

# Un percorso nel formalismo lagrangiano - A path through the Lagrangian formalism (in italian)

F. Talamucci - DIMAI, Dipartimento di Matematica e Informatica “Ulisse Dini”,  
Università degli Studi di Firenze, Italy\*

**2010 Mathematics Subject Classification:** 70-00, 70H03, 70F20

**Keywords:** Sistemi olonomi, equazioni di Lagrange, potenziali generalizzati e applicazioni (*Holonomic systems, Lagrangian equations, Generalized potentials and applications*).

**Sommario.** Il manuale intende offrire un percorso sul formalismo lagrangiano dei sistemi olonomi cercando il giusto equilibrio tra l’approccio fisico–applicativo ed il contesto astratto dell’ambiente geometrico. Agli ordinari argomenti collegati ai sistemi olonomi si aggiunge uno studio sui potenziali generalizzati, l’applicazione ai sistemi non inerziali ed un breve percorso sui sistemi anolonomi.

**Abstract.** The handbook aims to offer a path on the Lagrangian formalism of holonomic systems by seeking the right balance between the physical-application approach and the abstract context of the geometric environment. In addition to the ordinary arguments related to holonomic systems, there is a study of generalized potentials, application to non-inertial systems and a short path on nonholonomic systems.

---

\*corresponding author e-mail: federico.talamucci@unifi.it

# Indice

<b>1</b>	<b>Sistemi vincolati: generalità ed equazioni di moto</b>	<b>3</b>
1.1	Spazi affini . . . . .	3
1.2	Spazio delle configurazioni . . . . .	8
1.3	Cambio di base o di coordinate . . . . .	10
1.4	Vincoli e loro classificazione . . . . .	12
1.5	Velocità possibile e velocità virtuale . . . . .	15
1.6	Forze effettive e forze vincolari . . . . .	17
1.7	Potenza e lavoro . . . . .	18
1.8	Vincoli ideali e equazione generale della dinamica . . . . .	19
1.9	Equazioni di Lagrange di prima specie . . . . .	20
1.10	Principio di D'Alembert . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Sistemi olonomi: cinematica ed equazioni di moto, lavoro ed energia</b>	<b>22</b>
2.1	Coordinate lagrangiane . . . . .	22
2.2	Spazio tangente e spazio normale . . . . .	24
2.3	Velocità e accelerazione di un sistema olonomo . . . . .	27
2.4	Energia cinetica nei sistemi olonomi . . . . .	30
2.5	Sistemi olonomi: le equazioni di moto . . . . .	33
2.6	Studio del sistema di equazioni di Lagrange del secondo tipo . . . . .	36
2.7	Sistemi olonomi: lavoro e energia . . . . .	38
2.8	Il bilancio energetico . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Forze potenziali, giroscopiche, dissipative. Potenziali generalizzati. Teorema di Noether</b>	<b>42</b>
3.1	Forze associabili ad un potenziale . . . . .	42
3.2	Coordinate cicliche e Lagrangiana ridotta . . . . .	45
3.3	Forze di tipo giroscopico . . . . .	47
3.4	Forze dissipative . . . . .	49
3.5	Potenziali generalizzati . . . . .	51
3.6	Il potenziale elettromagnetico . . . . .	51
3.7	Il potenziale generalizzato nel formalismo lagrangiano . . . . .	53
3.8	Sistemi Lagrangiani . . . . .	57
3.9	Trasformazioni ammissibili e teorema di Noether . . . . .	59
3.10	Gruppi ad un parametro di trasformazioni e campi vettoriali . . . . .	62
3.11	Grandezze invarianti e gruppi ammissibili ad un parametro di diffeomorfismi . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Sistemi non inerziali. Sistemi anolonomi</b>	<b>72</b>
4.1	Cinematica relativa e assoluta . . . . .	72
4.2	Dinamica relativa e assoluta . . . . .	76
4.3	Il bilancio energetico nei sistemi non inerziali . . . . .	79
4.4	Sistemi anolonomi: vincoli misti . . . . .	80
4.5	Le equazioni di moto di Appell . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Il moto geodetico. Richiami di geometria differenziale e di algebra lineare</b>	<b>85</b>
5.1	Moto spontaneo su una sottovarietà . . . . .	85
5.2	Il caso $n = 1, m = 1$ . . . . .	86
5.3	Alcuni richiami di geometria differenziale . . . . .	87
5.4	Curve, spazio tangente, fibrato tangente . . . . .	88
5.5	Varietà riemanniane . . . . .	91
5.6	Curve geodetiche . . . . .	92
5.7	Superfici in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	94
5.8	Coordinate controvarianti e covarianti . . . . .	96
5.9	Prodotto vettoriale e endomorfismo associato . . . . .	99
5.10	Promemoria di formule utili . . . . .	100

# 1 Sistemi vincolati: generalità ed equazioni di moto

Il nostro obiettivo consiste nello studio del **moto di un sistema di  $n$  particelle materiali**  $(P_1, \dots, P_n)$  con masse rispettivamente  $(m_1, \dots, m_n)$  che possono essere soggette a restrizioni di tipo geometrico o cinematico (**vincoli**). Le particelle in generale sono soggette a forze direttamente applicate, che possono essere classificate in **forze interne** (se si tratta di forze di interazione fra due punti del sistema) o **esterne** (se la reazione non fa parte del sistema di forze considerato).

## 1.1 Spazi affini

Lo spazio fisico in cui osserviamo il moto dei punti è lo spazio euclideo tridimensionale  $\Sigma$  in cui fissiamo un sistema di riferimento ortogonale di origine  $O$  e assi coordinati  $x, y$  e  $z$ . La scelta del sistema di riferimento stabilisce un'applicazione biunivoca fra  $\Sigma$  e l'insieme delle terne ordinate di numeri reali  $\mathbb{R}^3$ , mediante l'associazione ad ogni punto  $P \in \Sigma$  delle sue **coordinate cartesiane**  $(x(P), y(P), z(P))$  in tale riferimento. Per stabilire questa bijezione sono sufficienti le nozioni di ascissa su una retta (ovvero la misura orientata di un segmento rispetto ad un segmento unitario), di proiezione di un punto su un piano e di proiezione di un piano su una retta di esso secondo una direzione assegnata.

Consideriamo l'insieme  $\Sigma \times \Sigma$  delle coppie ordinate di punti  $(A, B)$ ,  $A, B \in \Sigma$ . Ogni coppia per cui  $A \neq B$  determina la retta  $r$  per  $A$  e  $B$  con orientazione  $A < B$  e il numero positivo  $d$  pari alla distanza  $\overline{AB}$ : dunque la coppia  $(A, B)$  determina la **traslazione**  $\tau$  di direzione orientata  $\mathbf{r}$  e ampiezza  $d$ . In particolare  $\tau(A) = B$ . Le coppie di punti coincidenti determinano la traslazione di ampiezza nulla.

La relazione  $(A, B) \sim (A', B')$  se e solo se le due coppie determinano la stessa traslazione è una relazione di equivalenza e le classi di equivalenza sono i **vettori liberi**:

$$V_\Sigma = (\Sigma \times \Sigma) / \sim \quad (1.1)$$

Se la coppia  $(A, B)$  individua il vettore  $\mathbf{v} \in V_\Sigma$ , si usa scrivere  $\mathbf{v} = B - A$ , oppure  $B = A + \mathbf{v}$ . In modo evidente si può definire il modulo (la distanza  $\overline{AB}$ ), la direzione e il verso (quelli di  $r$ ) di ogni elemento  $\mathbf{v}$  di (1.1). La classe delle coppie  $(A, A)$  è il vettore nullo  $\mathbf{0}$ , con lunghezza nulla e direzione indeterminata. Ogni vettore  $\mathbf{v}$  determina una ed una sola traslazione  $\tau_{\mathbf{v}}$  e viceversa. Chiameremo **versori** i vettori di modulo unitario. Due vettori si dicono **paralleli** se hanno stessa direzione.

Fissiamo un punto  $O \in \Sigma$ : per ogni punto  $P \in \Sigma$  esiste uno ed un solo vettore  $\mathbf{v} \in V$  tale che  $P - O = \mathbf{v}$ . Viceversa, per ogni vettore  $\mathbf{v} \in V$  esiste uno ed un solo punto  $P \in \Sigma$  per cui la coppia  $(O, P)$  è nella classe di equivalenza  $\mathbf{v}$ . Fissato un punto  $O$ , l'insieme  $V_\Sigma$  è dunque in corrispondenza biunivoca con i punti di  $\Sigma$ . La bijezione non è canonica, ma dipende dalla scelta di  $O$ . Le coppie  $(O, P)$  si chiamano **vettori applicati** in  $O$ .

Dati due vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_\Sigma$ , definiamo la somma  $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$  come la composizione delle corrispondenti traslazioni  $\tau_{\mathbf{v}} \circ \tau_{\mathbf{u}}$ . Si può inoltre definire un prodotto  $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  stabilendo in modo ovvio modulo direzione e verso del vettore  $\mathbf{w}_1 = \lambda \mathbf{v}$ .

Si verifica facilmente che l'insieme  $V_\Sigma$  ha una struttura di **spazio vettoriale** su  $\mathbb{R}$  di dimensione 3. Due vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  **paralleli** sono tali che  $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$  per qualche  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Se  $(O, x, y, z)$  è un sistema di riferimento ortogonale in  $\Sigma$ , chiamiamo rispettivamente  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  i versori degli assi orientati  $x, y$  e  $z$  (ovvero le tre classi di equivalenza delle traslazioni lungo gli assi, scegliendo il modulo unitario). E' semplice verificare che i tre versori rappresentano una **base** per lo spazio vettoriale  $V_\Sigma$ , ovvero  $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k} \forall \mathbf{v} \in V_\Sigma$  e opportuni  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ .

Fissato  $P$  in  $\Sigma$ , si verifica subito che le coordinate cartesiane  $(x(P), y(P), z(P))$  del punto sono le componenti del vettore applicato  $P - O = \mathbf{v}$  nella base dei tre versori degli assi, ovvero  $P - O = x(P)\mathbf{i} + y(P)\mathbf{j} + z(P)\mathbf{k}$ . Dunque, le coordinate cartesiane di un punto  $P$  in un riferimento  $(O, x, y, z)$  sono le **componenti controvarianti** (vedi Paragrafo 5.8) rispetto alla base  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  del vettore  $\mathbf{v} \in V_\Sigma$  classe di equivalenza di  $(O, P)$ . L'origine  $O$  corrisponde alla traslazione nulla, ovvero al vettore nullo di  $V_\Sigma$ .

Si viene dunque a determinare una struttura in cui lo spazio vettoriale  $V$  (spazio delle traslazioni o dei vettori liberi) opera sullo spazio euclideo  $\Sigma$ . Lo spazio vettoriale  $V_\Sigma$  determina una **struttura affine** su  $\Sigma$ , il quale diventa uno **spazio affine reale** di dimensione 3, secondo la definizione che segue:

Un insieme  $A$  viene detto **spazio affine** se esiste una funzione  $\Phi : A \times A \rightarrow V$ , con  $V$  spazio vettoriale su un campo  $K$ , tale che

- A1. per ogni  $P \in A$  la mappa  $\Phi_P : A \rightarrow V$  definita da  $\Phi_P(Q) = \Phi(P, Q) \forall Q \in A$  è una bijezione,  
 A2. per ogni terna  $P, Q, R$  di elementi di  $A$  vale  $\Phi(P, Q) + \Phi(Q, R) = \Phi(P, R)$ .

Gli elementi di  $A$  vengono detti **punti**. L'assioma A2 è la **regola del parallelogramma**. La dimensione di  $A$  è quella dello spazio  $V$ . L'immagine  $\Phi(P, Q)$  viene detta **vettore applicato** da  $P$  in  $Q$  e indicata con il simbolo  $\overrightarrow{PQ}$  o  $Q - P$ . Fissato  $P \in A$ , l'insieme delle coppie

$$\mathcal{T}_P A = \{(P, \Phi_P(Q)) \mid Q \in A\} \quad (1.2)$$

si dice **spazio vettoriale dei vettori applicati** in  $P \in A$  (oppure **spazio tangente** in  $P$ ). Si ha l'isomorfismo di spazi vettoriali  $\mathcal{T}_P A \sim V$ , mediante l'applicazione  $(P, \Phi_P(Q)) \leftrightarrow \Phi_P(Q) \in V$ .

**Esercizio 1.1** *Mostrare che da A1 e A2 segue  $\Phi(P, P) = \mathbf{0}$ ,  $\Phi(P, Q) = -\Phi(Q, P) \forall P, Q \in A$  e che dati  $P \in A$ ,  $\mathbf{v} \in V$  esiste un unico  $Q \in A$  tale che  $\Phi(P, Q) = \mathbf{v}$ .*

In sostanza, lo spazio affine è uno spazio vettoriale privo di punti privilegiati: lo spazio affine tridimensionale è pertanto l'ambiente naturale per descrivere lo spazio fisico in cui le leggi sono indipendenti dal sistema di riferimento scelto.

Ogni spazio vettoriale  $V$  è uno spazio affine assumendo come spazio vettoriale associato lo stesso  $V$  e definendo l'applicazione  $\Phi : V \times V \rightarrow V$ ,  $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ ,  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ .

Uno spazio affine  $A$  viene detto **euclideo** se lo spazio vettoriale associato  $V$  è euclideo. In uno spazio affine euclideo è definito il prodotto scalare fra i vettori  $\mathbf{v}_1 = \Phi(P_1, Q_1)$  e  $\mathbf{v}_2 = \Phi(P_2, Q_2)$ :

$$\Phi(P_1, Q_1) \cdot \Phi(P_2, Q_2) = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2. \quad (1.3)$$

Una definizione alternativa consiste nel definire uno spazio affine come un insieme  $A$  per cui è definita una funzione  $+: A \times V \rightarrow A$  (**traslazione**), con  $V$  spazio vettoriale su un campo  $K$ , con le proprietà: per ogni  $P$  fissato in  $A$  la mappa  $P + \mathbf{v}$  è una bijezione fra  $V$  e  $A$ ,  $(P + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \forall P \in A, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ . La relazione con la precedente definizione è  $P + \Phi(P, Q) = Q$ . Definendo la differenza  $Q - P$  di due punti  $P, Q \in A$  come l'unico vettore  $\mathbf{v}$  tale che  $P + \mathbf{v} = Q$ , possiamo dare senso al simbolo precedentemente introdotto  $Q - P = \mathbf{v}$ .

Lo **spazio dei vettori applicati** in  $P$  o **spazio tangente** in  $P$ , punto fissato in  $A$ , consiste in

$$\mathcal{T}_P A = \{(P, \mathbf{v}) \mid P \text{ fissato in } A, \mathbf{v} \in V\}, \quad (1.4)$$

ed è canonicamente isomorfo a  $V$  mediante  $(P, \mathbf{v}) \leftrightarrow \mathbf{v}$ .

Dato uno spazio affine  $A$  associato allo spazio vettoriale  $V$ , definiamo **spazio dei vettori applicati** o **spazio tangente** l'insieme

$$\mathcal{T}A = A \times V = \bigcup_{P \in A} \mathcal{T}_P A. \quad (1.5)$$

**Esercizio 1.2** *Verificare che l'insieme prodotto cartesiano  $A = A_1 \times \dots \times A_N$  di  $N$  spazi affini  $A_1, \dots, A_N$  sui quali operano gli spazi vettoriali  $V_1, \dots, V_N$  è uno spazio affine su cui opera lo spazio vettoriale  $V = V_1 \times \dots \times V_N$  [porre  $\Phi(P, Q) = (\Phi_1(P_1, Q_1), \dots, \Phi_N(P_N, Q_N)) \in V$  per ogni  $(P, Q) \in A \times A$ ,  $P = (P_1, \dots, P_N)$ ,  $Q = (Q_1, \dots, Q_N)$ ]. Verificare inoltre che  $\dim A = \sum_{i=1}^N \dim A_i$ .*

In base all'Esercizio precedente, si ha che lo spazio  $\mathcal{T}A$  ha una struttura di spazio affine associato allo spazio vettoriale  $V \times V$ , con l'applicazione  $\tilde{\Phi} : \mathcal{T}A \times \mathcal{T}A \rightarrow V \times V$  definita da

$$\tilde{\Phi}((P, \mathbf{u}), (Q, \mathbf{v})) = (\Phi(P, Q), \mathbf{u} + \mathbf{v}), \quad \forall P, Q \in A, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Se  $\pi_A : \mathcal{T}A \rightarrow A$  è la **proiezione naturale** definita da  $\pi_A(P, \mathbf{v}) = P$  per ogni  $P \in A$  e ogni  $\mathbf{v} \in V$ , chiamiamo **fibrato tangente** dello spazio affine  $A$  la terna  $(\mathcal{T}A, \pi_A, A)$ .

Un **campo vettoriale libero** è un'applicazione  $\mathcal{X}_\ell : A \rightarrow V$  che ad ogni punto  $P$  di  $A$  associa il vettore  $\mathbf{v} = \mathcal{X}_\ell(P) \in V$ .

Un **campo vettoriale applicato** è un'applicazione  $\mathcal{X} : A \rightarrow \mathcal{TA}$  che ad ogni punto  $P$  di  $A$  associa l'elemento  $(P, \mathcal{X}_\ell(P)) \in \mathcal{TA}$ . Equivalentemente, un campo vettoriale applicato è un'applicazione da  $A$  al fibrato tangente:  $\mathcal{X} : A \rightarrow (\mathcal{TA}, \pi_A, A)$  tale che  $\pi_A(\mathcal{X}(P)) = P$ .

Dato uno spazio affine  $A$  di dimensione  $N$ , un **sottospazio affine** di dimensione  $r$  è il sottoinsieme  $A_r \subseteq A$  tale che

$$(P, Q) \in A_r \times A_r \Rightarrow \Phi(P, Q) \in V_r \quad (1.6)$$

dove  $V_r$  è un opportuno sottospazio vettoriale di  $V$  di dimensione  $r$ .

È semplice verificare che  $A_r$  è un sottospazio affine se e solo se, fissato arbitrariamente  $O \in A_r$ , il vettore  $\Phi(O, P)$  appartiene a  $V_r$ , per ogni  $P \in A_r$ . Possiamo dunque definire equivalentemente un sottospazio affine come il sottoinsieme individuato da un punto  $O \in A$  e dai punti

$$A_r = \{P \in A \mid \Phi(O, P) \in V_r\} = \{P \in A \mid O + \mathbf{v} = P, \mathbf{v} \in V_r\} \quad (1.7)$$

con  $V_r$  sottospazio  $r$ -dimensionale di  $V$ .

Dato uno spazio affine  $A$  di dimensione  $N$  e un punto  $O \in A$ , chiamiamo **sistema di riferimento** in  $A$  l'insieme  $\{O, \mathcal{U}\}$  essendo  $\mathcal{U} = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$  una base per lo spazio vettoriale  $V$  associato ad  $A$ . Per ogni punto  $P \in A$  esiste un unico vettore  $\mathbf{v} \in V$  tale che  $\Phi(O, P) = \mathbf{v}$  (ovvero  $O + \mathbf{v} = P$ ): le componenti controvarianti  $\xi_1, \dots, \xi_N$  di  $\mathbf{v}$  rispetto a  $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$  si dicono **coordinate del punto  $P$  nel sistema di riferimento  $\{O, \mathcal{U}\}$** :

$$\Phi(O, P) = P - O = \sum_{i=1}^N \xi_i \mathbf{u}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.8)$$

Fissato un sistema di riferimento, la corrispondenza fra i punti  $P \in A$  e le  $N$ -uple di coordinate è una bijezione  $A \sim \mathbb{R}^N$ .

La base  $\mathcal{U}$  può essere indipendente dal punto  $P$  oppure variare con esso.

Il sistema di riferimento  $\{O, \mathcal{U}\}$  si dice **cartesiano** se la base  $\mathcal{U}$  è indipendente da  $P$  e ortonormale.

La scelta di un differente sistema di riferimento  $\{O', \bar{\mathcal{U}}\}$ , con  $\bar{\mathcal{U}} = \langle \bar{\mathbf{u}}_1, \dots, \bar{\mathbf{u}}_N \rangle$  altra base per  $V$ ,  $O' \in A$ , comporta  $\Phi(O', P) = P - O' = \sum_{i=1}^N \bar{\xi}_i \bar{\mathbf{u}}_i$ , dove  $\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_N$  sono le componenti controvarianti rispetto a  $\bar{\mathcal{U}}$  dell'unico vettore  $\mathbf{v}' \in V$  per cui  $O' + \mathbf{v}' = P$ . D'altra parte,  $\mathbf{v}'$  è esprimibile nella prima base come  $\mathbf{v}' = \sum_{i=1}^N \eta_i \mathbf{u}_i$ , dove (vedi (5.49))  $\eta_i = \sum_{j=1}^N \beta_{j,i} \bar{\xi}_j$  essendo  $\beta_{i,j}$  gli elementi della **matrice  $B$  del cambiamento di base** definita dalle espressioni

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \sum_{j=1}^N \beta_{i,j} \mathbf{u}_j, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.9)$$

Per l'assioma A2 di definizione di spazio affine si ha  $\Phi(O, P) = \Phi(O, O') + \Phi(O', P)$ , che in termini di componenti si scrive

$$\xi_i = \eta_i + \xi_i^0 = \sum_{j=1}^N \beta_{j,i} \bar{\xi}_j + \xi_i^0 \quad (1.10)$$

essendo  $\Phi(O, O') = O' - O = \sum_{i=1}^N \xi_i^0 \mathbf{u}_i$ . La (1.10) è la relazione fra le **coordinate**  $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$  di  $P$  nel sistema  $\{O, \mathcal{U}\}$  e le **coordinate**  $\bar{\Xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_N)$  del medesimo punto  $P$  nel sistema  $\{O', \bar{\mathcal{U}}\}$ . Indicando con  $P_{[O, \mathcal{U}]} \in \mathbb{R}^N$  le coordinate di  $P$  rispetto al sistema di riferimento  $\{O, \mathcal{U}\}$ , la (1.8) e la formula inversa si scrivono

$$P_{[O, \mathcal{U}]} = B^T P_{[O', \bar{\mathcal{U}}]} + O'_{[O, \mathcal{U}]}, \quad P_{[O', \bar{\mathcal{U}}]} = [B^{-1}]^T P_{[O, \mathcal{U}]} + O_{[O', \bar{\mathcal{U}}]}. \quad (1.11)$$

**Esercizio 1.3** Si verifichi che per ogni  $O, O' \in A$  vale  $O'_{[O, \bar{\mathcal{U}}]} = -B^T O_{[O', \bar{\mathcal{U}}]}$  e, in particolare,  $O'_{[O, \mathcal{U}]} = -O_{[O', \mathcal{U}]}$ . Si concluda che la seconda delle (1.11) equivale a

$$P_{[O', \bar{\mathcal{U}}]} = [B^{-1}]^T (P_{[O, \mathcal{U}]} - O'_{[O, \mathcal{U}]})$$

ovvero<sup>1</sup>

$$\bar{\Xi} = [B^{-1}]^T (\Xi - \Xi_0), \quad \Xi = B^T (\bar{\Xi} + \Xi_0), \quad (1.12)$$

con  $\Xi_0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_N^0)$ .

**Osservazione 1.1** Talvolta può essere conveniente considerare un riferimento variabile in ogni punto  $P \in A$ , del tipo  $\{O, \mathcal{U}(P)\}$ , in cui la base di  $V$  varia al variare della posizione  $P$  e il punto  $O$ , non necessariamente fisso in  $A$ , può coincidere con  $P$  stesso. Le coordinate  $Z = Q_{[O, \mathcal{U}(P)]}$  di un punto  $Q \in A$  verificano

$$Q - O = \sum_{i=1}^N \zeta_i \mathbf{u}_i(P), \quad (\zeta_1, \dots, \zeta_N) = Z \in \mathbb{R}^N. \quad (1.13)$$

L'assegnazione della base  $\mathcal{U}(P)$  avviene dunque mediante gli  $N$  campi vettoriali  $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_N$  tali che

$$\mathcal{U}_i(P) = (P, \mathbf{u}_i(P)), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.14)$$

Il cambiamento di riferimento  $\{O, \mathcal{U}(P)\} \rightarrow \{O, \bar{\mathcal{U}}(P)\}$ , consistente nel passare ad una differente base  $\bar{\mathcal{U}}$  in ogni punto  $P$ , comporta la trasformazione di coordinate da  $Z = Q_{[O, \mathcal{U}(P)]}$  a  $\bar{Z} = Q_{[O, \bar{\mathcal{U}}(P)]}$  legate dalla relazione

$$\bar{Z} = [B^{-1}]^T(P)Z, \quad \forall Q \in A \quad (1.15)$$

essendo  $B(P)$  la matrice del cambiamento di base  $\mathcal{U}(P) \rightarrow \bar{\mathcal{U}}(P)$ , formata dagli elementi  $\beta_{i,j}(P)$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ , tali che  $\bar{\mathbf{u}}_i(P) = \sum_{j=1}^N \beta_{i,j}(P) \mathbf{u}_j(P)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Si noti che (vedi (5.62))

$$J_Z \bar{Z}(Z) = [B^{-1}]^T(P) \quad \forall P \in A. \quad (1.16)$$

Definiamo **curva** nello spazio affine  $A$  un'applicazione continua  $\Gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow A$  che ad ogni valore  $\lambda \in I$  associa il punto  $P(\lambda) \in A$ . La scelta di un sistema di riferimento  $[O, \mathcal{U}]$  in  $A$  consente di scrivere  $P(\lambda) - O = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda) \mathbf{u}_i$  o più semplicemente la **parametrizzazione** delle coordinate

$$P(\lambda)_{[O, \mathcal{U}]} = (\alpha_1(\lambda), \dots, \alpha_N(\lambda)), \quad \lambda \in I. \quad (1.17)$$

La base  $\mathcal{U}$  può dipendere dal punto  $P$  medesimo.

Il **vettore tangente** alla curva  $\Gamma$  nel punto  $P_0 = P(\lambda_0)$ ,  $\lambda_0 \in I$ , è definito da

$$\Gamma'(P_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [P(\lambda_0 + h) - P(\lambda_0)] \in V, \quad (1.18)$$

purché esista il limite. Il vettore tangente è associato alla coppia  $(P_0, \Gamma'(P_0)) \in \mathcal{T}_{P_0} A$  (vedi (1.4)) dello spazio dei vettori applicati in  $P_0$ .

Dato un **campo vettoriale**  $\mathcal{X} = (P, \mathcal{X}_\ell(P))$ , definiamo la **derivata del campo**  $\mathcal{X}$  lungo la curva  $\Gamma$  nel punto  $P_0 = P(\lambda_0)$ ,  $\lambda_0 \in I$ , il vettore, se esiste,

$$\mathcal{X}'(P_0)|_\Gamma = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\mathcal{X}_\ell(P(\lambda_0 + h)) - \mathcal{X}_\ell(P(\lambda_0))] \in V. \quad (1.19)$$

Un campo  $\mathcal{X} = (P, \mathcal{X}_\ell(P))$  viene individuato, una volta assegnato un riferimento  $\{O, \mathcal{U}\}$ , dalla  $2N$ -upla

$$(\xi_1, \dots, \xi_N; \kappa_1(\Xi), \dots, \kappa_N(\Xi))$$

<sup>1</sup>Precisiamo quanto segue sulla notazione che verrà adottata.

Convenzionalmente si intende con  $\mathbf{Z} = (z_1, \dots, z_s) \in \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , il vettore colonna, ovvero una matrice di dimensioni  $s \times 1$ . Se  $A$  è una matrice quadrata di ordine  $s$ , il prodotto  $A\mathbf{Z}$  dà luogo ad un vettore colonna di lunghezza  $s$ . Si noti che  $A\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}^T A^T)^T$ . Se  $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2 \in \mathbb{R}^s$ , l'espressione  $\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2$  indica il prodotto scalare, ovvero la somma dei prodotti delle componenti di medesima posizione. Dunque  $\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_1^T \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_2^T \mathbf{Z}_1$ . Il prodotto  $\mathbf{Z}_1^T A \mathbf{Z}_2 = (\mathbf{Z}_1^T A) \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_1^T (A \mathbf{Z}_2)$  ha per risultato un numero reale. Osserviamo infine che  $\mathbf{Z}_1 \cdot A \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_1^T A \mathbf{Z}_2 = (A^T \mathbf{Z}_1)^T \mathbf{Z}_2 = A^T \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2$ .

dove  $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) = P_{[O, \mathcal{U}]}$  e  $\kappa_1, \dots, \kappa_N$  sono le componenti controvarianti di  $\mathcal{X}_\ell(P)$  rispetto a  $\mathcal{U}$ :  
 $\mathcal{X}_\ell(P) = \sum_{i=1}^N \kappa_i \mathbf{u}_i$ . Rispetto al riferimento introdotto, la (1.19) diventa

$$\mathcal{X}'(P_0)|_\Gamma = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial \kappa_i}{\partial \xi_j}(\Xi_0) \alpha'_j(\lambda_0) \mathbf{u}_i(P_0) + \sum_{i=1}^N \kappa_i(\Xi_0) \mathcal{U}'_i(P_0)|_\Gamma \quad (1.20)$$

essendo  $\Xi_0 = P_{[O, \mathcal{U}]}$  e  $\mathcal{U}_i, i = 1, \dots, N$ , i campi (1.14).

Si verifica subito che il vettore tangente (1.18) della curva  $\Gamma$  parametrizzata come in (1.17) viene scritto, nel riferimento fissato:

$$\Gamma'(P_0) = \sum_{i=1}^N [\alpha'_i(\lambda_0) \mathbf{u}_i(P_0) + \alpha_i(\lambda_0) \mathcal{U}'_i(P_0)|_\Gamma] \quad (1.21)$$

Un **campo scalare** su uno spazio affine  $A$  è una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Fissato il riferimento  $\{O, \mathcal{U}\}$ , il campo scalare viene descritto dalla funzione  $\hat{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $\hat{f} = f \circ \psi_{[O, \mathcal{U}]}$ , avendo indicato con  $\psi_{[O, \mathcal{U}]}$  la bijezione  $A \sim \mathbb{R}^N$   $\psi_{[O, \mathcal{U}]}(P) = P_{[O, \mathcal{U}]}$ . La scelta di un differente sistema di riferimento  $\{O', \tilde{\mathcal{U}}\}$  comporta la scrittura del campo scalare  $f$  come  $\hat{f}_1 = f \circ \psi_{[O', \tilde{\mathcal{U}]}$ , legata alla funzione precedente da  $\hat{f}_1 = \hat{f} \circ \psi_{[O, \mathcal{U}]} \circ \psi_{[O', \tilde{\mathcal{U}]}^{-1}$ , ovvero  $\hat{f}_1(\Xi) = \hat{f}(\Xi(\Xi))$  (vedi (5.22)), essendo  $\Xi = P_{[O, \mathcal{U}]}$ ,  $\Xi = P_{[O', \tilde{\mathcal{U}]}$ .

Data una curva  $\Gamma$  su uno spazio  $A$  descritta mediante  $P(\lambda)$ ,  $\lambda \in I \subseteq \mathbb{R}$ , definiamo la **derivata del campo scalare**  $f$  in  $P_0$  **lungo la direzione** di  $\Gamma$  come

$$f'(P_0)|_\Gamma = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(P(\lambda_0 + h)) - f(P(\lambda_0))] \in \mathbb{R}. \quad (1.22)$$

Nel riferimento  $[O, \mathcal{U}]$ , in cui  $P_0 = P(\lambda_0)$  ha coordinate  $\Xi_0$ ,  $\Gamma$  è parametrizzata da (1.17) e il campo scalare  $f$  si scrive in coordinate come  $\hat{f}(\Xi) = f(\psi_{[O, \mathcal{U}]})$ , la (1.22) assume l'espressione

$$f'(P_0)|_\Gamma = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_i}(\Xi_0) \alpha'_i(\lambda_0) + f'(P_0)|_{\Gamma_0} \quad (1.23)$$

dove l'ultimo termine è la derivata di  $f$  lungo la curva  $\Gamma_0$  dipendente solo dal sistema di riferimento  $\mathcal{U}(P)$  parametrizzata come

$$P(h) - O = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda_0) \mathbf{u}_i(P(\lambda_0 + h)), \quad h \in [-\epsilon, \epsilon].$$

Se la base  $\mathcal{U}$  è indipendente da  $P$ , si ha ovviamente  $f'(P_0)|_{\Gamma_0} = 0$ .

Non è difficile verificare che, dato  $P_0 \in A$  e un qualunque vettore  $\mathbf{v} \in V$ , esiste una curva  $\Gamma$  passante da  $P_0$  e tale che  $\Gamma'(P_0) = \mathbf{v}$  (mostrare per esercizio). Dato un campo scalare  $f$  e fissato  $P_0 \in A$ , possiamo dunque definire l'operatore  $\nabla f(P_0) : V \rightarrow \mathbb{R}$  che agisce sui vettori di  $V$  nel modo seguente:

$$\nabla f(P_0)(\mathbf{v}) = f'(P_0)|_\Gamma \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (1.24)$$

con  $\Gamma$  curva passante per  $P_0$  e con vettore tangente  $\mathbf{v}$  in  $P_0$ . Si vede senza difficoltà che l'operatore  $\nabla f$  è un **omomorfismo** fra gli spazi  $V$  e  $\mathbb{R}$ . Chiamiamo l'operatore lineare (1.24) **gradiente** del campo scalare  $f$  in  $P_0$ . In coordinate, rispetto al riferimento  $\{O, \mathcal{U}\}$  in cui  $f(P) = \hat{f}(P_{[O, \mathcal{U}]})$ ,  $P_{[O, \mathcal{U}]} = \Xi_0$ ,  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N v_i \mathbf{u}_i$ , si ha

$$\nabla f(P_0)(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_i}(\Xi_0) v_i. \quad (1.25)$$

Dato che  $\nabla f(P_0)(\mathbf{u}_i) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_i}(\Xi_0)$  per ogni  $i = 1, \dots, N$ , la matrice  $\nabla_{\Xi} \hat{f}(\Xi_0)$  dell'omomorfismo  $\nabla f$  rispetto alla base  $\mathcal{U}$  è

$$\nabla_{\Xi} \hat{f}(\Xi_0) = \left( \begin{array}{cccc} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_1}(\Xi_0) & \dots & \dots & \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_N}(\Xi_0) \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{1 \times N}. \quad (1.26)$$

Rispetto ad una differente base  $\bar{U}$  la matrice dell'omomorfismo (1.24) è la matrice  $\nabla_{\bar{\Xi}}\hat{f}_1(\bar{\Xi}_0)$  di elementi  $\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \bar{\xi}_i}(\bar{\Xi}_0)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , essendo  $\bar{\Xi}_0 = \psi_{[O', \bar{U}]}(P_0)$  e  $\hat{f}_1(\bar{\Xi}) = \hat{f}(\Xi(\hat{\Xi}))$ .

Il cambiamento di base  $\mathcal{U} \rightarrow \bar{\mathcal{U}}$  di matrice  $B$  comporta la relazione fra le corrispondenti matrici dell'endomorfismo  $\nabla f$ :

$$\nabla_{\bar{\Xi}}\hat{f}_1(\bar{\Xi}_0) = B \nabla_{\Xi}\hat{f}(\Xi_0). \quad (1.27)$$

La (1.27) non è altro che la regola di trasformazione del gradiente, come si può ricavare direttamente da

$$\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \bar{\xi}_i} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial \bar{\xi}_i} \text{ e tenendo conto che (vedi (1.10)) } \frac{\partial \xi_j}{\partial \bar{\xi}_i} = \beta_{i,j}.$$

Definiamo l'operatore  $J : V \rightarrow V$  nel modo seguente:

$$J\mathcal{X}(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_j} v_j \mathbf{u}_i \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (1.28)$$

essendo  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N v_i \mathbf{u}_i$  nella base scelta. Rispetto ad un secondo riferimento  $\{O', \bar{\mathcal{U}}\}$  il campo vettoriale  $\mathcal{X}$

viene scritto come  $(\bar{\xi}_1(\bar{\Xi}), \dots, \bar{\xi}_N(\bar{\Xi}); \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_N)$ , dove  $\bar{\Xi}$  è come in (1.12) e  $\alpha_i = \sum_{j=1}^N \beta_{i,j} \bar{\alpha}_j$  (vedi (1.9)).

**Esercizio 1.4** Verificare che il vettore  $J\mathcal{X}(\mathbf{v})$  è indipendente dal sistema di riferimento scelto e che  $J\mathcal{X}$  è un endomorfismo di  $V$ .

