота

В связи с тем, что направление поворота в "положительном" направлении можно выбрать по разному – против и по часовой стрелке, то в математике и физике за положительное направление выбрано направление против часовой стрелки, для нашего рисунка – в направлении ближайшего поворота к оси *y*. Но эти два способа – независимы друг от друга, поэтому при каждом преобразовании отражения какой-нибудь координатной оси необходимо иметь в виду, что направление "положительного отсчета угла" по прежнему должно проводиться против часовой стрелки, в противном случае (при выборе "ближайшего направления поворота от оси *x* к оси *y*") – менять знак угловой скорости на противоположное с тем, чтобы не "спутать" направление первоначального отсчета угла[69] [70]. При рассмотрении плоскости нашего рисунка в 3–мерном пространстве направление оси *z* соответствует "направлению на нас", что соответствует "правой" (см. далее) системе 3–мерных координат (см. 7.3.1 "Ориентация осей координат и системы векторов в 3–мерном пространстве").

7.1.2 Векторная и тензорная формы записи уравнений

В векторной и тензорной форме запись уравнений имеет практически тот же алгебраический вид (7.8), (7.9), но в этом случае для выделения того факта, что используются именно векторы и/или тензоры, обычно применяются диакритические знаки над символом и/или индексы (или другие соглашения). Поворот осей координат с использованием вектора–строки или вектора–столбца $\downarrow r$ осуществляется уравнениями:

$$\begin{gathered} \vec{r}' = \vec{r}M(\theta), \\ \downarrow\vec{r}' = M^T(\theta)\downarrow\vec{r}. \end{gathered} \qquad (7.12)$$

[69] При этом при изменении направлений осей координат и их начал необходимо учитывать дополнительно и изменение самих углов от новой оси абсцисс x.

[70] В географии и геодезии за начало отсчёта углов по азимуту принято направление "на север", а сам угол отсчитывается по часовой стрелке. Таким образом, направлению "на восток" соответствует азимутальный угол 90°, "на юг" — 180°, "на запад" — 270°. В артиллерии предпочитают направление полярной оси "на юг" и соответствующий полярный угол называют также азимутом (направление "на запад" соответствует азимутальному углу 90°).

(знак T обозначает транспонирование, $\downarrow$ – запись в столбец). А с использованием тензорного исчисления с использованием индексов с помощью уравнений:

$$
\begin{gathered}
r'^{j} = r^{i} M_{i}^{j}(\theta), \\
r'^{j} = r^{i} M_{i}^{j}(\theta) = M_{i}^{j}(\theta) r^{i}.
\end{gathered} \tag{7.13}
$$

Как и при преобразованиях координат, записанных в алгебраической и в матричной форме записи с векторами–строками и векторами–столбцами, здесь также необходимо помнить, с какой интерпретацией "поворотов" имеем дело. Обычно считают, что в отличие от матрицы перехода (7.14):1, (7.12):1 при повороте системы координат (базиса), при умножении на матрицу поворота вектора–столбца (7.12):2 координаты вектора преобразуются в соответствии с поворотом самого вектора, а не поворотом координатных осей; то есть при этом координаты повернутого вектора получаются в той же, неподвижной системе координат. Однако отличие той и другой матрицы лишь в знаке угла поворота, и одна может быть получена из другой заменой угла поворота на противоположный; та и другая взаимно обратны и могут быть получены друг из друга транспонированием.

7.1.3 Матричная форма записи преобразования поворота осей координат

Часто в математике и физике вместо алгебраической записи уравнений используется матричная и векторная (тензорная) формы записи. Матрицей поворота называется ортогональная матрица, которая используется для выполнения ортонормированного преобразования в евклидовом пространстве. При умножении любого вектора на матрицу поворота длина вектора сохраняется. Определитель матрицы поворота равен единице. В расшифрованном виде с координатами как матрица – строка (x, y) уравнение (7.8) будет записываться следующим образом:

$$
(x', y') = (x, y)\begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{pmatrix} = (x, y)\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{7.14}
$$

Кроме использования координат в форме матрицы–строки возможно использование и в форме матрицы–столбца[71] $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Если в первом случае вектор–строка координат при операции умножения с матрицей ставится с левой стороны от матрицы поворота, то во втором случае вектор–столбец ставится с правой стороны:

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{7.15}
$$

Обратите внимание: матрицы в этих двух случаях отличаются. Во второй форме матрица поворота осей координат согласуется с расположением элементов в (7.8), в первом – нет.

Здесь также возможны два типа интерпретации цели выполнения преобразований координат. Разница между ними, как вы, наверное, уже убедились, в знаках при синусах углов и в записи векторов в строку или столбец. Данные уравнения (7.14), (7.15) записаны для изменения координат при поворотах с.к., а не для точек вращаемого твердого тела. Будьте внимательны!

Для примера приведу расчет новых координат точки с координатами (x, y = (1,0) при повороте с.к. на α = +30°. Ее новые штрихованные координаты с использованием

---

[71] Далее я не буду пользоваться выражениями "матрица–строка" и "матрица–столбец", заменяя слово "матрица" на "вектор" или "координата": "вектор–строка" и "вектор–столбец" или просто "вектор" или "координата".

формулы (7.14) будут иметь координаты (см. Рисунок 7.1):

$$(x', y') = (x, y)\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} * 1 + \frac{1}{2} * 0, -\frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{2} * 0\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

7.1.4 Свойства двухмерной матрицы поворота

Приведу основные свойства преобразований координат (и векторов) с помощью матриц. Множество всех матриц, выполняющих ортнормированные преобразования координат, составляет группу по матричному умножению. Поэтому в ней выполняются следующие свойства:

1) **Существует единичная матрица *E***, выполняющая роль единицы, которым является матрица с единичными диагональными элементами. Выполняет поворот на угол 0°.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.16}$$

2) **Коммутативность**, или результат проведения двух последовательных преобразований на разные углы не зависит от порядка выполнения преобразований:

$$M(\alpha + \beta) = M^1(\alpha)M^2(\beta) = M^2(\beta)M^1(\alpha). \tag{7.17}$$

3) **Ассоциативность**, или результат проведения трех последовательных преобразований на разные углы не зависит от порядка группировки выполняемых преобразований:

$$M = M^1(M^2M^3) = (M^1M^2)M^3. \tag{7.18}$$

4) **Сумма квадратов** элементов каждого столбца и строки равна также единице:

$$\begin{aligned} &(a^{11})^2 + (a^{12})^2 = 1, (a^{21})^2 + (a^{22})^2 = 1, \\ &(a^{11})^2 + (a^{21})^2 = 1, (a^{12})^2 + (a^{22})^2 = 1. \end{aligned} \tag{7.19}$$

5) **Скалярное произведение любой строки на другую строку**, а также любого столбца на другой столбец равны нулю.

$$\begin{aligned} &a^{11}a^{21} + a^{12}a^{22} = 0, \\ &a^{11}a^{12} + a^{21}a^{22} = 0. \end{aligned} \tag{7.20}$$

6) **Определитель матрицы** преобразования равняется единице**:**

$$a^{11}a^{22} - a^{21}a^{12} = 1. \tag{7.21}$$

Первый и последние три свойства легко доказать простым перемножением строк и столбцов (7.14) и (7.15) и вычислением определителя:

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{cases} \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \equiv 1 \\ \sin\varphi \cdot \cos\varphi - \cos\varphi \cdot \sin\varphi \equiv 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{7.22}$$

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

Второй и третий случаи можете доказать сами – простым перемножением соответствующих матриц. Это немного сложнее – для интерпретации уравнений надо знать формулы тригонометрии сложения/вычитания углов.

Эти свойства матриц ортонормированных преобразований координат двухмерного пространства полностью повторяют свойства вещественных чисел, и, в принципе, матрицы можно заменить просто углами поворота осей координат, которые можно видеть в записи уравнений (7.14) и (7.15). Для пространств размерностью более двух эти свойства также имеют место, но – за исключением свойства коммутативности.

7.2 Преобразования смещения и поворота координат

Рассмотрим преобразования 3–мерных евклидовых координат при преобразованиях со смещениями (трансляциями) и поворотами.

7.2.1 Трансляция, или преобразования смещения координат

пространства осуществляется с помощью уравнений

$$r'^{\,i} = r^{\,i} - r^{\,i}_{\ (0)}. \tag{7.23}$$

С помощью преобразования трансляции координат производится смена начала координат с.о. Об этом в этом уравнении говорит член $r^{\,i}_{\ (0)}$ (без штриха!), соответствующий значениям начала координат штрихованной с.к. При этом необходимо иметь ввиду, что само преобразование смещения штрихованной с.о. происходит в сторону начала координат штрихованной с.о.

Обратные преобразования осуществляются уравнениями

$$r^i = r'^{\,i} + r^{\,i}_{\ (0)}. \tag{7.24}$$

Но если учесть, что обратное преобразование осуществляется в обратном направлении, то в (7.24) перед $r^i_{(0)}$ нужно оставить прежний знак. При этом смещение $r'^{\,i}_{\ (0)}$ необходимо проштриховать:

$$r^i = r^{\,i} - r'^{\,i}_{\ (0)}. \tag{7.25}$$

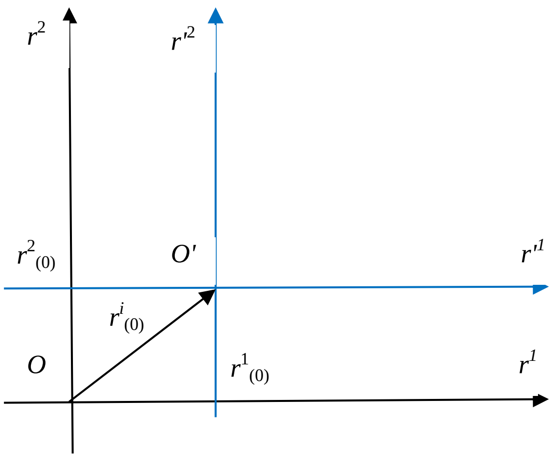

Рисунок 7.3

Схематическое изображение преобразования трансляции осей координат.

При этом также необходимо иметь ввиду, что само преобразование смещения происходит в сторону начала координат не штрихованной с.о.

Это преобразование не является тензорным, потому что любой вектор r подобным преобразованием можно обнулить. Это – преобразования аффинного пространства. Но при этом его дифференциал является тензором:

$$dr'^i = dr^i. \tag{7.26}$$

7.2.2 Линейные преобразования поворота пространственных координат

, соответствующие повороту пространственных координат относительно начала координат, следующие:

$$r'^i = \omega^i_j r^j. \tag{7.27}$$

Здесь ω^i_j (и далее) – тензор поворота новой с.о. относительно старой, за положительное направление поворота принимается последовательность $r^1 \to r^2 \to r^3 \to r^1$. Знаки элементов ω^i_j выбираются для положительного направления поворота исходной с.о. относительно старой.

Обратные преобразования осуществляются формулами

$$r^i = \omega^{Ti}_j r'^j. \tag{7.28}$$

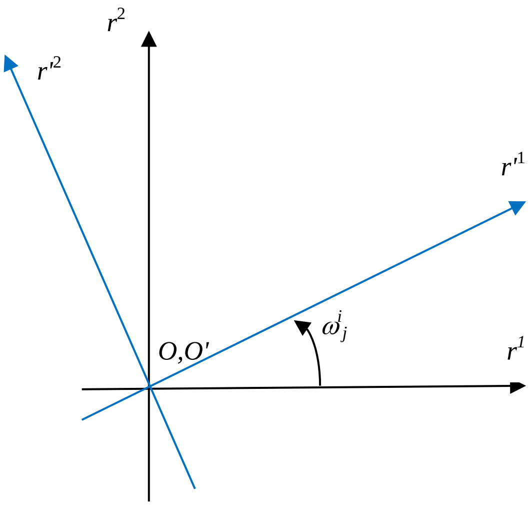

Рисунок 7.4

Схематическое изображение преобразования поворота осей координат.

где $\omega^{Ti}{}_j$ – транспонированная по отношению к ω^i_j матрица. Значения элементов этих тензоров совпадают, но – не диагональные элементы имеют противоположные знаки. Но если учесть, что обратное преобразование осуществляется в обратном направлении, то в (7.28) перед ω^i_j для ковариантности выражения нужно оставить прежний знак. Но при этом необходимо поворот ω^i_j проштриховать:

$$r^i = \omega'^i_j r'^j. \tag{7.29}$$

При этом также необходимо иметь ввиду, что само преобразование поворота происходит в обратном направлении, и, само собой, тензор поворота уже должен быть инвертированным..

7.2.3 Преобразования инверсии

определяют изменение направления координатных линий и относятся к дискретным.

$$r'^i = -r^i. \tag{7.30}$$

Инверсия – это в каком–то смысле операция "сопряжения": одному исходному элементу сопоставляется другой. Частичная инверсия по определенным направлениям называется отражением.

Обратные преобразования осуществляются этими же формулами.

7.2.4 Обобщенные преобразования координат со смещением уравнения преобразования координат

Здесь возможны два случая, и это связано с не коммутативностью последовательного выполнения операции смещения и поворота. В случае **"сначала смещение, потом поворот"** (см. Рисунок 7.5) формула преобразования координат запишется следующим образом:

$$\begin{gathered} r'^i = \omega^i_j\left(r^j - r_{(0)}{}^j\right). \\ \left(r''^i = r^j - r_{(0)}{}^j\right) \end{gathered} \tag{7.31}$$

Здесь $r^j{}_0$ – начальное смещение новой с.к.

r''^i (и далее) – промежуточная с.к., полученная смещением с.к. на $r^j{}_{(0)}$.

Обратные преобразования следующие:

$$\begin{gathered} r^i = \omega^{Ti}_j r'^j + r_{(0)}{}^j = \omega'^i_j r'^j - r'_{(0)}{}^j. \\ \left(r''^i = \omega^{Ti}_j r'^j\right). \end{gathered} \qquad (7.32$$

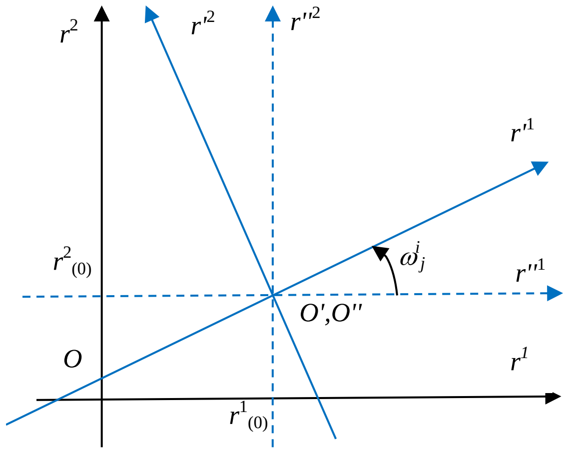

Рисунок 7.5

Схематическое изображение обобщенного (смещение + поворот) преобразования осей координат.