L'operatore  $J\mathcal{X}$  viene detto **Jacobiano** (o **gradiente**) rispetto al campo  $\mathcal{X}$ . Tenendo conto che  $J\mathcal{X}(\mathbf{u}_k) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_k} \mathbf{u}_i$  per  $i = 1, \dots, N$ , si trova che la matrice dell'endomorfismo rispetto alla base  $\mathcal{U}$  è

$$J_{\Xi}(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_N} \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \alpha_N}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \alpha_N}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial \alpha_N}{\partial \xi_N} \end{pmatrix}$$

che consiste nella **matrice Jacobiana** (5.62) delle funzioni  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ .

## 1.2 Spazio delle configurazioni

Ciascuno degli  $n$  punti  $P_1, \dots, P_n$  del sistema in esame è un elemento dello spazio affine reale e tridimensionale  $\Sigma$ , sul quale opera lo spazio vettoriale delle traslazioni. Si ha che  $P = (P_1, \dots, P_n)$  è un punto dello spazio affine  $\Sigma^{(3n)} = \underbrace{\Sigma \times \cdots \times \Sigma}_{n \text{ volte}}$  (vedi Esercizio 1.2), sul quale opera lo spazio  $\mathbb{V} = \underbrace{V_{\Sigma} \times \cdots \times V_{\Sigma}}_{n \text{ volte}}$ , prodotto

cartesiano delle traslazioni tridimensionali. Si ha  $\dim \Sigma^{(3n)} = 3n$  e una base per lo spazio vettoriale  $\mathbb{V}$  è

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{3n} \rangle \\ \mathbf{e}_1 &= (\mathbf{i}, \underbrace{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}}_{3n-1 \text{ volte}}), \quad \mathbf{e}_2 = (\mathbf{0}, \mathbf{j}, \underbrace{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}}_{3n-2 \text{ volte}}), \quad \dots \quad \mathbf{e}_{3n} = (\underbrace{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}}_{3n-1 \text{ volte}}, \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (1.29)$$

che consiste nella base indotta in modo naturale dalla base dei versori degli assi per ogni spazio fattore  $V_{\Sigma}$ .

Se chiamiamo  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , le coordinate cartesiane di ciascuno degli  $n$  punti  $P_1, \dots, P_n$  nel riferimento ortogonale  $(O, x, y, z)$ , si ha che, estendendo a più dimensioni quanto si è già osservato, la lista delle **coordinate cartesiane**

$$\mathbf{X} = (x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^{3n} \quad (1.30)$$

che è elemento dello spazio  $\mathbb{R}^{3n}$  delle  $3n$ -uple ordinate di numeri reali, corrisponde alle **componenti controvarianti** rispetto alla base (1.29) del vettore applicato  $P - \Omega = (P_1 - O, \dots, P_n - O) \in \mathbb{V}$  (essendo  $\Omega = \underbrace{(O, \dots, O)}_{n \text{ volte}} \in \Sigma^{(3n)}$ ) associato al punto  $P = (P_1, \dots, P_n) \in \Sigma^{(3n)}$ , una volta fissata l'origine  $O \in \Sigma$ .

Secondo la notazione introdotta per scrivere (1.11), si ha  $\mathbf{X} = P_{[\Omega, \mathcal{B}]}$ .

**Osservazione 1.2** *Un modo senz'altro utile di leggere lo spazio delle configurazioni parte dalla identificazione*

$$\mathbb{V} = j_1(V_\Sigma) \oplus j_2(V_\Sigma) \oplus \dots \oplus j_n(V_\Sigma)$$

dove le  $n$  applicazioni  $j_i : V_\Sigma \rightarrow \mathbb{V}$  definite per ogni indice  $i = 1, \dots, n$  da

$$j_i(\mathbf{v}) = \underbrace{(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})}_{j-1}, \mathbf{v}, \underbrace{(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})}_{n-j}$$

vengono dette **immersioni naturali** e sono omomorfismi iniettivi fra i due spazi vettoriali.

A livello di coordinate, è pertanto possibile identificare lo spazio delle configurazioni con la **somma diretta** delle immersioni di  $n$  spazi  $\mathbb{R}^3$  delle coordinate dei punti:

$$\mathbf{X} = (x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = \bigoplus_{i=1}^n \hat{j}_i(x_i, y_i, z_i),$$

dove  $\hat{j}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sono le immersioni  $j_i$  composte con l'isomorfismo  $\mathbb{V} \leftrightarrow \mathbb{R}^{3n}$ .

E' ora chiaro che lo studio del moto del sistema discreto consiste nel determinare la posizione del **punto rappresentativo**  $P = (P_1, \dots, P_n) \in \Sigma^{(3n)}$  nel tempo, ovvero nel determinare la **curva**  $P(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  nello spazio  $\Sigma^{(3n)}$ .

Definiamo **velocità** del punto  $P$  all'istante  $t$  il vettore tangente alla curva, se esiste:

$$\mathbf{V} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (P(t+h) - P(t)) \in \mathbb{V}. \quad (1.31)$$

Si è visto che, una volta fissato un sistema di riferimento ortogonale  $(O, x, y, z)$  in  $\Sigma$ , al punto  $P \in \Sigma^{(3n)}$  è univocamente associato il **vettore rappresentativo**  $P - \Omega \in \mathbb{V}$ , le cui componenti controvarianti rispetto a (1.29) sono le (1.30). Una volta scelta la base in  $\mathbb{V}$ , la corrispondenza fra i vettori di  $\mathbb{V}$  e lo spazio delle  $3n$ -uple ordinate di numeri reali  $\mathbb{R}^{3n}$  è un isomorfismo di spazi vettoriali: per semplicità, chiameremo anche il vettore  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3n}$  vettore rappresentativo. In quest'ordine di idee, lo **spazio delle configurazioni** del sistema viene identificato con lo spazio  $\mathbb{R}^{3n}$  e le posizioni del sistema viene individuato dall'**equazione finita** del moto

$$\mathbf{X}(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t), \dots, x_n(t), y_n(t), z_n(t)), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (1.32)$$

ovvero dalla parametrizzazione di  $P(t)$  nel sistema prescelto. La (1.32) è essa stessa equazione della **curva**  $\tilde{\Gamma} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$  definita da  $\tilde{\Gamma}(t) = P(t)_{[\Omega, \mathcal{B}]}$ .

Se indichiamo con  $Q$  l'unico punto in  $\Sigma^{(3n)}$  per cui  $P + \mathbf{V} = Q$ , è facile rendersi conto che

$$Q_{[P, \mathcal{B}]} = \dot{\mathbf{X}}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{y}_1(t), \dot{z}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t), \dot{y}_n(t), \dot{z}_n(t)) \in \mathbb{R}^{3n}. \quad (1.33)$$

Il vettore velocità (1.31) si identifica dunque con il vettore applicato in  $P$  di coordinate (1.33) rispetto alla base (1.29) e coincide con il **vettore tangente**  $d\mathbf{X}(t)/dt$  alla curva  $\tilde{\Gamma}$  all'istante  $t$ . In termini di (1.4), si ha  $(P, \mathbf{V}) \in \mathcal{T}_P \Sigma^{(3n)}$ .

### 1.3 Cambio di base o di coordinate

Talvolta può risultare conveniente utilizzare per  $\mathbb{V}$  una base differente da (1.29).

La scelta di una seconda base  $\hat{\mathcal{B}} = (\hat{\mathbf{e}}_1, \dots, \hat{\mathbf{e}}_{3n})$  in  $\mathbb{V}$  avviene tramite la definizione della matrice  $B$  del cambiamento di base formata dagli elementi  $\beta_{i,j}$ ,  $i, j = 1, \dots, 3n$ , tali che

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \sum_{j=1}^{3n} \beta_{i,j} \mathbf{e}_j, \quad i = 1, \dots, 3n,$$

ovvero scrivendo le componenti controvarianti dei vettori di  $\hat{\mathcal{B}}$  a  $\mathcal{B}$ . In particolare, un cambiamento di base in  $V_\Sigma$  da  $\langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$  a  $\langle \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}} \rangle$ , con  $\hat{\mathbf{i}} = b_{1,1}\mathbf{i} + b_{1,2}\mathbf{j} + b_{1,3}\mathbf{k}$ ,  $\hat{\mathbf{j}} = b_{2,1}\mathbf{i} + b_{2,2}\mathbf{j} + b_{2,3}\mathbf{k}$ ,  $\hat{\mathbf{k}} = b_{3,1}\mathbf{i} + b_{3,2}\mathbf{j} + b_{3,3}\mathbf{k}$ , comporta il cambiamento di base in  $\mathbb{V}$  di matrice

$$B = \begin{pmatrix} B_3 & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_3 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & B_3 \end{pmatrix}$$

dove  $B_3$  è la matrice  $3 \times 3$  di elementi  $b_{i,j}$ ,  $i, j = 1, \dots, 3$  e  $\mathbf{0}$  è la matrice nulla di ordine 3.

Se  $\{\Omega, \mathcal{B}\}$  e  $\{\Omega', \hat{\mathcal{B}}\}$  sono due sistemi di riferimento in  $\Sigma^{(3n)}$ , la posizione del punto  $P \in \Sigma^{(3n)}$  è individuata rispettivamente dai vettori in  $\mathbb{V}$   $P - \Omega = \sum_{i=1}^{3n} \xi_i \mathbf{e}_i$  e  $P - \Omega' = \sum_{i=1}^{3n} \hat{\xi}_i \hat{\mathbf{e}}_i$ . La relazione fra le coordinate è data da (1.10):

$$\hat{\mathbf{X}} = B^{-T} \mathbf{X} + \mathbf{X}_0, \quad \mathbf{X} = (\xi_1, \dots, \xi_{3n}), \quad \hat{\mathbf{X}} = (\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_{3n}), \quad \mathbf{X}_0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_{3n}^0),$$

essendo  $B^{-T}$  la matrice trasposta e inversa di  $B$  e  $\Omega' - \Omega = \sum_{i=1}^{3n} \xi_i^0 \mathbf{e}_i$ . In generale, la matrice  $B$  dipende dalle coordinate  $\mathbf{X}$ :  $B = B(\mathbf{X})$ . La trasformazione è lineare solo se  $B$  è costante, ovvero se la direzione dei vettori di  $\hat{\mathcal{B}}$  è indipendente dalla posizione nello spazio.

Un secondo modo di introdurre nuove variabili, basato sulla considerazione che uno spazio affine è un esempio di varietà differenziabile di medesima dimensione, consiste nell'assegnare il **cambiamento di coordinate** mediante la trasformazione invertibile  $\eta_i = \eta_i(\xi_1, \dots, \xi_{3n})$ ,  $i = 1, \dots, 3n$ , o, più sinteticamente,  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\mathbf{X})$ ,  $\mathbf{X} \in U \subseteq \mathbb{R}^{3n}$ , con inversa  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{Y})$ ,  $\mathbf{Y} \in \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^{3n}$ , in un intorno di un punto  $\mathbf{X}_0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_{3n}^0) \in U$ .

Seguendo la consueta terminologia, chiamiamo le  $\mathbf{X}$  **coordinate rettilinee ortogonali** e le  $\mathbf{Y}$  **coordinate curvilinee** nel dominio  $U$ .

Vediamo come è possibile costruire mediante la trasformazione di coordinate  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\mathbf{X})$  un sistema di riferimento in ogni punto  $\mathbf{X}$  di  $U$ .

Chiamiamo  $i$ -esima **curva** (o **linea**) **coordinata** nel punto  $P_0$  di coordinate  $\mathbf{X}_0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_{3n}^0)$  la curva di  $\mathbb{R}^{3n}$  che si ottiene ponendo in  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{Y})$  tutte le componenti di  $\mathbf{Y}$  costanti, eccetto la  $i$ -esima, ovvero la curva  $\Gamma^{(i)} : I^{(i)} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$  parametrizzata come

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi_1(\eta_1^0, \dots, \eta_{i-1}^0, \lambda, \eta_{i+1}^0, \dots, \eta_{3n}^0) \\ \dots \\ \xi_{3n} = \xi_{3n}(\eta_1^0, \dots, \eta_{i-1}^0, \lambda, \eta_{i+1}^0, \dots, \eta_{3n}^0), \end{cases} \quad (1.34)$$

per  $\lambda \in I^{(i)}$ , essendo  $(\eta_1^0, \dots, \eta_{3n}^0) = \mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}(\mathbf{X}_0)$ .

I **vettori tangenti** alle curve coordinate nel punto  $P_0$

$$\bar{\mathbf{e}}_i = \sum_{j=1}^{3n} \left. \frac{\partial \xi_j}{\partial \eta_i} \right|_{\mathbf{Y}=\mathbf{Y}_0} \mathbf{e}_j \quad (1.35)$$

sono  $3n$  vettori in  $\mathbb{V}$  linearmente indipendenti, per l'ipotesi di invertibilità della trasformazione, ovvero di non singolarità della **matrice Jacobiana** (5.62)  $J_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}$  della trasformazione.

In ogni punto  $P_0$  si può dunque definire il sistema di riferimento di base  $\bar{\mathcal{B}} = \langle \bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_{3n} \rangle$ : chiamiamo  $\{P_0, \bar{\mathcal{B}}\}$  **sistema di riferimento naturale** in  $P_0$  associato alle coordinate curvilinee  $\mathbf{Y}$ . Questo riferimento varia da punto a punto in  $U$ .

In termini di spazi affini, questo corrisponde a fissare la bijezione  $\Phi_{P_0}(P) \rightarrow \mathbb{V}$ , al variare di  $P \in \Sigma^{(3n)}$ ; la base (1.35) di  $\mathbb{V}$  dipende da  $P_0$ .

Dalla (1.35) si deduce che la matrice del cambiamento di riferimento è  $B = [J_{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})]^T|_{\mathbf{Y}=\mathbf{Y}_0}$ , pertanto le coordinate di  $P$  nel nuovo riferimento verificano (vedi (1.11))

$$P_{[P_0, \bar{\mathcal{B}}]} = [J_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y})]|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0} (P_{[\Omega, \mathcal{B}]} - P_{0[\Omega, \mathcal{B}]}) \quad (1.36)$$

dove  $[J_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y})] = [J_{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})]^{-1}$  ha elementi  $\frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j}$ ,  $i, j = 1, \dots, 3n$ .

Se pensiamo al sistema di vettori (1.35) centrato in  $\Omega$  anziché in  $P$ , otteniamo le coordinate del vettore posizione  $P - \Omega$  nella scomposizione rispetto alla base  $\bar{\mathcal{B}}$  (ovviamente le coordinate di  $P$  nel riferimento  $\{P, \bar{\mathcal{B}}\}$  sono tutte nulle):

$$P_{[\Omega, \bar{\mathcal{B}}]} = [J_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y})]P_{[\Omega, \mathcal{B}]}$$

o, equivalentemente,

$$P - \Omega = \sum_{j=1}^{3n} \xi_j \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{3n} \bar{\xi}_j \bar{\mathbf{e}}_j, \quad (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_{3n}) = \bar{\mathbf{X}} = (J_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}) \mathbf{X}. \quad (1.37)$$

Nella definizione (1.35) i vettori della base  $\bar{\mathcal{B}}$  non hanno necessariamente modulo unitario: se si richiede che essi siano versori, come si usa di consueto, bisogna modificare la (1.35) come segue:

$$\bar{\mathbf{e}}_i = \frac{\sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial \xi_j}{\partial \eta_i}}{\sum_{j=1}^{3n} \left( \frac{\partial \xi_j}{\partial \eta_i} \right)^2} \bigg|_{\mathbf{Y}=\mathbf{Y}_0} \mathbf{e}_j \quad (1.38)$$

e la matrice  $B$  del cambiamento di base ha elementi

$$(B)_{i,j} = \frac{[(J_{\mathbf{Y}} \mathbf{X})^T]_{i,j}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta_i} \right\|}, \quad i, j = 1, \dots, 3n \quad (1.39)$$

dove  $[(J_{\mathbf{Y}} \mathbf{X})^T]_{i,j} = \frac{\partial \xi_j}{\partial \eta_i}$ . La matrice  $B^{-1}$  inversa di (1.39) ha per elementi

$$(B^{-1})_{i,j} = [(J_{\mathbf{X}} \mathbf{Y})^T]_{i,j} \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta_j} \right\|, \quad i, j = 1, \dots, 3n,$$

dunque la (1.36) va sostituita con

$$\bar{\xi}_i = \sum_{j=1}^{3n} \left( \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta_i} \right\| \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j} \right) \bigg|_{\xi_1=\xi_1^0, \dots, \xi_{3n}=\xi_{3n}^0} (\xi_j - \xi_j^0), \quad i = 1, \dots, 3n, \quad (1.40)$$

essendo  $(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_{3n}) = P_{[P_0, \bar{\mathcal{B}}]}$ ,  $(\xi_1, \dots, \xi_{3n}) = P_{[\Omega, \mathcal{B}]}$ ,  $(\xi_1^0, \dots, \xi_{3n}^0) = P_{0[\Omega, \mathcal{B}]}$ .

**Esercizio 1.5** *Rendere espliciti i concetti introdotti nel caso del cambiamento di variabili a coordinate polari  $\eta_1 = \varrho$ ,  $\eta_2 = \varphi$  nel piano:*

$$\xi_1 = \varrho \cos \varphi, \quad \xi_2 = \varrho \sin \varphi,$$

*(un unico punto in  $\mathbb{R}^2$ ), a coordinate cilindriche  $\eta_1 = r$ ,  $\eta_2 = \varphi$ ,  $\eta_3 = z$  nello spazio:*

$$\xi_1 = \varrho \cos \varphi, \quad \xi_2 = \varrho \sin \varphi, \quad \xi_3 = z$$

(un unico punto in  $\mathbb{R}^3$ ) ed a **coordinate sferiche**  $\eta_1 = r$ ,  $\eta_2 = \varphi$ ,  $\eta_3 = \vartheta$  nello spazio:

$$\xi_1 = \varrho \cos \varphi \cos \vartheta, \quad \xi_2 = \varrho \sin \varphi \cos \vartheta, \quad \xi_3 = \varrho \sin \vartheta.$$

In tutti e tre i casi si stabilisca l'insieme  $U$  dei punti per cui la trasformazione è invertibile, si trovino in  $U$  le curve coordinate e si verifichi che il riferimento naturale normalizzato (1.38) è

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\varrho &= \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}, & \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} && \text{versori coord. polari} \\ \mathbf{e}_\varrho &= \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}, & \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}, & \mathbf{e}_z &= \mathbf{k} && \text{versori coord. cilindriche} \\ \mathbf{e}_\varrho &= \cos \varphi \cos \vartheta \mathbf{i} + \sin \varphi \cos \vartheta \mathbf{j} + \sin \vartheta \mathbf{k}, & \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}, \\ \mathbf{e}_\vartheta &= -\cos \varphi \sin \vartheta \mathbf{i} - \sin \varphi \sin \vartheta \mathbf{j} + \cos \vartheta \mathbf{k} && \text{versori coord. sferiche} \end{aligned}$$

dove si è posto  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$ . Determinare infine le coordinate controvarianti (1.37) di  $P - O$  rispetto alla base (1.38), tenendo conto di (1.40).

È interessante determinare le coordinate del punto  $Q$  di (1.33) nel sistema di riferimento naturale  $\{P, \bar{\mathcal{B}}\}$ . Si ha infatti, applicando la (1.36):

$$Q_{[P, \bar{\mathcal{B}}]} = (J_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}) Q_{[P, \mathcal{B}]} = (J_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}) \dot{\mathbf{X}}.$$

Tenendo conto della regola di derivazione

$$\dot{\mathbf{Y}} = (J_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}) \dot{\mathbf{X}}, \quad (1.41)$$

si trova

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{3n} \dot{\eta}_i \bar{\mathbf{e}}_i \quad (\dot{\eta}_1, \dots, \dot{\eta}_{3n}) = \dot{\mathbf{Y}}. \quad (1.42)$$

Si conclude che, quando il sistema è nella posizione  $P$ , le **componenti del vettore velocità  $\mathbf{V}$  rispetto al sistema naturale  $\{P, \bar{\mathcal{B}}\}$**  di base (1.35) sono le  $\dot{\mathbf{Y}}$ .

**Esercizio 1.6** Arrivare alla medesima conclusione sviluppando l'espressione

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^{3n} \bar{\xi}_i \bar{\mathbf{e}}_i \right) = \sum_{i=1}^{3n} \left( \dot{\bar{\xi}}_i \bar{\mathbf{e}}_i + \bar{\xi}_i \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{e}}_i \right),$$

esprimendo poi  $\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{e}}_i$  nella base  $\mathcal{B}$  derivando la (1.35) e tenendo conto che

$$\left( \frac{d}{dt} J_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} \right) J_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} = -J_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} \left( \frac{d}{dt} J_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} \right).$$

## 1.4 Vincoli e loro classificazione

Il sistema  $P = (P_1, \dots, P_n)$  di  $n$  punti materiali si dice **vincolato** se è soggetto a restrizioni di tipo geometrico o cinematico. Formalmente, esprimiamo questo fatto scrivendo

$$\Phi(P, \mathbf{V}, t) = 0, \quad (1.43)$$

dove  $\mathbf{V}$  è la velocità del sistema definita in (1.31) e  $\Phi : \Sigma^{(3n)} \times \mathbb{V} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è un'opportuna funzione che traduce le costrizioni del sistema.

Il vincolo si dice **geometrico** o **intero** se non coinvolge la velocità:

$$\Phi(P, t) = 0, \quad (1.44)$$

altrimenti viene detto **cinematico** o **differenziale**. Il vincolo (1.44) viene detto **stazionario** se  $\Phi$  non dipende dal tempo:  $\Phi = \Phi(P)$ . Fra i vincoli cinematici considereremo solamente la situazione (per altro maggiormente frequente nelle applicazioni) dei **vincoli lineari**, ovvero del tipo

$$\Phi(P, \mathbf{V}, t) = \alpha_\ell(P, t) \cdot \mathbf{V} + \beta(P, t) = 0 \quad (1.45)$$

con  $\alpha_\ell(P, t) \in \mathbb{V}$  vettore del **campo vettoriale**  $\alpha : \Sigma^{(3n)} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{T}\Sigma^{(3n)}$  assegnato, per ogni  $t$  fissato, come  $\alpha(P, t) = (P, \alpha_\ell(P, t))$ , e  $\beta : \Sigma^{(3n)} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Il vincolo (1.45) viene detto **stazionario** se  $\alpha$  non dipende dal tempo e  $\beta$  è la funzione nulla:  $\alpha_\ell(P) \cdot \mathbf{V} = 0$ .

, al quale associamo i vettori (1.30) e (1.33), una volta fissato un riferimento  $(O, x, y, z)$  nello spazio fisico  $\Sigma$ .

Le eventuali limitazioni imposte alle posizioni e alle velocità dei punti del sistema si traducono modellisticamente nell'introdurre le **equazioni vincolari**:

$$f_k(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) = 0, \quad k = 1, \dots, m < 3n. \quad (1.46)$$

Il vincolo  $f_k = 0$  viene detto **geometrico** o **intero** quando  $f_k$  non dipende dalle velocità  $\dot{\mathbf{X}}$ , cioè risulta del tipo

$$f_k(\mathbf{X}, t) = 0. \quad (1.47)$$

Nel caso generale (1.46) il vincolo si dirà **cinematico** o **differenziale**. Osserviamo che al vincolo geometrico (1.47) corrisponde il vincolo cinematico ottenuto derivando l'espressione  $f_k(\mathbf{X}, t) = 0$  totalmente rispetto al tempo:

$$\nabla_{\mathbf{X}} f_k \cdot \dot{\mathbf{X}} + \frac{\partial f_k}{\partial t} = 0 \quad (1.48)$$

dove con  $\nabla_{\mathbf{X}}$  si è indicato l'operatore gradiente rispetto alle  $3n$  variabili spaziali:

$$\nabla_{\mathbf{X}} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}, \frac{\partial}{\partial z_n} \right).$$

Viceversa, un vincolo cinematico  $f_k(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) = 0$  si dirà **integrabile** se è in realtà equivalente ad un vincolo di tipo intero: ad esempio, se esiste una funzione  $F_k(\mathbf{X}, t)$  tale che  $\dot{F}_k = f_k$ . In tal senso, il vincolo cinematico  $f_k$  consiste in realtà in un vincolo geometrico. I vincoli integrabili contengono le variabili velocità necessariamente in modo lineare (ovviamente non è vero il viceversa).

Nella nostra trattazione considereremo prevalentemente vincoli olonomi. Il caso dei vincoli anolonomi sarà limitato alla situazione (maggiormente frequente) in cui le velocità compaiono **linearmente** nelle (1.46). In tal caso, la  $k$ -esima equazione vincolare (1.46) si scrive

$$\mathbf{A}_k(\mathbf{X}, t) \cdot \dot{\mathbf{X}} + B_k(\mathbf{X}, t) = 0, \quad (1.49)$$

dove  $\mathbf{A}_k$  è un vettore di  $\mathbb{R}^{3n}$  mentre  $B$  è una funzione scalare. Osserviamo che un vincolo olonomo, scritto nella forma differenziale (1.48), è del tipo (1.49), con  $\mathbf{A}_k = \nabla_{\mathbf{X}} f_k$  e  $B_k = \frac{\partial f_k}{\partial t}$ .

Infine, il vincolo geometrico (1.47) si dice **stazionario** se non contiene esplicitamente la variabile tempo:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_k(\mathbf{X}, t) = 0. \quad (1.50)$$

Il vincolo cinematico (1.49) è detto **stazionario** se

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_k(\mathbf{X}, t) = 0, \quad B_k(\mathbf{X}, t) \equiv 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (1.51)$$

Complessivamente, la natura delle  $m$  equazioni (1.46) determina la seguente classificazione dei sistemi vincolati.

Il sistema vincolato si dice **olonomo** (termine introdotto da **Hertz**) se ogni vincolo (1.46),  $k = 1, \dots, m$  è geometrico o cinematico integrabile. Se ci sono vincoli cinematici non integrabili, il sistema si dice **non olonomo** oppure **anolonomo**.

Seguendo una terminologia introdotta da **Boltzmann**, il sistema si dice **scleronomo** (o **a vincoli fissi**) se i vincoli (1.46) sono stazionari per ogni  $k = 1, \dots, m$ , altrimenti si dice **reonomo** (ovvero **a vincoli mobili**). Un'altra importante nozione riguarda il concetto di indipendenza dei vincoli. Si vuole infatti evitare che un vincolo riproduca le medesime condizioni dettate da un altro o da un gruppo di altri vincoli.

Diremo che i vincoli (1.49) sono **indipendenti** in una determinata posizione  $\mathbf{X}$  e all'istante  $t$  se i vettori  $\mathbf{A}_k(\mathbf{X}, t)$ ,  $k = 1, \dots, m$ , sono linearmente indipendenti.

Se denotiamo con  $A$  la matrice  $m \times 3n$  le cui righe sono i vettori  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$  e con  $\mathbf{B}$  il vettore in  $\mathbb{R}^m$  pari a  $(B_1, \dots, B_m)$ , l'insieme dei vincoli (1.49) si scrive in modo compatto

$$A(\mathbf{X}, t)\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0}$$

con  $\mathbf{0}$  vettore nullo di  $\mathbb{R}^m$ . La condizione di indipendenza corrisponde alla richiesta di rango massimo per la matrice  $A$ :

$$\text{rank } A = m. \quad (1.52)$$

Diremo che il numero intero  $\ell = 3n - m$  è il **numero di gradi di libertà del sistema**.

A questo proposito va osservato quanto segue. Se il sistema ammette  $\mu$  vincoli olonomi (o anolonomi integrabili) e  $\nu$  vincoli anolonomi non integrabili, con  $\mu + \nu = m$ , allora alcuni autori chiamano **grado di libertà** del sistema il numero  $\ell_1 = 3n - \mu$ , mentre  $\ell = 3n - m$  viene detto **grado di mobilità** del sistema. In effetti, la presenza di soli vincoli anolonomi ( $\mu = 0$ ) non pregiudica alcuna posizione del sistema, ma ne limita le velocità.

Osserviamo inoltre che, nel caso di vincoli olonomi, la condizione di indipendenza consiste nel richiedere che i vettori gradienti  $\nabla_{\mathbf{X}} f_k \in \mathbb{R}^{3n}$ ,  $k = 1, \dots, m$  siano linearmente indipendenti, ovvero che

$$\text{rank} \left( \frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} \right) = m \quad (1.53)$$

dove, per comodità, si sono indicati gli elementi di  $\mathbf{X}$  con  $\xi_i$ :

$$\xi_1 = x_1, \xi_2 = y_1, \xi_3 = z_1, \dots, \xi_{3n-2} = x_n, \xi_{3n-1} = y_n, \xi_{3n} = z_n. \quad (1.54)$$

Verifichiamo ora che forma assumono le limitazioni (1.46) nelle variabili curvilinee  $\mathbf{Y}$ . Mediante le sostituzioni  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{Y})$  e  $\dot{\mathbf{X}} = (J_{\mathbf{Y}}\mathbf{X})\dot{\mathbf{Y}}$  (quest'ultima formula inversa di (1.41)), è chiaro che le limitazioni (1.46) si traducono  $\mathbf{Y}$  nelle equazioni vincolari delle variabili naturali

$$f_k(\mathbf{X}(\mathbf{Y}), J_{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})\dot{\mathbf{Y}}, t) = g_k(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{Y}}, t) = 0, \quad k = 1, \dots, m < 3n. \quad (1.55)$$

La tipologia geometrica o cinematica del vincolo  $f_k$  rimane ovviamente inalterata, dopo il cambiamento di coordinate. Inoltre, si verifica facilmente che il vincolo cinematico lineare (1.49) si trasforma nel vincolo ancora lineare

$$(J_{\mathbf{Y}}\mathbf{X})^T \bar{\mathbf{A}}_k(\mathbf{Y}, t) \cdot \dot{\mathbf{Y}} + \bar{B}_k(\mathbf{Y}, t) = 0,$$

dove  $\bar{\mathbf{A}}_k = \mathbf{A}_k(\mathbf{X}(\mathbf{Y}), t)$ ,  $\bar{B}_k = B_k(\mathbf{X}(\mathbf{Y}), t)$ .

Essendo la matrice Jacobiana non singolare, i vettori  $(J_{\mathbf{Y}}\mathbf{X})^T \bar{\mathbf{A}}_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  sono indipendenti se e solo se lo sono  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ . Anche il carattere stazionario non viene alterato dal cambiamento di coordinate, dato che per ipotesi quest'ultimo non dipende esplicitamente dal tempo.

**Esercizio 1.7** Data una funzione  $F : U \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  si consideri il vettore gradiente

$$\text{grad } F = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \mathbf{e}_i, \quad (1.56)$$

di coordinate controvarianti  $\nabla_{\mathbf{X}} F$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ ,  $\mathbf{X} = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ . Se  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{Y})$  è una trasformazione invertibile,  $\mathbf{Y} = (\eta_1, \dots, \eta_N)$ , e  $\bar{F}(\mathbf{Y}) = F(\mathbf{X}(\mathbf{Y}))$  è la funzione nelle nuove variabili, si mostri che

$$\left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta_1}, \dots, \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta_N} \right) = \nabla_{\mathbf{Y}} \bar{F}(\mathbf{Y}) = (J_{\mathbf{Y}}\mathbf{X})^T \nabla_{\mathbf{X}} F|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{Y})}, \quad \nabla_{\mathbf{X}} F(\mathbf{X}) = (J_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})^T \nabla_{\mathbf{Y}} \bar{F}|_{\mathbf{Y}=\mathbf{Y}(\mathbf{X})} \quad (1.57)$$

per concludere che le coordinate controvarianti di  $\text{grad } F$  rispetto alla base (1.35) sono  $(J_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})(J_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})^T \nabla_{\mathbf{Y}} \bar{F}$ .

Nel caso invece del riferimento normalizzato (1.38), verificare che si ha  $\text{grad } F = \sum_{i=1}^N \zeta_i \bar{\mathbf{e}}_i$ , con

$$\zeta_i = \sum_{k,j=1}^N (J_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})_{i,j} (J_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})_{k,j} \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta_i} \right\| \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta_k}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Se in particolare la trasformazione ha matrice Jacobiana **ortogonale**:  $(J_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})(J_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})^T = I$ ,  $I$  matrice identità  $N \times N$ , si verifichi che il vettore (1.56) si scrive nel riferimento (1.38)

$$\text{grad } F = \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta_i} \right\| \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta_i} \bar{\mathbf{e}}_i.$$

Utilizzare infine la formula precedente per scrivere il vettore gradiente  $\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2} \mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial \xi_3} \mathbf{k}$  nei tre cambiamenti di coordinate dell'Esercizio 1.1 ( $\xi_3 \equiv 0$  nel primo caso):

$$\begin{aligned} \text{grad } F &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varrho} \mathbf{e}_\varrho + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi && \text{coord. polari} \\ \text{grad } F &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varrho} \mathbf{e}_\varrho + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta && \text{coord. cilindriche} \\ \text{grad } F &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varrho} \mathbf{e}_\varrho + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta && \text{coord. sferiche.} \end{aligned}$$

**Esercizio 1.8** Sia il vincolo lineare (1.49) tale che  $f_k = \dot{F}_k$  per una funzione  $f_k(\mathbf{X}, t)$  e sia  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{Y})$  una trasformazione invertibile. Utilizzando (1.41) e (1.57), si verifichi che  $g_k = G_k$ , dove  $g_k(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{Y}}, t)$  è il vincolo scritto come in (1.55) e  $G_k(\mathbf{Y}, t) = F_k(\mathbf{X}(\mathbf{Y}), t)$ .

**Esercizio 1.9** Sia un punto materiale  $P$  di massa  $m$  vincolato su un piano  $\pi$  e con modulo della velocità radiale proporzionale al modulo della velocità trasversale. Mostrare che il vincolo cinematico imposto è integrabile.

**Esercizio 1.10** Sia  $P$  vincolato su una sfera di raggio  $R$  e sottoposto ad avere velocità lungo il meridiano proporzionale alla velocità lungo il parallelo (considerando i moduli). Stabilire se il sistema è olonomo.

**Esercizio 1.11** Scrivere esplicitamente le equazioni vincolari e classificare i seguenti sistemi vincolati:

- (i) un punto  $P$  vincolato su una superficie fissa,
- (ii) un punto  $P$  vincolato su una superficie che subisce una deformazione nel tempo,
- (iii) due punti  $P_1$  e  $P_2$  posti alle estremità di un'asta di massa trascurabile e lunghezza  $\ell(t)$  che varia nel tempo,
- (iv) due punti su un piano, collegati da un'asta di massa trascurabile e lunghezza costante  $\ell$ , vincolati a muoversi in modo tale che la velocità del punto medio dell'asta abbia la direzione dell'asta (moto del pattino).

**Esercizio 1.12** Si consideri un sistema materiale costituito da due punti  $P_1$  e  $P_2$  di medesima massa  $m$ . I punti sono disposti in modo che il primo occupi il centro e il secondo una posizione sul bordo di un disco che rotola su un piano orizzontale  $\pi$ . Il piano del disco si mantiene ortogonale rispetto a  $\pi$ . Scrivere le equazioni vincolari. Considerare poi il caso in cui il disco rotoli senza strisciare su  $\pi$  e discutere il carattere olonomo o anolonomo del sistema.

**Esercizio 1.13** Ripercorrere l'esercizio precedente nel caso in cui  $P_2$  sia sul bordo di una sfera anziché di un disco.

## 1.5 Velocità possibile e velocità virtuale

Le equazioni vincolari (1.46) (in particolare le (1.49)), nel caso specifico che considereremo) mostrano evidentemente le condizioni cui deve sottostare il vettore rappresentativo  $\dot{\mathbf{X}}$  affinché le velocità di ciascun punto siano compatibili con la configurazione del sistema, istante per istante.

Le velocità permesse dai vincoli sono dette **velocità possibili**. Per ogni posizione del sistema in un determinato istante esistono ovviamente infinite velocità possibili. Una di queste è rappresentata dal moto effettivo

del sistema all'istante  $t$ . E' dunque chiara la differenza fra **moto possibile** e **moto effettivo**, quest'ultimo determinato dal particolare sistema di forze imposto al sistema e dalle condizioni geometriche e cinematiche di partenza.

Supponiamo ora di avere un sistema materiale sottoposto alle  $m$  equazioni vincolari (1.49), siano esse integrabili o non integrabili. Fissata una posizione  $\mathbf{X}$  e un istante di tempo  $t$ , chiamiamo  $\mathcal{V}_{\mathbf{X}}$  l'insieme di tutte le velocità possibili in  $\mathbf{X}$  all'istante  $t$ , cioè l'insieme dei vettori  $\dot{\mathbf{X}}$  che verificano le (1.49), per ogni  $k = 1, \dots, m$ , con  $\mathbf{X}$  e  $t$  fissati:

$$\mathcal{V}_{\mathbf{X}}(t) = \left\{ \dot{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{3n} \mid \mathbf{A}_k(\mathbf{X}, t) \cdot \dot{\mathbf{X}} + B_k(\mathbf{X}, t) = 0, k = 1, \dots, m \right\}. \quad (1.58)$$

Fissata una posizione  $\mathbf{X}$  e un istante di tempo  $t$ , l'insieme  $\mathcal{V}_{\mathbf{X}}(t)$  corrisponde alle soluzioni  $\dot{\mathbf{X}}$  del sistema lineare

$$A\dot{\mathbf{X}} + B = 0, \quad (1.59)$$

dove  $A$  è la matrice  $m \times 3n$  le cui righe sono in vettori  $\mathbf{A}_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , mentre  $B$  è il vettore di componenti  $B_1, \dots, B_m$ .

Com'è noto, le soluzioni del sistema (1.59) sono date da

$$\dot{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{X}}_0 \quad (1.60)$$

dove  $\hat{\mathbf{X}}$  risolve il lineare omogeneo associato

$$\mathbf{A}_k(\mathbf{X}, t) \cdot \hat{\mathbf{X}} = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (1.61)$$

mentre  $\dot{\mathbf{X}}_0$  è una soluzione particolare di (1.59),  $\dot{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{0}$  nel caso di vincoli stazionari.

Definiamo **velocità virtuale** ogni vettore  $\hat{\mathbf{X}}$  che verifica (1.61) e  $\hat{\mathcal{V}}_{\mathbf{X}}(t)$  la totalità di essi:

$$\hat{\mathcal{V}}_{\mathbf{X}}(t) = \left\{ \hat{\mathbf{X}} \mid A\hat{\mathbf{X}} = 0 \right\} \quad (1.62)$$

Dato il vincolo cinematico (1.49), possiamo attribuire alla condizione (1.61) il significato di **configurazione stazionaria** del vincolo (vedi (1.51)), ovvero, come si usa dire, di *vincolo congelato*. In altre parole, fissando  $t$  negli elementi di  $A$  e eliminando  $B$  si impone al vincolo un carattere stazionario. Si intuisce quindi il significato di velocità virtuale come velocità compatibile con la configurazione istantanea del vincolo (a tempo cioè "congelato"), nella quale si impone il carattere stazionario al vincolo medesimo. Se dunque le equazioni vincolari sono tutte stazionarie, si ha  $\hat{\mathcal{V}}_{\mathbf{X}} = \mathcal{V}_{\mathbf{X}}$ , ovvero le velocità virtuali sono tutte e sole quelle possibili.

Osserviamo che, nel caso in cui il  $k$ -esimo vincolo sia geometrico, la condizione precedente diventa

$$\nabla_{\mathbf{X}} f_k(\mathbf{X}, t) \cdot \hat{\mathbf{X}} = 0. \quad (1.63)$$

L'ipotesi di indipendenza dei vincoli assicura che il rango della matrice  $A$  è  $m$ . Dunque, le soluzioni del sistema lineare omogeneo (1.61) formano uno spazio vettoriale di dimensione  $\ell = 3n - m$ , pari al numero di gradi di libertà del sistema.

Possiamo quindi affermare che l'insieme delle velocità virtuali  $\hat{\mathcal{V}}_{\mathbf{X}}(t)$  forma, per ogni posizione fissata  $\mathbf{X}$  e in ogni istante  $t$ , uno **spazio lineare** di dimensione  $3n - m$  di vettori a  $3n$  componenti che sono ortogonali ai vettori riga della matrice  $A$ , ovvero ai vettori  $\mathbf{A}_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ :

$$\hat{\mathcal{V}}_{\mathbf{X}}(t) = \langle \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m \rangle^{\perp} \quad (1.64)$$

intendendo con  $\langle \quad \rangle$  lo spazio generato dai vettori racchiusi e con  $\perp$  il complemento ortogonale rispetto al prodotto scalare standard in  $\mathbb{R}^{3n}$ .

La totalità delle velocità possibili (1.60) consiste dunque nello **spazio affine** corrispondente allo spazio (1.62) traslato del vettore  $\dot{\mathbf{X}}_0$ .

In effetti, è possibile definire in maniera equivalente la totalità delle velocità virtuali come l'insieme dei vettori differenza fra due velocità possibili:

$$\hat{\mathcal{V}}_{\mathbf{X}}(t) = \left\{ \hat{\mathbf{X}} \mid \hat{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{X}}_1 - \dot{\mathbf{X}}_2, \dot{\mathbf{X}}_1, \dot{\mathbf{X}}_2 \in \mathcal{V}_{\mathbf{X}}(t) \right\}. \quad (1.65)$$

Le restrizioni imposte al sistema determinano ovviamente dei vincoli anche per l'**accelerazione** dei punti, il cui vettore rappresentativo è

$$\ddot{\mathbf{X}} = (\ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{z}_1, \dots, \ddot{x}_n, \ddot{y}_n, \ddot{z}_n).$$

Più precisamente, derivando le (1.46) totalmente rispetto al tempo, si ha (vedi anche (5.65)):

$$\nabla_{\mathbf{X}} f_k(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) \cdot \dot{\mathbf{X}} + \nabla_{\dot{\mathbf{X}}} f_k(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) \cdot \ddot{\mathbf{X}} + \frac{\partial}{\partial t} f_k(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) = 0 \quad (1.66)$$

dove l'operatore gradiente rispetto a  $\dot{\mathbf{X}}$  è definito come

$$\nabla_{\dot{\mathbf{X}}} = \left( \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}, \frac{\partial}{\partial \dot{y}_1}, \frac{\partial}{\partial \dot{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \dot{x}_n}, \frac{\partial}{\partial \dot{y}_n}, \frac{\partial}{\partial \dot{z}_n} \right).$$

Nel caso di vincolo lineare (1.49), utilizziamo la (5.70) per scrivere

$$\nabla_{\mathbf{X}} f_k = (J_{\mathbf{X}} \mathbf{A}_k)^T \dot{\mathbf{X}} + \nabla_{\mathbf{X}} B_k, \quad \nabla_{\dot{\mathbf{X}}} f_k = \mathbf{A}_k,$$

dunque la (1.66) diventa

$$(J_{\mathbf{X}} \mathbf{A}_k)^T \dot{\mathbf{X}} \cdot \dot{\mathbf{X}} + \left( \nabla_{\mathbf{X}} B_k + \frac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial t} \right) \cdot \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{A}_k \cdot \ddot{\mathbf{X}} + \frac{\partial B_k}{\partial t} = 0, \quad (1.67)$$

dove  $J_{\mathbf{X}}$  indica l'operatore **jacobiano** (5.62). Nel caso di vincolo geometrico (1.47), (1.48), la (1.67) si scrive (vedi (5.73)):

$$J_{\mathbf{X}}(\nabla_{\mathbf{X}} f_k) \dot{\mathbf{X}} \cdot \dot{\mathbf{X}} + 2 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\mathbf{X}} f_k) \cdot \dot{\mathbf{X}} + \nabla_{\mathbf{X}} f_k \cdot \ddot{\mathbf{X}} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial t^2} = 0, \quad (1.68)$$

dove  $J_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{X}}$  è l'operatore **hessiano** (5.63). Se il  $k$ -esimo vincolo è stazionario, la (1.68) si riduce a

$$J_{\mathbf{X}}(\nabla_{\mathbf{X}} f_k) \dot{\mathbf{X}} \cdot \dot{\mathbf{X}} + \nabla_{\mathbf{X}} f_k \cdot \ddot{\mathbf{X}} = 0. \quad (1.69)$$

**Esercizio 1.14** *Determinare l'insieme delle velocità possibili e virtuali per i sistemi vincolari degli esercizi (1.1)-(1.3).*

## 1.6 Forze effettive e forze vincolari

Dal punto di vista dinamico, le limitazioni di tipo geometrico o cinematico vengono rappresentate mediante l'introduzione delle **forze di reazione dei vincoli**, o **forze vincolari**, che si contrappongono alle **forze direttamente applicate** o **forze effettive** che agiscono sui punti. Le equazioni della dinamica si scrivono pertanto

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \Phi_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.70)$$

dove  $\mathbf{a}_i = (\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i)$  è l'accelerazione del punto  $P_i$ ,  $\mathbf{F}_i$  è la risultante delle forze effettive applicate su  $P_i$  e  $\Phi_i$  è la reazione dei vincoli che agiscono sul medesimo punto.

Le forze effettive sono generalmente specificate in termini delle posizioni e delle velocità dei punti del sistema e possono essere funzioni note del tempo:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.71)$$

Il problema basilare della dinamica di un sistema vincolato (equazioni (1.70)) consiste nel determinare il moto del sistema  $(x_i(t), y_i(t), z_i(t))$  e le reazioni  $\Phi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , una volta assegnate le forze effettive (1.71) e le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x_i(0) = x_0, y_i(0) = y_0, z_i(0) = z_0, & \text{posizioni iniziali} \\ \dot{x}_i(0) = \dot{x}_0, \dot{y}_i(0) = \dot{y}_0, \dot{z}_i(0) = \dot{z}_0 & \end{cases} \quad (1.72)$$

che devono essere naturalmente compatibili con i vincoli. Alle equazioni (1.70) si aggiungono le equazioni vincolari (1.46), che devono essere soddisfatte in ogni istante.

Le  $3n + m$  equazioni da risolvere (1.70), (1.46) contengono le  $6n$  incognite date dalle coordinate del vettore  $\mathbf{X}$  e dalle componenti dei vettori  $\Phi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Il problema è dunque in generale indeterminato, come è naturale pensare visto che ancora non si è specificato niente riguardo alla natura del vincolo, cioè al suo comportamento meccanico.

Definendo il **vettore rappresentativo della quantità di moto**

$$\mathbf{Q} = (m_1 \mathbf{v}_1, \dots, m_n \mathbf{v}_n), \quad (1.73)$$

scriviamo sinteticamente le equazioni (1.70) come

$$\dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{F} = \Phi \quad (1.74)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n) \in \mathbb{R}^{3n}, \\ \Phi &= (\Phi_1, \dots, \Phi_n) \in \mathbb{R}^{3n} \end{aligned} \quad (1.75)$$

sono i vettori rappresentativi del sistema di forze direttamente applicate e del sistema delle reazioni vincolari, rispettivamente.

## 1.7 Potenza e lavoro

Data la forza  $\mathbf{F}_i$  che agisce sull' $i$ -esimo punto  $P_i$ , si definisce **potenza** lo scalare

$$W_{F_i} = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i.$$

La **potenza complessiva delle forze direttamente applicate** con vettore rappresentativo  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3n}$  (vedi (1.75)) è data da

$$W_F = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^n W_{F_i}. \quad (1.76)$$

Si definisce invece **potenza virtuale** del sistema la quantità

$$\hat{W}_F = \mathbf{F} \cdot \hat{\dot{\mathbf{X}}} \quad (1.77)$$

con  $\hat{\dot{\mathbf{X}}} \in \hat{\mathcal{V}}_{\mathbf{X}}$  (vedi (1.62)).

In modo analogo si definiscono la **potenza delle reazioni vincolari**

$$W_{\Phi} = \Phi \cdot \dot{\mathbf{X}}, \quad (1.78)$$

dove  $\Phi$  è il vettore rappresentativo delle forze di reazione definito in (1.75), e la **potenza virtuale delle reazioni vincolari**:

$$\hat{W}_{\Phi} = \Phi \cdot \hat{\dot{\mathbf{X}}}, \quad \hat{\dot{\mathbf{X}}} \in \hat{\mathcal{V}}_{\mathbf{X}}. \quad (1.79)$$

La definizione di **lavoro** della forza  $\mathbf{F}_i$  nell'intervallo di tempo  $(t_0, t)$  come

$$L_{F_i} = \int_{t_0}^t W_{F_i}(\tau) d\tau$$

porta alla definizione di **lavoro complessivo del sistema di forze  $F$**  nel medesimo intervallo:

$$L_F = \int_{t_0}^t W_F(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\mathbf{X}(\tau), \dot{\mathbf{X}}(\tau), \tau) \cdot \dot{\mathbf{X}}(\tau) d\tau \quad (1.80)$$

il cui calcolo richiede la conoscenza del moto.

Se le forze sono **posizionali**, ossia  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ , allora il lavoro (1.80) coincide con l'integrale curvilineo del campo  $\mathbf{F}$  lungo la curva in  $\mathbb{R}^{3n}$   $\Gamma = \mathbf{X}(t)$  sulla quale avviene il moto:

$$L_F = \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\mathbf{X}(\tau)) \cdot \dot{\mathbf{X}}(\tau) d\tau = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (1.81)$$

In tal caso, dunque, il calcolo del lavoro richiede solo la conoscenza del percorso, mediante una qualsiasi parametrizzazione (non necessariamente il tempo).

Possiamo definire anche il **lavoro virtuale** della forza  $\mathbf{F}$ :

$$\hat{L}_F = \int_{t_0}^t \hat{W}_F(\tau) d\tau. \quad (1.82)$$

e, in maniera del tutto analoga, il **lavoro delle forze di reazione**

$$L_{\Phi} = \int_{t_0}^t W_{\Phi}(\tau) d\tau$$

e quello virtuale

$$\hat{L}_{\Phi} = \int_{t_0}^t \hat{W}_{\Phi}(\tau) d\tau.$$

## 1.8 Vincoli ideali e equazione generale della dinamica

Un'ipotesi che permette di rendere determinato il problema basilare della dinamica e che frequentemente sarà assunta in seguito consiste nel supporre che le forze vincolari abbiano potenza nulla per qualsiasi velocità virtuale. L'ipotesi suddetta significa che in ciascuna posizione  $\mathbf{X}$  compatibile con i vincoli vale

$$\Phi \cdot \hat{\mathbf{X}} = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{X}} \in \hat{\mathcal{V}}_{\mathbf{X}} \quad (1.83)$$

I vincoli che verificano l'ipotesi (1.83) in ogni posizione  $\mathbf{X}$  compatibile con le limitazioni imposte sono detti **vincoli lisci** o **vincoli ideali**.

Come ulteriore caratterizzazione dei vincoli ideali possiamo affermare che il sistema di reazioni vincolari è liscio se e solo se la potenza virtuale (1.79) è nulla in ogni posizione, istante e per ogni velocità virtuale  $\hat{\mathbf{X}}$ , ovvero se e solo se il lavoro virtuale  $\hat{L}_{\Phi}$  è nullo per ogni possibile percorso del sistema.

Le equazioni (1.61), pensate come sistema omogeneo con incognita la velocità virtuale, permettono di esprimere  $m$  componenti di  $\hat{\mathbf{X}}$  in funzione delle rimanenti. La condizione (1.83), che si esplica nell'annullarsi di  $3n - m$  coefficienti delle componenti indipendenti di  $\hat{\mathbf{X}}$ , permette dunque in linea di principio di determinare le restanti equazioni che occorrono per chiudere il problema.

D'altra parte, l'informazione (1.83) viene utilizzata per scrivere in modo vantaggioso le equazioni di moto. Moltiplichiamo infatti scalarmente i due membri di (1.74) per il vettore velocità virtuale. Ricordando l'ipotesi (1.83), si trova la cosiddetta **equazione generale della dinamica**:

$$(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \hat{\mathbf{X}} = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{X}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{X}} \quad (1.84)$$

che stabilisce l'annullarsi, in ogni istante, della somma della potenza virtuale complessiva delle forze effettive e delle forze di inerzia (corrispondenti a  $-\dot{\mathbf{Q}}$ ). Ricordiamo che il vettore velocità virtuale deve essere compatibile con le condizioni (1.61).

L'equazione generale della dinamica è valida per ogni moto compatibile con i vincoli e di forze effettive  $\mathbf{F}$ . Viceversa, se vale l'equazione (1.84) per un certo moto compatibile con i vincoli, si ponga

$$\Phi = \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{F}.$$

Si ottengono così le equazioni (1.70) e (1.83). In ogni istante di tempo possiamo dunque determinare le forze vincolari che realizzano il moto e che verificano l'ipotesi di vincolo liscio.

Si può pertanto affermare che l'equazione generale della dinamica esprime una condizione necessaria e sufficiente affinché il moto compatibile con i vincoli corrisponda ad un dato sistema di forze effettive  $\mathbf{F}$ .

## 1.9 Equazioni di Lagrange di prima specie

Vogliamo ora utilizzare l'ipotesi (1.83) per esprimere le forze di reazione in funzione delle equazioni vincolari, utilizzando il metodo dei moltiplicatori indeterminati di Lagrange.

Supponiamo che i gli  $m$  vincoli siano composti da  $\nu$  vincoli geometrici (i primi  $\nu$ ) e  $m - \nu$  vincoli cinematici.

**Proposizione 1.1** *Nell'ipotesi di indipendenza dei vincoli (1.52) e di vincoli lisci (1.83), le equazioni di moto (1.70) unitamente alle equazioni vincolari (1.49) si esprimono nel seguente sistema, detto di **equazioni di Lagrange del primo tipo**:*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} + \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k \nabla_{\mathbf{X}} f_k(\mathbf{X}, t) + \sum_{h=\nu+1}^m \lambda_h \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) \\ f_k(\mathbf{X}, t) = 0, \quad k = 1, \dots, \nu, \quad \mathbf{A}_h(\mathbf{X}, t) \cdot \dot{\mathbf{X}} + B_h(\mathbf{X}, t) = 0, \quad h = \nu + 1, \dots, m \end{cases} \quad (1.85)$$

**Dim.** Basta osservare che, nell'ipotesi (1.83), il vettore  $\Phi$  appartiene allo spazio ortogonale alle velocità virtuali  $\dot{\mathcal{V}}_{\mathbf{X}}(t)^\perp$ . D'altra parte, i vettori  $\mathbf{A}_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  sono linearmente indipendenti e anch'essi appartenenti a  $\dot{\mathcal{V}}_{\mathbf{X}}(t)^\perp$ . Pertanto, devono esistere dei coefficienti  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  che esprimono  $\Phi$  nella base  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ . Si ha dunque

$$\Phi = \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{F} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \mathbf{A}_k(\mathbf{X}, t). \quad (1.86)$$

Suddividendo infine i vincoli in geometrici (i primi  $\nu$ ) e in cinematici (i restanti  $m - \nu$ ) si ottengono, unitamente alle equazioni vincolari, le (1.85).  $\square$

Il sistema (1.85) di  $3n + m$  equazioni è scritto per le  $3n + m$  incognite  $x_1, y_1, \dots, z_n$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Va detto d'altra parte che l'integrazione di tale sistema è in generale molto complesso, soprattutto a causa dell'elevato numero di equazioni. Per questo motivo si cerca di diminuire il numero delle incognite, introducendo le coordinate lagrangiane e scrivendo le equazioni per questo insieme di incognite. Nel caso olonomo, le equazioni di moto si diranno **equazioni di Lagrange di seconda specie**, nel caso non olonomo si diranno **equazioni di Appell**.

**Esercizio 1.15** *Due punti  $P_1$  e  $P_2$ , di medesima massa  $m$ , sono vincolati su un piano verticale e ad avere distanza costante  $\ell$ . Inoltre, la velocità del centro di massa è diretta come la congiungente  $P_1 - P_2$ . Scrivere le equazioni di Lagrange di prima specie e determinare il moto dei due punti.*

## 1.10 Principio di D'Alembert

Una configurazione  $\mathbf{X}_0$  del sistema compatibile con i vincoli si dice **configurazione di equilibrio** se il sistema, posto inizialmente in tale posizione a velocità nulla, rimane costantemente fermo in  $\mathbf{X}_0$ . Una posizione di equilibrio è dunque una soluzione costante  $\mathbf{X}_0$  delle equazioni di moto, con condizioni iniziali  $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ ,  $\dot{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{O}$ .

Dall'equazione generale della dinamica (1.84) ricaviamo, per uno stato di **equilibrio**, la seguente condizione necessaria e sufficiente:

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{X}} = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{X}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{X}} \quad (1.87)$$

Infatti,  $\mathbf{X} \equiv \mathbf{X}_0$  è soluzione delle equazioni di moto se e solo se vale (1.87). Ribadiamo il fatto che la (1.87) deve valere per ogni vettore  $\hat{\mathbf{X}}$ , definito dalla (1.61). Ovviamente, nessuno di essi coincide con la velocità effettiva, che è nulla all'equilibrio.

La medesima equazione esprime il **principio degli spostamenti virtuali**, in base al quale una configurazione compatibile con i vincoli è di equilibrio se e solo se le forze effettive hanno potenza virtuale nulla.

È importante distinguere il caso di vincoli stazionari o non stazionari. Nel primo caso, la compatibilità con i vincoli riguarda solo quelli geometrici, dal momento che (nell'ipotesi (1.49)) i vincoli differenziali, lineari e omogenei rispetto alle velocità, sono automaticamente soddisfatti. Se i vincoli sono non stazionari, allora la compatibilità con i vincoli significa la validità delle equazioni vincolari per ogni istante  $t$  e per velocità nulle  $\dot{\mathbf{X}} = 0$ . In questo caso, i vettori  $\hat{\mathbf{X}}$  velocità virtuali possono variare nel tempo. Le stesse considerazioni valgono per le forze applicate  $\mathbf{F}$ : se esse dipendono dalla velocità e esplicitamente dal tempo  $t$ , la (1.87) va intesa per  $\mathbf{F}(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}, t)$ , qualunque istante  $t$ .

Il principio degli spostamenti virtuali, nei casi più semplici di vincoli scleronomi, in cui le velocità virtuali coincidono con le velocità possibili, era noto sin dai tempi di Galileo (“regola d’oro della meccanica”).

Aggiungendo alle forze effettive  $\mathbf{F}$  le forze inerziali  $-\dot{\mathbf{Q}}$ , si perviene al **principio di D’Alembert**, secondo il quale ogni posizione di un sistema in moto può essere considerata come una posizione di equilibrio. Al problema dinamico si sostituisce così un problema statico, in cui le forze di reazione sono le medesime.

## 2 Sistemi olonomi: cinematica ed equazioni di moto, lavoro ed energia

Ci vogliamo ora occupare del caso significativo in cui i vincoli del sistema siano tutti geometrici, fissi o mobili. Abbiamo già osservato (vedi (1.53)) che la condizione di indipendenza dei vincoli (cioè la lineare indipendenza dei vettori  $\nabla_{\mathbf{X}} f_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ ) equivale alla richiesta di rango massimo della matrice jacobiana  $m \times 3n$  delle funzioni  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$  rispetto alle  $3n$  variabili  $(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$ :

$$J_{\mathbf{X}}\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} & \frac{\partial f_m}{\partial y_n} & \frac{\partial f_m}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

### 2.1 Coordinate lagrangiane

Ricordiamo l'importante **teorema della funzione implicita** che è alla base dello studio dei sistemi olonomi.

**Teorema 2.1** *Siano*

$$\varphi_k(\xi_1, \dots, \xi_\ell, y_1, \dots, y_m), \quad k = 1, \dots, m$$

funzioni da  $\mathbb{R}^{\ell+m}$  a valori reali e

$$\mathbf{p} = (\xi_1^0, \dots, \xi_\ell^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$$

un punto in  $\mathbb{R}^{\ell+m}$  tali che

- (i) le funzioni  $\varphi_k(\xi_1, \dots, \xi_\ell, y_1, \dots, y_m)$ ,  $k = 1, \dots, m$  sono continue e hanno derivate  $\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j}$  continue,  $k, j = 1, \dots, m$  in un intorno  $\mathcal{N} \in \mathbb{R}^{\ell+m}$  di  $\mathbf{p}$ ,
- (ii)  $\varphi_k(\mathbf{p}) = 0$ , per ogni  $k = 1, \dots, m$ ,
- (iii) il determinante della matrice  $m \times m$   $\left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j} \right)$  è diverso da zero.

Allora, esiste un insieme di funzioni  $y_j(\xi_1, \dots, \xi_\ell)$ ,  $j = 1, \dots, m$  in un intorno  $\mathcal{A}_\delta$  definito da  $|\xi_i - \xi_i^0| \leq \delta$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ , con le seguenti proprietà:

- (i) i punti  $(\xi_1, \dots, \xi_\ell, y_1(\xi_1, \dots, \xi_\ell), \dots, y_m(\xi_1, \dots, \xi_\ell))$  sono in  $\mathcal{N}$  e soddisfano le equazioni  $\varphi_k = 0$  per ogni  $k = 1, \dots, m$ ,
- (ii) esiste una costante  $\varepsilon$  tale che per ogni  $(\xi_1, \dots, \xi_\ell)$  in  $\mathcal{A}_\delta$  l'insieme  $(\xi_1, \dots, \xi_\ell, y_1(\xi_1, \dots, \xi_\ell), \dots, y_m(\xi_1, \dots, \xi_\ell))$  è l'unica soluzione del sistema  $\varphi_k = 0$ ,  $k = 1, \dots, m$ , che verifichi

$$y_j(\xi_1, \dots, \xi_\ell) - \varepsilon < y_j < y_j(\xi_1, \dots, \xi_\ell) + \varepsilon, \quad j = 1, \dots, m,$$

- (iii)  $y_j(\xi_1^0, \dots, \xi_\ell^0) = y_j^0$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,

- (iv) in un intorno sufficientemente piccolo  $\mathcal{A}_\delta$  le funzioni  $y_j(\xi_1, \dots, \xi_\ell)$ ,  $j = 1, \dots, m$  hanno derivate parziali continue di tanti ordini quanti ne posseggono le funzioni  $\varphi_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  in  $\mathcal{N}$ .

Consideriamo ora una posizione  $\mathbf{X}_0$  compatibile con i vincoli olonomi

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{X}, t) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_m(\mathbf{X}, t) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Supponendo la regolarità delle funzioni  $f_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  richiesta dall'ipotesi (i) del teorema e dato che  $\text{rank}(J_{\mathbf{X}}\mathbf{f}) = m$ , possiamo esprimere, in un intorno del punto  $\mathbf{X}_0$ ,  $m$  variabili in funzione delle rimanenti

$3n - m$ . Nell'applicare il teorema si deve pensare alla variabile  $t$  che appare esplicitamente in ciascuna  $f_k$  come ad un parametro.

Più in generale, non è necessario considerare esclusivamente le coordinate cartesiane, esprimendole mediante una parte di esse: tutte le  $3n$  coordinate possono essere espresse in forma di funzione di  $\ell = 3n - m$  parametri indipendenti  $q_1, \dots, q_\ell$  e il tempo  $t$ , se è presente nelle equazioni vincolari: basta operare un cambiamento di coordinate invertibile dalle coordinate  $(\xi_1, \dots, \xi_\ell)$  ai parametri  $(q_1, \dots, q_\ell) \in K$  aperto di  $\mathbb{R}^\ell$ , in modo tale da avere

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_1(q_1, \dots, q_\ell, t), \\ y_1 = y_1(q_1, \dots, q_\ell, t), \\ z_1 = z_1(q_1, \dots, q_\ell, t), \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_n = x_n(q_1, \dots, q_\ell, t) \\ y_n = y_n(q_1, \dots, q_\ell, t) \\ z_n = z_n(q_1, \dots, q_\ell, t) \end{array} \right. \quad (2.2)$$

o, in forma più compatta,  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{q}, t)$ , dove  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^\ell$  è il vettore  $(q_1, \dots, q_\ell)$ .

Il valore  $\ell$  corrisponde ai **gradi di libertà** del sistema vincolato. Le variabili  $q_1, \dots, q_\ell$  sono dette **coordinate lagrangiane** o **coordinate generalizzate indipendenti** del sistema. Esse variano in una opportuna regione  $\mathbf{Q}(t) \in K \subset \mathbb{R}^\ell$ . Per ogni istante fissato  $t$ , ad ogni punto della regione corrisponde un possibile stato del sistema. Il moto del sistema viene dunque a coincidere con il moto del punto  $q_1, \dots, q_\ell$  in  $\mathcal{Q}$ .

Nel caso di vincoli scleronomi, il tempo  $t$  non appare nelle equazioni (2.1). Dunque, è possibile scegliere un insieme di coordinate lagrangiane in modo che  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{q})$ . Si assumerà sempre che per un sistema scleronomo le coordinate lagrangiane vengano scelte in modo che  $t$  non compaia nelle (2.2).

**Osservazione 2.1** *La proprietà (ii) del Teorema 2.1 assicura l'unicità, in un opportuno intorno, della funzione implicita. Il passaggio biunivoco ai parametri  $(q_1, \dots, q_\ell)$ , ovvero  $\xi_i = \xi_i(\mathbf{q}, t)$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ , a sua volta determina l'unicità della rappresentazione  $\mathbf{X}(\mathbf{q}, t)$  con tale scelta delle coordinate  $\mathbf{q}$ .*

*Se utilizziamo un differente insieme di parametri  $(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_\ell)$ , ossia se specifichiamo le funzioni  $\xi_i = \bar{\xi}_i(\bar{\mathbf{q}}, t)$  in modo biunivoco, otterremo il vettore rappresentativo  $\bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{q}}, t)$ .*

*Dal confronto  $\mathbf{X}(\mathbf{q}, t) = \bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{q}}, t)$  si ricava la legge di trasformazione dei parametri  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t)$  e la sua inversa. D'altra parte, l'utilizzo dei parametri  $\bar{\mathbf{q}}$  può effettuarsi assegnando direttamente la trasformazione invertibile  $(\mathbf{q}, t) \leftrightarrow (\bar{\mathbf{q}}, t)$ , stabilita dalla corrispondenza biunivoca  $\mathbf{q} = \xi^{-1}(\bar{\xi}(\bar{\mathbf{q}}, t), t)$ , dove  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_\ell)$ ,  $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_\ell)$ . Il vettore rappresentativo è, in questo caso,  $\hat{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{X}(\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t), t)$ . Essendo però unica la rappresentazione con la scelta dei parametri  $\bar{\mathbf{q}}$ , si ha  $\hat{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{q}}, t) = \bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{q}}, t)$ .*

Se  $K$  e  $\bar{K}$  sono gli insiemi aperti di  $\mathbb{R}^\ell$  di appartenenza dei due sistemi di coordinate  $\mathbf{q}$  e  $\bar{\mathbf{q}}$ , supporremo sempre che la trasformazione puntuale da  $K$  in  $\bar{K}$

$$\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t) \quad (2.3)$$

sia un diffeomorfismo di classe almeno  $C^2$  con inversa  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t)$ .

Data una trasformazione invertibile  $\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t)$ , chiameremo

$$J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{q}_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \bar{q}_1}{\partial q_\ell} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \bar{q}_\ell}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \bar{q}_\ell}{\partial q_\ell} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

la **matrice jacobiana**  $\ell \times \ell$  (vedi (5.62)) della trasformazione di coordinate (2.3) e

$$J_{\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial \bar{q}_1} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial \bar{q}_\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_\ell}{\partial \bar{q}_1} & \cdots & \frac{\partial q_\ell}{\partial \bar{q}_\ell} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

la **matrice jacobiana** della trasformazione inversa. Si ha  $J_{\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q}} = (J_{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}})^{-1}$ .

**Esercizio 2.1** Un punto  $P$  è vincolato su una sfera di raggio  $R(t) = (at, bt, ct)$ ,  $a, b$  e  $c$  costanti positive e contemporaneamente su un piano diametrale. Scrivere le equazioni vincolari e determinare un insieme di coordinate lagrangiane.

## 2.2 Spazio tangente e spazio normale

Sia  $\mathbf{F}$  una funzione definita da  $\mathcal{U}$  aperto di  $\mathbb{R}^N$  a valori in  $\mathbb{R}^m$ ,  $m < N$ , con derivate di ordine  $k$ :

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = (f_1(\xi_1, \dots, \xi_N), \dots, f_m(\xi_1, \dots, \xi_N))$$

dove ciascuna  $f_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  è una funzione a valori reali.

Si dice che l'insieme di livello  $\mathcal{M} = \{\mathbf{X} \in \mathcal{U} \mid \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}\}$  definisce una **sottovarietà regolare** di  $\mathbb{R}^N$  di classe  $\mathcal{C}^k$  e di dimensione  $N - m$  se la matrice jacobiana dell'applicazione  $J_{\mathbf{X}}\mathbf{F}$  ha rango  $m$ .

Per quanto si è visto, l'ipotesi di indipendenza degli  $m$  vincoli olonomi comporta l'esistenza, per ogni istante fissato  $t$ , di una sottovarietà regolare  $\mathcal{M}(t)$  di  $\mathbb{R}^{3n}$  definita da  $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0}$  come in (2.1) e di dimensione  $\ell = 3n - m$ , con regolarità pari a quella delle funzioni che descrivono i vincoli. La sottovarietà  $\mathcal{M}(t)$  prende il nome di **varietà delle configurazioni**.

Ad ogni punto  $\mathbf{X}_0$  della varietà  $\mathcal{M}$  si associa il sottospazio lineare così costruito. Si considerano tutte le possibili combinazioni lineari degli  $m$  vettori indipendenti  $\nabla_{\mathbf{X}} f_k(\mathbf{X}_0, t)$ , che definiscono in ogni punto e ad ogni istante fissato  $t$  un sottospazio vettoriale di dimensione  $m$  di  $\mathbb{R}^{3n}$ . Questo spazio, che indichiamo con  $\mathcal{N}_{\mathbf{X}_0}(t)$  è detto **spazio normale**:

$$\mathcal{N}_{\mathbf{X}_0}(t) = \left\{ \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{3n} \mid \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \nabla_{\mathbf{X}} f_i(\mathbf{X}_0, t), \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.6)$$

Costruiamo ora un secondo sottospazio lineare per ogni punto della varietà delle configurazioni. Definiamo **curva** in  $\mathbb{R}^{3n}$  un'applicazione

$$\Gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3n}. \quad (2.7)$$

ossia

$$\Gamma(\lambda) = (\xi_1(\lambda), \dots, \xi_{3n}(\lambda)), \quad \lambda \in I.$$

Richiediamo che la funzione  $\Gamma$  sia almeno  $\mathcal{C}^1$ . Il **vettore tangente** alla curva  $\Gamma$  è il vettore di  $\mathbb{R}^{3n}$

$$\frac{d}{d\lambda} \Gamma(\lambda) = \left( \frac{d\xi_1}{d\lambda}, \dots, \frac{d\xi_{3n}}{d\lambda} \right).$$

Una **curva** sulla sottovarietà regolare  $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0}$  di  $\mathbb{R}^{3n}$  è una curva  $\Gamma$  che verifica  $\mathbf{f}(\Gamma(\lambda), t) = \mathbf{0}$  per ogni  $\lambda \in I$  e ad ogni istante  $t$  fissato.

Sia ora  $\mathbf{X}_0$  un punto sulla varietà  $\mathcal{M}$  e un aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^{3n}$  contenente  $\mathbf{X}_0$ . Consideriamo poi, ad un determinato istante  $t$ , l'insieme di tutte le curve contenute nell'insieme  $W = U \cap \mathcal{M}$  passanti per il punto  $\mathbf{X}_0$ . L'insieme dei vettori tangenti delle curve nel punto  $\mathbf{X}_0$  forma uno spazio vettoriale che indichiamo con  $\mathcal{T}_{\mathbf{X}_0}$  e chiamiamo **spazio tangente alla sottovarietà nel punto  $\mathbf{X}_0$** :

$$\mathcal{T}_{\mathbf{X}_0}(t) = \left\{ \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{3n} \mid \exists \Gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3n}, \Gamma(\lambda) \in W, \lambda \in I, \Gamma(\lambda_0) = \mathbf{X}_0, \lambda_0 \in I, \mathbf{Y} = \frac{d\Gamma}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \right\} \quad (2.8)$$

**Proposizione 2.1** *Data la sottovarietà regolare di  $\mathbb{R}^{3n}$   $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0}$  di dimensione  $\ell$  e  $\mathbf{X}_0$  un punto su di essa, l'insieme  $\mathcal{T}_{\mathbf{X}_0}(t)$  è, per ogni istante  $t$  fissato, un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^{3n}$  di dimensione  $\ell$ .*

**Dim.** E' immediato verificare che  $\mathcal{T}_{\mathbf{X}_0}$  è uno spazio vettoriale. Consideriamo poi una parametrizzazione  $(q_1, \dots, q_\ell)$  in un intorno del punto  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(\mathbf{q}_0, t)$  e i vettori

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i}(\mathbf{q}, t)|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (2.9)$$

I vettori (2.9) sono linearmente indipendenti. Infatti, se  $(q_1, \dots, q_\ell)$  sono direttamente  $\ell$  coordinate cartesiane (ossia scelte fra le  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, 3n$ ), allora i vettori sono evidentemente indipendenti. Altrimenti, se si è operato un cambiamento di coordinate che porta  $\ell$  coordinate fra le  $\xi_i$  nelle  $q_1, \dots, q_\ell$ , tale cambiamento deve essere invertibile, dunque con determinante diverso da zero. Anche in tal caso, il rango della matrice jacobiana  $J_{\mathbf{q}}\mathbf{X}$  è massimo, pari a  $\ell$ .