В скобках показана промежуточная с.к., полученная первичным поворотом с.к. на $r^j_{(0)}$. Символ T обозначает транспонирование матрицы прямого преобразования ω^i_j из (7.31):

$$\omega^{T\,i}{}_j = \omega'^i_j = \omega_j{}^i. \tag{7.33}$$

Здесь можно заметить, что при обратном преобразовании скобки исчезли.

В случае **"сначала поворот, потом смещение "** (см. Рисунок 7.6) формула преобразования координат запишется следующим образом:

$$\begin{gathered} r'^i = \omega^i_j r^j - r_{(0)}{}^j, \\ \left(r''^i = \omega'^i_j r^j\right). \end{gathered} \tag{7.34}$$

Здесь r''^i (и далее) – промежуточная с.к., полученная поворотом с.к. на угол ω^i_j. Обратная операция осуществляется по формулам

$$\begin{gathered} r^i = \omega'^i_j \left(r'^j - r'_{(0)}{}^j\right), \\ \left(r''^i = r'^j - r'_{(0)}{}^j\right). \end{gathered} \tag{7.35}$$

Здесь r''^i – промежуточная с.к., полученная первоначальным смещением с.к. на $r^j_{(0)}$.

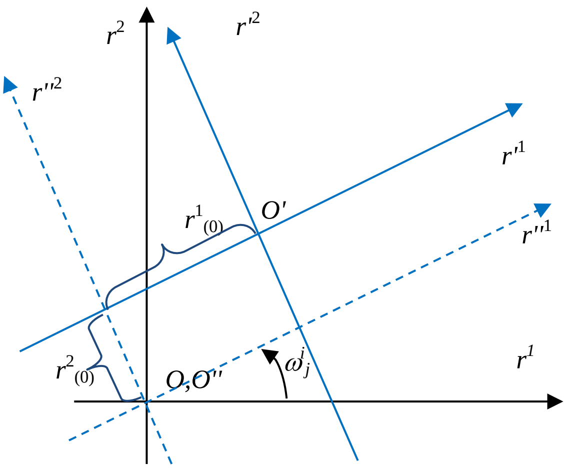

Рисунок 7.6

Схематическое изображение обобщенного (поворот + смещение) преобразования осей координат.

Сравнивая уравнения (7.31) .. (7.35), можно заметить, что эти формулы взаимно обратны – изменяется только порядок выполнения операции трансляций и вращения.

7.2.5 Преобразования 3–мерных координат как 4–вектора

При изучении преобразований координат 3–мерного евклидова пространства мы рассмотрели преобразования пространства со смещением начала координат. Здесь я е вспомню этот вид преобразований, но в связи с вопросом – а являются ли преобразования смещения координат пространства векторными? Ранее на вопрос о векторности координат евклидова пространства мы ответили отрицательно (см. 7.1.2 "Векторная и тензорная формы записи уравнений"), и назвали причину этого: любое смещение начала отсчета координат придает нулевому исходному значению координат ненулевое значение, равное смещению.

В связи с отрицательным ответом на этот вопрос возникает другой вопрос: а можно ли обойти это ограничение и все же найти способ использовать векторное исчисление и для евклидова пространства? Оказывается, можно. Для этого необходимо выйти за пределы трех измерений.

Для избавления от этого недостатка имеется известный способ – добавление еще одной, дополнительной 4–ой координаты "s", которая принимает единственное, равное единице, значение. В таком 4–мерном пространстве 3–мерное пространство представляется 3–мерным "подпространством" с фиксированным значением координаты в 4–ом измерении, равным "1". Тогда любая точка 4–пространства будет определяться координатами (1, r^1, r^2, r^3), и любой пространственный вектор не сможет иметь нулевое значение всех координат. Соответственно изменится и тензор преобразования координат. Точка начала координат при этом будет иметь координаты (1,0,0,0). Следовательно, при любых преобразованиях координат любой пространственный вектор будет оставаться ненулевым вектором с фиксированной дополнительной координатой.

Для преобразований координат в обобщенном 4–мерном виде с начальным смещением в смешанной векторно–тензорно–матричной форме можно применить следующие формулы. Дополнительная координата при этом может иметь только одно значение – единица. По алгоритму "сначала поворот, затем смещение ". Для координат в виде вектор–столбца эти преобразования производится по формуле:

$$q'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -r_{(0)}{}^i & \omega^i{}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^i_j r^j - r_{(0)}{}^i \end{pmatrix}. \tag{7.36}$$

В результате в одной матрице уместились как преобразования смещения, так и преобразования поворота системы координат.

Обратная к (7.36) операция осуществляется по следующим формулам (сначала смещение с переходом в ИСО, потом поворот):

$$q^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^{Ti}{}_j r'_{(0)}{}^j & \omega^{Ti}{}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r'^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{Ti}_j \left(r'^j - r'_{(0)}{}^j \right) \end{pmatrix}. \tag{7.37}$$

Как видно, два способа – (7.36) и (7.37) – взаимно обратны друг к другу. Но также видно, что эти два способа не коммутируют по отношению друг к другу из–за не коммутативности композиции этих операции.

Для "нормальных" 3–тензоров евклидова пространства произвольного порядка все элементы, включающие в себя этот индекс, должны быть равны 0. Но теоретически допустимы тензоры, у которых значения этих элементов будут произвольными константами или даже переменными. Их природа и полезность требуют дополнительного рассмотрения и обоснования.

7.3 Преобразования поворота координат 3–мерного евклидова пространства

Начнем с поворотов вокруг осей координат x, y и z. Матрицами поворота вокруг оси декартовой системы координат на угол θ вокруг осей x – в плоскости *(yz)*, y – в плоскости *(zx)*, и z– в плоскости *(xy)*, **в трёхмерном пространстве при представлении координаты целевой точки в строку** являются следующие[72].

Поворот вокруг оси x:

$$M_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{7.38}$$

Поворот вокруг оси y:

[72] Напомню: умножение на левую вектор–строку дает преобразование координат, а на правый вектор–столбец – поворот вектора (или точек вращаемого твердого тела).

$$M_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (7.39)$$

Поворот вокруг оси z:

$$M_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.40)$$

Это уравнение поворота в 3–мерном пространстве можно сравнить с поворотом с.к. в двухмерном случае. А сам поворот осуществляется в соответствии с уравнением:

$$r^i = r'^j M_j^i(\theta). \quad (7.41)$$

Здесь также возможны два типа интерпретации цели выполнения этих преобразований. Первое – это преобразование поворота системы координат при переходе в новую (штрихованную) систему координат. Второе – поворот вектора или движение точки твердого тела в исходном пространстве относительно начала координат. Также возможны реализации в аналитическом виде, с помощью матриц, векторном и тензорном вариантах. И еще – в левом "вектор–строковом" и правом "вектор–столбцовом" исполнении. В дополнение в связи с увеличением количества осей координат появляется необходимость "определять" знаки при элементах матриц преобразования (7.38) .. (7.41), которые зависят от ориентации (см. далее) осей координат, которые разделяются на право– и левоориентированные. Знаки перед синусами в уравнениях, представленных выше как "правоориентированных", определяются порядком перечисления осей плоскости поворота: какая названа первой, **в той строке перед синусом минус**: $P(x, y) \to M(1, 2) < 0$, $P(y, z) \to M(2, 3) < 0$, $P(z, x) \to M(3, 1) < 0$. Поэтому при рассмотрении конкретных задач необходимо учитывать особенности использования данных методов и интерпретации.

Любой поворот в 3–мерном пространстве может быть представлен как композиция поворотов вокруг трех ортогональных осей (например, вокруг осей декартовых координат) – x, y и z. Этой композиции соответствует матрица, равная произведению соответствующих трех матриц поворота. Всего таких матриц для 3–мерного пространства три. Все они перечислены выше.