Definiamo ora le curve

$$\Gamma_i(\lambda) = \mathbf{X}(q_1^0, \dots, q_{i-1}^0, \lambda, q_{i+1}^0, \dots, q_\ell^0), \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (2.10)$$

Le curve sono contenute nella sottovarietà, dato che al variare di  $q_i$  il vettore  $\mathbf{X}$  rimane su di essa. Inoltre, i vettori tangenti alle curve (2.10)  $d\Gamma/d\lambda$  calcolati in  $\mathbf{X}_0$  sono esattamente gli  $\ell$  vettori indipendenti (2.9).

D'altra parte, sia  $\Gamma(\lambda)$  una qualunque curva sulla varietà passante per  $\mathbf{X}_0$ . E' chiaro che essa può essere parametrizzata attraverso i parametri lagrangiani come  $\Gamma(\lambda) = \mathbf{X}(\mathbf{q}(\lambda), t)$ ,  $\lambda \in I \subseteq \mathbb{R}$ , in modo che  $\mathbf{q}(\lambda_0) = \mathbf{q}_0$ . Il vettore tangente in  $\mathbf{X}_0$  è

$$\frac{d\Gamma}{d\lambda}|_{\lambda=\lambda_0} = J_{\mathbf{q}}\mathbf{X}(\mathbf{q}, t)|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} \mathbf{q}'(\lambda_0),$$

dunque è una combinazione lineare dei vettori (2.9). Si conclude che la dimensione dello spazio lineare (2.8) è  $\ell$  e (2.9) costituiscono una base per  $\mathcal{T}_{\mathbf{X}_0}$ .  $\square$

Le curve definite dalle (2.10) sono dette **linee coordinate** sulla sottovarietà.

In base alla Proposizione appena dimostrata, si ha

$$\mathcal{T}_{\mathbf{X}_0} = \left\{ \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{3n} \mid \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{\ell} \mu^i \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0}, (\mu^1, \dots, \mu^\ell) \in \mathbb{R}^\ell \right\}, \quad \mathbf{q}_0 = (q_1^0, \dots, q_\ell^0). \quad (2.11)$$

Le  $\ell$ -uple  $(\mu^1, \dots, \mu^\ell)$  sono le **componenti controvarianti** di  $\mathbf{Y}$  rispetto alla base scelta.

Se si utilizza una nuova parametrizzazione  $(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_\ell)$  in un intorno di  $\mathbf{X}_0$ , allora il vettore rappresentativo è

$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{q}}, t)$  e i vettori tangenti alle linee coordinate (calcolati in  $\mathbf{X}_0$ )  $\frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \bar{q}_i}$ ,  $i = 1, \dots, \ell$  generano anch'essi

lo spazio tangente  $\mathcal{T}_{\mathbf{X}_0}$ , con  $\mathbf{X}_0 = \bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{q}}_0, t)$  per un opportuno valore  $\bar{\mathbf{q}}_0$  dei parametri.

Se  $\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t)$  è l'applicazione invertibile (con inversa  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t)$ ) associata al cambiamento di coordinate locali, si ha (vedi Osservazione 2.1)

$$\bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{X}(\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t), t), \quad \mathbf{X}(\mathbf{q}, t) = \bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t), t), \quad (2.12)$$

dunque

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \bar{q}_i} = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_i}, \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \bar{q}_j} \frac{\partial \bar{q}_j}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (2.13)$$

Pertanto la matrice del cambiamento di base da

$$\mathcal{B}(\mathbf{q}_0) = \left\langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_\ell} \right\rangle \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} \quad (2.14)$$

a

$$\bar{\mathcal{B}}(\bar{\mathbf{q}}_0) = \left\langle \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \bar{q}_1}, \dots, \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \bar{q}_\ell} \right\rangle \Big|_{\bar{\mathbf{q}}=\bar{\mathbf{q}}_0} \quad (2.15)$$

è  $J_{\bar{\mathbf{q}}}^T \mathbf{q}$ , dove  $J_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q}$  è la matrice jacobiana della trasformazione di coordinate definita in (2.5).

Inversamente, la matrice del cambiamento di base da  $\bar{\mathcal{B}}(\bar{\mathbf{q}}_0)$  a  $\mathcal{B}(\mathbf{q}_0)$  è la matrice  $J_{\bar{\mathbf{q}}}^T \bar{\mathbf{q}}$  con  $J_{\bar{\mathbf{q}}}$  definita in (2.4).

Se un qualunque vettore  $\mathbf{Y} \in \mathcal{T}_{\mathbf{X}_0}$  ha le due rappresentazioni nelle due basi

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{\ell} \nu^i \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i} = \sum_{i=1}^{\ell} \mu^i \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \bar{q}_i},$$

la relazione fra le componenti controvarianti  $\nu = (\nu^1, \dots, \nu^\ell)$  e  $\mu = (\mu^1, \dots, \mu^\ell)$  è la seguente (vedi (5.49)):

$$\mu = (J_{\bar{\mathbf{q}}}) \nu, \quad \nu = (J_{\bar{\mathbf{q}}}) \mu. \quad (2.16)$$

**Osservazione 2.2** *Stabilita una  $\ell$ -upla di coordinate locali  $(q_1, \dots, q_\ell) \in U \subseteq \mathbb{R}^\ell$  e fissato un punto  $\mathbf{q}_0 \in U$ , possiamo identificare l' $i$ -esimo vettore della base (2.14) con l'operatore differenziale  $\frac{\partial}{\partial q_i}$ , che agisce sulle funzioni  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^1$ , come segue:*

$$\frac{\partial}{\partial q_i} f = \frac{\partial f}{\partial q_i} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0}.$$

In tal modo, un qualunque vettore nello spazio (2.11) viene ad essere identificato con la **derivata direzionale**

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{\ell} \mu^i \frac{\partial}{\partial q_i} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0}.$$

Facendo variare i coefficienti  $\mu^1(\mathbf{q}_0), \dots, \mu^\ell(\mathbf{q}_0)$  per  $\mathbf{q}_0 \in U' \subseteq U$ , si ottiene un **campo vettoriale tangente**, ovvero si associa ad ogni punto  $\mathbf{q} \in U'$  un vettore (ovvero un operatore differenziale) dello spazio (2.11).

In generale, possiamo leggere un **campo vettoriale** su  $U \subseteq \mathbb{R}^N$ , ovvero un'applicazione  $\mathbf{v} : U \rightarrow \mathbb{R}^N$  come un operatore differenziale lineare della forma

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$$

con le funzioni  $\alpha_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  almeno  $C^1$ .

Se  $W$  è un sottospazio vettoriale in  $\mathbb{R}^{3n}$  di dimensione  $\ell$ , indichiamo con  $W^\perp$  il **complemento ortogonale** di  $W$ , cioè il sottospazio vettoriale di dimensione  $3n - \ell$  i cui elementi sono tutti ortogonali ai vettori di  $W$ :

$$W^\perp = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3n} \mid \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = 0 \forall \mathbf{Y} \in \mathcal{T}_{\mathbf{X}_0}\}.$$

**Proposizione 2.2** *Si ha, per ogni punto  $\mathbf{X}_0$  della sottovarietà regolare  $\mathcal{V}$ :*

$$(\mathcal{T}_{\mathbf{X}_0})^\perp = \mathcal{N}_{\mathbf{X}_0}. \quad (2.17)$$

**Dim.** La dimostrazione segue immediatamente ricordando che su  $\mathcal{M}$  vale l'identità  $\mathbf{F}(\mathbf{X}(\mathbf{q}, t), t) \equiv 0$ , al variare di  $\mathbf{q}$  in un aperto di  $\mathbb{R}^\ell$ . Derivando rispetto alle variabili  $\mathbf{q}$ , si trova le identità

$$(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{F})(J_{\mathbf{q}} \mathbf{X}) = 0 \quad (2.18)$$

in ogni punto  $\mathbf{X}_0$ , dunque ciascuno degli  $m$  vettori base di (2.6) (ovvero i vettori riga di  $J_{\mathbf{X}} \mathbf{F}$ ) è ortogonale a ciascun vettore (2.14) (ovvero a ciascun vettore colonna di  $J_{\mathbf{q}} \mathbf{X}$ ).  $\square$

Ogni vettore  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{3n}$  ammette dunque un'unica rappresentazione

$$\mathbf{V} = \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^\perp, \quad \mathbf{Y} \in \mathcal{T}_{\mathbf{X}_0}, \quad \mathbf{Y}^\perp \in \mathcal{N}_{\mathbf{X}_0}, \quad (2.19)$$

con  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{Y}^\perp$  univocamente determinati. In altri termini:  $\mathbb{R}^{3n} = \mathcal{T}_{\mathbf{X}_0} \oplus \mathcal{N}_{\mathbf{X}_0}$ .

Dato il vettore  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{3n}$ , i numeri reali

$$V_{\theta,k}^{(\mathbf{q})} = \mathbf{V} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, \ell \quad (2.20)$$

si dicono **componenti lagrangiane** del vettore  $\mathbf{V}$  relativamente alla base  $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i}$ ,  $i = 1, \dots, \ell$  dello spazio tangente.

Scriveremo anche complessivamente le  $\ell$  componenti di (2.20)  $\mathbf{V}_\theta^{(\mathbf{q})} = (V_{\theta,1}^{(\mathbf{q})}, \dots, V_{\theta,\ell}^{(\mathbf{q})}) \in \mathbb{R}^\ell$  come

$$\mathbf{V}_\theta^{(\mathbf{q})} = (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})^T \mathbf{V}. \quad (2.21)$$

**Osservazione 2.3** *Scomponendo  $\mathbf{V} = \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T$  come in (2.19), le componenti lagrangiane di  $\mathbf{V}$  sono le componenti covarianti di  $\mathbf{Y} \in \mathcal{T}_{\mathbf{X}_0}$  rispetto alla base scelta:*

$$V_{\theta,k}^{(\mathbf{q})} = \mathbf{Y} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, \ell \quad (2.22)$$

Utilizzando una differente parametrizzazione  $\bar{\mathbf{q}}$ , le componenti lagrangiane si scrivono come  $V_{\theta,k}^{(\bar{\mathbf{q}})} = \mathbf{V} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \bar{q}_k}$ ,  $k = 1, \dots, \ell$ . Utilizzando (5.71), si ha per  $\mathbf{V}_\theta^{(\bar{\mathbf{q}})} = (V_{\theta,1}^{(\bar{\mathbf{q}})}, \dots, V_{\theta,\ell}^{(\bar{\mathbf{q}})})$ :

$$\mathbf{V}_\theta^{(\bar{\mathbf{q}})} = (J_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q})^T (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})^T \mathbf{V},$$

dunque il legame con le (2.20) è dato dalla formula

$$\mathbf{V}_\theta^{(\bar{\mathbf{q}})} = (J_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q})^T \mathbf{V}_\theta^{(\mathbf{q})}, \quad (2.23)$$

in accordo con la regola di trasformazione delle componenti covarianti di un vettore ( $(J_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q})^T$  è la matrice del cambiamento di base).

### 2.3 Velocità e accelerazione di un sistema olonomo

Ricordando ora la (1.63), si osserva che l'insieme delle velocità virtuali in un punto  $\mathbf{X}_0$  per un sistema olonomo coincide con la totalità dei vettori ortogonali allo spazio normale  $\mathcal{N}_{\mathbf{X}_0}$ , dunque, per la (2.17), con lo spazio tangente nel punto  $\mathbf{X}_0$ :

$$\hat{\mathcal{V}}_{\mathbf{X}_0} = \mathcal{T}_{\mathbf{X}_0}. \quad (2.24)$$

In maniera equivalente, possiamo affermare che un vettore  $\hat{\mathbf{V}}$  in  $\mathbb{R}^{3n}$  è una velocità virtuale per il sistema vincolato se e solo se è combinazione lineare dei vettori (2.9):

$$\hat{\mathbf{V}} \in \hat{\mathcal{V}}_{\mathbf{X}_0} \iff \hat{\mathbf{V}} = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i}(q_1^0, \dots, q_\ell^0), \quad (2.25)$$

dove  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(q_1^0, \dots, q_\ell^0)$ .

Si trova così che la totalità delle velocità virtuali in un punto della sottovarietà ha la struttura di spazio vettoriale di dimensione  $\ell$ . Se i vincoli sono stazionari, i vettori di  $\mathcal{T}_{\mathbf{X}_0}$  rappresentano tutte le possibili velocità che può avere il sistema nel punto  $\mathbf{X}_0$  per essere compatibile con i vincoli imposti. Una di queste velocità coincide con quella effettiva di moto.

Vogliamo ora determinare la rappresentazione lagrangiana del vettore velocità  $\dot{\mathbf{X}}$ . La derivata totale rispetto al tempo del vettore  $\mathbf{X}(\mathbf{q}, t)$  fornisce

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{d}{dt} \mathbf{X}(q_1(t), \dots, q_\ell(t), t) = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}. \quad (2.26)$$

Le derivate  $\dot{q}_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$  si dicono **velocità generalizzate** relativamente alla parametrizzazione scelta.

La formula (2.26) suggerisce la scomposizione di  $\dot{\mathbf{X}}$  secondo una componente

$$\hat{\mathbf{X}}^{(\mathbf{q})} = [J_{\mathbf{q}}\mathbf{X}(\mathbf{q}, t)]\dot{\mathbf{q}} \in \hat{\mathcal{V}}_{\mathbf{x}_0} \quad (2.27)$$

con la quale il vettore velocità coincide nel caso di vincoli scleronomi, e una componente

$$\mathbf{V}_{\tau}^{(\mathbf{q})} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(\mathbf{q}, t), \quad (2.28)$$

che è legata al moto del vincolo.

Gli apici ( $\mathbf{q}$ ) stanno ad indicare la dipendenza delle due componenti dalla parametrizzazione. Utilizzando altri parametri  $\bar{\mathbf{q}}$  si avrà

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{d}{dt}\bar{\mathbf{X}}(\bar{q}_1(t), \dots, \bar{q}_\ell(t), t) = (J_{\bar{\mathbf{q}}}\bar{\mathbf{X}})\dot{\bar{\mathbf{q}}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial t} = \hat{\mathbf{X}}^{(\bar{\mathbf{q}})} + \mathbf{V}_{\tau}^{(\bar{\mathbf{q}})}. \quad (2.29)$$

Vogliamo ora confrontare la (2.26) e la (2.29). Utilizzando la (2.16) e le seguenti relazioni fra le velocità generalizzate

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}} = (J_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial t}, \quad \dot{\mathbf{q}} = (J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}})\dot{\bar{\mathbf{q}}} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}, \quad (2.30)$$

si trova, tenendo conto di (5.71):

$$\hat{\mathbf{X}}^{(\bar{\mathbf{q}})} = (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})(J_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q})\dot{\bar{\mathbf{q}}} = (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\left(\dot{\bar{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}\right). \quad (2.31)$$

D'altra parte, tenendo conto che

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial t}(\bar{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t), t) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(\mathbf{q}, t) + (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}, \quad (2.32)$$

si trovano le relazioni fra le componenti della velocità nelle due differenti parametrizzazioni:

$$\hat{\mathbf{X}}^{(\bar{\mathbf{q}})} = \hat{\mathbf{X}}^{(\mathbf{q})} - (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}, \quad \mathbf{V}_{\tau}^{(\bar{\mathbf{q}})} = \mathbf{V}_{\tau}^{(\mathbf{q})} + (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}. \quad (2.33)$$

**Esercizio 2.2** *Mostrare che*

$$(J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -(J_{\bar{\mathbf{q}}}\bar{\mathbf{X}})\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial t}. \quad (2.34)$$

**Esercizio 2.3** *Pensando alla prima delle (2.30) come ad una trasformazione da  $\mathbb{R}^\ell$  in  $\mathbb{R}^\ell$  che associa a  $\dot{\bar{\mathbf{q}}}$  il vettore  $\dot{\mathbf{q}}$ , si verifichi che*

$$J_{\bar{\mathbf{q}}}\dot{\bar{\mathbf{q}}} = J_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}. \quad (2.35)$$

*Analogamente si mostri che  $J_{\bar{\mathbf{q}}}\dot{\bar{\mathbf{q}}} = J_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}$ .*

Dalla (2.34) si deduce che il vettore

$$\mathbf{Y} = \mathbf{V}_{\tau}^{(\bar{\mathbf{q}})} - \mathbf{V}_{\tau}^{(\mathbf{q})} = \hat{\mathbf{X}}^{(\mathbf{q})} - \hat{\mathbf{X}}^{(\bar{\mathbf{q}})} = (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \quad (2.36)$$

appartenente allo spazio tangente  $\mathcal{T}_{\mathbf{X}_0}(t)$  ha componenti controvarianti  $\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  e componenti controvarianti  $-\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial t}$  rispetto alla base  $\bar{\mathcal{B}}$ .

**Esercizio 2.4** *Utilizzando le (2.30), verificare che*

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -(J_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q})\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial t} = -(J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}})\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}. \quad (2.37)$$

La (2.33) permette le seguenti osservazioni:

(i) se la trasformazione di coordinate è indipendente dal tempo, ovvero se  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}})$ , allora  $\hat{\dot{\mathbf{X}}}^{(\bar{\mathbf{q}})} = \hat{\dot{\mathbf{X}}}^{(\mathbf{q})}$ ,  
 $\mathbf{V}_\tau^{(\bar{\mathbf{q}})} = \mathbf{V}_\tau^{(\mathbf{q})}$ ,

(ii) il vettore  $\mathbf{V}_\mathcal{N}$  proiezione di  $\mathbf{V}_\tau^{(\mathbf{q})}$  sullo spazio normale, di componenti covarianti  $\mathbf{V}_\tau^{(\mathbf{q})} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} f_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  rispetto alla base dei gradienti (vedi (2.6)) non dipende dalla parametrizzazione scelta.

La velocità  $\mathbf{V}_\mathcal{N}$  viene detta **velocità di trascinamento** ed è nulla se i vincoli sono scleronomi.

**Osservazione 2.4** In accordo con (2.19), il vettore  $\dot{\mathbf{X}}$  ha la sua scomposizione intrinseca secondo una componente tangenziale e una componente normale  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{V}_\mathcal{T} + \mathbf{V}_\mathcal{N}$ , con  $\mathbf{V}_\mathcal{T} \in \mathcal{T}_{\mathbf{X}_0}$ ,  $\mathbf{V}_\mathcal{N} \in \mathcal{N}_{\mathbf{X}_0}$  univocamente determinati. La componente tangenziale non necessariamente coincide con  $\hat{\dot{\mathbf{X}}}$  e quella normale, dovuta al moto del vincolo, non coincide in generale con  $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}$ .

Un altro modo per verificare l'indipendenza della velocità di trascinamento dalla parametrizzazione consiste nel ricordare la forma cinematica (1.48) dei vincoli, ovvero le restrizioni per le velocità possibili. Tali equazioni confermano l'appartenenza del vettore velocità allo spazio tangente nel caso di vincolo scleronomi e permettono di scrivere (vedi (2.26) e (2.18))

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} f_k + \frac{\partial f_k}{\partial t} = 0$$

per ogni  $k = 1, \dots, m$ . Dato che  $\partial f_k / \partial t$  non dipende dalla parametrizzazione, neppure le proiezioni della velocità di trascinamento sullo spazio normale dipendono dalla scelta delle  $(q_1, \dots, q_\ell)$ .

Guardando da un altro punto di vista, possiamo affermare che la totalità dei vettori velocità del sistema compatibili con i vincoli imposti è formata dai vettori

$$\dot{\mathbf{X}} = \hat{\dot{\mathbf{X}}} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \quad (2.38)$$

dove il primo termine è un arbitrario vettore dello spazio tangente e fa parte dell'insieme delle velocità (1.61) nel punto considerato, ossia è un vettore del tipo (2.27) con velocità generalizzate  $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell)$  scelte arbitrariamente in  $\mathbb{R}^\ell$ .

**Esercizio 2.5** Porre a confronto la (2.38) con la (1.60): mostrare che il vettore  $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}$  è effettivamente una soluzione particolare del sistema (1.59)

**Osservazione 2.5** L'insieme delle velocità virtuali come combinazioni lineari dei vettori (2.9), nel caso di un sistema olonomo, è comunque deducibile direttamente dalla definizione (1.65), dato che la differenza di due velocità nel medesimo punto  $\mathbf{X}_0$  e allo stesso istante  $t$  è esprimibile come (vedi (2.26))

$$\hat{\dot{\mathbf{X}}} = \dot{\mathbf{X}}_1 - \dot{\mathbf{X}}_2 = J_{\mathbf{q}} \mathbf{X} (\dot{\mathbf{q}}^{(1)} - \dot{\mathbf{q}}^{(2)}) \quad (2.39)$$

dove l'indice (1) o (2) si riferisce alla prima o alla seconda velocità. Al variare arbitrario delle differenze  $(\dot{\mathbf{q}}^{(1)} - \dot{\mathbf{q}}^{(2)})$  si ottiene appunto lo spazio lineare  $\mathcal{T}_{\mathbf{X}_0}$ .

Per determinare l'espressione lagrangiana dell'**accelerazione** si deriva la (2.26) rispetto al tempo: tenendo conto delle (5.66), (5.67), (5.74), si trova

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{X}} &= J_{\mathbf{q}}[(J_{\mathbf{q}} \mathbf{X}) \dot{\mathbf{q}}] \dot{\mathbf{q}} + J_{\dot{\mathbf{q}}}[(J_{\mathbf{q}} \mathbf{X}) \dot{\mathbf{q}}] \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial}{\partial t} [(J_{\mathbf{q}} \mathbf{X}) \dot{\mathbf{q}}] + J_{\mathbf{q}} \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2} = \\ &= \left[ \sum_{k=1}^{\ell} \dot{q}_k J_{\mathbf{q}} \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_k} \right) \right] \dot{\mathbf{q}} + (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X}) \ddot{\mathbf{q}} + 2J_{\dot{\mathbf{q}}} \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

(si è usato anche lo scambio di derivazione parziale fra  $t$  e  $\mathbf{q}$ :  $\frac{\partial}{\partial t} (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X}) = J_{\mathbf{q}} (\partial \mathbf{X} / \partial t)$ ).

L'espressione  $J_{\mathbf{q}}(\partial\mathbf{X}/\partial q_k)$  corrisponde alla matrice  $3n \times \ell$  delle derivate seconde di elementi  $\frac{\partial^2 X_i}{\partial q_k} \partial q_j$ ,  $i = 1, \dots, 3n$ ,  $j = 1, \dots, \ell$ . Alternativamente, si può scrivere il primo termine in (2.40) come

$$\left[ \sum_{k=1}^{\ell} \dot{q}_k J_{\mathbf{q}} \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_k} \right) \right] \dot{\mathbf{q}} = \sum_{i,j=1}^{\ell} \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Nel caso di vincoli scleronomi, la (2.40) si riduce a

$$\ddot{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i} \ddot{q}_i + \sum_{i,j=1}^{\ell} \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (2.41)$$

dove la prima sommatoria è un vettore dello spazio tangente in  $\mathbf{X}(\mathbf{q})$ . Le componenti nello spazio normale sono dunque

$$\ddot{\mathbf{X}} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} f_k(\mathbf{X}) = \sum_{i,j=1}^{\ell} \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial q_i \partial q_j} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} f_k(\mathbf{X}) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad k = 1, \dots, m \quad (2.42)$$

**Esercizio 2.6** Considerare un sistema olonomo scleronomo nei casi particolari  $n = 1$ ,  $m = 1, 2$  (un punto vincolato su una superficie fissa o curva fissa, rispettivamente). Ottenere le formule dell'accelerazione nelle componenti tangenti e normali dalla (2.41).

Si lascia per esercizio anche la scrittura in coordinate lagrangiane del vettore rappresentativo **momento della quantità di moto** di un sistema olonomo, definito come

$$\mathbf{L} = ((P_1 - O) \wedge \mathbf{v}_1, \dots, (P_n - O) \wedge \mathbf{v}_n) \in \mathbb{R}^{3n}. \quad (2.43)$$

In particolare, si verifichi che  $\mathbf{L}$  può essere scritto come

$$\mathbf{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{k=1}^{\ell} A(\mathbf{q}, t) \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_k} \dot{q}_k + A(\mathbf{q}, t) \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = A(\mathbf{q}, t) \left[ (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right] \quad (2.44)$$

con  $J_{\mathbf{q}} \mathbf{X}$  matrice  $3n \times \ell$  Jacobiana di (2.2) e  $\mathbf{A}$  è la matrice  $3n \times 3n$

$$A(\mathbf{q}, t) = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A_n \end{pmatrix} \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 & -z_i(\mathbf{q}, t) & y_i(\mathbf{q}, t) \\ z_i(\mathbf{q}, t) & 0 & -x_i(\mathbf{q}, t) \\ -y_i(\mathbf{q}, t) & x_i(\mathbf{q}, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

( $\mathbf{0}$  indica la matrice nulla  $3 \times 3$ ).

## 2.4 Energia cinetica nei sistemi olonomi

Definiamo l'**energia cinetica del sistema di punti**  $(P_1, \dots, P_n)$  la quantità

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i^2.$$

Vogliamo determinare l'espressione lagrangiana di  $T$ , in funzione cioè delle variabili lagrangiane e delle corrispondenti velocità generalizzate. Definendo il **vettore dei momenti statici**

$$\mathbf{X}_m = (m_1 x_1, m_1 y_1, m_1 z_1, \dots, m_n x_n, m_n y_n, m_n z_n), \quad (2.45)$$

e ricordando la (1.73), si ha

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{X}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}}_m \cdot \dot{\mathbf{X}}. \quad (2.46)$$

A questo punto basta introdurre in (2.46) l'espressione lagrangiana dei vettori  $\mathbf{Q}$  e  $\hat{\mathbf{X}}$ , che si determina dalla (2.26). Possiamo così scrivere

$$T = \frac{1}{2} \left( \hat{\mathbf{X}}_m + \frac{\partial \mathbf{X}_m}{\partial t} \right) \cdot \left( \hat{\mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right) \quad (2.47)$$

dove

$$\hat{\mathbf{X}}_m = (m_1 \hat{\mathbf{v}}_1, \dots, m_n \hat{\mathbf{v}}_n) \quad (2.48)$$

è il vettore rappresentativo della quantità di moto relativa alle velocità virtuali

$$\hat{\mathbf{v}}_i = \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.49)$$

con  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$ .

Dato che, analogamente a (2.27)  $\hat{\mathbf{X}}_m = \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathbf{X}_m}{\partial q_k} \dot{q}_k = (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X}_m) \dot{\mathbf{q}}$ , la (2.47) porta alla formula

$$\begin{aligned} T(q_1, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, t) &= \quad (2.50) \\ \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l a_{h,k}(q_1, \dots, q_l, t) \dot{q}_h \dot{q}_k + \sum_{h=1}^l b_h(q_1, \dots, q_l, t) \dot{q}_h + c(q_1, \dots, q_l, t) &= \\ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + c(\mathbf{q}, t) & \end{aligned}$$

dove

$$\begin{cases} a_{h,k}(q_1, \dots, q_l, t) = \frac{\partial \mathbf{X}_m}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_k}, & h, k = 1, \dots, \ell \\ b_h(q_1, \dots, q_l, t) = \frac{\partial \mathbf{X}_m}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}, & h = 1, \dots, \ell \\ c(q_1, \dots, q_l, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{X}_m}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \end{cases} \quad (2.51)$$

e  $A(\mathbf{q}, t)$  è la matrice  $\ell \times \ell$  di elementi  $a_{h,k}$ ,  $h, k = 1, \dots, \ell$  e  $\mathbf{b}(\mathbf{q}, t) = (b_1, \dots, b_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ :

$$A(\mathbf{q}, t) = (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X})^T (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X}_m) = (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X}_m)^T (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X}), \quad \mathbf{b}(\mathbf{q}, t) = (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X}_m)^T \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X})^T \frac{\partial \mathbf{X}_m}{\partial t}. \quad (2.52)$$

Dunque,  $T$  è un **polinomio di secondo grado** rispetto alle variabili cinetiche  $\dot{\mathbf{q}}$ . In caso di vincoli scleronomi, l'energia cinetica  $T$  è un polinomio di secondo grado **omogeneo** rispetto alle medesime variabili. Se utilizziamo un differente insieme di parametri  $(\bar{\mathbf{q}}, t)$ , l'energia cinetica ha ovviamente la medesima struttura (2.50):

$$T = \bar{T}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t) = \dot{\bar{\mathbf{q}}} \cdot \bar{A}(\bar{\mathbf{q}}, t) \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \bar{\mathbf{b}}(\bar{\mathbf{q}}, t) \cdot \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \bar{c}(\bar{\mathbf{q}}, t) \quad (2.53)$$

dove gli elementi di  $\bar{A}$   $\bar{a}_{i,j}$ , di  $\bar{\mathbf{b}}$   $\bar{b}_i$ ,  $i, j = 1, \dots, \ell$  e  $\bar{c}$  sono definiti come in (2.51) sostituendo  $\bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{q}}, t)$  [risp.  $\bar{\mathbf{X}}_m(\bar{\mathbf{q}}, t)$ ] al posto di  $\mathbf{X}(\mathbf{q}, t)$  [risp.  $\mathbf{X}_m(\mathbf{q}, t)$ ] (vedi (2.12)).

Utilizzando le (2.32), (2.22) (vedere anche (5.54)) si mostrano le seguenti relazioni fra i nuovi e i vecchi coefficienti (verificare per esercizio):

$$\bar{A}(\bar{\mathbf{q}}, t) = (J_{\bar{\mathbf{q}}} \mathbf{q})^T A(J_{\bar{\mathbf{q}}} \mathbf{q}), \quad \bar{\mathbf{b}}(\bar{\mathbf{q}}, t) = (J_{\bar{\mathbf{q}}} \mathbf{q}) \left[ \mathbf{b} + A \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right] \quad \bar{c}(\bar{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \left[ \mathbf{b} + A \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right]. \quad (2.54)$$

E' opportuno commentare la prima relazione in (2.54) anche da un altro punto di vista particolarmente significativo, collegando la matrice  $a_{h,k}$  ad un prodotto scalare.

Introduciamo il vettore

$$\mathbf{X}_{\mathcal{M}} = (\sqrt{m_1} x_1, \sqrt{m_1} y_1, \sqrt{m_1} z_1, \dots, \sqrt{m_n} x_n, \sqrt{m_n} y_n, \sqrt{m_n} z_n). \quad (2.55)$$

Mediante le (2.2) si determina  $\mathbf{X}_{\mathcal{M}} = \mathbf{X}_{\mathcal{M}}(\mathbf{q}, t)$ . I vettori  $\mathbf{u}_i = \frac{\partial \mathbf{X}_{\mathcal{M}}}{\partial q_i}$ ,  $i = 1, \dots, \ell$  sono linearmente indipendenti e costituiscono una base per  $\mathcal{T}_{\mathbf{X}_0}(t)$ .

Mediante i coefficienti (2.51) definiamo il prodotto scalare fra i vettori della base ponendo (vedi (2.56))

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = a_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, \ell, \quad (2.56)$$

Chiamiamo  $A$ ,  $(A)_{i,j} = a_{i,j}$ ,  $i, j = 1, \dots, \ell$ , la matrice rappresentativa del prodotto (2.56) rispetto alla base  $\mathbf{u}_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ .

Per ogni coppia di vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  dello spazio tangente si ha (vedi (5.52))  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \sum_{i,j=1}^{\ell} a_{i,j} \mu^i \nu^j$ , essendo

$$\mathbf{v}_1 = \sum_{i=1}^{\ell} \mu^i \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{v}_2 = \sum_{i=1}^{\ell} \nu^i \mathbf{u}_i.$$

Se utilizziamo nuovi parametri  $(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_\ell) = \bar{\mathbf{q}}$ , avremo  $\bar{\mathbf{X}}_{\mathcal{M}} = \bar{\mathbf{X}}_{\mathcal{M}}(\bar{\mathbf{q}}, t)$  e la nuova base  $\mathbf{w}_i = \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}_{\mathcal{M}}}{\partial \bar{q}_i}$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ .

Si vede subito che la matrice del cambiamento di base da  $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\ell \rangle$  a  $\langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_\ell \rangle$  è ancora  $(J_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q})^T$ , dunque la matrice  $\bar{A}$  del prodotto scalare (2.56) rispetto alla nuova base, ovvero la matrice di elementi  $(\bar{A})_{i,j} = \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j$ ,  $i, j = 1, \dots, \ell$ , è (vedi (5.54))  $\bar{A} = (J_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q})^T A (J_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q})$ , che corrisponde alla prima delle (2.54).

Per quanto riguarda invece la relazione fra  $\mathbf{b}$  e  $\bar{\mathbf{b}}$  in (2.54), notiamo che  $\mathbf{b}$  [risp.  $\bar{\mathbf{b}}$ ] elenca le  $k$  componenti lagrangiane (2.20) del vettore  $\frac{\partial \mathbf{X}_m}{\partial t}$  [risp.  $\frac{\partial \bar{\mathbf{X}}_m}{\partial t}$ ] rispetto alla base (2.14) [risp. (2.15)].

Dalla formula (2.23) si ha, avendo presente (2.32) e (2.34):

$$\left( \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}_m}{\partial t} \right)_{\theta}^{(\bar{\mathbf{q}})} = \left( \frac{\partial \mathbf{X}_m}{\partial t} \right)_{\theta}^{(\mathbf{q})} - \left[ (J_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{X}_m) \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial t} \right]_{\theta}^{(\bar{\mathbf{q}})} = (J_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q})\mathbf{b} - \bar{A} \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial t}.$$

Ricordando infine (2.37) e la prima in (2.54), si ottiene  $\bar{A} \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial t} = -(J_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q})A \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}$ , dunque la seconda in (2.54).

La seguente proprietà è di fondamentale importanza:

**Proposizione 2.3** *Le matrice quadrata  $A$  di ordine  $\ell$  formata dagli elementi  $a_{i,j}$  definiti in (2.51) è simmetrica e definita positiva.*

**Dim.** Evidentemente  $a_{i,j} = a_{j,i}$ ,  $i, j = 1, \dots, \ell$ . E' chiaro poi (vedi (2.48) e (2.49)) che

$$\hat{\mathbf{X}}_m \cdot \hat{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^{\ell} m_i \hat{\mathbf{v}}_i \cdot \hat{\mathbf{v}}_i = \hat{\mathbf{q}} \cdot A \hat{\mathbf{q}} \geq 0$$

e il segno di uguaglianza si ha solo se  $\hat{\mathbf{v}}_i = 0$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ , dunque  $\dot{q}_k = 0$  per ogni  $k = 1, \dots, \ell$ , per l'unicità della rappresentazione nella base (2.9). Per l'arbitrarietà delle componenti  $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ , si conclude che  $\mathbf{y}^T \cdot A \mathbf{y} > 0$ ,  $\forall \mathbf{y} \in \{\mathbb{R}^\ell / \mathbf{0}\}$ , cioè la matrice  $A$  dà luogo a una forma bilineare simmetrica definita positiva.  $\square$

La proposizione appena dimostrata ha un ruolo estremamente significativo sia dal punto di vista geometrico (permetterà infatti di introdurre una metrica nella varietà delle configurazioni) sia analitico (servirà infatti a mostrare la buona posizione delle equazioni di moto).

Ovviamente, ogni altra matrice  $\bar{A} = (J_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q})^T A (J_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q})$  che rappresenta il prodotto scalare (2.56) rispetto ad una seconda base è sempre definita positiva, con  $(J_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q})^T$  matrice del cambiamento di base.

Convenzionalmente, indicheremo con  $T_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  le funzioni

$$T_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}}, \quad T_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad T_0(\mathbf{q}, t) = c(\mathbf{q}, t) \quad (2.57)$$

in modo che l'energia cinetica risulta essere

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T_2 + T_1 + T_0 \quad (2.58)$$

e il valore  $i = 0, 1$  o  $2$  indica il grado del polinomio  $T_i$  rispetto alle velocità generalizzate. Mediante (2.47) si osserva che

$$T_2 = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{X}}_m \cdot \hat{\mathbf{X}}, \quad T_1 = \frac{\partial \mathbf{X}_m}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{X}}_m, \quad T_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{X}_m}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}. \quad (2.59)$$

Per un sistema scleronomo l'energia cinetica è un polinomio omogeneo di secondo grado nelle variabili  $\dot{\mathbf{q}}$ , dato che  $T \equiv T_2$ .

**Esercizio 2.7** Verificare che utilizzando nuovi parametri  $\bar{\mathbf{q}}$  e scrivendo  $T = \bar{T}_2 + \bar{T}_1 + \bar{T}_0$  con (vedi (2.54))

$$\bar{T}_2 = \frac{1}{2} \dot{\bar{\mathbf{q}}} \cdot \bar{A}(\bar{\mathbf{q}}, t) \dot{\bar{\mathbf{q}}}, \quad \bar{T}_1 = \bar{\mathbf{b}}(\bar{\mathbf{q}}, t) \cdot \dot{\bar{\mathbf{q}}}, \quad \bar{T}_0 = \bar{c}(\bar{\mathbf{q}}, t),$$

sussistono le relazioni

$$\bar{T}_2 = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \cdot \left[ A \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} A \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right], \quad \bar{T}_1 = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \cdot \left[ \mathbf{b} + A \dot{\mathbf{q}} - A \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right], \quad \bar{T}_0 = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \cdot \left[ \mathbf{b} + \frac{1}{2} A \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right]. \quad (2.60)$$

E' utile cercare di svolgere l'esercizio precedente utilizzando argomenti di invarianza del prodotto scalare (2.56) e trasformazione delle componenti lagrangiane analoghi a quelli utilizzati per commentare le (2.54). In particolare, per la prima in (2.60) si tengano presenti la (5.53), la (5.54) e i seguenti fatti:

- la matrice della forma quadratica che rispetto alla base  $\mathcal{B}$  ha matrice  $A$  è, rispetto alla base  $\bar{\mathcal{B}}$  (vedi (2.15)), la matrice  $\bar{A}$ ,
- le componenti controvarianti rispetto a  $\bar{\mathcal{B}}$  del vettore  $\hat{\mathbf{X}}$  (che ha le  $\dot{\mathbf{q}}$  come componenti controvarianti rispetto a  $\mathcal{B}$ ) sono  $\dot{\bar{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial t}$  (vedi (2.31), (5.49)),
- le  $\ell$ -uple  $\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}$  e  $-\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial t}$  si corrispondono come componenti controvarianti rispetto alle basi  $\mathcal{B}$  e  $\bar{\mathcal{B}}$ , in quest'ordine (vedi (2.34)).

Per la seconda in (2.60) si considera (come per la seconda in (2.54)) la regola di trasformazione delle componenti lagrangiane (2.23), infine la terza di (2.60) non è altro che la terza di (2.54).

## 2.5 Sistemi olonomi: le equazioni di moto

Se  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3n}$  è il vettore rappresentativo di un sistema di forze applicato ai punti del sistema come in (1.75), le (2.20), ovvero

$$\mathbf{F}_\theta^{(\mathbf{q})} = (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X})^T \mathbf{F} \quad (2.61)$$

si dice **forza generalizzata**. Si usa anche dire che ciascuna delle  $\ell$  componenti di (2.61) sono le **forze generalizzate**.

Mediante questa notazione e ricordando la (2.25), l'ipotesi di vincolo liscio (1.83) si scrive per un sistema olonomo annullando le componenti del vincolo secondo i vettori della base dello spazio tangente (in tal modo risulta vera la (1.83) per ogni velocità virtuale):

$$\Phi_{\theta,i}^{(\mathbf{q})} = \Phi \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell. \quad (2.62)$$

Dunque, un vincolo è liscio se e solo se le forze vincolari generalizzate sono nulle, ovvero se  $\Phi$  non ha componenti nello spazio tangente in ogni punto della sottovarietà (proprietà evidentemente indipendente dalla scelta delle coordinate lagrangiane) e può dunque scriversi come

$$\Phi = \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla_{\mathbf{x}} f_j(\mathbf{X}, t) \quad (2.63)$$

(confrontare la (2.63) con la (1.86)).

Seguendo il medesimo formalismo, l'equazione generale della dinamica (1.84) per un sistema olonomo a vincoli lisci si traduce nelle  $\ell$  equazioni

$$\dot{\mathbf{Q}}_\theta^{(\mathbf{q})} = \mathbf{F}_\theta^{(\mathbf{q})}. \quad (2.64)$$

Infatti, la validità della (1.84) sui vettori della base (2.9) comporta la validità della medesima equazione per ogni vettore  $\hat{\mathbf{X}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{X}}$ .

La (2.64) vede a sinistra le forze di inerzia generalizzate, che dipendono solo dal sistema e dai vincoli imposti, mentre a destra le forze direttamente applicate generalizzate, che dipendono dalle sollecitazioni cui è soggetto il sistema.

E'importante dimostrare la seguente

**Proposizione 2.4** *La scrittura delle equazioni (2.64) è indipendente dal sistema di coordinate  $\mathbf{q}$  scelto.*

**Dim.** Infatti, utilizzando differenti coordinate  $\bar{\mathbf{q}}$  e scrivendo pertanto le equazioni di moto come  $\dot{\mathbf{Q}}_\theta^{(\bar{\mathbf{q}})} = \mathbf{F}_\theta^{(\bar{\mathbf{q}})}$  si ottengono equazioni equivalenti alle (2.64), dato che (vedi (2.23))

$$\dot{\mathbf{Q}}_\theta^{(\bar{\mathbf{q}})} - \mathbf{F}_\theta^{(\bar{\mathbf{q}})} = (J_{\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q}})^T \left( \dot{\mathbf{Q}}_\theta^{(\mathbf{q})} - \mathbf{F}_\theta^{(\mathbf{q})} \right),$$

e la matrice jacobiana  $J_{\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q}}$  è non singolare.  $\square$

In presenza di vincoli non lisci, alle (2.64) si sostituiranno

$$\dot{\mathbf{Q}}_\theta^{(\mathbf{q})} = \mathbf{F}_\theta^{(\mathbf{q})} + \Phi_\theta^{(\mathbf{q})}, \quad (2.65)$$

con  $\Phi_\theta$  componenti lagrangiane del vettore rappresentativo delle reazioni vincolari  $\Phi$ .

Al fine di esplicitare le equazioni di moto (2.64) nelle variabili lagrangiane e le loro derivate, mostriamo il seguente risultato, che pone in relazione le forze di inerzia generalizzate con l'energia cinetica.

**Proposizione 2.5** *Le componenti lagrangiane di  $\mathbf{Q}$  verificano:*

$$\dot{\mathbf{Q}}_\theta^{(\mathbf{q})} = \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \nabla_{\mathbf{q}} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (2.66)$$

dove  $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  è l'energia cinetica nelle variabili lagrangiane definita in (2.50).

**Dim.** Si ha:

$$\dot{\mathbf{Q}}_\theta^{(\mathbf{q})} = (J_{\mathbf{q}\mathbf{X}})^T \dot{\mathbf{Q}} = \frac{d}{dt} [(J_{\mathbf{q}\mathbf{X}})^T \mathbf{Q}] - \left[ \frac{d}{dt} (J_{\mathbf{q}\mathbf{X}})^T \right] \dot{\mathbf{Q}} = \frac{d}{dt} [(J_{\mathbf{q}\mathbf{X}})^T \mathbf{Q}] - (J_{\mathbf{q}\dot{\mathbf{X}}})^T \mathbf{Q}, \quad (2.67)$$

dove si assumono ipotesi di regolarità sufficienti per rendere lecito lo scambio di derivazione

$$\frac{d}{dt} (J_{\mathbf{q}\mathbf{X}}) = J_{\mathbf{q}\dot{\mathbf{X}}}. \quad (2.68)$$

Utilizziamo ora la (2.46) per calcolare le derivate di  $T$  che compaiono in (2.66). Troviamo, tenendo conto di (5.70):

$$\nabla_{\mathbf{q}} T = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{q}} (\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{X}}) = \frac{1}{2} \left[ (J_{\mathbf{q}\mathbf{Q}})^T \dot{\mathbf{X}} + (J_{\mathbf{q}\dot{\mathbf{X}}})^T \mathbf{Q} \right] = (J_{\mathbf{q}\dot{\mathbf{X}}})^T \mathbf{Q}. \quad (2.69)$$

Per quanto riguarda invece le derivate rispetto alle velocità generalizzate, si trova analogamente:

$$\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T = (J_{\mathbf{q}\dot{\mathbf{X}}})^T \mathbf{Q}. \quad (2.70)$$

Utilizzando la (5.74) per il calcolo dell'ultima matrice jacobiana scritta, si trova l'importante relazione (vedi anche (2.26)):

$$J_{\dot{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{X}}} = J_{\dot{\mathbf{q}}} \left( (J_{\mathbf{q}\mathbf{X}}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right) = J_{\mathbf{q}\mathbf{X}}. \quad (2.71)$$

Dunque:

$$\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T = (J_{\mathbf{q}\mathbf{X}})^T \mathbf{Q} \quad (2.72)$$

e sostituendo (2.69) e (2.72) nella (2.67) si trova la (2.66).  $\square$   
 Le  $\ell$  equazioni

$$\frac{d}{dt}\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \nabla_{\mathbf{q}}T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{F}_{\theta}^{(\mathbf{q})}, \quad (2.73)$$

ottenute dalle (2.64) e utilizzando la (2.66) sono dette **equazioni di Lagrange del secondo tipo** o **equazioni di Lagrange in coordinate indipendenti** e valgono per un sistema olonomo soggetto a vincoli lisci. La presenza di vincoli non ideali comporta invece la scrittura

$$\frac{d}{dt}\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \nabla_{\mathbf{q}}T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{F}_{\theta}^{(\mathbf{q})} + \mathbf{\Phi}_{\theta}^{(\mathbf{q})}, \quad (2.74)$$

dove è necessario aggiungere delle ipotesi per descrivere il comportamento dei vincoli, ossia stabilire, in termini generici, la dipendenza  $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t)$ .

Essendo anche, nel caso generale,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t)$ , possiamo affermare che il termine a destra nelle (2.73) e (2.74) è funzione delle variabili lagrangiane, delle velocità generalizzate e, eventualmente, del tempo:

$$\mathbf{F}_{\theta} = \mathbf{F}_{\theta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad \mathbf{\Phi}_{\theta} = \mathbf{\Phi}_{\theta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t).$$

**Esercizio 2.8** Verificare la formula

$$\frac{d}{dt}\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}T = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\dot{T} - \nabla_{\mathbf{q}}T$$

(vedi anche (5.68)) e dedurre che le equazioni di moto (2.73) possono essere scritte nella forma, detta di **Nielsen**:

$$\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\dot{T} - 2\nabla_{\mathbf{q}}T = \mathbf{F}_{\theta}^{(\mathbf{q})}.$$

Le conclusioni del seguente esercizio torneranno utili quando considereremo particolari sistemi di forze nella Sezione seguente.

**Esercizio 2.9** Sia ciascuna componente lagrangiana  $F_{\theta,k}^{(\mathbf{q})}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ ,  $k = 1, \dots, \ell$ , una funzione lineare delle  $\dot{\mathbf{q}}$ :

$$F_{\theta,k}^{(\mathbf{q})}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_{k,j}(\mathbf{q}, t)\dot{q}_j + \eta_k(\mathbf{q}, t), \quad k = 1, \dots, \ell,$$

ovvero, nella notazione (2.21):

$$\mathbf{F}_{\theta}^{(\mathbf{q})}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \Gamma(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}(\mathbf{q}, t)$$

dove  $\Gamma$  è la matrice  $\ell \times \ell$  di elementi  $\gamma_{k,j}$ ,  $k, j = 1, \dots, \ell$ , e  $\mathbf{H}$  è il vettore  $(\eta_1, \dots, \eta_{\ell}) \in \mathbb{R}^{\ell}$ .

Verificare (utilizzando (2.23)) che, operando il cambiamento di parametri  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t)$ , le componenti lagrangiane rimangono funzioni lineari delle  $\dot{\bar{\mathbf{q}}}$ :

$$\mathbf{F}_{\theta}^{(\bar{\mathbf{q}})}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t) = \bar{\Gamma}(\bar{\mathbf{q}}, t)\dot{\bar{\mathbf{q}}} + \bar{\mathbf{H}}(\bar{\mathbf{q}}, t)$$

con  $\bar{\Gamma} = (J_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q})^T\Gamma(J_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q})$ ,  $\bar{\mathbf{H}} = (J_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q})^T\left(\Gamma\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{H}\right)$ , dove  $\Gamma$  e  $\mathbf{H}$  sono calcolati in  $(\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t), t)$ .

Osservare in particolare che

$\Gamma$  è simmetrica (risp. antisimmetrica) se e solo se  $\bar{\Gamma}$  è simmetrica (risp. antisimmetrica),

$\Gamma$  è definita positiva (risp. definita negativa) se e solo se  $\bar{\Gamma}$  è definita positiva (risp. definita negativa).

Concludiamo il paragrafo con la seguente osservazione.

Se al sistema olonomo di coordinate lagrangiane  $\mathbf{q}$  aggiungiamo l'ulteriore vincolo intero  $f_{m+1}(\mathbf{X}, t) = 0$ , indipendente rispetto agli esistenti  $m$  vincoli (2.1), possiamo senz'altro ricavare nuove coordinate lagrangiane  $\bar{\mathbf{q}}_{\ell-1} = (\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_{\ell-1})$  (alcune eventualmente coincidenti con le precedenti) dalle  $m+1$  equazioni vincolari e procedere nella scrittura delle  $\ell-1$  equazioni di moto. Oppure, possiamo ricavare dalla relazione  $\tilde{f}_{m+1}(\mathbf{q}, t) = f_{m+1}(\mathbf{X}(\mathbf{q}, t), t) = 0$  una delle  $q_j$ ,  $1 \leq j \leq \ell$ , in funzione delle rimanenti  $\ell-1$  coordinate e sostituire nelle (2.73).

Risulta tuttavia sicuramente più conveniente continuare a lavorare con le  $\ell$  variabili lagrangiane di partenza e ricordare che (vedi (1.86))

$$\dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{F} = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j \nabla_{\mathbf{X}} f_j(\mathbf{X}, t).$$

Dunque

$$\left( \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{F} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_j} = \lambda_{m+1} \nabla_{\mathbf{X}} f_{m+1} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_j} = \lambda_{m+1} \frac{\partial \tilde{f}_{m+1}}{\partial q_j}(\mathbf{q}, t), \quad j = 1, \dots, \ell \quad (2.75)$$

e le equazioni di moto si scrivono

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \nabla_{\mathbf{q}} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{F}_{\theta}^{(\mathbf{q})} + \lambda_{m+1} \nabla_{\mathbf{q}} \tilde{f}_{m+1}(\mathbf{q}, t) \\ \tilde{f}_{m+1}(\mathbf{q}, t) = 0 \end{cases}$$

nelle  $\ell + 1$  incognite  $\mathbf{q}$  e  $\lambda_{m+1}$ .

L'estensione al caso di aggiunta di  $s$  vincoli

$$f_{m+j}(\mathbf{X}, t) = 0, \quad j = 1, \dots, s \quad (2.76)$$

e dell'introduzione degli  $s$  moltiplicatori  $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{m+s}$  nelle equazioni di moto

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \nabla_{\mathbf{q}} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{F}_{\theta}^{(\mathbf{q})} + \sum_{j=1}^s \lambda_{m+j} \nabla_{\mathbf{q}} \tilde{f}_{m+j}(\mathbf{q}, t), \\ \tilde{f}_{m+i}(\mathbf{q}, t) = 0 \quad i = 1, \dots, s \end{cases} \quad (2.77)$$

con  $\tilde{f}_{m+i}(\mathbf{q}, t) = f_{m+i}(\mathbf{X}(\mathbf{q}, t), t)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , è del tutto ovvia. Le  $\ell + s$  equazioni (2.77) hanno come incognite  $\mathbf{q}$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ .

## 2.6 Studio del sistema di equazioni di Lagrange del secondo tipo

Vale il seguente importante

**Teorema 2.2** *Se le funzioni vincolari in (1.47) e le funzioni  $\mathbf{F}$ ,  $\Phi$  sono sufficientemente regolari, allora il moto di un sistema olonomo è unicamente determinato dalla specificazione delle posizioni e delle velocità iniziali*

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}^0. \quad (2.78)$$

**Dim.** Il termine a sinistra delle (2.64) corrisponde a  $(J_{\mathbf{q}} \mathbf{X})^T \dot{\mathbf{Q}} = (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X}_m)^T \ddot{\mathbf{X}}$ .

Ricordando la (2.40), possiamo affermare che nelle equazioni (2.64) gli unici termini a contenere le derivate di ordine più alto, cioè due, sono (vedi (2.52))

$$(J_{\mathbf{q}} \mathbf{X}_m)^T (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X}) \ddot{\mathbf{q}} = A \ddot{\mathbf{q}}.$$

I termini a destra delle uguaglianze (2.64) (oppure (2.65) nel caso di vincoli non lisci) non contengono le derivate seconde delle variabili lagrangiane.

Richiamiamo ora la Proposizione 2.3, che ci assicura che il determinante della matrice  $A$  è sicuramente non nullo. Dunque, le equazioni (2.64) (ovvero (2.65)) possono essere esplicitate nelle derivate seconde nella forma

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (2.79)$$

A questo punto la risolubilità di (2.79) ricade unicamente sulla regolarità della funzione a destra dell'uguaglianza: se le funzioni  $\mathbf{W}$  hanno, ad esempio, derivate parziali continue del primo ordine rispetto ai vari argomenti, sappiamo dalla teoria delle equazioni differenziali che esiste un'unica soluzione di (2.79) che soddisfa le equazioni, una volta assegnate le condizioni iniziali (2.78).  $\square$

Esaminiamo ora il comportamento delle equazioni (2.73) (oppure (2.74)) nel caso in cui venga utilizzata una differente parametrizzazione  $\bar{\mathbf{q}}$ . Evidentemente, dobbiamo scrivere

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\bar{\mathbf{q}}}} \bar{T}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t) - \nabla_{\bar{\mathbf{q}}} \bar{T}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t) = \mathbf{F}_\theta^{(\bar{\mathbf{q}})}, \quad (2.80)$$

dove  $\bar{T}$  è definita come in (2.53). Per quanto visto nella Proposizione 2.4 e per la (2.20), si ha

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\bar{\mathbf{q}}}} \bar{T} - \nabla_{\bar{\mathbf{q}}} \bar{T} = \dot{\mathbf{Q}}_\theta^{(\bar{\mathbf{q}})} = (J_{\bar{\mathbf{q}} \mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{Q}}_\theta^{(\mathbf{q})} = (J_{\bar{\mathbf{q}} \mathbf{q}})^T \left( \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T - \nabla_{\mathbf{q}} T \right).$$

Dunque, le equazioni (2.80), per le quali si fa riferimento alla base (2.15), si riscrivono nel modo seguente:

$$(J_{\bar{\mathbf{q}} \mathbf{q}})^T \left[ \mathbf{F}_\theta^{(\mathbf{q})} - \left( \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T - \nabla_{\mathbf{q}} T \right) \right] = 0 \quad (2.81)$$

e queste ultime, come si è già osservato, sono equivalenti alle (2.73).

**Esercizio 2.10** *A partire da  $T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  e pensando al cambiamento di coordinate  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t)$ , si ponga  $\bar{T}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t) = T(\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t), \dot{\mathbf{q}}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t), t)$  e si verifichi direttamente che*

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\bar{\mathbf{q}}}} \bar{T} - \nabla_{\bar{\mathbf{q}}} \bar{T} = (J_{\bar{\mathbf{q}} \mathbf{q}})^T \left( \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T - \nabla_{\mathbf{q}} T \right).$$

Per utilità, esplicitiamo ora le equazioni di moto nella forma (2.73), utilizzando i coefficienti definiti in (2.51). Si ha, utilizzando le (5.66), (5.67), (5.70), (5.74):

$$\nabla_{\mathbf{q}} T = A \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}, \quad \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T = J_{\mathbf{q}} [A \dot{\mathbf{q}}] \dot{\mathbf{q}} + A \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial A}{\partial t} \dot{\mathbf{q}} + J_{\mathbf{q}} \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \quad (2.82)$$

$$\nabla_{\mathbf{q}} T = \frac{1}{2} (J_{\mathbf{q}} [A \dot{\mathbf{q}}])^T \dot{\mathbf{q}} + (J_{\mathbf{q}} \mathbf{b})^T \dot{\mathbf{q}} + \nabla_{\mathbf{q}} c \quad (2.83)$$

dove la matrice  $J_{\mathbf{q}} [A \dot{\mathbf{q}}] = \sum_{k=1}^{\ell} \dot{q}_k J_{\mathbf{q}} \mathbf{A}_k$ , essendo  $\mathbf{A}_k$  è la  $k$ -esima colonna (o riga) di  $A$ , è la matrice  $\ell \times \ell$  il cui elemento  $(i, j)$  è

$$\sum_{k=1}^{\ell} \dot{q}_k \frac{\partial a_{i,k}}{\partial q_j}, \quad i, j = 1, \dots, \ell.$$

Le equazioni (2.73) equivalgono quindi a

$$A \ddot{\mathbf{q}} + \left( \sum_{k=1}^{\ell} \dot{q}_k \left[ J_{\mathbf{q}} \mathbf{A}_k - \frac{1}{2} (J_{\mathbf{q}} \mathbf{A}_k)^T \right] \right) \dot{\mathbf{q}} + \left( J_{\mathbf{q}} \mathbf{b} - (J_{\mathbf{q}} \mathbf{b})^T + \frac{\partial A}{\partial t} \right) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - \nabla_{\mathbf{q}} c = \mathbf{F}_\theta \quad (2.84)$$

con la ovvia estensione nel caso (2.74).

Può essere utile vedere scritta ciascuna componente di (2.84):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\ell} a_{i,k} \ddot{q}_i + \sum_{i,j=1}^{\ell} \left( \frac{\partial a_{i,k}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{i,j}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j + \\ \sum_{i=1}^{\ell} \left( \frac{\partial b_k}{\partial q_i} - \frac{\partial b_i}{\partial q_k} + \frac{\partial a_{k,i}}{\partial t} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial b_k}{\partial t} - \frac{\partial c}{\partial q_k} = F_{\theta,k}, \quad k = i, \dots, \ell. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Le reazioni vincolari  $\Phi$ , assenti nelle equazioni (2.73), fatto che rappresenta un notevole vantaggio del formalismo lagrangiano, possono essere determinate, una volta integrate le (2.73), dalle equazioni

$$\Phi = \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{F}$$

dove il secondo membro è funzione delle  $q_1(t), \dots, q_\ell(t)$ , delle loro derivate prime e seconde, e del tempo  $t$ . Equivalentemente, si possono ricercare i moltiplicatori  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  delle equazioni (2.63), che vanno scritte come

$$\left(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{Q}}\right) \cdot \nabla_{\mathbf{X}} f_k = \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla_{\mathbf{X}} f_j(\mathbf{X}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{X}} f_k, \quad k = 1, \dots, m.$$

Concludiamo il paragrafo osservando che una scrittura alternativa alle (2.73) (oppure (2.74)) si ottiene partendo dall'osservazione che (vedi (2.40))

$$J_{\dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{X}} = J_{\mathbf{q}} \mathbf{X}$$

(confrontare con (2.71)). Se dunque si introduce l'**energia delle accelerazioni**

$$\mathcal{Y} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \left( \ddot{x}_k^2 + \ddot{y}_k^2 + \ddot{z}_k^2 \right) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}} \cdot \ddot{\mathbf{X}}, \quad (2.86)$$

si vede subito che

$$\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{Y} = (J_{\dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{X}})^T \dot{\mathbf{Q}} = (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X})^T \dot{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{Q}}_\theta. \quad (2.87)$$

Le equazioni di moto (2.64) possono pertanto essere scritte nella forma

$$\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{Y} = \mathbf{F}_\theta. \quad (2.88)$$

dove  $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t)$ .

## 2.7 Sistemi olonomi: lavoro e energia

Ci occupiamo ora di operare un bilancio di tipo energetico di un sistema olonomo, utilizzando il formalismo lagrangiano.

Ricordando la definizione (1.76) e la rappresentazione (2.26), troviamo la seguente espressione per la potenza di un sistema di forze con vettore rappresentativo  $\mathbf{F}$ :

$$W_F = \mathbf{F} \cdot \left( [J_{\mathbf{q}} \mathbf{X}]^T + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right) = \mathbf{F}_\theta^{(\mathbf{q})} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = W_F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t).$$

Formalmente, pensando alla  $\mathbf{F}_\theta$  come forza generalizzata e alle  $\dot{\mathbf{q}}$  come velocità generalizzate, anche in termini lagrangiani troviamo la potenza come prodotto di una forza per una velocità.

La **potenza virtuale** (1.77) consiste dunque in

$$\hat{W}_F^{(\mathbf{q})} = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_\theta^{(\mathbf{q})} \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad \hat{\mathbf{X}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{X}}, \quad (2.89)$$

mentre il termine  $W_{F,\tau}^{(\mathbf{q})} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}$  è legato al moto del vincolo.

I termini  $\hat{W}_F^{(\mathbf{q})}$ ,  $W_{F,\tau}^{(\mathbf{q})}$  dipendono ovviamente dalla parametrizzazione scelta. Si verifica subito che, utilizzando i parametri  $\bar{\mathbf{q}}$  e scrivendo nelle nuove coordinate la potenza come

$$W_F = \bar{W}_F(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t) = \mathbf{F}_\theta^{(\bar{\mathbf{q}})} \cdot \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial t}(\bar{\mathbf{q}}, t) = \hat{W}_F^{(\bar{\mathbf{q}})} + W_{F,\tau}^{(\bar{\mathbf{q}})},$$

valgono le relazioni

$$\hat{W}_F^{(\bar{\mathbf{q}})} = \hat{W}_F^{(\mathbf{q})} - \mathbf{F}_\theta^{(\mathbf{q})} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}, \quad W_{F,\tau}^{(\bar{\mathbf{q}})} = W_{F,\tau}^{(\mathbf{q})} + \mathbf{F}_\theta^{(\mathbf{q})} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}. \quad (2.90)$$

Ancora una volta, le formule trovate mostrano che le grandezze lagrangiane sono indipendenti dalla parametrizzazione in caso di cambiamenti di coordinate puramente geometrici  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}})$ .

Incidentalmente, si osservi che (vedi (2.34))  $\mathbf{F}_\theta^{(\mathbf{q})} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\mathbf{F}_\theta^{(\bar{\mathbf{q}})} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial t}$ .

Nel seguito ci riferiremo ad una specifica parametrizzazione  $\mathbf{q}$  prescelta e ometteremo l'apice ( $\mathbf{q}$ ) per semplicità di notazione. Dove necessario, si richiederà di verificare come variano le formule trovate se si utilizza una differente parametrizzazione.

**Osservazione 2.6** Per un sistema a vincoli lisci con vettore rappresentativo  $\Phi$  delle reazioni vincolari vale (vedi (1.79))

$$\hat{W}_\Phi = \Phi_\theta^{(\mathbf{q})} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0, \quad \forall \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^\ell. \quad (2.91)$$

La (2.91) propone la definizione alternativa di **vincoli ideali** come sistema di forze  $\Phi$  che compiono **lavoro virtuale nullo**.

## 2.8 Il bilancio energetico

Vogliamo ora derivare dalle equazioni di moto un bilancio di tipo energetico. A tale proposito, iniziamo a scrivere

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{X}}) = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \dot{\mathbf{X}} = W_F + W_\Phi. \quad (2.92)$$

La nota equazione (2.92) (conosciuta anche come **teorema delle forze vive**) si trova moltiplicando la (1.74) scalarmente per  $\dot{\mathbf{X}}$ , che rappresenta la velocità effettiva del sistema, e ricordando le definizioni (1.76), (1.78). Elaboriamo il bilancio energetico (2.92) tenendo separate le componenti (2.27) e (2.28) della velocità:

$$\dot{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\dot{\mathbf{X}}} = \dot{\mathbf{Q}}_\theta \cdot \dot{\mathbf{q}} = \hat{W}_F + \hat{W}_\Phi, \quad (2.93)$$

$$(2.94)$$

$$\dot{\mathbf{Q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \Phi \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}. \quad (2.95)$$

In analogia a quanto fatto per le equazioni di Lagrange, in cui abbiamo espresso le proiezioni delle forze inerziali sullo spazio tangente in termini dell'energia cinetica (vedi (2.66)), vogliamo scrivere le due componenti di  $\dot{\mathbf{Q}}$  lungo la velocità virtuale e quella di trascinamento in termini di  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ . Per questo dimostriamo la seguente

**Proposizione 2.6** Valgono le seguenti formule:

$$\dot{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\dot{\mathbf{X}}} = \frac{d}{dt} (T_2 - T_0) + \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.96)$$

$$(2.97)$$

$$\dot{\mathbf{Q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \frac{d}{dt} (2T_0 + T_1) - \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.98)$$

dove  $T_0$ ,  $T_1$  e  $T_2$  sono definite dalle (2.57).

**Dim.** Premettiamo la notevole formula di immediata verifica (vedi (2.82))

$$\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T \cdot \dot{\mathbf{q}} = 2T_2 + T_1. \quad (2.99)$$

La (2.99) è anche deducibile dalla **formula di Eulero**:

$$\mathbf{y} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} f(\mathbf{y}) = m f(\mathbf{y}), \quad (2.100)$$

valida per una funzione  $f(\mathbf{y})$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$  a valori reali e omogenea di grado  $m$ , ossia  $f(\lambda \mathbf{y}) = \lambda^m f(\mathbf{y})$ .

**Esercizio 2.11** Verificare che scrivendo (2.99) rispetto ai parametri  $\bar{\mathbf{q}}$  si ha

$$\nabla_{\dot{\bar{\mathbf{q}}}} \bar{T} \cdot \dot{\bar{\mathbf{q}}} = 2\bar{T}_2 + \bar{T}_1 = 2T_2 + T_1 - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}, \quad (2.101)$$

dove  $\mathbf{Y}$  è definito in (2.36).

Si trova dunque per quanto riguarda il lavoro virtuale delle forze di inerzia:

$$\dot{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\dot{\mathbf{X}}} = \dot{\mathbf{Q}}_\theta \cdot \dot{\mathbf{q}} = \left( \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T - \nabla_{\mathbf{q}} T \right) \cdot \dot{\mathbf{q}} =$$

$$= \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T \cdot \dot{\mathbf{q}}) - \left( \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \nabla_{\mathbf{q}} T \cdot \dot{\mathbf{q}} \right) = \frac{d}{dt} (2T_2 + T_1) - \left( \frac{dT}{dt} - \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \frac{d}{dt} (T_2 - T_0) + \frac{\partial T}{\partial t}$$

dove si è tenuto conto delle (2.66), (2.57), (2.99), del fatto che

$$2T_2 + T_1 - T = T_2 - T_0 \quad (2.102)$$

e della regola di derivazione (5.65)  $\frac{dT}{dt} = \nabla_{\mathbf{q}} T \cdot \dot{\mathbf{q}} + \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial T}{\partial t}$ .

D'altra parte:

$$\dot{\mathbf{Q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left( \mathbf{Q} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right) - \mathbf{Q} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial t}.$$

Osservando che (vedi (2.59))

$$\mathbf{Q} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \left( \hat{\mathbf{X}}_m + \frac{\partial \mathbf{X}_m}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = T_1 + 2T_0$$

e che (vedi (2.46))

$$\mathbf{Q} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{X}}_m \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial t} + \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}_m}{\partial t} \cdot \dot{\mathbf{X}} \right) = \frac{\partial T}{\partial t},$$

si perviene alla (2.98). Concludiamo osservando che, come ci aspettiamo, la somma delle equazioni (2.96) e (2.98) rende il bilancio (2.92) e che la componente (2.98) ha un ruolo solo se il sistema è reonomo, altrimenti è banalmente verificata.  $\square$

Utilizzando le (2.96), (2.98) possiamo scrivere i **bilanci energetici** (2.93) e (2.95) per un sistema olonomo (ricordando che  $\hat{W}_{\Phi} = 0$  in caso di vincoli lisci) come segue

$$\frac{d}{dt} (T_2 - T_0) = \hat{W}_F + \hat{W}_{\Phi} - \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.103)$$

$$\frac{d}{dt} (2T_0 + T_1) = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \Phi \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2.104)$$

Ricordando le definizioni (1.80), (1.82) e chiamando

$$\hat{L}_F(t) = \int_{t_0}^t \hat{W}_F(\tau) d\tau, \quad L_F^{(t)} = \int_{t_0}^t \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(\tau) d\tau, \quad (2.105)$$

(analogamente per  $\Phi$ ) possiamo scrivere le (2.103), (2.104) in termini di **lavoro**:

$$\frac{d}{dt} (T_2 - T_0 - \hat{L}_F - \hat{L}_{\Phi}) = -\frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.106)$$

$$\frac{d}{dt} (2T_0 + T_1 - L_F^{(t)} - L_{\Phi}^{(t)}) = \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2.107)$$

Una forma alternativa a (2.106) è (vedi (2.102) e (2.99))

$$\frac{d}{dt} (2T_2 + T_1 - T - \hat{L}_F - \hat{L}_{\Phi}) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - T - \hat{L}_F - \hat{L}_{\Phi} \right) = -\frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.108)$$

Se il sistema è scleronomo, le (2.103) e (2.106) si riducono rispettivamente a:

$$\frac{dT}{dt} = W_F + W_{\Phi}, \quad \frac{d}{dt} (T - L_F - L_{\Phi}) = 0 \quad (2.109)$$

con  $W_{\Phi} = 0$ ,  $L_{\Phi} = 0$  se i vincoli sono ideali.

Ulteriori considerazioni sul bilancio di energia verranno fatti non appena si siano introdotti campi di forza con particolari caratteristiche.

**Esercizio 2.12** Utilizzando una differente parametrizzazione  $\bar{\mathbf{q}}$ , le formule (2.96) e (2.98) assumono la forma (vedi (2.31), (2.32) e (2.53) per la definizione dei simboli)

$$\dot{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\mathbf{X}}^{(\bar{\mathbf{q}})} = \frac{d}{dt} (\bar{T}_2 - \bar{T}_0) + \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}, \quad \dot{\mathbf{Q}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial t} = \frac{d}{dt} (2\bar{T}_0 + \bar{T}_1) - \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}. \quad (2.110)$$

Mostrare che

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\mathbf{X}}^{(\bar{\mathbf{q}})} &= \dot{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\mathbf{X}}^{(\mathbf{q})} - \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Y}, & \dot{\mathbf{Q}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial t} &= \dot{\mathbf{Q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Y}, \\ \bar{T}_2 - \bar{T}_0 &= T_2 - T_0 - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}, & 2\bar{T}_0 + \bar{T}_1 &= 2T_0 + T_1 + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}, \\ & & \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} &= \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Y}} \end{aligned} \quad (2.111)$$

dove (vedi (2.36))  $\mathbf{Y} = (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X})^T \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -(J_{\bar{\mathbf{q}}} \bar{\mathbf{X}})^T \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial t}$ . Concludere che le (2.110) equivalgono alle (2.96), (2.98). Utilizzando poi le formule trovate e la (2.90), mostrare che i bilanci (2.103), (2.104) scritti utilizzando la parametrizzazione  $\bar{\mathbf{q}}$  (ovvero modificando come si è fatto in (2.110)), corrispondono a

$$\frac{d}{dt} (T_2 - T_0 - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}) = \hat{W}_F^{(\mathbf{q})} + \hat{W}_\Phi^{(\mathbf{q})} - (\mathbf{F}_\theta^{(\mathbf{q})} + \Phi_\theta^{(\mathbf{q})}) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Y}} \right), \quad (2.112)$$

$$(2.113)$$

$$\frac{d}{dt} (2T_0 + T_1 + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}) = (\mathbf{F} + \Phi) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + (\mathbf{F}_\theta^{(\mathbf{q})} + \Phi_\theta^{(\mathbf{q})}) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Y}} \right). \quad (2.114)$$

Verificando infine che

$$(\mathbf{F}_\theta^{(\mathbf{q})} + \Phi_\theta^{(\mathbf{q})}) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Y}, \quad (2.115)$$

realizzare l'equivalenza delle (2.112), (2.114) con le (2.103), (2.104).

### 3 Forze potenziali, giroscopiche, dissipative. Potenziali generalizzati. Teorema di Noether

Ci occupiamo ora di esaminare le equazioni di moto (2.73) in presenza di particolari ipotesi sulle forze che sollecitano direttamente il sistema o sulle forze di reazione esercitate dai vincoli.

#### 3.1 Forze associabili ad un potenziale

Ricordiamo che un campo di vettori  $\mathbf{B} : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  si dice **conservativo** (o **campo gradiente**) se esiste una funzione  $U : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla U_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$  in ogni punto  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ . La funzione  $U$  si dice **potenziale** di  $\mathbf{F}$ . Sappiamo che per un campo di vettori  $\mathbf{F}$  definito su un dominio  $\mathcal{D}$  la proprietà di essere conservativo equivale all'indipendenza dalla scelta della curva regolare a tratti  $\gamma$  che unisce due punti arbitrari di  $\mathcal{D}$  per calcolare l'integrale curvilineo di  $\mathbf{F}$  lungo  $\gamma$ :

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x}(\lambda)) \cdot \mathbf{x}'(\lambda) d\lambda = U(\mathbf{x}(b)) - U(\mathbf{x}(a))$$

Un campo gradiente ha il rotore

$$\text{rot}\mathbf{B} = \left( \frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (3.1)$$

pari a zero. Se il dominio  $\mathcal{D}$  è semplicemente connesso, allora la condizione  $\text{rot}\mathbf{B} = 0$  è anche sufficiente affinché il campo  $\mathbf{B}$  sia conservativo.