Совершенно аналогично могут быть записаны матрицы поворота конечномерного пространства любой более высокой размерности. Знаки перед синусами в этих случаях также определяются порядком перечисления осей плоскости вращения: какая названа первой, в той строке перед синусом минус. Для получения произвольного поворота достаточно включить в композицию каждую плоскость только один раз, а их общее количество $N = n(n–1)/2$, где n — размерность пространства. Соответственно, для размерности два оно равно 1, а для размерности три – 3, для размерности четыре – 6.

В отличие от случая размерности два, поскольку умножение матриц размерности более двух не коммутативно, то положение системы координат после поворота вокруг двух не коллинеарных осей будет зависеть от последовательности поворотов. А т.к. в 3–мерном пространстве любые повороты можно провести с помощью трех последовательных поворотов, то для каждого типа поворотов существует 6 различных видов матриц поворота. А типов поворота существует как минимум три – 1) трех последовательных поворотов вокруг трех осей: (zxx); 1) с помощью поворота по углам Эйлера: (zyz); 3) поворот на определенный угол φ вокруг выделенной оси p (здесь нет возможности для выделения порядка следования осей для поворотов, поэтому есть только единственный способ проведения поворота). Таким образом, можно определить всего 13 видов поворотов осей координат.

7.3.1 Ориентация осей координат и системы векторов в 3–мерном пространстве

Что же такое "ориентация" осей координат?

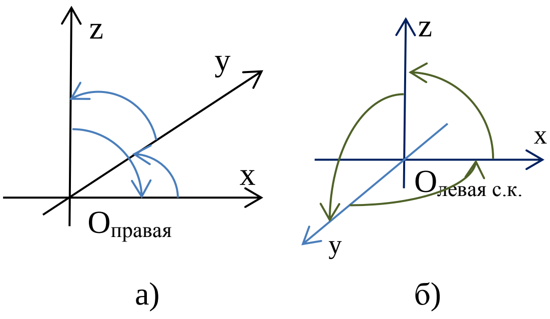

Рисунок 7.7

Схематический рисунок для объяснения типа ориентации координатной системы: а) правая и б) левая ориентации системы координат: в обоих ориентациях физический обход осей координат происходит в одном и том же направлении.

Ориентация осей координат в пространстве связана с их взаимным расположением и направлением вращения системы координат для их совмещения в направлении наименьшего угла поворота. Для этого есть две возможности. Во–первых, оси координат можно поворачивать в направлении $x \to y \to z \to x$, при котором ось x занимает место оси y, в свою очередь ось у занимает место оси z, и далее по кругу ось z занимает место оси x, замыкая процедуру поворота. Во–вторых, все это можно проделать в обратном направлении: $x \to z \to y \to x$. Графически эти отличия изображены на Рисунок 7.7 а) и б).

Для двухмерного случая мы приняли, что упорядоченная пара двух неколлинеарных координатных осей имеет правую ориентацию, если кратчайший поворот первой оси вокруг их точки пересечения до положения сонаправленности со второй осью осуществляется против часовой стрелки, если мы смотрим на нее со стороны рисунка. В противном случае говорят, что эта пара осей имеет левую ориентацию. Поэтому и для 3–мерного случая надо принять "согласованное" с двухмерным случаем решение. В соответствии с этим на Рисунок 7.7 а) показана правая ориентация в той реализации, в которой глаза наблюдателя смотрят на оси x и y со стороны оси z, и направление ближайшего поворота оси x к оси y соответствует направлению поворота против часовой стрелки. Такую ориентацию назовем правой по "генетическому" праву. Соответственно, на Рисунок 7.7 б) показана левая ориентация систем координат, где направление ближайшего поворота оси x к оси y соответствует направлению поворота против часовой стрелки – что соответствует направлению ближайшего поворота от оси y к оси x.

Подобным же образом определяется ориентированность трех векторов (a, b, c). Если при взгляде со стороны вектора a ближайший поворот от вектора b в сторону вектора c осуществляется против хода часовой стрелки, то эта тройка векторов ориентирована как "правая".

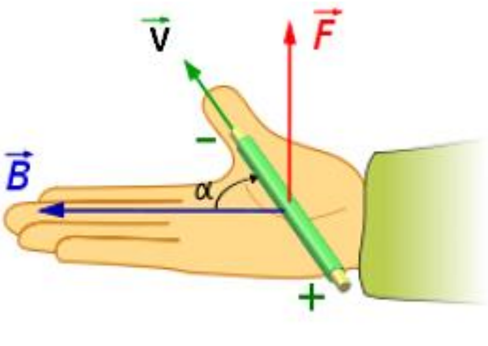

Рисунок 7.8

Правило правой руки.

Для правильного определения правой системы векторов широко используется правило правой руки. Например, для определения силы Лоренца в Электродинамике расположите руки в соответствии с Рисунок 7.8. Сила Лоренца F по отношению к направлению движения положительного заряда V (а таковым направлением обладает направление течения тока I – от плюса к минусу) и направлению магнитной индукции B как тройка векторов (V, B, F).

Обратите внимание: **направление хода**

часовой стрелки не зависит от системы координат. И оно согласовано с направлением хода Солнца на небосводе – слева направо, когда смотришь на него с северного полушария. Поэтому понятия "правой" и "левой" систем координат на Земле для людей, которые пользуются взаимно согласованными по направлению хода часами, абсолютно. Люди на Земле не могут спутать левую и правую ориентацию осей координат.

А вот некоторые племена, которые настолько цивилизованы, что имеют свою науку и свои часы со своим направлением хода, и живут на южном полушарии (или вообще где–то в далеком Космосе), и Солнце (возможно, ихнее) для них движется справа налево, и в соответствии с таким же, как у нас, приоритетом "правого" и "левого" выбрали то же направление для выбора "левого и правого ориентаций с.к. (возможно, договорились с нами без возможности непосредственного контакта), могут в реальности иметь противоположные с нами ориентации "правого" и "левого": с т.з. классической механики (и даже СТО и ОТО А.Эйнштейна) правое и левое отличить невозможно: пространство и время в них однородны и изотропны. Даже просто неправильный перевод слов "левый" и "правый" может иметь значение. Для синхронизации правого и левого между нами придется воспользоваться чем–то наблюдаемым и ориентированным, а главное – доступным всем в этой Вселенной, чтобы показать на него и сказать: эту ориентацию примем за стандарт правой (или левой) ориентации.

Что может быть таким, что мы все однозначно поймем как правое и левое? Даже электродинамика, в которой сила Лоренца по отношению к направлению движения положительного заряда (а таковым для всех является протон) и направлению магнитной индукции как тройка векторов (v, B, F) ориентированы как правая система векторов, не поможет – если даже вектора v и F вполне измеримы вместе с направлением, то вектор магнитной индукции определяется по соглашению.

Остается единственный выход – в квантовой физике при слабых взаимодействиях нарушается принцип четности[73], т.е. правое и левое вполне четко различаются и детектируются. Так что чтобы нам договориться со всеми в этой Вселенной, необходимо как минимум понимать квантовую механику и уметь ставить эксперименты с четностью.

7.3.2 Последовательные повороты вокруг трех осей *z*, *y*, *x* в 3–мерном пространстве.

Три последовательных поворота вокруг трех осей координат z, y и x в этой же последовательности можно выполнить непосредственно в матричной форме, если перемножим последовательно все три матрицы (7.38), (7.39), (7.40). Эта матрица вместе с выводом следующая:

$$M_{zyx}(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0\\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x\\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\theta_z\cos\theta_y & -\sin\theta_z & \cos\theta_z\sin\theta_y\\ \sin\theta_z\cos\theta_y & \cos\theta_z & \sin\theta_z\sin\theta_y\\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x\\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x\end{pmatrix}= \qquad (7.42)$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\theta_z\cos\theta_y & -\sin\theta_z\cos\theta_x+\cos\theta_z\sin\theta_y\sin\theta_x & \sin\theta_z\sin\theta_x+\cos\theta_z\sin\theta_y\cos\theta_x\\ \sin\theta_z\cos\theta_y & \cos\theta_z\cos\theta_x+\sin\theta_z sin\theta_y\sin\theta_x & -\cos\theta_z\sin\theta_x+\sin\theta_z\sin\theta_y\cos\theta_x\\ -\sin\theta_y & \cos\theta_y\sin\theta_x & \cos\theta_y\cos\theta_x\end{pmatrix}.$$

Здесь в общей сложности также имеется всего шесть различных преобразований данного типа, отличающихся порядком проведения поворотов: в качестве первой оси может быть использовано также три варианта, в качестве второй – два варианта. Для

[73] URL: https://deru.abcdef.wiki/wiki/Parit%C3%A4tsverletzung, последняя загрузка 09.11.2021.

выбора третьей оси остается один выбор. Всего 3·2·1 = 6 вариантов.

Окончательное расшифрованное до алгебраической формы представления уравнение преобразования координат можно получить, перемножив вектор координаты (x, y, z) три раза на соответствующие матрицы для поворотов вокруг осей z, y и x. Если делать это в лоб, имеем (при выполнении умножений в порядке слева направо):

$$(x',y',z')(\theta) = (xyz)\begin{pmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{pmatrix} =$$

$$= (x\cos\theta_z + y\sin\theta_z \quad -x\sin\theta_z + y\cos\theta_z \quad z)\begin{pmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{pmatrix}$$

$$= [(x\cos\theta_z + y\sin\theta_z)\cos\theta_y - z\sin\theta_y \quad (-x\sin\theta_z + y\cos\theta_z) \quad (x\cos\theta_z + y\sin\theta_z)\sin\theta_y + z\cos\theta_y]\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{pmatrix} \rightarrow$$

Далее можно считать непосредственным продолжением как от этого уравнения, так и от (7.42):

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \left((x\cos\theta_z + y\sin\theta_z)\cos\theta_y - z\sin\theta_y\right) \\ (-x\sin\theta_z + y\cos\theta_z)\cos\theta_x + \left((x\cos\theta_z + y\sin\theta_z)\sin\theta_y + z\cos\theta_y\right)\sin\theta_x \\ (-x\sin\theta_z + y\cos\theta_z)\sin\theta_x + \left((x\cos\theta_z + y\sin\theta_z)\sin\theta_y + z\cos\theta_y\right)\cos\theta_x \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} x\cos\theta_z\cos\theta_y + y\sin\theta_z cos\theta_y - z\sin\theta_y + \\ x\left(-\sin\theta_z\cos\theta_x + \cos\theta_z\sin\theta_y\sin\theta_x\right) + y\left(\cos\theta_z\cos\theta_x + \sin\theta_z\sin\theta_y\sin\theta_x\right) + z\cos\theta_y\sin\theta_x \\ x\left(\sin\theta_z\sin\theta_x + \cos\theta_z\sin\theta_y\cos\theta_x\right) + y\left(-\cos\theta_z\sin\theta_x + \sin\theta_z\sin\theta_y\cos\theta_x\right) + z\cos\theta_y\cos\theta_x \end{pmatrix}^T. \quad (7.43)$$

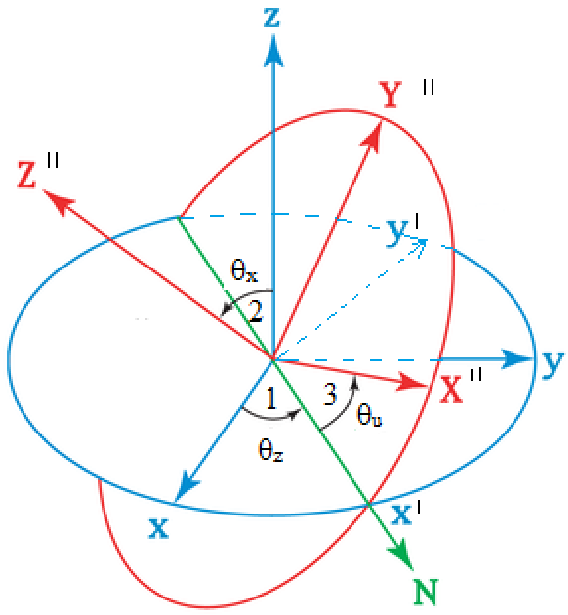

Рисунок 7.9

Поворот осей координат в 3–мерном пространстве с использованием углов Эйлера.

(T – признак транспонирования матрицы-столбца – три строки надо развернуть в одну строку – записаны в столбец из–за нехватки места для записи в строку).

7.3.3 Повороты с использованием углов Эйлера

Углы Эйлера определяют три поворота системы координат или абсолютно твердого тела в трёхмерном евклидовом пространстве (см. Рисунок 7.9).

Пояснения к Рисунок 7.9.

Ось x' — ось x, повернутая первым поворотом ("1" – на θ_z), z'' — ось z, повернутая первым и вторым поворотом (на θ_z и θ_x – "2"). y' – ось y, повернутая первым поворотом, y'' – ось y, повернутая вторым поворотом, x'' – ось x, повернутая третьим поворотом.

Обозначим начальную систему координат как (x,y,z), конечную как (X,Y,Z). Пересечение координатных плоскостей XY называется линией узлов N. Последовательные повороты около осей z, x', z'', на угол прецессии (θ_z) вокруг оси z, угол нутации (θ_x) вокруг оси x' и на угол собственного поворота (θ_u) вокруг оси z'' приводят к следующему выражению для матрицы поворота:

$$M(\theta_z, \theta_x, \theta_u) = M_z(\theta_z) \cdot M_x(\theta_x) \cdot M_z(\theta_u).$$

Найдем алгебраическое уравнение этого преобразования в окончательном виде в одной матрице, выполнив все преобразования матричным способом.

$$M_{Eiler(zxz)}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_u & -\sin\theta_u & 0 \\ \sin\theta_u & \cos\theta_u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \qquad (7.44)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_y & -\sin\theta_z\cos\theta_x & \sin\theta_z\sin\theta_x \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z\cos\theta_x & -\cos\theta_z\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_u & -\sin\theta_u & 0 \\ \sin\theta_u & \cos\theta_u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_y\cos\theta_u - \sin\theta_z\sin\theta_x\sin\theta_u & -\cos\theta_y\sin\theta_u - \sin\theta_z\cos\theta_x\cos\theta_u & \sin\theta_z\sin\theta_x \\ \sin\theta_z\cos\theta_u + \cos\theta_z\cos\theta_x\sin\theta_u & -\sin\theta_z\sin\theta_u + \cos\theta_z\cos\theta_x\cos\theta_u & -\cos\theta_z\sin\theta_x \\ \sin\theta_x\sin\theta_u & \sin\theta_x\cos\theta_u & \cos\theta_x \end{pmatrix}$$

В общей сложности имеется всего шесть преобразований данного типа, отличающихся порядком проведения поворотов: в качестве первой оси может быть использовано три варианта, в качестве второй – два варианта. Для выбора третьей оси остается один выбор. Всего 3·2·1 = 6 вариантов. А поскольку умножение матриц не коммутативно, то положение системы координат после поворота вокруг трех осей будет зависеть от последовательности поворотов. Следовательно, все шесть поворотов по своему уникальны.