Riferiamoci ora al vettore rappresentativo delle forze applicate  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3n}$ , supponendo che non dipenda dalle velocità:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ .

Diremo che le forze sono **potenziali** se esiste una funzione  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathbf{X}, t)$  detta **potenziale** a valori in  $\mathbb{R}$  tale che

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathcal{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$$

in ogni istante  $t$ .

Se i vincoli sono olonomi, dato  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(q_1, \dots, q_\ell, t)$  alla funzione potenziale  $\mathcal{U}$  si può associare il **potenziale nelle variabili lagrangiane**:

$$U(\mathbf{q}, t) = \mathcal{U}(\mathbf{X}(\mathbf{q}, t), t). \quad (3.2)$$

La presenza esplicita del tempo  $t$  nella funzione  $U$  deriva sia dal possibile carattere mobile dei vincoli sia dall'eventuale dipendenza diretta delle forze dal tempo.

Il gradiente della  $U$  fatto rispetto alle variabili lagrangiane corrisponde al vettore delle componenti lagrangiane della forza. Infatti (vedi (5.69)):

$$\nabla_{\mathbf{q}} U = (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X})^T \nabla_{\mathbf{X}} \mathcal{U} = (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X})^T \mathbf{F}.$$

Dunque, un sistema di forze  $\mathbf{F}$  è di tipo potenziale se nelle variabili lagrangiane vale (ricordare (2.21)):

$$\nabla_{\mathbf{q}} U(\mathbf{q}, t) = \mathbf{F}_{\theta}^{(\mathbf{q})}. \quad (3.3)$$

Con una differente parametrizzazione  $\bar{\mathbf{q}}$ , si ha, analogamente a (3.2) e (3.3),

$$\bar{U}(\bar{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{U}(\bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{q}}, t), t) = \mathcal{U}(\mathbf{X}(\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t), t), t) = U(\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t), t), \quad \nabla_{\bar{\mathbf{q}}} \bar{U} = \mathbf{F}_{\theta}^{(\bar{\mathbf{q}})}. \quad (3.4)$$

Ricordando la (2.23), si ha che la relazione fra i due gradienti deve essere necessariamente di tipo covariante. In effetti, si verifica subito che

$$\nabla_{\bar{\mathbf{q}}} \bar{U} = (J_{\bar{\mathbf{q}}} \mathbf{q})^T \nabla_{\mathbf{q}} U, \quad (3.5)$$

esattamente come per le componenti lagrangiane della forza (vedi (2.23)).

Vale la pena di osservare anche che (vedi (2.36), (2.115))

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t}(\bar{\mathbf{q}}, t) = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Y} + \frac{\partial U}{\partial t}(\mathbf{q}, t). \quad (3.6)$$

Se il sistema ammette solo forze potenziali, la scrittura delle equazioni di moto (2.73) è formalmente la seguente:

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L} - \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{L} = 0, \quad (3.7)$$

dove si è definito con  $\mathcal{L}$  la **funzione lagrangiana**

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + U(\mathbf{q}, t). \quad (3.8)$$

Sfruttando le (2.81), (3.4) e (3.5) si vede immediatamente che, utilizzando nuovi parametri  $\bar{\mathbf{q}}$  e definendo la funzione Lagrangiana  $\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t)$ , le equazioni di moto scritte nei due sistemi di coordinate sono equivalenti dal momento che valgono le relazioni

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\bar{\mathbf{q}}}} \bar{\mathcal{L}} - \nabla_{\bar{\mathbf{q}}} \bar{\mathcal{L}} = (J_{\bar{\mathbf{q}} \mathbf{q}})^T \left( \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L} - \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{L} \right). \quad (3.9)$$

La funzione lagrangiana  $\mathcal{L}$  (detta anche **potenziale cinetico**) è, come l'energia cinetica, una funzione quadratica delle velocità generalizzate:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0 \quad (3.10)$$

dove (vedi (2.57))

$$\mathcal{L}_2 = T_2, \quad \mathcal{L}_1 = T_1, \quad \mathcal{L}_0 = T_0 + U \quad (3.11)$$

La Proposizione 2.3 assicura che la matrice  $J_{\dot{\mathbf{q}}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L})$  di elementi  $(H_{\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L})_{(i,j)} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ ,  $i, j = 1, \dots, \ell$ , è non singolare:

$$\det(J_{\dot{\mathbf{q}}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L})) \neq 0. \quad (3.12)$$

Anche il **bilancio energetico** assume un aspetto notevole nel caso di sistemi di forze conservative. Cominciamo a calcolare la derivata totale di  $\mathcal{U}$  lungo il moto effettivo:

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathcal{U} \cdot \dot{\mathbf{X}} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{X}} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = W_F + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = \hat{W}_F^{(\mathbf{q})} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}. \quad (3.13)$$

In termini di coordinate lagrangiane si ha (vedi (3.3) e (2.89)):

$$\frac{dU}{dt} = \nabla_{\mathbf{q}} U \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial U}{\partial t} = \mathbf{F}_{\theta}^{(\mathbf{q})} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial U}{\partial t} = \hat{W}_F^{(\mathbf{q})} + \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (3.14)$$

Come aiuto alla verifica della perfetta equivalenza di (3.13) con (3.14) si osserva che

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}(\mathbf{X}(\mathbf{q}, t), t) = \nabla_{\mathbf{X}} \mathcal{U} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}(\mathbf{X}, t).$$

Il potenziale è legato al lavoro della forza mediante le formule:

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{U}}{dt} = \frac{dL_F}{dt} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}, \\ \frac{dU}{dt} = \frac{d\hat{L}_F}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Dunque, la funzione  $\mathcal{U}(t)$  coincide, a meno di una costante arbitraria, con la funzione lavoro se il sistema di forze non dipende esplicitamente dal tempo, mentre la funzione  $U(t)$  è (a meno di costanti) il lavoro virtuale se, oltre all'ipotesi appena detta, il sistema è scleronomo.

Utilizzando la (3.15) si perviene alla seguente espressione particolarmente significativa del bilancio (2.108):

$$\frac{d}{dt} [2T_2 + T_1 - (T + U)] = \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T \cdot \dot{\mathbf{q}} - (T + U)) = -\frac{\partial}{\partial t} (T + U) + \hat{W}_{\Phi}. \quad (3.16)$$

Ricordando (3.8) e supponendo i vincoli lisci, si arriva al cosiddetto **teorema dell'energia generalizzata**:

$$\frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}. \quad (3.17)$$

La funzione

$$\mathcal{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T - \mathcal{L} \quad (3.18)$$

viene detta **energia generalizzata** e, come vedremo, coincide con l'Hamiltoniana del sistema.

Nel caso di un sistema scleronomo soggetto a forze posizionali potenziali  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$  e a vincoli lisci si ritrova la nota legge di **conservazione dell'energia totale**

$$\mathcal{E} = T - U = T(\mathbf{q}(t_0), \dot{\mathbf{q}}(t_0)) - U(\mathbf{q}(t_0)) \quad (3.19)$$

dove a destra  $T$  e  $U$  sono calcolate in un qualsiasi istante  $t_0$ . Propriamente, sono questi i sistemi detti **conservativi**.

Se il sistema è soggetto a forze potenziali posizionali e a vincoli non fissi ma tali che l'energia cinetica non dipenda esplicitamente dal tempo, dalla (3.17) si trova:

$$\mathcal{E} = T_2 - T_0 - U = T_2(\mathbf{q}(t_0), \dot{\mathbf{q}}(t_0)) - T_0(\mathbf{q}(t_0)) - U(\mathbf{q}(t_0)) \quad (3.20)$$

Nelle ipotesi suddette, la quantità costante  $T - T_0 - U$  viene detta **integrale primo di Jacobi**. Un esempio tipico di questa circostanza si ha per i vincoli mobili che ruotano rigidamente con velocità angolare costante. Osserviamo ora che una differente parametrizzazione  $\bar{\mathbf{q}}$  porta alla Lagrangiana  $\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t) = \bar{T}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t) + \bar{U}(\bar{\mathbf{q}}, t)$  (vedi (2.53), (3.4)). Combinando insieme (2.101), (2.111), (3.6), si vede subito che il bilancio energetico nei nuovi parametri si scrive

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\bar{\mathbf{q}}}} \bar{T} \cdot \dot{\bar{\mathbf{q}}} - \bar{\mathcal{L}}) + \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial t} = \frac{d}{dt} (2T_2 + T_1 - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y} - \mathcal{L}) + \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Y}} + \frac{\partial U}{\partial t} + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Y} \quad (3.21) \\ &= \frac{d}{dt} (2T_2 + T_1 - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y} - \mathcal{L}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \frac{d}{dt} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}) = \frac{d}{dt} (2T_2 + T_1 - \mathcal{L}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \end{aligned}$$

che mostra l'equivalenza con il bilancio (3.17).

**Esercizio 3.1** *Adattare le equazioni (2.77) al caso in cui al sistema di Lagrangiana  $\mathcal{L}$  e di equazioni (3.7), si aggiungano le  $m + s$  equazioni vincolari intere (2.76).*

Nell'ottica del precedente esercizio, possiamo scrivere le equazioni di Lagrange del primo tipo (1.85), nel caso olonomo, come segue. Se il sistema è soggetto a forze conservative, si definisce, anche nel caso di presenza di vincoli, la Lagrangiana come funzione di tutte le variabili del sistema  $\mathbf{X} = (\xi_1, \dots, \xi_{3n})$ , considerate come variabili lagrangiane:  $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) = T(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) + U(\mathbf{X}, t)$ .

Se il sistema è soggetto ai vincoli olonomi (2.1), le equazioni (1.85) si scrivono

$$\dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\xi}} \mathcal{L} - \nabla_{\xi} \mathcal{L} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla_{\mathbf{X}} f_j(\mathbf{X}, t)$$

nelle incognite  $\mathbf{X}$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ .

**Esercizio 3.2** *Considerare il sistema costituito da un punto materiale  $P$  di massa  $m$  vincolato su un'asta di lunghezza  $L$  che ruota a velocità angolare costante  $\omega$  su un piano orizzontale, mantenendo fisso uno degli estremi  $O$ . Il punto  $P$  è attratto da una molla verso il punto  $Q$  dell'asta che è a distanza  $\lambda < L$  da  $O$ . Scrivere la Lagrangiana del sistema, l'equazione di moto e il bilancio energetico, osservando che l'energia generalizzata è una costante del moto. Determinare inoltre la potenza della forza che mantiene il moto rotatorio uniforme dell'asta.*

Il teorema dell'energia generalizzata può essere dedotto direttamente dalle equazioni di moto (3.7) nel seguente modo. Moltiplicando scalarmente le (3.7) per  $\dot{\mathbf{q}}$ , e osservando che

$$\dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L} = \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}) - \ddot{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}, \quad \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{L} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t},$$

si trova:

$$\frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}) = \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{L} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L} \cdot \ddot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathcal{L}}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

ovvero

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (3.22)$$

con

$$\mathcal{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}. \quad (3.23)$$

Osservare che la definizione (3.23) è più generale di (3.18), dove si deriva rispetto alle  $\dot{\mathbf{q}}$ , la funzione  $T$ , anziché  $\mathcal{L}$ . Questo argomento sarà sviluppato parlando di potenziali generalizzati.

I passaggi formali che portano alla (3.22) sono in realtà di notevole importanza teorica, in quanto si prescinde dalla particolare forma della funzione lagrangiana, ovvero non è necessario supporre  $\mathcal{L} = T + U$ . Questo fatto è essenziale ad esempio nella teoria della relatività, in cui la Lagrangiana per la particella libera non coincide con l'energia cinetica. In questo contesto l'energia viene proprio definita tramite le (3.23), una volta scelta la Lagrangiana con argomenti legati alla geometria spazio-tempo e al principio di costanza della velocità della luce.

Sfruttando i passaggi effettuati in (3.21), si vede subito che rispetto a nuovi parametri  $\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t)$  si ha la relazione

$$\bar{\mathcal{E}}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t) = \dot{\bar{\mathbf{q}}} \cdot \nabla_{\dot{\bar{\mathbf{q}}}} \bar{\mathcal{L}} - \bar{\mathcal{L}} = \mathcal{E} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}$$

con  $\mathbf{Y}$  definito in (2.36).

Concludiamo il paragrafo osservando che, se il sistema è soggetto a forze potenziali  $\mathbf{F}$  unitamente a forze non potenziali  $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t)$  e i vincoli sono non lisci, allora la (3.7) e la (3.22) ammettono le ovvie generalizzazioni

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L} - \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{L} = \mathbf{G}_\theta + \Phi_\theta, \quad (3.24)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L} + \hat{W}_G + \hat{W}_\Phi. \quad (3.25)$$

dove  $\mathcal{L} = T + U_F$  comprende solo la parte potenziale, con  $\nabla_{\mathbf{X}} U_F = \mathbf{F}$ , mentre  $\mathcal{E} = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}$ .

### 3.2 Coordinate cicliche e Lagrangiana ridotta

Osservando la struttura delle equazioni (3.7), si vede che la circostanza  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$ , ovvero l'assenza di una variabile  $q_k$  dalla funzione lagrangiana  $\mathcal{L}$ , comporta immediatamente l'esistenza della costante di moto

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}. \quad (3.26)$$

In altre parole, come diremo più avanti, la funzione

$$I(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_\ell, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$$

è un **integrale primo del moto**, nel senso che  $I$  rimane, lungo ogni moto, identico al valore iniziale  $I(\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0), 0)$ . Ovviamente moti distinti, ovvero individuati da differenti condizioni iniziali, sono associati, in genere, a distinti valori della quantità  $I$ .

La variabile  $q_k$  assente dalla Lagrangiana si dice **ciclica** o **ignorabile**. In generale, comunque, la velocità generalizzata  $\dot{q}_k$  compare in  $\mathcal{L}$ .

Per semplicità di notazione, stabiliamo che la variabile ciclica sia l'ultima, ovvero  $k = \ell$ . Ci chiediamo se è possibile definire una nuova Lagrangiana  $\mathcal{L}_R$  funzione delle sole coordinate  $\mathbf{q}_R = (q_1, \dots, q_{\ell-1}) \in U_R \subseteq \mathbb{R}^{\ell-1}$  e delle loro velocità generalizzate  $\dot{\mathbf{q}}_R \in \mathbb{R}^{\ell-1}$  mediante la quale si possano scrivere le equazioni di moto senza distruggere la struttura lagrangiana (3.7).

Per fare questo, fissato  $p_\ell$ , supponiamo che la (3.26) sia risolubile rispetto a  $\dot{q}_\ell$  (ovvero supponiamo  $p_\ell \neq 0$ ):

$$\dot{q}_\ell = \dot{q}_\ell(\mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{q}}_R, p_\ell, t) \quad (3.27)$$

e definiamo

$$\mathcal{L}_R(\mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{q}}_R, p_\ell, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{q}}_R, \dot{q}_\ell(\mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{q}}_R, p_\ell, t), t) - p_\ell \dot{q}_\ell(\mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{q}}_R, p_\ell, t). \quad (3.28)$$

Dato che

$$\nabla_{\mathbf{q}_R} \mathcal{L}_R = \nabla_{\mathbf{q}_R} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\ell} \nabla_{\mathbf{q}_R} \dot{q}_\ell - p_\ell \nabla_{\mathbf{q}_R} \dot{q}_\ell = \nabla_{\mathbf{q}_R} \mathcal{L}$$

e analogamente per  $\nabla_{\dot{\mathbf{q}}_R} \mathcal{L}_R$ , si vede che  $\mathcal{L}_R$  verifica le equazioni

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}_R} \mathcal{L}_R(\mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{q}}_R, p_\ell, t) - \nabla_{\mathbf{q}_R} \mathcal{L}_R(\mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{q}}_R, p_\ell, t) = \mathbf{0}, \quad (3.29)$$

nelle  $\ell-1$  incognite  $\mathbf{q}_R$ . Le equazioni (3.29), dette **equazioni ridotte**, sono formulabili anche nel formalismo hamiltoniano e prendono il nome, come vedremo, di **equazioni di Routh**.

La funzione  $\mathcal{L}_R$  si dice **Lagrangiana ridotta**, in quanto riduce il numero di variabili, in virtù dell'informazione (3.26).

E' bene rendersi conto che il termine correttivo  $p_\ell \dot{q}_\ell$  è necessario affinché le (3.29) siano soddisfatte: definire la Lagrangiana ridotta semplicemente come Lagrangiana di partenza  $\mathcal{L}$  riletta nelle variabili  $\mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{q}}_R$  (utilizzando la sostituzione (3.27)) non porterebbe in generale a equazioni di moto di tipo lagrangiano, come in (3.29).

Nel caso di più variabili cicliche, diciamo  $\mathbf{q}_{\ell-s} = (q_{s+1}, \dots, q_\ell)$ , con  $0 \leq s \leq \ell-1$ , ovvero

$$\nabla_{\mathbf{q}_{\ell-s}} \mathcal{L} = 0,$$

si hanno ovviamente le  $\ell-s$  costanti di moto

$$\mathbf{p}_{\ell-s} = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}_{\ell-s}} \mathcal{L} \quad (3.30)$$

(il caso analizzato precedentemente corrisponde a  $s = \ell-1$ ).

L'analisi del caso  $s = 0$  è un semplice esercizio. Per  $1 \leq s \leq \ell-1$ , si pone  $\mathbf{q}_R = (q_1, \dots, q_s)$  e dalle relazioni (3.30) si ricavano, quando è possibile, le funzioni

$$\dot{\mathbf{q}}_{\ell-s} = \dot{\mathbf{q}}_{\ell-s}(\mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{q}}_R, \mathbf{p}_{\ell-s}, t).$$

La Lagrangiana ridotta consiste stavolta in

$$\mathcal{L}_R(\mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{q}}_R, p, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{q}}_R, \dot{\mathbf{q}}_{\ell-s}(\mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{q}}_R, \mathbf{p}_{\ell-s}, t), t) - \mathbf{p}_{\ell-s} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{\ell-s}(\mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{q}}_R, \mathbf{p}_{\ell-s}, t) \quad (3.31)$$

e le equazioni di moto sono ancora le (3.29), con  $\mathbf{p}_{\ell-s}$  negli argomenti di  $\mathcal{L}_R$ .

Anche se appare banale, vale la pena di osservare che la Lagrangiana ridotta è scritta sul sottoinsieme dello spazio delle fasi lagrangiano corrispondente alla varietà  $\mathbf{p}_{\ell-s} = \mathbf{p}_{\ell-s}^0$  costante. Nel formalismo hamiltoniano, dove le  $\mathbf{p}$  saranno nuove variabili indipendenti, questo fatto assume un significato preciso.

**Esercizio 3.3** Considerare un punto materiale  $P$  di massa  $m$  soggetto ad una forza centrale conservativa di energia potenziale  $v(r)$ , con  $r$  distanza dal centro del moto  $O$ . Introducendo le coordinate polari  $(r, \varphi)$  di polo  $O$  sul piano dove avviene il moto, scrivere la Lagrangiana del sistema, verificare che  $\varphi$  è ciclica e scrivere la Lagrangiana ridotta  $\mathcal{L}_R$ . Confrontare con i risultati noti dal corso di Sistemi Dinamici riguardo all'introduzione del potenziale efficace.

**Esercizio 3.4** Considerare il moto di un punto materiale  $P$  di massa  $m$  vincolato in modo liscio sulla superficie di rotazione  $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u))$ . Il punto è soggetto ad una forza di energia potenziale  $V(u)$ . Verificare che  $v$  è ciclica e scrivere la Lagrangiana ridotta.

### 3.3 Forze di tipo giroscopico

Si consideri un sistema vincolato olonomo o anolonomo.

Un sistema di forze con vettore rappresentativo  $\mathbf{G}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) \in \mathbb{R}^{3n}$  tale che la **potenza virtuale** (vedi (1.60), (1.77)) è nulla:

$$\hat{W}_G = \mathbf{G}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) \cdot \hat{\dot{\mathbf{X}}} = 0 \quad \forall \hat{\dot{\mathbf{X}}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{X}} \quad (3.32)$$

si dice un sistema di forze **giroscopico**.

I vincoli ideali, ad esempio, sono un sistema di forze giroscopiche (vedi (1.83)), così come, ricordando (1.61), un qualunque campo di forze che in ogni punto  $\mathbf{X}$  verifica  $\mathbf{G} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{A}_i(\mathbf{X}, t)$ , che nel caso olonomo diventa

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla_{\mathbf{X}} f_i.$$

Quest'ultima condizione è anche necessaria se  $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{X}, t)$ . Al contrario, nel caso in cui il campo di forze dipenda dalla velocità, circostanza più interessante per le applicazioni, il vettore  $\mathbf{G}$  non è necessariamente ortogonale allo spazio  $\hat{\mathcal{V}}_{\mathbf{X}}(t)$ .

Un caso interessante per le applicazioni riguarda una dipendenza del tipo

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) = \mathcal{G}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) \dot{\mathbf{X}} \quad (3.33)$$

dove  $\Gamma$  è una matrice quadrata di ordine  $3n$ . Ricordando la scomposizione (1.60), si trova:

$$\hat{W}_G = \hat{\dot{\mathbf{X}}}^T \mathcal{G} \hat{\dot{\mathbf{X}}} + \hat{\dot{\mathbf{X}}}^T \mathcal{G} \dot{\mathbf{X}}_0.$$

Per ulteriori considerazioni, premettiamo la seguente

**Proprietà 3.1** Una matrice quadrata  $A$   $N \times N$  è **antisimmetrica**, ovvero  $A^T = -A$ , se e solo se la forma quadratica associata ad  $A$  è nulla per ogni vettore  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ :

$$\mathbf{y}^T A \mathbf{y} = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N. \quad (3.34)$$

**Dim.** Se  $A$  è antisimmetrica, si ha  $\mathbf{y}^T A \mathbf{y} = (\mathbf{y}^T A \mathbf{y})^T = -\mathbf{y}^T A \mathbf{y}$ , dunque deve valere la (3.34) per ogni  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ . Viceversa, se tale condizione vale per ogni vettore in  $\mathbb{R}^N$ , si sceglie  $\mathbf{y} = \mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , vettore con tutte le componenti nulle eccetto  $i$ -esima che vale 1. Dalla (3.34) si trova che gli elementi diagonali sono tutti nulli:  $(A)_{(i,i)} = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Scegliendo poi  $\mathbf{y} = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ ,  $i \neq j$ , si trova  $(A)_{(i,j)} + (A)_{(j,i)} = 0$ , dunque  $A$  è antisimmetrica.  $\square$

Se dunque la matrice  $\mathcal{G}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t)$  in (3.33) è antisimmetrica, si ha  $\hat{W}_G = \hat{\dot{\mathbf{X}}}^T \mathcal{G} \dot{\mathbf{X}}_0$ . Ricordando che  $\dot{\mathbf{X}}_0 = 0$  in caso di vincoli fissi, si ha la seguente

**Proposizione 3.1** Per un sistema scleronomo le forze (3.33) con  $\mathcal{G}^T = -\mathcal{G}$  sono **giroscopiche**.

Rileggiamo ora l'argomento nel formalismo lagrangiano per un sistema vincolato olonomo. Fissiamo la  $\ell$ -upla  $\mathbf{q}$  di coordinate lagrangiane. La definizione (3.32) equivale a (vedi (2.89))

$$\hat{W}_G^{(\mathbf{q})}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{G}_\theta^{(\mathbf{q})}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \hat{\dot{\mathbf{q}}} = 0 \quad \forall \hat{\dot{\mathbf{q}}} \in \mathbb{R}^\ell. \quad (3.35)$$

Ricordando la (2.90), si vede che la definizione data è indipendente dalla parametrizzazione scelta solo se si considerano cambiamenti di coordinate indipendenti dal tempo  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}})$ , come d'altra parte è ragionevole supporre in questo contesto.

Le componenti lagrangiane delle forze conservative compaiono in generale nelle equazioni di moto (3.24), mentre nel bilancio energetico (3.25) il contributo dovuto alle forze giroscopiche è assente.

Se dunque un sistema scleronomo è sottoposto a forze  $\mathbf{F}$  potenziali,  $U$  indipendente da  $t$  e forze  $\mathbf{G}$  giroscopiche vale la conservazione dell'energia (3.19), ovviamente se i vincoli sono lisci.

Il sistema di forze (3.33) ha componenti lagrangiane

$$\mathbf{G}_\theta^{(\mathbf{q})}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X})^T \mathbf{G} = \Gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \Lambda(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (3.36)$$

dove  $\Gamma$  è la matrice  $\ell \times \ell$   $\Gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})^T \mathcal{G} J_{\mathbf{q}}\mathbf{X}$  con  $\mathcal{G}$  da calcolarsi in  $\mathcal{G}(\mathbf{X}(\mathbf{q}, t), \dot{\mathbf{X}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t)$  e  $\Lambda$  è il vettore  $\Lambda(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})^T \mathcal{G} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \in \mathbb{R}^\ell$ .

È evidente che  $\Gamma$  è **antisimmetrica** se lo è  $\mathcal{G}$ :

$$\Gamma = -\Gamma^T \quad \text{se } \mathcal{G} = -\mathcal{G}^T. \quad (3.37)$$

Utilizzando la Proprietà 3.1, si trova dunque per un sistema di forze del tipo (3.36) con  $\Gamma$  antisimmetrica:

$$\hat{W}_G^{(\mathbf{q})}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \Lambda(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}}.$$

La Proposizione 3.1 si enuncia ora come segue:

**Proposizione 3.2** *Per un sistema scleronomo le forze (3.36) con matrice  $\Gamma$  antisimmetrica sono giroscopiche.*

Infatti, per i vincoli fissi si ha  $\Lambda = 0$ .

**Esercizio 3.5** *Verificare che, utilizzando altri parametri  $\bar{\mathbf{q}}$ , la struttura (3.36) non viene alterata, determinare la nuova matrice  $\bar{\Gamma}$  e verificare che essa è antisimmetrica se e solo se lo è  $\Gamma$  (vedi esercizio 2.7).*

Se la matrice  $\Gamma$  in (3.33) non dipende dalle velocità, ossia  $\Gamma = \Gamma(\mathbf{X}, t)$ , le componenti (3.36) diventano

$$G_\theta^{(\mathbf{q})}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \Gamma(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \Lambda(\mathbf{q}, t) \quad (3.38)$$

e la Proprietà 3.1 consente la seguente caratterizzazione:

**Proposizione 3.3** *Per un sistema scleronomo le forze (3.38) sono giroscopiche se e solo se la matrice  $\Gamma$  è antisimmetrica.*

Applicando i risultati dell'esercizio 2.6, si ottiene l'indipendenza della caratterizzazione (3.37) dalla parametrizzazione scelta.

Un interessante esempio di sistema di forze giroscopico è dato dalla **forza di inerzia di Coriolis** che agisce sui punti materiali qualora si osservi il moto da un sistema di riferimento non inerziale. Il problema della scrittura delle equazioni di Lagrange in sistemi non inerziali verrà affrontato sistematicamente nel prossimo Capitolo: ci limitiamo ora a verificare che la forza di Coriolis è di tipo giroscopico.

Consideriamo un sistema  $S$  che si muove rispetto ad un sistema inerziale  $\Sigma$  di velocità angolare  $\omega$ . La forza di Coriolis che agisce su ogni punto materiale è

$$\mathbf{F}_k^C = -2m_k \omega \wedge \mathbf{v}_{k,R}, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.39)$$

dove  $m_k$  è la massa del punto  $P_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $\mathbf{v}_{k,R}$  è la velocità di  $P_k$  punto rispetto a  $S$  (**velocità relativa**).

Verifichiamo che il vettore rappresentativo delle forze ha la struttura (3.33).

Dato il vettore  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ , al prodotto vettoriale  $\omega \wedge$  possiamo associare la matrice antisimmetrica  $3 \times 3$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

nel senso che  $\omega \wedge \mathbf{y} = \Omega \mathbf{y}$  per ogni vettore  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  (vedi Paragrafo 5.9).

Indichiamo con  $\mathbf{X}$  il vettore rappresentativo delle posizioni dei punti scritto rispetto al sistema  $S$ .

Il vettore rappresentativo della forza di Coriolis (3.39)

$$\mathbf{F}^C = (\mathbf{F}_1^C, \dots, \mathbf{F}_n^C) \in \mathbb{R}^{3n}$$

si scrive dunque:

$$\mathbf{F}^C = -2\Omega_m(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) \dot{\mathbf{X}} \quad (3.41)$$

dove  $\Omega_m$  è la matrice  $3n \times 3n$

$$\Omega_m = \begin{pmatrix} m_1\Omega & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2\Omega & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & m_n\Omega \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

( $\Omega$  è la matrice definita in (3.40)) e  $\dot{\mathbf{X}}$  indica il vettore rappresentativo delle velocità relative (ovvero facendo la derivazione rispetto al tempo in  $S$ ).

La matrice  $\Omega_m$  è evidentemente antisimmetrica, dunque per i sistemi a vincoli (geometrici o cinematici) fissi rispetto al sistema  $S$  il sistema di forze (3.41) è **giroscopico**.

Se il sistema è olonomo, si ha

$$\mathbf{F}^C = -2\Omega_m \left( (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right) \quad (3.43)$$

con componenti lagrangiane

$$F_{\theta}^{C(\mathbf{q})} = -2(J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})^T \Omega_m \left[ (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right], \quad (3.44)$$

che risultano giroscopiche nel caso di vincoli fissi rispetto a  $S$ , ovvero se  $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = 0$ . Si noti che in questo caso la velocità relativa coincide con la velocità virtuale.

Dunque, se i vincoli sono tali che la loro scrittura nel sistema non inerziale  $S$  non comporta la presenza esplicita del tempo, se sono cioè scleronomi rispetto a  $S$ , allora le forze di Coriolis non compiono lavoro durante il moto del sistema.

**Osservazione 3.1** *L'antisimmetria della matrice  $-2(J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})^T \Omega_m (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})$  è d'altra parte riconducibile anche alla proprietà del prodotto misto in  $\mathbb{R}^3$*

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -\mathbf{u} \wedge \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$$

applicata ai vettori  $\omega$ ,  $\frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_i}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_j}$ , con  $\mathbf{x}_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  componenti del  $k$ -esimo punto del sistema.

### 3.4 Forze dissipative

Un sistema di forze  $\Phi \in \mathbb{R}^{3n}$  si dice **dissipativo** se la potenza virtuale associata ad esso è negativa:

$$\hat{W}_{\Phi} = \Phi(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) \cdot \hat{\mathbf{X}} < 0 \quad \forall \hat{\mathbf{X}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{X}}. \quad (3.45)$$

Se il sistema è soggetto, oltre alla forza  $\Phi$ , a forze conservative posizionali  $\mathbf{F}$  di potenziale  $U$  e i vincoli sono scleronomi, la (3.16) mostra che

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \hat{W}_{\Phi} < 0, \quad (3.46)$$

cioè l'energia totale decresce.

In generale, una matrice quadrata  $B$  di ordine  $N$  si dice **definita negativa** se

$$B^T = B, \quad \mathbf{y}^T \cdot B\mathbf{y} < 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N / \{\mathbf{0}\}. \quad (3.47)$$

Immaginando di partire da una struttura del tipo (3.33), ovvero

$$\Phi = B(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) \dot{\mathbf{X}}, \quad (3.48)$$

con potenza associata  $\hat{W}_{\Phi} = \hat{\mathbf{X}}^T B \hat{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{X}}^T B \dot{\mathbf{X}}_0$ , è di verifica immediata la seguente

**Proposizione 3.4** *Per un sistema scleronomo le forze di tipo (3.48) sono dissipative se  $B$  è una matrice definita negativa.*

Infatti, in tal caso si ha  $\hat{W}_\Phi = \hat{\mathbf{X}}^T B(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) \hat{\mathbf{X}} < 0$ .

L'analisi del caso olonomo è analoga a quella svolta per le forze giroscopiche: scrivendo le componenti lagrangiane di  $\Phi$  come (vedi (3.36))

$$\Phi_\theta^{(\mathbf{q})}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \beta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\dot{\mathbf{q}} + \mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad \beta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})^T B J_{\mathbf{q}}\mathbf{X}, \quad \mu = (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})^T B \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \quad (3.49)$$

si dimostra la

**Proposizione 3.5** *Per un sistema scleronomo le forze (3.49) sono dissipative se e solo se la matrice  $\beta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  è definita negativa per ogni  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$  e  $t$ .*

La dimostrazione viene lasciata per esercizio, così come la verifica dell'indipendenza della proprietà rispetto alla scelta dei parametri  $\mathbf{q}$  (vedi anche esercizio 2.7).

Per le applicazioni è interessante esaminare una dipendenza del tipo  $\Phi = B(\mathbf{X}, t) \hat{\mathbf{X}}$ , che peraltro rientra formalmente nella (3.48). La potenza virtuale  $\hat{W}_\Phi = \hat{\mathbf{X}}^T B \hat{\mathbf{X}}$  è negativa se la matrice  $B$  è definita negativa, anche se il sistema è non scleronomo. La (3.49) assume la forma

$$\Phi_\theta^{(\mathbf{q})}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \beta(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}}, \quad \beta = (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})^T B(\mathbf{q}, t) J_{\mathbf{q}}\mathbf{X} \quad (3.50)$$

e la potenza virtuale delle forze  $\hat{W}_\Phi = \beta\dot{\mathbf{q}}$  è negativa se e solo se la forma quadratica

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \beta(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} \quad (3.51)$$

è definita negativa nelle  $\dot{\mathbf{q}}$ , per ogni  $(\mathbf{q}, t)$ .

La (3.51) è detta **funzione dissipativa di Rayleigh**. Si osservi che le forze generalizzate (3.50) si ottengono da  $\mathcal{R}$  mediante il gradiente rispetto alle variabili cinetiche:

$$\Phi_\theta = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{R}.$$

Se consideriamo un sistema scleronomo a vincoli lisci, soggetto a forze potenziali di potenziale  $U$  indipendente dal tempo e a forze dissipative (3.48), la (3.46) mostra che

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \dot{\mathbf{q}}^T \beta(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} = 2\mathcal{R}. \quad (3.52)$$

La formula appena scritta evidenzia il significato fisico della funzione di Rayleigh, che determina il tasso di decrescita dell'energia cinetica e potenziale.

**Esercizio 3.6** *Considerare per ogni punto  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  un sistema di forze di resistenza proporzionali alle velocità virtuali dei punti:*

$$\Phi_i = -\mu_i \hat{\mathbf{v}}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

*Determinare la potenza delle forze e la funzione di Rayleigh.*

**Esercizio 3.7** *Considerare un punto materiale di massa  $m$  che si muove su un piano fisso e scabro. Il punto è soggetto ad una forza conservativa di potenziale  $\mathcal{U}$  e a una resistenza d'attrito proporzionale alla sua velocità. Scrivere le equazioni di moto e il bilancio energetico del sistema.*

### 3.5 Potenziali generalizzati

Sia  $(\xi_1, \dots, \xi_{3n}) = \mathbf{X}$  il vettore rappresentativo degli  $n$  punti. Un sistema di forze con vettore rappresentativo  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t)$  in  $\mathbb{R}^{3n}$  ammette un **potenziale generalizzato**  $\mathcal{U}_g = \mathcal{U}_g(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t)$  se

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathcal{U}_g(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) - \frac{d}{dt} \left( \nabla_{\dot{\mathbf{X}}} \mathcal{U}_g(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) \right). \quad (3.53)$$

Utilizzando la (5.67), possiamo esplicitare la definizione (3.53) come segue:

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathcal{U}_g - \left( J_{\mathbf{X}}(\nabla_{\dot{\mathbf{X}}} \mathcal{U}) \dot{\mathbf{X}} + J_{\dot{\mathbf{X}}}(\nabla_{\dot{\mathbf{X}}} \mathcal{U}) \ddot{\mathbf{X}} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\dot{\mathbf{X}}} \mathcal{U}_g) \right). \quad (3.54)$$

Le operazioni differenziali  $J_{\mathbf{X}}(\nabla_{\dot{\mathbf{X}}} \mathcal{U})$  e  $J_{\dot{\mathbf{X}}}(\nabla_{\dot{\mathbf{X}}} \mathcal{U})$  corrispondono alle matrici  $3N \times 3N$  di elementi  $\frac{\partial^2 \mathcal{U}_g}{\partial \dot{\xi}_i \partial \dot{\xi}_j}$  e  $\frac{\partial^2 \mathcal{U}_g}{\partial \dot{\xi}_i \partial \dot{\xi}_j}$ ,  $i, j = 1, \dots, 3N$ , rispettivamente.