7.3.4 Векторный способ поворота на угол φ вокруг выбранной оси ω

Еще один вариант – тринадцатый – поворот на угол φ вокруг оси ω вектора r в векторной форме. Прежде чем приступить к этому выоду, надо определиться, возможно ли это: а это возможно в силу теоремы Леонарда Эйлера (1707-1783):

Триэдр может быть переведен в любое положение
из произвольного заданного одним поворотом
вокруг некоторой оси на некоторый угол.

Для вывода уравнения, соответствующего рассматриваемому методу, рассмотрим Рисунок 7.10. Для начала надо определиться с началом отсчета всех векторов O. Ее удобно выбрать на оси поворота ω. Тогда при повороте для любой т.M на любой угол φ ее проекция на ось поворота не будет изменяться, и расстояние от оси до нового положения M' также будет оставаться одним и тем же. На этом рисунке при полном отсутствии координатных сеток, но присутствии определяющих поворот на угол φ вектора OM вокруг оси поворота ω || ON до нового положения OM', показаны векторы, определяющие ее новое положение:

$$OM = ON + r_{\perp} = r_{||} + r_{\perp}.$$

$$OM' = ON + r'_{\perp} + r''_{\perp} \qquad (7.45)$$
$$= r_{||} + r'_{\perp} + r''_{\perp}.$$

Наша задача – найти значения всех этих векторов из геометрических соображений.

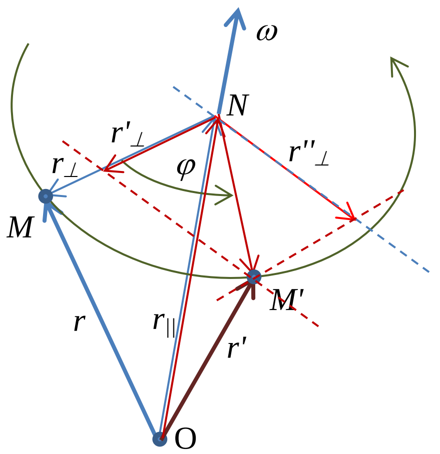

Рисунок 7.10

Поворот осей координат в 3–мерном пространстве векторным методом.

Во–первых, мы можем найти общий для обоих векторов длину вектора $r_{||}$ как проекцию ON вектора $r = OM$ на единичную ось поворота ω:

$$r_{||} = ON = \omega \cdot OM = \omega \cdot r. \tag{7.46}$$

Сам вектор будет определяться направлением единичного вектора ω:

$$\overrightarrow{r_{||}} = \vec{\omega}(\omega \cdot r). \tag{7.47}$$

На следующем шаге можем определить и вектора $r_\perp$ и $r'_\perp$:

$$\begin{gathered} \overrightarrow{r_\perp} = (\vec{r} - \overrightarrow{r_{||}}) = (\vec{r} - \vec{\omega}(\omega \cdot r)), \\ \overrightarrow{r'_\perp} = (\vec{r} - \vec{\omega}(\omega \cdot r)) \cos\varphi. \end{gathered} \tag{7.48}$$

Теперь можем определить длину и направление вектора $r''_\perp$. Т.к. он направлен перпендикулярно одновременно к оси поворота ω и исходному вектору r точки M вектор (см. по рисунку), то его можно вычислить по формуле:

$$\overrightarrow{r''_\perp} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \sin\varphi. \tag{7.49}$$

Собирая все вместе в обратном порядке, получим следующие результаты:

$$\begin{gathered} r' = (r - \omega(\omega r))\cos\varphi + (\omega \times r)\sin\varphi + \omega(\omega r) = \\ = r\cos\varphi + (\omega \times r)\sin\varphi + \omega(\omega r)(1 - \cos\varphi) = \\ = r_\perp\cos\varphi + (\omega \times r_\perp)\sin\varphi + r_{||}. \end{gathered} \tag{7.50}$$

7.3.5 Матрица поворота на угол φ вокруг выбранной оси ω

Только что разобранный векторный способ проведения поворота вокруг выбранной оси ω можно перевести в матричную форму. В декартовых координатах матрица поворота M^i_j на угол φ вокруг оси ω (нормированной до единицы) имеет вид (без вывода):

$$M(\omega, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi + \omega_x^2(1-\cos\varphi) & -\omega_z\sin\varphi + \omega_x\omega_y(1-\cos\varphi) & \omega_y\sin\varphi + \omega_x\omega_z(1-\cos\varphi) \\ \omega_z\sin\varphi + \omega_y\omega_x(1-\cos\varphi) & \cos\varphi + \omega_y^2(1-\cos\varphi) & -\omega_x\sin\varphi + \omega_y\omega_z(1-\cos\varphi) \\ -\omega_y\sin\varphi + \omega_z\omega_x(1-\cos\varphi) & \omega_x\sin\varphi + \omega_z\omega_y(1-\cos\varphi) & \cos\varphi + \omega_z^2(1-\cos\varphi) \end{pmatrix}. \tag{7.51}$$

7.3.6 Бесконечно малые повороты в пространстве

В физике более интересными по сравнению с поворотами на конечное значение угла являются бесконечно малые повороты. Поворот на конечное значение угла более интересно при дискретном преобразовании координат и векторов, а бесконечно малые повороты дают динамику вращения пространства или абсолютно твердого тела во времени. С бесконечно малым поворотом связаны скорость вращения системы отсчета или твердого тела и его ускорение и связанные с ними динамические параметры.

Рассмотрим бесконечно малые повороты для разных случаев.

1. Случай бесконечно малого поворота вокруг трех осей координат (см. 7.3.2, "Последовательные повороты вокруг трех осей z, y, x в 3–мерном пространстве."). Матрица преобразования на конечный угол поворота следующая:

$$M_{zyx}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta_z\cos\theta_y & -\sin\theta_z\cos\theta_x + \cos\theta_z\sin\theta_y\sin\theta_x & \sin\theta_z\sin\theta_x + \cos\theta_z\sin\theta_y\cos\theta_x \\ \sin\theta_z\cos\theta_y & \cos\theta_z\cos\theta_x + \sin\theta_z\sin\theta_y\sin\theta_x & -\cos\theta_z\sin\theta_x + \sin\theta_z\sin\theta_y\cos\theta_x \\ -\sin\theta_y & \cos\theta_y\sin\theta_x & \cos\theta_y\cos\theta_x \end{pmatrix}.$$

Заменив в ней конечные углы θ_x, θ_y, θ_z на бесконечно малые значения, и учтя, что $\cos\theta$ при $\theta \to 0$ равняется единице, а значение $\sin\theta$ при $\theta \to 0$ равняется значению угла θ и стремится к нулю, и избавляясь от бесконечно малых членов второго порядка по углу поворота, получим следующие уравнения бесконечно малого поворота:

$$M_{zyx}(\theta)_{\theta\to 0} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta_z + \theta_y\theta_x & \theta_z\theta_x + \theta_y \\ \theta_z & 1 + \theta_z\theta_y\theta_x & -\theta_x + \theta_z\theta_y \\ -\theta_y & \theta_x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 1 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.52}$$

Этот результат не зависит от порядка выполнения поворотов. Данное уравнение говорит о том, что бесконечно малый поворот с.к. (и векторов) можно провести с помощью трех бесконечно малых поворотов вокруг трех осей.

2. Случай бесконечно малого поворота с использованием углов Эйлера (см. 7.3.3 "Повороты с использованием углов Эйлера"):

$$M_{Eiler(zxz)}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta_y\cos\theta_u - \sin\theta_z\sin\theta_x\sin\theta_u & -\cos\theta_y\sin\theta_u - \sin\theta_z\cos\theta_x\cos\theta_u & \sin\theta_z\sin\theta_x \\ \sin\theta_z\cos\theta_u + \cos\theta_z\cos\theta_x\sin\theta_u & -\sin\theta_z\sin\theta_u + \cos\theta_z\cos\theta_x\cos\theta_u & -\cos\theta_z\sin\theta_x \\ \sin\theta_x\sin\theta_u & \sin\theta_x\cos\theta_u & \cos\theta_x \end{pmatrix}.$$

Заменив в ней конечные углы θ_x, θ_u, θ_z на бесконечно малые значения, и учтя, что $\cos\theta$ при $\theta \to 0$ равняется единице, а значение $\sin\theta$ при $\theta \to 0$ равняется значению угла θ и стремится к нулю, и избавляясь от бесконечно малых членов второго порядка по углу поворота, получим следующее уравнение бесконечно малого поворота:

$$M_{zyx}(\theta)_{\theta\to 0} = \begin{pmatrix} 1 - \theta_z\theta_x\theta_u & -\theta_u - \theta_z & \theta_z\theta_x \\ \theta_z + \theta_u & 1 - \theta_z\theta_u & -\theta_x \\ -\theta_x\theta_u & \theta_x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(\theta_u + \theta_z) & 0 \\ \theta_z + \theta_u & 1 & -\theta_x \\ 0 & \theta_x & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -(\theta_u + \theta_z) & 0 \\ \theta_z + \theta_u & 0 & -\theta_x \\ 0 & \theta_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.53}$$

Данное уравнение говорит о том, что бесконечно малый поворот с.к. (и векторов) можно провести с помощью двух бесконечно малых поворотов вокруг двух осей. Первый поворот – поворот вокруг оси *z* на бесконечно малый угол $\theta_z + \theta_u$, и второй поворот вокруг оси *x* на угол θ_x. И это преобразование отличается от первых двух существенно.

3. **Случай бесконечно малого поворота $d\varphi$ вокруг выделенного направления ω** (см. 7.3.5 "Матрица поворота на угол φ вокруг выбранной оси ω"):

$$M(\omega,\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi+(1-\cos\varphi)\omega_x{}^2 & (1-\cos\varphi)\omega_x\omega_y-\omega_z\sin\varphi & (1-\cos\varphi)\omega_x\omega_z+\omega_y\sin\varphi\\ (1-\cos\varphi)\omega_y\omega_x+\omega_z\sin\varphi & \cos\varphi+(1-\cos\varphi)\omega_y{}^2 & (1-\cos\varphi)\omega_y\omega_z-\omega_x\sin\varphi\\ (1-\cos\varphi)\omega_z\omega_x-\omega_y\sin\varphi & (1-\cos\varphi)\omega_z\omega_y+\omega_x\sin\varphi & \cos\varphi+(1-\cos\varphi)\omega_z{}^2\end{pmatrix}.$$

Заменив в ней конечный угол φ на бесконечно малое значение $d\varphi$, и учтя, что cosφ при $\varphi\to 0$ равняется единице, а значение sinφ при $\varphi\to 0$ равняется значению угла d φ и стремится к нулю, и избавляясь от бесконечно малых членов второго порядка по углу поворота, получим следующее уравнение бесконечно малого поворота:

$$M(\omega,\varphi)=\begin{pmatrix}1+(1-1)\omega_x{}^2 & (1-1)\omega_x\omega_y-\omega_z\sin d\varphi & (1-1)\omega_x\omega_z+\omega_y\sin d\varphi\\ (1-1)\omega_y\omega_x+\omega_z\sin d\varphi & 1+(1-1)\omega_y{}^2 & (1-1)\omega_y\omega_z-\omega_x\sin d\varphi\\ (1-1)\omega_z\omega_x-\omega_y\sin d\varphi & (1-\cos\varphi)\omega_z\omega_y+\omega_x\sin d\varphi & 1+(1-1)\omega_z{}^2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -\omega_z\sin d\varphi & \omega_y\sin d\varphi\\ \omega_z\sin d\varphi & 1 & -\omega_x\sin d\varphi\\ -\omega_y\sin d\varphi & \omega_x\sin d\varphi & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\omega_z d\varphi & \omega_y d\varphi\\ \omega_z d\varphi & 1 & -\omega_x d\varphi\\ -\omega_y d\varphi & \omega_x\varphi & 1\end{pmatrix}. \qquad (7.54)$$

Этот результат также не зависит от порядка выполнения поворотов. Данное уравнение говорит о том, что бесконечно малый поворот с.к. (и векторов) можно провести с помощью одного бесконечно малого поворота вокруг одной оси на бесконечно малый угол $\varphi\to 0$. Причем этот поворот будет эквивалентен трем поворотам вокруг трех осей случая 1 на углы $\theta_x = \omega_x d\varphi$, $\theta_y = \omega_y d\varphi$,, $\theta_z = \omega_z d\varphi$ (7.52). Отличие данного способа преобразования от случая 1 тем, что в ней явно указываются единичная ось ω и угол поворота φ, которые в принципе можно объединить в один вектор поворота ($\omega_x\varphi$, $\omega_y\varphi$,, $\omega_z\varphi$), модуль которого определит угол поворота, а сам вектор – направление оси поворота.

В результате имеем, что, во–первых, результат выполнения бесконечно малых поворотов не зависит от порядка выполнения поворотов. Во вторых, матрица преобразования получается как сумма двух матриц – единичной и бесконечно малой антисимметричной матриц:

$$M(\omega,\varphi)=\begin{pmatrix}1 & -\omega_z d\varphi & \omega_y d\varphi\\ \omega_z d\varphi & 1 & -\omega_x d\varphi\\ -\omega_y d\varphi & \omega_x\varphi & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{pmatrix}d\varphi. \qquad (7.55)$$

Сокращения и другие соглашения

(*) А – абсолютное, В – время, волновое, Г – галилеево, И – инерциальное, К – координаты, квантовая, классическая, М – механика, метрическое, материя, Н – ньютоново, неинерциальная, О – отсчета, относительности, общая, П – пространство, Р – релятивистская, С – система, специальная, Т – теория, тензоры, У – условный, Ф – физика, Ч – частная, ~ –(индекс) обозначает волновой параметр, ‖ – (индекс) параллельный, продольный, ⊥ – (индекс) перпендикулярный, поперечный. См. – смотри, т.[Идентиф.точки] – точка.[Идентиф.точки], (и)т.д. – (и) так далее, (и)т.п. – (и) тому прочие, в т.ч. – в том числе, т.з. – точка зрения,	АПВ – пространство–время с абсолютным временем и пространством. АСО (АИСО, УАИСО) – абсолютная (условная,инерциальная) система отсчета, ВП – волновое пространство, ГП, ГПВ – галилеево пространство–время, ГВП – галилеево волновое пространство, ГПТК – (линейные) галилеевы преобразования тензоров и координат, ДРП, ДРПВ – дорелятивистское пространство, ДРПТК – (линейные) дорелятивистские преобразования тензоров и координат, ИСО – инерциальная система отсчета – координатная с.о., полученная из исходного ортонормированным ЛПТК, КМН – классическая механика ньютонова, ЛПТК – линейные преобразования тензоров и координат, МГП – метрическое галилеево пространство, МП – метрическое пространство, НСО 0– неинерциальная система отсчета, ПВ – пространство–время, ПВМ – пространство–время–материя, ГПВ – галилеево пространство–время, ПТК – преобразования тензоров и координат. РП, РПВ – релятивистское пространство–время, РПТК – (линейные) релятивистские преобразования тензоров и координат, СК, с.к. – система координат, СО, с.о. – система отсчета, СТО – специальная теория относительности, м.о. – материальный объект, с.с. – сплошная среда, См. – смотри [далее],

1). *При использовании более чем одной буквы.