Dato che si è posto, in generale,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t)$ , la relazione (3.54) ha senso se a destra dell'uguale i termini contenenti le derivate seconde rispetto al tempo sono nulli. Questo comporta l'annullarsi degli elementi della matrice  $J_{\dot{\mathbf{X}}}(\nabla_{\dot{\mathbf{X}}} \mathcal{U})$ , ossia una dipendenza necessariamente lineare dalle coordinate  $\dot{\mathbf{X}}$ :

$$\mathcal{U}_g(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) \cdot \dot{\mathbf{X}} + B(\mathbf{X}, t) \quad (3.55)$$

con  $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_{3n})$  funzione vettoriale da un aperto di  $\mathbb{R}^{3n+1}$  in  $\mathbb{R}^{3n}$  e  $B$  funzione a valori reali. Sostituiamo l'espressione (3.55) in (3.53) per trovare la struttura del campo di forze in termini delle funzioni  $\mathbf{A}$  e  $B$ .

Dato che (vedi (5.70))  $\nabla_{\mathbf{X}} (\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) \cdot \dot{\mathbf{X}}) = (\mathbf{J}_{\mathbf{X}} \mathbf{A})^T \dot{\mathbf{X}}$ , e che (vedi (5.70), (5.66))  $\frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathbf{X}}} \mathcal{U}_g) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} = (\mathbf{J}_{\mathbf{X}} \mathbf{A}) \dot{\mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ , si trova

$$\mathbf{F} = ((\mathbf{J}_{\mathbf{X}} \mathbf{A})^T - (\mathbf{J}_{\mathbf{X}} \mathbf{A})) \dot{\mathbf{X}} + \nabla_{\mathbf{X}} B - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (3.56)$$

La matrice quadrata

$$\mathcal{A}(\mathbf{X}, t) = (\mathbf{J}_{\mathbf{X}} \mathbf{A})^T - (\mathbf{J}_{\mathbf{X}} \mathbf{A}) \quad (3.57)$$

è **antisimmetrica**, pertanto il termine  $[(\mathbf{J}_{\mathbf{X}} \mathbf{A})^T - (\mathbf{J}_{\mathbf{X}} \mathbf{A})] \dot{\mathbf{X}}$  in (3.56) è di tipo **giroscopico** se il sistema è non vincolato o scleronomo, in virtù della Proposizione 3.1.

Possiamo quindi enunciare la

**Proposizione 3.6** *Per un sistema non vincolato o scleronomo, le forze  $\mathbf{F}$  non dipendenti esplicitamente dal tempo che ammettono un potenziale generalizzato sono necessariamente del tipo  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ , con  $\mathbf{F}_1$  di tipo giroscopico e  $\mathbf{F}_2$  di tipo conservativo.*

**Esercizio 3.8** *Verificare che, se la forma differenziale in  $R^{3n}$  che ha per coefficienti gli elementi del vettore  $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_{3n})$ , ovvero  $\sum_{i=1}^{3n} A_i(\mathbf{X}, t) d\xi_i$  è esatta e  $W(\mathbf{X}, t)$  è una primitiva, allora la (3.56) definisce in*

*realtà un campo conservativo di potenziale  $U = B - \frac{\partial W}{\partial t}$ . Determinare la relazione fra  $U_g$  definito dalla (3.55) e  $U$ .*

### 3.6 Il potenziale elettromagnetico

La (3.56) nel caso  $n = 1$  ammette formalmente una scrittura alternativa che vale la pena di considerare. Se  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ , si definisce **rotore** di  $\mathbf{A}$  il vettore di  $\mathbb{R}^3$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_3}{\partial \xi_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \xi_3}, \frac{\partial A_1}{\partial \xi_3} - \frac{\partial A_3}{\partial \xi_1}, \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} \right).$$

Dato  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ , si verifica subito la coincidenza degli operatori (vedi (3.57))

$$\mathcal{A}\mathbf{y} = ((\mathbf{J}_x\mathbf{A})^T - (\mathbf{J}_x\mathbf{A}))\mathbf{y} = \mathbf{y} \wedge \text{rot } \mathbf{A}. \quad (3.58)$$

La (3.58) non è altro che la formula vettoriale

$$(\mathbf{y} \wedge \text{rot } \mathbf{A}) + (\mathbf{y} \cdot \nabla_x) \mathbf{A} = \nabla_x (\mathbf{y} \cdot \mathbf{A}), \quad \mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3,$$

dove il simbolo  $(\mathbf{y} \cdot \nabla_x)$  indica l'operazione

$$(\mathbf{y} \cdot \nabla_x) \mathbf{A} = y_1 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi_1} + y_2 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi_2} + y_3 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi_3}, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3),$$

coincidente con  $(\mathbf{J}_x\mathbf{A})\mathbf{y}$ . Si osservi, facendo riferimento alla (5.70), che  $\nabla_x (\mathbf{y} \cdot \mathbf{A})$  coincide con  $(\mathbf{J}_x\mathbf{A})^T \mathbf{y}$  in quanto  $\mathbf{y}$  va considerato costante.

In definitiva, se consideriamo il caso tridimensionale di un punto  $P$  di coordinate  $\mathbf{x}$  in  $\mathbb{R}^3$  e velocità  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ , la struttura (3.56) conduce alla formula

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{A} + \nabla_x B - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (3.59)$$

che rappresenta un campo di forze con potenziale generalizzato (3.55), ovvero

$$U_g(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v} + B(\mathbf{x}, t) \quad (3.60)$$

Un'applicazione notevole della rappresentazione (3.59) consiste nel considerare una carica elettrica puntiforme in un **campo elettromagnetico** sottoposta alla **forza di Lorentz**

$$\mathbf{F} = e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{H} \right) \quad (3.61)$$

dove  $e$  è l'intensità della carica,  $c$  è la velocità della luce,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  sono le intensità del campo elettrico e magnetico, rispettivamente. Le equazioni di Maxwell consentono di scrivere

$$\begin{cases} \text{div } \mathbf{H} = 0, \\ \text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (3.62)$$

Essendo  $\mathbf{H}$  a divergenza nulla, possiamo esprimere il campo magnetico come  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}_1$  per un opportuno vettore  $\mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t)$ . Dunque, si vede dalla seconda delle (3.62) che il campo  $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t}$  ha rotore nullo e può essere espresso come gradiente di una funzione  $B_1(\mathbf{x}, t)$ . Complessivamente, il campo (3.61) si scrive

$$\mathbf{F} = e \left( \nabla_x B_1 - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{A}_1 \right). \quad (3.63)$$

Si riconosce nella (3.63) la struttura (3.59), scegliendo  $B = eB_1$  e  $\mathbf{A} = e\mathbf{A}_1/c$ .

Il campo (3.61) ammette dunque un potenziale generalizzato corrispondente a (3.60), ovvero

$$U_g = e \left( B_1(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t) \right)$$

con  $B_1$  e  $\mathbf{A}_1$  legati al campo elettromagnetico  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  tramite

$$\text{rot } \mathbf{A}_1 = \mathbf{H}, \quad \nabla_x B_1 = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t}.$$

### 3.7 Il potenziale generalizzato nel formalismo lagrangiano

Consideriamo un sistema vincolato olonomo, siano  $\mathbf{q}$  i parametri lagrangiani e  $\mathbf{X}(\mathbf{q}, t)$  il vettore rappresentativo.

Se la forza  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3n}$  ammette un potenziale generalizzato  $\mathcal{U}_g(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t)$  come in (3.53), possiamo esprimere la funzione potenziale nelle variabili lagrangiane, in modo analogo alla definizione (3.2):

$$U_g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{U}_g(\mathbf{X}(\mathbf{q}, t), \dot{\mathbf{X}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t) \quad (3.64)$$

dove  $\dot{\mathbf{X}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  è naturalmente la (2.26).

Dimostriamo ora una proprietà che generalizza la (3.3), nel senso che le componenti lagrangiane della forza discendono dal potenziale generalizzato  $U_g$ . Più precisamente:

**Proposizione 3.7** *Per un sistema olonomo con parametrizzazione  $\mathbf{q}$ , se  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t)$  ammette il potenziale generalizzato  $\mathcal{U}_g$ , allora le componenti lagrangiane (vedi (2.20))  $\mathbf{F}_\theta^{(\mathbf{q})}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  verificano*

$$\mathbf{F}_\theta^{(\mathbf{q})}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \nabla_{\mathbf{q}} U_g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} U_g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)), \quad (3.65)$$

dove  $U_g$  è la funzione definita in (3.64).

**Dim.** Si ha, tenendo conto di (5.69), (2.68), (2.71):

$$\nabla_{\mathbf{q}} U_g = (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X})^T \nabla_{\mathbf{X}} \mathcal{U}_g + \frac{d}{dt} [(J_{\mathbf{q}} \mathbf{X})^T] \nabla_{\dot{\mathbf{X}}} \mathcal{U}_g, \quad \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} U_g = (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X})^T \nabla_{\dot{\mathbf{X}}} \mathcal{U}_g.$$

Dunque:

$$\nabla_{\mathbf{q}} U_g - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} U_g = (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X})^T \left[ \nabla_{\mathbf{X}} \mathcal{U}_g - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{X}}} \mathcal{U}_g \right] = (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X})^T \mathbf{F} = \mathbf{F}_\theta^{(\mathbf{q})}$$

e la (3.65) è dimostrata.  $\square$

Le componenti lagrangiane  $\mathbf{F}_\theta$ , come sappiamo, si trasformano secondo la formula (2.23). L'espressione differenziale a destra dell'uguale in (3.65) deve dunque trasformarsi anch'essa in modo covariante, in modo analogo a quanto visto in (3.5). Vogliamo verificare direttamente questa proprietà. Per brevità, definiamo

$$\mathcal{D}^{(\mathbf{q})} = \nabla_{\mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \quad (3.66)$$

l'operatore differenziale che agisce sulle funzioni  $U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  a valori reali e almeno  $C^2$  in  $K \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}$ ,  $K$  aperto in  $\mathbb{R}^\ell$ , nel seguente modo:

$$\mathcal{D}^{(\mathbf{q})} U = \nabla_{\mathbf{q}} U - \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} U).$$

Si osservi che  $\mathcal{D}^{(\mathbf{q})} U$  è un vettore di  $\mathbb{R}^\ell$  che dipende dagli argomenti  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ .

Sia  $\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t)$  una trasformazione invertibile di parametri come in (2.3). La trasformazione induce il cambiamento delle variabili cinetiche come in (2.30), ovvero

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = (J_{\mathbf{q}} \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t)) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial t}(\mathbf{q}, t),$$

mentre la trasformazione inversa  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t)$  porta alla trasformazione

$$\dot{\mathbf{q}}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t) = (J_{\bar{\mathbf{q}}} \mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t)) \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}(\bar{\mathbf{q}}, t).$$

Ad ogni funzione  $U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  che sia almeno  $C^2$  in  $K \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}$  corrisponde pertanto la funzione

$$\bar{U}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t) = U(\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t), \dot{\mathbf{q}}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t), t) \quad (3.67)$$

della medesima regolarità di  $U$ , dato che si assume la trasformazione (2.3) sufficientemente regolare. Dimostriamo quindi la seguente

**Proposizione 3.8** Sia  $\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t)$  una trasformazione invertibile di parametri come in (2.3). Allora, per ogni funzione  $U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  che sia almeno  $C^2$  in  $K \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}$  vale

$$\mathcal{D}^{(\mathbf{q})}U = (J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}})^T \mathcal{D}^{(\bar{\mathbf{q}})}\bar{U} = (J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}})^T \left[ \nabla_{\bar{\mathbf{q}}}\bar{U} - \frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{\bar{\mathbf{q}}}}\bar{U}) \right] \quad (3.68)$$

dove  $\bar{U}$  è la funzione (3.67) calcolata nelle nuove variabili.

**Dim.** Riferendosi alla formula (5.70), pensando a  $N = 2\ell$  e  $\mathbf{y} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in K \times \mathbb{R}^{2\ell}$ , si ha:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{y}} &= (\nabla_{\mathbf{q}}, \nabla_{\dot{\mathbf{q}}})^T, \quad \nabla_{\bar{\mathbf{y}}} = (\nabla_{\bar{\mathbf{q}}}, \nabla_{\dot{\bar{\mathbf{q}}}})^T, \\ J_{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{y}} &= \begin{pmatrix} J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}} & J_{\dot{\mathbf{q}}}\bar{\mathbf{q}} \\ J_{\mathbf{q}}\dot{\bar{\mathbf{q}}} & J_{\dot{\mathbf{q}}}\dot{\bar{\mathbf{q}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}} & \mathbf{0} \\ \frac{d}{dt}(J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}) & J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con  $\mathbf{0}$  matrice nulla  $\ell \times \ell$ . Per la seconda riga dell'ultima matrice scritta si tenga conto della (2.35) e dell'inversione nell'ordine di derivazione fra derivate rispetto alle  $\mathbf{q}$  e derivata  $d/dt$ .

La (5.70), scrivendo per semplicità solo gli operatori, assume dunque la forma

$$\nabla_{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} \\ \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}]^T & [d/dt(J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}})]^T \\ \mathbf{0} & [J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}]^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_{\bar{\mathbf{q}}} \\ \nabla_{\dot{\bar{\mathbf{q}}}} \end{pmatrix} = \nabla_{\bar{\mathbf{y}}}, \quad (3.69)$$

ovvero, per componenti,

$$\nabla_{\mathbf{q}} = [J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}]^T \nabla_{\bar{\mathbf{q}}} + \frac{d}{dt}[J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}]^T \nabla_{\dot{\bar{\mathbf{q}}}}, \quad \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} = [J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}]^T \nabla_{\dot{\bar{\mathbf{q}}}}.$$

Si ha dunque

$$\mathcal{D}^{(\mathbf{q})} = [J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}]^T \nabla_{\bar{\mathbf{q}}} + \frac{d}{dt}[J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}]^T \nabla_{\dot{\bar{\mathbf{q}}}} - \frac{d}{dt}([J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}]^T \nabla_{\dot{\bar{\mathbf{q}}}}) = [J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}]^T \nabla_{\bar{\mathbf{q}}} - [J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}]^T \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\bar{\mathbf{q}}}}$$

e la (3.68) è dimostrata.  $\square$

**Osservazione 3.2** Nella formula (3.68) rientra ovviamente la (3.5), ogni volta che  $U = U(\mathbf{q}, t)$ . Inoltre, le equazioni di moto (2.73) e (3.7) si scrivono rispettivamente

$$\mathcal{D}^{(\mathbf{q})}T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{F}_\theta^{(\mathbf{q})}, \quad \mathcal{D}^{(\mathbf{q})}\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0.$$

La covarianza dell'operatore  $\mathcal{D}^{(\mathbf{q})}$  almeno sulla funzione  $T$  era d'altra parte già nota tramite la (2.66).

Un'ulteriore proprietà dell'operatore  $\mathcal{D}^{(\mathbf{q})}$  è la seguente:

**Proprietà 3.2** Per una qualunque funzione  $F(\mathbf{q}, t)$  di classe almeno  $C^2$  in  $K \times I \subseteq \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}$ , la funzione derivata totale

$$G(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{d}{dt}F(\mathbf{q}, t) = \nabla_{\mathbf{q}}F(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{q}, t)$$

verifica

$$\mathcal{D}^{(\mathbf{q})}G = \nabla_{\mathbf{q}}G - \frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}G) = 0. \quad (3.70)$$

La verifica di (3.70) è immediata, essendo  $\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}G = \nabla_{\mathbf{q}}F$  e, per inversione in ordine di derivazione,  $\frac{d}{dt}(\nabla_{\mathbf{q}}F) - \nabla_{\mathbf{q}}\left(\frac{dF}{dt}\right) = 0$ . Si ha dunque il

**Corollario 3.1** Le funzioni Lagrangiane  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  e

$$\hat{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + G(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{d}{dt}F(\mathbf{q}, t) \quad (3.71)$$

hanno le medesime equazioni di moto (3.7).

Ogni funzione  $F(\mathbf{q}, t)$  in (3.95) viene detta **funzione di gauge dinamica** e la trasformazione lineare (riguardante la funzione e non le coordinate, come invece avviene per le trasformazioni (3.92))  $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \frac{dF}{dt}$  **trasformazione di gauge dinamica**.

Torneremo sulla questione di Lagrangiane differenti che danno luogo allo stesso problema dinamico nel prossimo Paragrafo. Ripartiamo ora dai potenziali (3.64) e esaminiamo la loro struttura rispetto alle variabili lagrangiane  $\mathbf{q}$  e alle velocità generalizzate  $\dot{\mathbf{q}}$ .

Vediamo che la dipendenza lineare (3.55) riletta tramite la (3.64), che si scrive  $U_g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{X}(\mathbf{q}, t), t) \cdot \dot{\mathbf{X}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + B(\mathbf{X}(\mathbf{q}, t), t)$ , comporta la dipendenza lineare di  $U_g$  dalle variabili  $\dot{\mathbf{q}}$ :

$$U_g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \alpha(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \beta(\mathbf{q}, t) \quad (3.72)$$

con  $\alpha$  vettore in  $\mathbb{R}^\ell$  e  $\beta$  funzione scalare definiti da

$$\alpha(\mathbf{q}, t) = (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})^T \mathbf{A}(\mathbf{X}(\mathbf{q}, t), t) \quad \beta(\mathbf{q}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{X}(\mathbf{q}, t), t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X}(\mathbf{q}, t) + B(\mathbf{X}(\mathbf{q}, t), t). \quad (3.73)$$

Sostituendo l'espressione (3.72) in (3.65), si determinano le corrispondenti componenti lagrangiane:

$$\mathbf{F}_\theta^{(\mathbf{q})}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = [(J_{\mathbf{q}}\alpha(\mathbf{q}, t))^T - J_{\mathbf{q}}\alpha(\mathbf{q}, t)] \dot{\mathbf{q}} + \nabla_{\mathbf{q}}\beta(\mathbf{q}, t) - \frac{\partial \alpha}{\partial t}(\mathbf{q}, t). \quad (3.74)$$

D'altra parte, le (3.74) si ottengono anche dalle componenti lagrangiane di (3.56):

$$\mathbf{F}_\theta^{(\mathbf{q})} = (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})^T [(J_{\mathbf{X}}\mathbf{A})^T - (J_{\mathbf{X}}\mathbf{A})] \dot{\mathbf{X}} + (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})^T \left( \nabla_{\mathbf{X}}B - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right). \quad (3.75)$$

La coincidenza delle (3.75) con le (3.74) è una semplice verifica basata sulle relazioni (3.73).

**Osservazione 3.3** *Rimanendo in un contesto puramente lagrangiano, potremmo senz'altro partire dalla (3.65), affermando che la forza  $\mathbf{F}$  ammette un potenziale generalizzato  $U_g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  se le componenti lagrangiane verificano la (3.65). In questo caso, esplicitando la (3.65) come in come si è fatto in (3.54), si ottiene*

$$\mathbf{F}_\theta^{(\mathbf{q})}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \nabla_{\mathbf{q}}U_g - \left( J_{\mathbf{q}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}U_g)\dot{\mathbf{q}} + J_{\dot{\mathbf{q}}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}U_g)\ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}U_g \right) \quad (3.76)$$

e si mostra direttamente che il potenziale generalizzato  $U_g$  deve dipendere linearmente dalle velocità generalizzate  $\dot{\mathbf{q}}$ , ovvero si scrivono direttamente le (3.72).

Coerentemente con (3.37), la matrice  $(J_{\mathbf{q}}\alpha)^T - J_{\mathbf{q}}\alpha$  è antisimmetrica. La Proposizione 3.6 può essere formulata come segue, nel contesto del formalismo lagrangiano:

**Proposizione 3.9** *Se le componenti lagrangiane di  $\mathbf{F}$  verificano le (3.65) e il potenziale generalizzato associato (3.72) è tale che  $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0$ , allora le componenti lagrangiane sono necessariamente costituite dalle forze potenziali lagrangiane di componenti  $\nabla_{\mathbf{q}}\beta(\mathbf{q}, t)$  con potenziale lagrangiano  $\beta(\mathbf{q}, t)$  e dalle forze giroscopiche lagrangiane (vedi (3.36)) lineari omogenee di componenti  $\Gamma(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}}$  dove  $\Gamma$  è la matrice antisimmetrica  $\ell \times \ell$   $\Gamma = (J_{\mathbf{q}}\alpha)^T - J_{\mathbf{q}}\alpha = -\Gamma^T$ .*

La questione sostanzialmente inversa viene lasciata per esercizio:

**Esercizio 3.9** *Dato il sistema di forze con componenti lagrangiane*

$$\mathbf{F}_\theta^{(\mathbf{q})}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \Gamma(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}}$$

con  $\Gamma = -\Gamma^T$ , stabilire le condizioni per cui il sistema ammette un potenziale generalizzato e determinare il corrispondente potenziale [ricordare che una matrice quadrata  $M$  ammette un'unica rappresentazione  $M = S + A$ , dove  $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$  è simmetrica e  $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$  è antisimmetrica].

**Esercizio 3.10** Ripercorrere l'esercizio 3.5 nel formalismo lagrangiano: quale forma differenziale occorre ipotizzare esatta?

Occupiamoci ora della scrittura delle equazioni di moto e del bilancio energetico nei sistemi olonomi con forze derivanti da un potenziale generalizzato.

La (3.65) ha un'importante conseguenza: come nel caso dei potenziale ordinari, per un sistema soggetto a forze che ammettono un potenziale generalizzato è possibile definire la **funzione Lagrangiana**

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + U_g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (3.77)$$

e di scrivere le equazioni di moto esattamente come in (3.7).

Ricordando il risultato (3.72), definiamo

$$U_{g,1} = \alpha(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad U_{g,0} = \beta(\mathbf{q}, t) \quad (3.78)$$

la parte di grado uno e zero rispettivamente di  $U_g$  come polinomio nelle  $\dot{\mathbf{q}}$ .

Analogamente a quanto osservato in (3.10), la funzione lagrangiana è ancora una **funzione quadratica** nelle variabili velocità generalizzate  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0$  e le (3.11) vengono sostituite da

$$\mathcal{L}_2 = T_2, \quad \mathcal{L}_1 = T_1 + U_{g,1}, \quad \mathcal{L}_0 = T_0 + U_{g,0}. \quad (3.79)$$

Più precisamente (vedi (2.57) e (3.78)):

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} \quad \mathcal{L}_1 = [\mathbf{b}(\mathbf{q}, t) + \alpha(\mathbf{q}, t)] \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathcal{L}_0 = c(\mathbf{q}, t) + \beta(\mathbf{q}, t). \quad (3.80)$$

Una importante conseguenza è che la parte quadratica  $\mathcal{L}_2$  è ancora una **forma quadratica definita positiva**.

Dal punto di vista del **bilancio energetico**, se il sistema è soggetto a forze con potenziale generalizzato  $U_g$ , si ha da (3.22):

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (3.81)$$

dove  $\mathcal{L} = T + U_g$  e l'energia è definita da (3.23). Osserviamo che in questo caso è essenziale in (3.23) la presenza di  $\mathcal{L}$  nelle derivate rispetto alle  $\dot{q}_k$ ,  $k = 1, \dots, \ell$ , dato che il potenziale dipende da queste variabili. Specificando in funzione dei termini in (3.79), si vede che (ricordando la formula di Eulero (2.100))

$$\mathcal{E} = 2T_2 + T_1 + U_{g,1} - (T_2 + T_1 + T_0 + U_{g,1} + U_{g,0}) = T_2 - T_0 - U_{g,0}.$$

Notiamo l'assenza della parte giroscopica di potenziale  $U_{g,1}$ .

In particolare:

- (i) se il sistema è a vincoli lisci e le funzioni  $A$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $c$  in (2.57) e  $\beta$  in (3.78) non dipendono esplicitamente dal tempo si ha, durante il moto l'**integrale di Jacobi**

$$T_2 - T_0 - U_{g,0} = \text{costante}, \quad (3.82)$$

- (ii) se il sistema è a vincoli scleronomi e valgono le ipotesi elencate in (i), allora si conserva la quantità

$$T - U_{g,0} = \text{costante}. \quad (3.83)$$

Ovviamente, le medesime considerazioni contengono il caso di potenziali ordinari, in cui  $U \equiv U_{g,0}$ ,  $U_{g,1} \equiv 0$  e i casi (i), (ii) permettono di ritrovare le formule (3.20), (3.19) rispettivamente.

Per completezza, osserviamo che il bilancio (3.81) può essere ottenuto anche da (3.16), tenendo presente che nel caso dei potenziali generalizzati la relazione (che generalizza la (3.15)) fra potenziale e lavoro è

$$\frac{dU_g}{dt} = \frac{d\hat{L}_F}{dt} + \frac{\partial U_g}{\partial t} + \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} U_g \cdot \dot{\mathbf{q}}). \quad (3.84)$$

Per trovare la (3.84), si parte da (vedi (5.67))  $\frac{dU_g}{dt} = \nabla_{\mathbf{q}}U_g \cdot \dot{\mathbf{q}} + \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}U_g \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial U_g}{\partial t}$  e si tiene conto che (vedi (3.65))

$$\frac{d\hat{L}_F}{dt} = \hat{W}_F = \mathbf{F}_\theta \dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{q}}U_g \cdot \dot{\mathbf{q}} - \frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}U_g) \cdot \dot{\mathbf{q}}.$$

La sostituzione di (3.84) in (3.17) porta alla stessa formula (3.81).

Osserviamo che la (3.84) può essere scritta, mediante la (2.100), anche come

$$\frac{d\hat{L}_F}{dt} = \frac{dU_g}{dt} - \frac{\partial U_g}{\partial t} - \frac{dU_{g,1}}{dt} = \frac{dU_{g,0}}{dt} - \frac{\partial U_g}{\partial t}$$

che sottolinea l'assenza della parte giroscopica in termini di lavoro virtuale. Se la funzione  $\alpha$  in (3.72) non dipende esplicitamente dal tempo, allora il bilancio energetico appena scritto è quello delle forze conservative (3.15), con potenziale  $U_{g,0}$ .

Nel caso di presenza simultanea di forze con potenziale generalizzato  $U_g$  e forze  $\mathbf{G}$  non riconducibili ad un potenziale e nel caso di vincoli non lisci, la (3.81) ammette l'ovvia generalizzazione

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \hat{W}_G + \hat{W}_\Phi \quad (3.85)$$

dove  $\mathcal{L} = T + U_g$  e  $\mathcal{E}$  è definita come in sono definite come definita come in (3.23).

### 3.8 Sistemi Lagrangiani

Premettiamo alcune definizioni a carattere generale riguardanti i sistemi di equazioni differenziali.

Data  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  funzione definita per  $\mathbf{x} \in \Omega$  sottoinsieme aperto e connesso di  $\mathbb{R}^n$ ,  $t \in I = ]\alpha, \omega[ \subseteq \mathbb{R}$  e a valori in  $\mathbb{R}^n$ , si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (3.86)$$

Se  $\mathbf{f}$  è continua in  $I \times \Omega$  e localmente Lipschitziana rispetto a  $\mathbf{x}$ , allora per ogni punto  $(\tau, \chi) \in I \times \Omega$  esiste un'unica soluzione massimale  $\mathbf{x}(t)$  del sistema tale che  $\mathbf{x}(\tau) = \chi$ . Chiamando  $I_{(\tau, \chi)} = ]\alpha(\tau, \chi), \omega(\tau, \chi)[$  l'intervallo della soluzione massimale, risulta definita la funzione (che indichiamo con  $\mathbf{x}_{(\tau, \chi)}$ ) a valori in  $\Omega$

$$(t, \tau, \chi) \rightarrow \mathbf{x}_{(\tau, \chi)}(t), \quad (t, \tau, \chi) \in I_{(\tau, \chi)} \times I \times \Omega \quad (3.87)$$

che associa al punto  $\chi \in \Omega$  il punto  $\mathbf{x}$  soluzione al tempo  $t$  del sistema (3.86) con dato iniziale  $\mathbf{x}(\tau) = \chi$ .

Se in (3.87) fissiamo i valori  $\tau$  e  $t$ , la corrispondenza

$$\mathcal{F}_{(\tau, t)} : \Omega \rightarrow \Omega, \quad \mathcal{F}_{(\tau, t)}(\chi) = \mathbf{x}_{(\tau, \chi)}(t) \in \Omega \quad (3.88)$$

definisce al variare di  $\chi$  in  $\Omega$  una trasformazione di  $\Omega$  in sé che chiamiamo **flusso** del sistema differenziale (3.86). L'insieme di definizione di  $\mathcal{F}_{(\tau, t)}$  è tutto  $\Omega$  se, naturalmente, la soluzione  $\mathbf{x}(t, \tau, \chi)$  è definita al tempo  $t$  per ogni  $\chi \in \Omega$ , ovvero se  $t \in I_{(\tau, \chi)} \forall \chi \in \Omega$ .

Richiederemo, in generale, che la funzione definita in (3.88) sia almeno  $C^2$ .

L'insieme  $\Omega$  viene detto **spazio delle fasi** per il sistema, mentre lo **spazio delle fasi esteso** è l'insieme  $\Omega \times I$ .

Una funzione definita nello spazio esteso

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathbf{x}, t), \quad \mathcal{J} : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$$

che rimane costante lungo le soluzioni di (3.86), ovvero una funzione tale che per ogni  $(\tau, \chi) \in I \times \Omega$

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}_{(\tau, \chi)}(t), t) \equiv \mathcal{J}(\chi, \tau), \quad t \in I_{(\tau, \chi)} \quad (3.89)$$

viene detta **integrale primo** per il sistema (3.86).

Ricordiamo infine che un cambiamento invertibile di variabili  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$  trasforma il sistema (3.86) in

$$\dot{\mathbf{y}} = (J_{\mathbf{x}}\mathbf{y})\mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} \quad (3.90)$$

dove il secondo membro va espresso in funzione di  $\mathbf{y}$  mediante la trasformazione inversa  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, t)$ .

Le equazioni di moto trasformate sono dette **invarianti** se i sistemi (3.86) e (3.90) hanno soluzioni identicamente coincidenti se associati alla medesima condizione iniziale  $\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{y}(\tau) = \chi$ .

La struttura del sistema (3.86) che ora ci interessa è quella del sistema delle equazioni di Lagrange (3.7) (estese anche al caso di potenziali generalizzati) le quali, come si è osservato in (2.79), possono essere scritte nella forma normale:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t).$$

Definendo  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , si ha  $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{W}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  e si ottiene esattamente la forma (3.86), con  $n = 2\ell$ . Chiamiamo la coppia  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  **stato cinematico**. Possiamo supporre, in generale, che  $\mathbf{q} \in K$  aperto di  $\mathbb{R}^\ell$ ,  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^\ell$ . Lo spazio  $\mathcal{S} = K \times \mathbb{R}^\ell$  degli stati cinematici è dunque lo **spazio delle fasi** Lagrangiano. Dato che le variabili  $\mathbf{q}$  rappresentano la parametrizzazione della varietà delle configurazioni del sistema olonomo vincolato, gli stati cinematici parametrizzano il **fibrato tangente**.

Viceversa, diremo che un sistema meccanico regolato dalle equazioni  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  è un **sistema meccanico Lagrangiano** se esiste una funzione  $\mathcal{L}(\mathbf{x}, t)$  che verifica la condizione di regolarità (3.12) e tale che le soluzioni del sistema di partenza coincidano con quelle del sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}, \\ \frac{d}{dt} (\nabla_{\mathbf{v}}\mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t)) - \nabla_{\mathbf{q}}\mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = 0 \end{cases} \quad (3.91)$$

tramite la corrispondenza  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{v})$ . Al sistema Lagrangiano si associano dunque gli stati cinematici  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ . Si consideri l'insieme delle trasformazioni di coordinate  $\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t)$ , che formalmente scriviamo come l'insieme dei diffeomorfismi (vedi anche (2.3))

$$\mathcal{G} = \{\gamma_{\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}} \in C^2 : K_{\mathbf{q}} \rightarrow K_{\bar{\mathbf{q}}}, \gamma_{\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}} \text{ invertibile}\} \quad (3.92)$$

essendo  $K_{\mathbf{q}}, K_{\bar{\mathbf{q}}} \subseteq \mathbb{R}^\ell$  gli aperti connessi in cui sono definite le parametrizzazioni  $\mathbf{q}$  e  $\bar{\mathbf{q}}$ , rispettivamente.

Si verifica subito che  $\mathcal{G}$  ha struttura di **gruppo** che chiamiamo **gruppo delle trasformazioni puntuali**. La proprietà di covarianza riassunta in (3.68) può essere ora rinunciata come segue:

**Proposizione 3.10** *Dato un sistema meccanico Lagrangiano con stati cinematici  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  e Lagrangiana  $\mathcal{L}$ , una qualunque trasformazione  $\gamma_{\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}} \in \mathcal{G}$  dà luogo ad un sistema Lagrangiano con stati cinematici (vedi (2.4), (2.30))*

$$(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}) = \left( \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t), (J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial t} \right)$$

e Lagrangiana

$$\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t) = \mathcal{L} \left( \mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t), (J_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q}) \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}, t \right) \quad (3.93)$$

essendo  $\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t)$  la trasformazione inversa  $\gamma_{\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{q}} = (\gamma_{\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}})^{-1}$  e  $J_{\bar{\mathbf{q}}}$  definita in (2.5).

Infatti, applicando la (3.68) alla funzione  $\mathcal{L}$  si vede che

$$\frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\bar{\mathbf{q}}}}\mathcal{L}) - \nabla_{\bar{\mathbf{q}}}\mathcal{L} = (J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}})^T \left( \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}) - \nabla_{\mathbf{q}}\mathcal{L} \right) \quad (3.94)$$

dunque gli stati cinematici  $(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}})$  sono soluzioni del sistema di equazioni di Eulero–Lagrange con Lagrangiana  $\bar{\mathcal{L}}$  se e solo se lo sono gli stati  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  del sistema con Lagrangiana  $\mathcal{L}$ .

Si osservi che la  $k$ -esima componente della (3.94),  $k = 1, \dots, \ell$ , non è altro che la (3.9): la covarianza di  $\mathcal{D}$  sulla Lagrangiana era in effetti già nota.

Ci poniamo ora la questione se il medesimo insieme di stati cinematici  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  può essere associato a più di una funzione Lagrangiana.

E' importante a tale proposito richiamare il Corollario 3.1, che può essere enunciato in questo contesto come segue:

**Proposizione 3.11** *Se  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  definisce un certo sistema Lagrangiano, la trasformazione lineare di gauge dinamica*

$$\hat{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + G(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{d}{dt}F(\mathbf{q}, t), \quad (3.95)$$

*dà luogo al medesimo sistema Lagrangiano.*

Usando altri termini, possiamo dire che la Lagrangiana di un sistema meccanico Lagrangiano è determinata a meno di una funzione di gauge dinamica  $F(\mathbf{q}, t)$  di classe almeno  $C^2$ .

Anticipando una nozione fondamentale del formalismo Hamiltoniano, definiamo le funzioni  $(p_1, \dots, p_\ell)$  come le componenti del vettore

$$\mathbf{p} = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (3.96)$$

Il vettore  $\mathbf{p}$  viene detto **vettore momento canonico**.

Per una trasformazione (3.92) che dà luogo al sistema lagrangiano come indicato nella Proposizione 3.10, si vede subito che il vettore momento canonico si trasforma in modo covariante (vedi (2.35)):

$$\bar{\mathbf{p}} = \nabla_{\dot{\bar{\mathbf{q}}}}\bar{\mathcal{L}} = (J_{\dot{\bar{\mathbf{q}}}}\dot{\bar{\mathbf{q}}})^T \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L} = (J_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q})^T \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L} = (J_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q})^T \mathbf{p}$$

**Esercizio 3.11** *Verificare che il vettore momento canonico della Lagrangiana  $\hat{\mathcal{L}}$  legata a  $\mathcal{L}$  mediante la trasformazione di gauge (3.95) è*

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \nabla_{\mathbf{q}}F. \quad (3.97)$$

### 3.9 Trasformazioni ammissibili e teorema di Noether

Richiamando la Definizione (3.89), dove si sceglie  $\tau = 0$  come tempo iniziale,  $\chi = (\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))$  come stato cinematico iniziale di un sistema Lagrangiano con Lagrangiana  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , chiamiamo **costante del moto** o **integrale primo del moto** ogni funzione

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad \mathcal{J} : K \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$\mathcal{J}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) \equiv \mathcal{J}(\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0), 0)$$

per ogni istante  $t$  in cui è definita la soluzione di (3.91) associato allo stato cinematico iniziale scelto.

Se la funzione  $\mathcal{J}$  è di classe almeno  $C^1$ , la condizione suddetta equivale a  $\frac{d}{dt}\mathcal{J} \equiv 0$ .