2). Выделение красным цветом в формуле может обозначать равный нулю элемент формулы или выражения.

3). По одинаковым верхнему и нижнему индексам производится свертка (суммирование) соответствующих элементов (по правилу Эйнштейну).

4). По индексу в скобке типа "$_{(k)}$" или "$^{(k)}$" свертка не выполняется, но она привязана к соответствующему тензорному или другому индексу "функционально".

5). Формат ссылок на формулы: (N). При необходимости указания на конкретную строку формулы применяется формат (N):n, где n – номер строки формулы, начиная с 1 (единицы), причем эта нумерация продолжается и на дальнейшие не нумерованные формулы.

Литература

1. Акивис, М. А., Гольдберг В. В. Тензорное исчисление. – М. : Наука, 1972. – 351 с.
2. Александрян Р. А. Мирзаханян, Э. А. Общая топология : учебное пособие. – М., Высшая школа, 1980. – 336 с.
3. Детлаф, А. А. Курс общей физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. Высшая школа, 2017. – 245 с.
4. Димитриенко, Ю. И. Тензорное исчисление: Учеб. пособие для вузов. – М. : Высш. шк., 2001. – 575 с.
5. Зисман, Г. А. Тодес, О. М. Курс общей физики. В 3 томах, Т.1. Механика, молекулярная физика, колебания и волны. –М., Наука, 1974. – 336 с.
6. Зисман, Г. А. Тодес, О. М. Курс общей физики. В 3 томах, Т.3: Физика атомов и молекул, физика атомного ядра и микрочастиц. –М., Наука, 1970. 500 с.
7. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – М. : Бином, 2017. – 146 с.
8. Келли, Дж. Л. Общая топология. М., Наука, 1981. Перевод с английского. Редактор Панькова Т. А. – 432 с.
9. Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Курс теоретической физики: В 10 т. : т. 2. – М.: Физматлит, 2002. – 224 с.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Краткий курс теоретической физики : т. 1. – Механика, электродинамика, М. : Наука, 1969. – 272 с.
11. Малыкин, Г. Б. Паралоренцевские преобразования. УФН, 179:3 (2009), 285–288; Phys. Usp., 52:3 (2009), с. 263–266. [Электронный ресурс] // URL: http://www.mathnet.ru/php/getFT.phtml?jrnid=ufn&paperid=736&what=fullt&option_lang=rus (899 kB) (Последняя загрузка: 05.07.2019).
12. Морин, Дэвид (2008). "Глава 11: Теория относительности (кинематика)" (PDF). Введение в классическую механику: с проблемами и решениями. Издательство Кембриджского университета. С. 539–543. ISBN 978-1-139-46837-4. [Электронный ресурс] //URL: https://web.archive.org/web/20180404002006/http:/www.people.fas.harvard.edu/~djmorin/chap11.pdf. Архивировано 4 апреля 2018 года.
13. Окунь Л.Б. Понятие массы (Масса, энергия, относительность) / Успехи физических наук, 1989, т.158 – №3. – с. 511–530

14. Савельев, И. В. Курс физики, т. т. 1–5 / И. В. Савельев. – М. : Наука, 2016. –155 с.

15. Фейнман, Ричард П.; Лейтон, Роберт Б.; Сэндс, Мэтью (февраль 1977). "Релятивистские эффекты в радиации". Фейнмановские лекции по физике: Том 1. Рединг, Массачусетс: Аддисон-Уэсли. С. 34–7 ф. ISBN 9780201021165. LCCN 2010938208. [Электронный ресурс] //URL: http://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_34.html. (Последняя загрузка: 05.06.2022).

16. Чепик, А. М. Сходство и различие СЭТ и СТО. [Электронный ресурс] //URL: http://redshift0.narod.ru/Rus/Stationary/Absolute/ Absolute_Principles_4.htm (Последняя загрузка: 16.07.2019). // Нижний Новгород, e–mail: redshift0@narod.ru.

17. Эйнштейн, А. Собрание научных трудов. В 4 томах. Т. 1. — М. :Наука, 1965. [Einstein A Ann. Physik 322 891 (1905)]

18. Эйнштейн, А. “К электродинамике движущихся тел”, перевод, “Собрание научных трудов” под ред. И.Е. Тамма, М, Наука, 1966, т.1 стр. 7.

19. Эйнштейн, А. Основы общей теории относительности. Собр. науч. труд. в 4 томах, М., «Наука», 1965, т. 1, с. 457—460.

20. Якута, А. А. Механика. Лекции. //Редактор Алексей Александрович Якута (конспект подготовлен студентами, не проходил проф. редактуру и может содержать ошибки). – МГУ имени М.В. Ломоносова, Физический факультет. – 157 с. [Интернет–ресурс]. URL: https://teach–in.ru/file/synopsis/pdf/mechanics–yakuta–M.pdf . Последняя загрузка: 21.10.2021.

21. Tangherlini F R "The velocity of ligh in uniformly moving frame", Ph D Thesis (Stanford: Stanford Univ., 1958.

22. Sci. Adv., 2019, 5 (12), eaaw3916. DOI: 10.1126/sciadv.aaw3916. Louis–Jean etc. Which way to the dawn of speech?: Reanalyzing half a century of debates and data in light of speech science. [Электронный ресурс] // URL: https://www.science.org/doi/10.1126/sciadv.aaw3916 // (Последняя загрузка: 09.10.2021) PDF: https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/sciadv.aaw3916, (Последняя загрузка: 09.10.2021)

23. Timin, Valery. Output of Formulas for Transforming the Coordinates of Physical Space. Вывод формул преобразования координат физического пространства. [Электронный ресурс] // URL: https://vixra:2103.0143 , (Последняя загрузка: 2021–10–13).

24. Timin, Valery. Two–way Wave Metrics of Galilean Space. Двусторонние волновые метрики ГПВ. [Электронный ресурс] // URL: https://viXra:2008.0186viXra:2008.0186. (Дата обращения: 2021–10–12).

25. Timin, Valery. Metrics Galileia Space Метрики галилеева пространства. [Электронный ресурс] //. Тимин, В. А. //URL: http://vixra.org/abs/1907.0545. (Последняя загрузка: 24.01.2022)

26. Timin, Valery. Pre-Relativistic Tensor Transformations. [Электронный ресурс] // Pre-Relativistic Tensor Transformations, Тимин, В. А. //URL:https://vixra.org/abs/1909.0238.

27. Timin, Valery. Galilean Transformations of Tenzors Преобразования галилеевых тензоров. // [Электронный ресурс], URL:http://vixra.org/abs/1910.0602 . (Последняя загрузка: 24.01.2022).

28. Timin, Valery.Уравнения распространения волн в различных пространствах. [Электронный ресурс] // URL: http://vixra.org/abs/1908.0091.

29. Timin, Valery. Эксперимент Майкельсона–Морли. [Электронный ресурс] // URL: http://vixra.org/abs/1908.0574. (Дата обращения: 24.01.2022).

30. Международная система единиц измерения СИ. [Электронный ресурс]. //URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Международная_система_единиц#Основные_единицы. (Последняя загрузка: 24.01.2022).

Все мои работы в VIXRA.ORG:

31. Timin, Valery. Valery Timin. Список всех работ на Vixra.org. [Электронный ресурс]. //URL: http://vixra.org/author/valery_timin.

E–Mail: timinva@yandex.ru.