Un caso in cui si determina immediatamente un integrale primo del moto è quello di una **variabile ciclica** (o **ignorabile**) per la Lagrangiana, ovvero una variabile  $q_i$  per cui si ha identicamente

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0. \quad (3.98)$$

Dalla  $i$ -esima equazione di moto si vede che

$$\frac{d}{dt}p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0,$$

dunque  $p_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  è un integrale primo del moto. Viceversa, se  $p_i$  è costante, la variabile  $q_i$  è ciclica.

Se  $q_i$  è una variabile ciclica per la Lagrangiana  $\mathcal{L}$ , ovviamente non è detto che lo sia per la Lagrangiana  $\hat{\mathcal{L}}$  ottenuta mediante la trasformazione di gauge (3.95). La funzione  $\hat{p}_i$  rimane un integrale primo del moto se

e solo se  $\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial q_i} \equiv 0$ , ovvero se e solo se  $\frac{\partial F}{\partial q_i} \equiv 0$ , come d'altra parte si ricava anche da (3.97).

Sia  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  la Lagrangiana di un sistema lagrangiano e  $\gamma_{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}$  una trasformazione in  $\mathcal{G}$  (vedi (3.92)) con la proprietà

$$\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t) = \mathcal{L}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t). \quad (3.99)$$

Trasformazioni di questo tipo, che vengono dette anche **ammissibili**, lasciano formalmente identica la funzione Lagrangiana, ovvero la Lagrangiana è **invariante** rispetto alla trasformazione. E' evidente che il sistema di equazioni di Lagrange associato a  $\mathcal{L}$  è **invariante** rispetto ad ogni trasformazione che abbia la proprietà (3.99), ovvero il sistema di equazioni con Lagrangiana  $\bar{\mathcal{L}}$  ha le medesime soluzioni del sistema con Lagrangiana  $\mathcal{L}$  se si impongono le medesime condizioni iniziali  $\mathbf{q}(0) = \bar{\mathbf{q}}(0)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\bar{\mathbf{q}}}(0)$ .

**Esercizio 3.12** Si verifichi che la trasformazione

$$\bar{q}_1 = q_1, \dots, \bar{q}_{i-1} = q_{i-1}, \bar{q}_i = q_i + \alpha, \bar{q}_{i+1} = q_{i+1}, \dots, \bar{q}_\ell = q_\ell$$

dove  $\alpha$  è un qualunque numero reale, è ammissibile per una Lagrangiana che ha  $q_i$  variabile ciclica.

**Esercizio 3.13** Per  $\ell = 2$ , si mostri che la trasformazione

$$\begin{cases} \bar{q}_1 = \cos \alpha q_1 + \sin \alpha q_2, \\ \bar{q}_2 = -\sin \alpha q_1 + \cos \alpha q_2, \end{cases}$$

$\alpha$  costante reale, è ammissibile per la Lagrangiana  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + U(|\mathbf{q}|)$ , dove  $|\mathbf{q}| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$ .

Più in generale, si verifichi che la trasformazione in  $\mathbb{R}^\ell$   $\bar{\mathbf{q}} = A\mathbf{q}$ , con  $A$  matrice costante **ortogonale**, ovvero  $A^T = A^{-1}$ , è ammissibile per ogni Lagrangiana del tipo  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = f(|\mathbf{q}|, |\dot{\mathbf{q}}|)$ , con  $|\mathbf{y}| = \sum_{i=1}^\ell \sqrt{y_i^2}$ .

**Osservazione 3.4** Pensando alla (3.95), possiamo definire più in generale una trasformazione ammissibile come una trasformazione in (3.92) per cui

$$\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t) = \mathcal{L}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t) + \frac{d}{dt}F(\bar{\mathbf{q}}, t) \quad (3.100)$$

per una funzione di gauge  $F$ , dato che tale trasformazione rende ancora invariante il sistema di equazioni per  $\mathcal{L}$ . In questo caso, però, la Lagrangiana non è invariante.

Ovviamente, non è detto che una trasformazione ammissibile per una opportuna funzione  $F$  rimanga tale se si sceglie una differente funzione di gauge dinamica.

Si consideri ora nell'insieme (3.92) una **famiglia di trasformazioni ad un parametro**

$$\mathcal{G} = \{\gamma_{\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}}^{(\alpha)} \in C^2 : K_{\mathbf{q}} \rightarrow K_{\bar{\mathbf{q}}}, \gamma_{\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}}^{(\alpha)} \text{ invertibile}, \alpha \in A \subseteq \mathbb{R}\} \quad (3.101)$$

parametrize come  $\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t, \alpha)$ , con funzione inversa  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha)$ . Si suppone che l'insieme  $A$  sia un aperto connesso di  $\mathbb{R}$ .

Le trasformazioni definite negli Esercizi 3.9 e 3.10, con  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sono del tipo (3.101). Esse sono trasformazioni particolari, in quanto ciascuna di esse ha una **struttura di gruppo rispetto al parametro**  $\alpha$ : per  $\alpha = 0$  si ha la trasformazione identica, la trasformazione inversa di quella associata a  $\alpha$  è la trasformazione associata a  $-\alpha$ . Le verifiche sono lasciate per esercizio.

Data una Lagrangiana  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , ciascun diffeomorfismo in (3.101)  $\gamma_{\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}}^{(\alpha)}$ ,  $\alpha \in A$ , trasforma  $\mathcal{L}$  in (vedi (3.93))

$$\bar{\mathcal{L}}^{(\alpha)}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t, \alpha) = \mathcal{L}(\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha), \dot{\mathbf{q}}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t, \alpha), t), \quad \alpha \in A \quad (3.102)$$

con  $\dot{\mathbf{q}}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t, \alpha) = [J_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha)]\dot{\bar{\mathbf{q}}} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha)$ .

In modo più compatto, indicando con  $\mathbf{y} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in U \times \mathbb{R}^\ell$ ,  $\bar{\mathbf{y}} = (\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}) \in U \times \mathbb{R}^\ell$ , possiamo scrivere la (3.105) come

$$\bar{\mathcal{L}}^{(\alpha)}(\bar{\mathbf{y}}, t, \alpha) = \mathcal{L}(\mathbf{y}(\bar{\mathbf{y}}, t, \alpha), t). \quad (3.103)$$

Per la (3.94), si ha (vedi (3.66) e (3.68))

$$\mathcal{D}^{(\mathbf{q})}\mathcal{L}(\mathbf{y}, t) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}^{(\bar{\mathbf{q}})}\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathbf{y}}, t, \alpha) = 0, \quad (3.104)$$

essendo per ipotesi  $(J_{\bar{\mathbf{q}}}\bar{\mathbf{q}})(\mathbf{q}, t, \alpha)$  non singolare per ogni  $\alpha \in A$ .

**Osservazione 3.5** Se esiste  $\alpha_0 \in A$  per cui la trasformazione  $\gamma_{\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}}^{(\alpha_0)}$  è l'identità, ovvero  $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t, \alpha_0) = \mathbf{q}$  (con inversa  $\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha_0) = \bar{\mathbf{q}}$ ), allora  $J_{\bar{\mathbf{q}}}\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t, \alpha_0)$  è la matrice identica  $\ell \times \ell$ , dunque  $\dot{\mathbf{q}}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t, \alpha_0) = \dot{\bar{\mathbf{q}}}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t, \alpha_0) = \dot{\mathbf{q}}$ . Pertanto, la (3.111) si scrive per  $\alpha = \alpha_0$ :

$$\bar{\mathcal{L}}^{(\alpha_0)}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t, \alpha_0) = \mathcal{L}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t) \quad (3.105)$$

ovvero la trasformazione in corrispondenza di  $\alpha_0$  è **ammissibile** (vedi (3.99)).

Vogliamo dimostrare la seguente

**Proposizione 3.12** *Si ha, per ogni  $\alpha \in A$ :*

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}^{(\alpha)}}{\partial \alpha}(\bar{\mathbf{y}}, t, \alpha) = \frac{d}{dt} \left( \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha}(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha) \right). \quad (3.106)$$

**Dim.** Calcolando la derivata rispetto al parametro  $\alpha$  dei due membri in (3.103) e teniamo conto delle equazioni (3.7) si trova

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}^{(\alpha)}}{\partial \alpha}(\bar{\mathbf{y}}, t, \alpha) = \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{L}(\mathbf{y}(\bar{\mathbf{y}}, t, \alpha), t) \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \alpha}(\bar{\mathbf{y}}, t, \alpha). \quad (3.107)$$

D'altra parte, tenendo conto delle equazioni (3.7) e supponendo di poter effettuare l'inversione nell'ordine di derivazione rispetto a  $t$  e  $\alpha$ , si ha

$$\nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{L} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \alpha} = \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{L} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha} + \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha} + \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha} \right),$$

dunque la (3.106).  $\square$

E' un utile esercizio ripercorrere la dimostrazione precedente partendo dalla relazione

$$\bar{\mathcal{L}}^{(\alpha)}(\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{y}, t, \alpha), t, \alpha) = \mathcal{L}(\mathbf{y}, t)$$

inversa, per così dire, rispetto alla (3.103). Derivando rispetto ad  $\alpha$  si trova stavolta

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}^{(\alpha)}}{\partial \alpha}(\bar{\mathbf{y}}, t, \alpha) + \nabla_{\bar{\mathbf{y}}} \bar{\mathcal{L}}^{(\alpha)}(\bar{\mathbf{y}}, t, \alpha) \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{y}}}{\partial \alpha}(\mathbf{y}, t, \alpha) = 0. \quad (3.108)$$

Si osservi che, essendo (vedi anche (1.57))

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{y}}}{\partial \alpha}(\mathbf{y}, t, \alpha) = -(J_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{y}}) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \alpha}, \quad \nabla_{\bar{\mathbf{y}}} \bar{\mathcal{L}}^{(\alpha)} = (J_{\bar{\mathbf{y}}} \bar{\mathcal{L}})^T \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{L},$$

la (3.108) coincide con la (3.107).

Ragionando poi come nella dimostrazione della Proposizione precedente e tenendo conto della (3.104), si conclude

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}^{(\alpha)}}{\partial \alpha} = -\nabla_{\bar{\mathbf{y}}} \bar{\mathcal{L}}^{(\alpha)} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{y}}}{\partial \alpha} = -\frac{d}{dt} \left( \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \bar{\mathcal{L}}^{(\alpha)} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \alpha} \right).$$

**Esercizio 3.14** *Verificare direttamente che  $\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \bar{\mathcal{L}}^{(\alpha)} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \alpha} = -\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha}$ ,  $\alpha \in A$ .*

Dalla Proposizione 3.12 segue immediatamente la seguente

**Proposizione 3.13** *Data una Lagrangiana  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  e una famiglia di trasformazioni invertibili  $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t, \alpha)$ ,  $\alpha \in A$ , come in (3.101), la quantità*

$$\mathcal{J}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t, \alpha) = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha}(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha)|_{\bar{\mathbf{q}}=\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t, \alpha)} \quad (3.109)$$

è un **integrale primo del moto** per ogni  $\alpha \in A$  se e solo se la Lagrangiana nelle nuove variabili  $\bar{\mathcal{L}}^{(\alpha)}$  è indipendente da  $\alpha$ , ovvero

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}^{(\alpha)}}{\partial \alpha}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t, \alpha) = 0. \quad (3.110)$$

**Osservazione 3.6** *Per quanto visto prima, si può equivalentemente affermare che la (3.110) è verificata se e solo se la quantità*

$$\bar{\mathcal{J}}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t, \alpha) = \nabla_{\dot{\bar{\mathbf{q}}}} \bar{\mathcal{L}}^{(\alpha)}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t, \alpha) \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, t, \alpha)|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha)}$$

è un **integrale primo del moto** per ogni  $\alpha \in A$ .

Si noti che (vedi Esercizio 3.11)  $\bar{\mathcal{I}} = -\mathcal{I}(\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha), \dot{\mathbf{q}}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t, \alpha), t, \alpha)$ .

Se vale la condizione (3.110), allora la quantità (3.109) è di fatto indipendente da  $\alpha$  e calcolabile rispetto ad un qualunque valore  $\alpha_0 \in A$ . Nelle ipotesi dell'Osservazione 3.5, ovvero se esiste  $\alpha_0$  per cui  $\gamma_{\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}}^{(\alpha_0)}$  è l'identità, allora la condizione (3.110) assicura che (3.105) vale per ogni  $\alpha \in A$ :

$$\bar{\mathcal{L}}^{(\alpha)}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t, \alpha) = \mathcal{L}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t), \quad \alpha \in A, \quad (3.111)$$

dunque tutte le trasformazioni  $\gamma_{\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}}^{(\alpha)}$ ,  $\alpha \in A$  sono **ammissibili** e lasciano invariata la Lagrangiana  $\mathcal{L}$ . L'integrale primo (3.109) si scrive in questo caso come

$$\mathcal{J}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha}(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha)|_{\bar{\mathbf{q}}=\mathbf{q}, \alpha=\alpha_0}. \quad (3.112)$$

Riassumiamo queste ultime considerazioni nel seguente risultato, noto come **Teorema di Noether** in ambito Lagrangiano.

**Teorema 3.1** *Sia  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  la Lagrangiana di un sistema e  $\mathcal{G}_\alpha$  una famiglia ad un parametro di trasformazioni (3.101),  $\alpha \in A$ , con  $\gamma_{\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}}^{(\alpha_0)}$  trasformazione identica,  $\alpha_0 \in A$ . Allora  $\mathcal{L}$  è **invariante** rispetto alla famiglia  $\mathcal{G}_\alpha$ , ovvero le trasformazioni sono tutte **ammissibili** se e solo se la quantità (3.112) è una **costante del moto**.*

Il risultato può essere esteso considerando le funzioni di gauge dinamiche (vedi (3.95)): se si considera, anziché la (3.105), la proprietà (3.100) per ogni  $\alpha \in A$ , ovvero

$$\bar{\mathcal{L}}^{(\alpha)}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t, \alpha) = \mathcal{L}(\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha), \dot{\mathbf{q}}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t, \alpha), t) = \mathcal{L}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t) + \frac{d}{dt} F(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha), \quad (3.113)$$

dove  $F$  è una funzione di gauge dinamica dipendente da  $\alpha$ , allora si ha, per la (3.106) e supponendo  $F$  almeno  $C^2$  in modo da poter invertire l'ordine di derivazione fra  $\alpha$  e  $t$ :

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}^{(\alpha)}}{\partial \alpha}(\bar{\mathbf{y}}, t, \alpha) = \frac{d}{dt} \left( \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha}(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha) \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \alpha}(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha) \right).$$

Dunque, l'esistenza di una famiglia ad un parametro di trasformazioni (3.101) con la proprietà di invarianza (3.113) è ora equivalente alla conservazione della quantità

$$\mathcal{J}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t, \alpha) = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha}(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha)|_{\bar{\mathbf{q}}=\mathbf{q}(\mathbf{q}, t, \alpha)} - \frac{\partial F}{\partial \alpha}(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha)|_{\bar{\mathbf{q}}=\mathbf{q}(\mathbf{q}, t, \alpha)}$$

calcolata per un qualunque  $\alpha \in A$ .

### 3.10 Gruppi ad un parametro di trasformazioni e campi vettoriali

Il teorema di Noether ha talvolta in letteratura una formulazione diversa da quella proposta appena sopra, che si presta meglio alla generalizzazione del teorema nel formalismo hamiltoniano ma che richiede la conoscenza di alcuni concetti teorici che ora andiamo a introdurre.

Una famiglia  $\mathcal{G}$  di applicazioni differenziabili e invertibili  $\gamma^{(\alpha)}$ ,  $\alpha \in A$ , definite in  $U \subseteq \mathbb{R}^N$ , ovvero

$$\mathcal{G} = \{ \gamma^{(\alpha)} \in C^1 : U \rightarrow U, \gamma^{(\alpha)} \text{ invertibile}, \alpha \in A \subseteq \mathbb{R} \} \quad (3.114)$$

si dice un **gruppo locale ad un parametro di trasformazioni** o di **diffeomorfismi** se

(i)  $\gamma^{(\alpha_0)}$  è l'identità  $id_U$ , per un certo  $\alpha_0 \in A$ ,

(ii)  $\gamma^{(\beta)} \circ \gamma^{(\alpha)} = \gamma^{(\beta)}(\gamma^{(\alpha)}) = \gamma^{(\alpha+\beta)}$  per ogni  $\alpha, \beta \in A$  e tali che  $\alpha + \beta \in A$ .

La proprietà (ii) ha un'immediata conseguenza. Se  $\alpha_0 - \beta$ ,  $\alpha + \beta$  appartengono entrambi all'insieme  $A$ , allora le trasformazioni  $\gamma^{(\alpha_0 - \beta)}$  e  $\gamma^{(\alpha_0 + \beta)}$   $\in \mathcal{G}$  sono una inversa dell'altra. Infatti:

$$\gamma^{(\alpha_0 - \beta)} \circ \gamma^{(\alpha_0 + \beta)} = \gamma^{(\alpha_0 + \alpha_0)} = \gamma^{(\alpha_0)} \circ \gamma^{(\alpha_0)} = id_U.$$

In base a quanto appena osservato, si vede che il diffeomorfismo inverso  $(\gamma^{(\alpha)})^{-1}$  (che esiste per definizione) appartiene ancora al gruppo  $\mathcal{G}$  per ogni  $\alpha \in A$  se e solo se  $A$  è un intervallo del tipo  $(\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta)$  con  $\delta > 0$ . Questa condizione è soddisfatta nelle numerose applicazioni (come quelle degli Esercizi 3.12 e 3.13) in cui si ha  $A = \mathbb{R}$ ,  $\alpha_0 = 0$ .

Sia ora  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), \dots, v_N(\mathbf{x}))$ , con  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in U \subseteq \mathbb{R}^N$ , un **campo vettoriale** definito in  $U$ . Le funzioni  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  sono per lo meno differenziabili.

Le **curve** o **linee integrali** del campo sono le curve  $\mathbf{x}(\lambda)$  il cui vettore tangente coincide con il campo in ogni punto. La linea integrale passante per  $\mathbf{x}_0 \in U$  per  $\lambda = \lambda_0$  assegnato si trova risolvendo l'equazione differenziale

$$\mathbf{x}'(\lambda) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(\lambda)), \quad \mathbf{x}(\lambda_0) = \mathbf{x}_0. \quad (3.115)$$

Si devono naturalmente supporre condizioni di regolarità che assicurino l'esistenza di un intervallo minimo aperto non vuoto  $I \ni \lambda_0$  in cui la (3.115) ammetta soluzione per ogni  $\mathbf{x}_0 \in U$ .

Precisiamo ora un concetto che è stato introdotto in parte nell'Osservazione 2.2.

Un campo  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in U \subseteq \mathbb{R}^N$ , viene identificato con un operatore di derivazione nel modo seguente. Sia  $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$  il valore del campo in un prefissato punto  $\mathbf{x}_0 \in U$ .

Pensando a  $U \subseteq \mathbb{R}^N$  come varietà  $N$ -dimensionale, in ogni punto  $\mathbf{x}_0$  della varietà lo spazio tangente è  $\mathcal{T}_{\mathbf{x}_0} = \mathbb{R}^N$  con base  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , ovvero la base canonica  $\mathcal{B} = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N \rangle$ .

Se  $X_i(\mathbf{x}_0)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , sono le componenti di  $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$  rispetto a  $\mathcal{B}$ , si associa al vettore  $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$  la derivata direzionale

$$\sum_{i=1}^N X_i(\mathbf{x}_0) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

ovvero si pensa a  $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$  come operante sulle funzioni differenziabili  $f : U \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  nel modo seguente:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)(f) = \sum_{i=1}^N X_i(\mathbf{x}_0) \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}.$$

Facendo variare il punto  $\mathbf{x}_0$  in  $U$ , si ottiene che il campo vettoriale  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in U$  dà luogo all'**operatore differenziale lineare**  $\mathcal{X}$  che opera sulle medesime  $f$  come

$$\mathcal{X}f = \mathbf{X}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f = \sum_{i=1}^N X_i(\mathbf{x}) \frac{\partial f}{\partial x_i}. \quad (3.116)$$

Pertanto, un **vettore**  $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$  viene identificato con una derivata direzionale e un **campo**  $\mathbf{v}$  viene identificato con un **operatore differenziale lineare** (che chiamiamo ancora  $\mathbf{v}$ ):

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^N X_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (3.117)$$

La derivata (3.116) viene detta **derivata di Lie** di  $f$  lungo il campo  $\mathbf{v}$  (o  $\mathbf{X}$ ) e corrisponde alla derivata di una funzione  $f$  lungo le curve integrali (3.115):

$$\frac{d}{d\lambda} f(\mathbf{x}(\lambda)) = \nabla_{\mathbf{x}} f \cdot \mathbf{x}'(\lambda) = \mathbf{X}(\mathbf{x}(\lambda)) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f.$$

Una notazione più concisa per la derivata di Lie è  $L_{\mathbf{X}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$ .

Si ha dunque che una funzione  $f$  è costante lungo le curve integrali  $(\mathbf{x}(\lambda))$  del campo se e solo se la sua derivata di Lie è nulla:

$$f(\mathbf{x}(\lambda)) = \text{cost.} \quad \iff L_{\mathbf{X}} f = 0. \quad (3.118)$$

Se si utilizza un altro sistema di coordinate  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)$ , legate al primo tramite la trasformazione invertibile  $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ , il medesimo campo si esprime come

$$\sum_{i=1}^N \bar{X}_i(\bar{\mathbf{x}}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} = \bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{x}}}. \quad (3.119)$$

Ricordando le regole (2.13), (2.16), si trovano le relazioni

$$\nabla_{\bar{\mathbf{x}}} = (J_{\bar{\mathbf{x}}}\mathbf{x})^T \nabla_{\mathbf{x}}, \quad \bar{\mathbf{X}} = (J_{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}})\mathbf{X},$$

che esprimono il carattere covariante degli operatori  $\nabla_{\mathbf{x}}$ ,  $\nabla_{\bar{\mathbf{x}}}$  (così come lo sono le basi (2.14) e (2.15)) e il comportamento controvariante delle componenti  $\mathbf{X}$ ,  $\bar{\mathbf{X}}$  del campo nei due sistemi di coordinate.

**Osservazione 3.7** *Dalle relazioni di trasformazione si deduce che i nuovi elementi  $\bar{\mathbf{X}}$  del campo non sono quelli vecchi calcolati nelle nuove coordinate (ovvero  $\bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{X}(\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}))$ ), ma questi ultimi devono essere moltiplicati per la matrice Jacobiana della trasformazione per ottenere i nuovi:*

$$\bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{x}}) = (J_{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}})} \tilde{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{x}}).$$

Definiamo ora un'operazione che si esegue tra campi vettoriali. Detti  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  due campi vettoriali (intesi come operatori (3.117) di componenti rispettivamente  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$ ) si dice **commutatore** l'operatore

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = \mathbf{v}_1(\mathbf{v}_2) - \mathbf{v}_2(\mathbf{v}_1) = \mathbf{X}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{X}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) - \mathbf{X}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{X}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{x}}). \quad (3.120)$$

L'indipendenza di (3.120) dal sistema di coordinate è evidente, dato che  $\bar{\mathbf{X}}_i \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} = (J_{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}})\mathbf{X}_i \cdot (J_{\bar{\mathbf{x}}}\mathbf{x})^T \nabla_{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_i \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$ ,  $i = 1, 2$ .

L'operatore (3.120) è ancora un **operatore differenziale lineare**:

**Proposizione 3.14** *Dati i campi  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  di componenti  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$ , l'operatore  $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$  è esprimibile come  $L_{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$  dove le componenti  $\mathbf{Z}$  sono*

$$\mathbf{Z} = (J_{\mathbf{x}}\mathbf{X}_2)\mathbf{X}_1 - (J_{\mathbf{x}}\mathbf{X}_1)\mathbf{X}_2. \quad (3.121)$$

**Dim.** La formula (5.70) vale ugualmente se  $\mathbf{b}$  è inteso come operatore gradiente:

$$\nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) = [J_{\mathbf{x}}\mathbf{a}(\mathbf{x})]^T \nabla_{\mathbf{x}} + [\mathbf{a}(\mathbf{x})^T J_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}}]^T$$

dove  $J_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}}$  è la matrice degli operatori del secondo ordine  $(J_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}})_{i,j} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  (matrice hessiana).

Scegliendo  $\mathbf{a}$  come  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$  e sviluppando l'espressione (3.120), si ottiene la tesi (ricordare anche che  $\mathbf{a} \cdot A\mathbf{b} = A^T \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , con  $A$  matrice  $N \times N$ ).  $\square$

Le due seguenti proposizioni mostrano che ad ogni campo vettoriale  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  corrisponde un gruppo locale di trasformazioni ad un parametro e che, viceversa, il gruppo (3.114) è associabile ad un campo vettoriale che viene detto **generatore infinitesimale** del gruppo.

**Proprietà 3.3** *La soluzione  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda, \mathbf{x}_0)$  di (3.115) (supponendo esistenza e unicità locali), definisce un gruppo locale ad un parametro di trasformazioni  $\gamma^{(\lambda)} : U \rightarrow U$  che ad ogni  $\mathbf{x}_0 \in U$  associa  $\mathbf{x} \in U$  nel modo seguente:*

$$\gamma^{(\lambda)}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(\lambda, \mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}_0 \in U.$$

**Dim.** E' immediato verificare che le trasformazioni  $\gamma^{(\lambda)}$ ,  $\lambda \in I$  verificano le proprietà (i), (ii) enunciate prima. Infatti,  $\gamma^{(\lambda_0)} = id_U$  e la (ii) è vera in virtù del fatto che l'equazione differenziale (3.115) è autonoma, dunque  $\mathbf{x}(\lambda_1 + \lambda_2, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(\lambda_2, \mathbf{x}(\lambda_1))$ .  $\square$

Vediamo ora il fatto inverso. Dato il gruppo locale (3.114) e detto

$$\bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x}) = \gamma^{(\alpha)}(\mathbf{x}), \quad (3.122)$$

si definisce

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x})|_{\alpha=\alpha_0}. \quad (3.123)$$

Fissato  $\mathbf{x} \in U$ , l'insieme (3.122) è la curva, parametrizzata con  $\alpha \in A$ , degli stati successivi (e precedenti) di  $\mathbf{x}$  attraverso le trasformazioni  $\gamma^{(\alpha)}$  e il vettore  $\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \alpha}$  è il vettore tangente alla curva. Il campo  $\mathbf{v}$  assegna dunque a ciascun vettore  $\mathbf{x} \in U$  il vettore "pendenza" della curva (3.122) nella posizione  $\alpha = \alpha_0$ .

Il fatto significativo è dato dalla seguente

**Proprietà 3.4** *Le linee integrali del campo (3.123) sono le curve (3.122).*

**Dim.** Si deve verificare che le curve (3.122) verificano l'equazione differenziale (3.115), ovvero che

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x})|_{\alpha=\beta} = \mathbf{v}(\bar{\mathbf{x}}(\beta, \mathbf{x})) \quad \forall \beta \in A, \quad \forall \mathbf{x} \in U. \quad (3.124)$$

In effetti, dalla definizione (3.123) e sfruttando le proprietà di gruppo locale si ha, per ogni  $\beta \in A$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\bar{\mathbf{x}}(\beta, \mathbf{x})) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\bar{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}(\beta, \mathbf{x}), \alpha_0 + \varepsilon) - \bar{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}(\beta, \mathbf{x}), \alpha_0)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\bar{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}(\beta + \varepsilon, \mathbf{x}), \alpha_0) - \bar{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}(\beta, \mathbf{x}), \alpha_0)] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\bar{\mathbf{x}}(\beta + \varepsilon, \mathbf{x}) - \bar{\mathbf{x}}(\beta, \mathbf{x})] = \frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \alpha)|_{\alpha=\beta}. \end{aligned}$$

□

Se le trasformazioni (3.114) sono definite per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  (ovvero se  $A = \mathbb{R}$ ), allora, supponendo  $\alpha_0 = 0$  per semplicità, si ha che l'insieme  $\mathcal{G}$  ha struttura di **gruppo** (non solo localmente) e ogni trasformazione  $\gamma^{(\alpha)} \in \mathcal{G}$  ha come inversa  $\gamma^{(-\alpha)} \in \mathcal{G}$ .

**Esercizio 3.15** *Verificare che i seguenti insiemi formano un gruppo ad un parametro di trasformazioni e che il corrispondente generatore (3.123) è il vettore in parentesi quadre:*

- (i) **gruppo delle dilatazioni:**  $\gamma^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = e^{\alpha} \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $[\mathbf{v} = \mathbf{x}]$ ,
- (ii) **gruppo delle traslazioni:**  $\gamma^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \alpha \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{a}$  vettore fissato di  $\mathbb{R}^N$ ,  $[\mathbf{v} = \mathbf{a}]$ ,
- (iii) **gruppo delle rotazioni attorno all'asse  $z$ :**  $\gamma^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = A(\alpha) \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $A$  è la matrice

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [\mathbf{v} = (y, -x, 0)].$$

*Determinare inoltre il gruppo delle rotazioni in  $\mathbb{R}^3$  attorno all'asse  $x$  e il gruppo delle rotazioni attorno all'asse  $y$  e i corrispondenti generatori.*

### 3.11 Grandezze invarianti e gruppi ammissibili ad un parametro di diffeomorfismi

Una funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **invariante** rispetto alla trasformazione invertibile di coordinate  $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$  se, detta  $\tilde{f}(\bar{\mathbf{x}}) = f(\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}))$  la funzione espressa nelle nuove coordinate, si ha

$$\tilde{f}(\bar{\mathbf{x}}) = f(\bar{\mathbf{x}}) \quad (3.125)$$

(vedi anche (3.99)), ovvero  $f$  e  $\tilde{f}$  sono formalmente identiche.

Il campo (3.117) si dice **invariante** rispetto alla trasformazione invertibile  $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$  se le nuove componenti  $\bar{\mathbf{X}}$  in (3.119) verificano

$$\bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}). \quad (3.126)$$

In tal caso, l'operatore trasformato nelle nuove variabili (3.119) si scrive formalmente in maniera identica a (3.116). Dall'Osservazione 3.7 si deduce che, equivalentemente, si può definire invariante un campo  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  che sotto la trasformazione  $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$  verifica

$$\mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}) = (J_{\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}}})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}})} \mathbf{X}(\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}})) = (J_{\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}}})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}})} \bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{x}}). \quad (3.127)$$

E' chiaro dunque che l'invarianza del campo non significa l'invarianza delle componenti  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  rispetto alla trasformazione (vedi (3.125)).

Assumiamo ora di avere un gruppo locale ad un parametro di trasformazioni  $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x})$ ,  $\alpha \in A$ . La funzione  $f$  si dice **invariante rispetto al gruppo locale di trasformazioni** se la (3.125) vale per ogni  $\alpha \in A$ :

$$f(\mathbf{x}(\alpha, \bar{\mathbf{x}})) = f(\bar{\mathbf{x}}). \quad (3.128)$$

Analogamente, il campo (3.116) si dice **invariante rispetto al gruppo locale di trasformazioni**  $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x})$  se le nuove componenti  $\bar{\mathbf{X}}(\alpha, \bar{\mathbf{x}})$  verificano

$$\bar{\mathbf{X}}(\alpha, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}), \quad \alpha \in A. \quad (3.129)$$

Vogliamo ora caratterizzare l'invarianza di una funzione o di un campo rispetto ad un gruppo di trasformazioni mediante il campo vettoriale (3.123) che viene associato al gruppo.

Dimostriamo a questo proposito la seguente

**Proposizione 3.15** *Sia  $\mathcal{G}$  un gruppo locale di trasformazioni  $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x})$  definite per  $\alpha \in A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} \in U \subseteq \mathbb{R}^N$  e sia  $\mathbf{v}$  il campo corrispondente (3.123) che opera sulle funzioni come in (3.117). Si ha:*

(a)  $f : U \subseteq \mathbb{R}$  è invariante rispetto al gruppo  $\mathcal{G}$  se e solo se  $\mathbf{v}(\mathbf{x})f = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in U$ ,

(b) il campo  $\mathbf{w} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$  è invariante rispetto al gruppo  $\mathcal{G}$  se  $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = 0$ .

**Dim.** Il campo (3.123) agisce su  $f$  come

$$\mathbf{v}(\mathbf{x})f = \frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x})|_{\alpha=\alpha_0} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}). \quad (3.130)$$

Derivando rispetto ad  $\alpha$  l'espressione

$$f(\bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x})) = f(\mathbf{x}), \quad (3.131)$$

chiaramente equivalente alla (3.125), si trova:

$$\nabla_{\bar{\mathbf{x}}} f(\bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x})) \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x}) = (J_{\bar{\mathbf{x}}\mathbf{x}}(\alpha, \bar{\mathbf{x}}))^T \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x}) = 0$$

che, valutata per  $\alpha = \alpha_0$ , implica  $\mathbf{v}(\mathbf{x})f = 0$  (osservare per per  $\alpha = \alpha_0$  la matrice Jacobiana è la matrice identità).

Viceversa, se l'espressione (3.130) è nulla per ogni  $\mathbf{x} \in U$ , si ha, per ogni  $\alpha \in A$  (vedi (3.124)):

$$0 = \mathbf{v}(\bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x}))f = \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} f(\bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x})) \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x})$$

dunque la funzione  $f(\bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x}))$  è costante rispetto ad  $\alpha$ :

$$f(\bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x})) = f(\bar{\mathbf{x}}(\alpha_0, \mathbf{x})) = f(\mathbf{x}),$$

dunque vale la (3.131). Il punto (a) è dimostrato.

Per il punto (b), calcoliamo il vettore  $\mathbf{Z}$  in (3.121) ponendo  $\mathbf{X}_1 = \frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x})|_{\alpha=\alpha_0}$ ,  $\mathbf{X}_2 = \mathbf{Y}$ :

$$\mathbf{Z} = [J_{\mathbf{x}} \mathbf{Y}(\mathbf{x})] \frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x})|_{\alpha=\alpha_0} - \left[ J_{\mathbf{x}} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x})|_{\alpha=\alpha_0} \right) \right] \mathbf{Y}(\mathbf{x}).$$

Consideriamo i due termini separatamente. Invertendo l'ordine di integrazione, si ha per il secondo termine:

$$\left[ J_{\mathbf{x}} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x})|_{\alpha=\alpha_0} \right) \right] \mathbf{Y}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [J_{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x}) \mathbf{Y}(\mathbf{x})] \Big|_{\alpha=\alpha_0}.$$

Per mostrare che quest'ultima espressione coincide con il primo termine, si osserva che la condizione di invarianza (3.129) equivale a (vedi (3.127)):

$$\mathbf{Y}(\mathbf{x}) = J_{\bar{\mathbf{x}}\mathbf{x}}(\alpha, \bar{\mathbf{x}}) \mathbf{Y}(\bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x})).$$

Dunque:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} [J_{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x}) \mathbf{Y}(\mathbf{x})] = \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathbf{Y}(\bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x})) = J_{\bar{\mathbf{x}}\mathbf{x}} \mathbf{Y} \frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x}).$$

In effetti, l'ultima espressione scritta coincide con il primo termine di  $\mathbf{Z}$  quando viene calcolata per  $\alpha = \alpha_0$ : basta ricordare la formula di composizione per lo Jacobiano:

$$J_{\bar{\mathbf{x}}}\mathbf{Y}(\mathbf{x}(\alpha, \bar{\mathbf{x}})) = J_{\mathbf{x}}\mathbf{Y} J_{\bar{\mathbf{x}}}\mathbf{x}(\alpha, \bar{\mathbf{x}})$$

e osservare che  $J_{\bar{\mathbf{x}}}\mathbf{x}(\alpha, \bar{\mathbf{x}})|_{\alpha=\alpha_0}$  è l'identità.  $\square$

Nell'ottica di considerare in modo ambivalente un campo vettoriale sia come operatore differenziale sia come gruppo locale ad un parametro di diffeomorfismi (vedi Proprietà 3.3 e 3.4), è importante mettere in evidenza il ruolo speculare dei due campi  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  del punto (b) della Proposizione appena dimostrata: essendo (3.120) antisimmetrico, nell'ipotesi (b) si ha anche  $[\mathbf{w}, \mathbf{v}] = 0$ , ovvero il campo  $\mathbf{v}$  è invariante rispetto al gruppo di diffeomorfismi generato dal campo  $\mathbf{w}$ .

Veniamo ora alla formulazione del teorema di Noether nel contesto teorico che abbiamo introdotto.

Siano  $\mathbf{q} \in U \subseteq \mathbb{R}^\ell$  coordinate lagrangiane locali. La famiglia  $\mathcal{G}$  di trasformazioni invertibili  $\bar{\mathbf{q}}(\alpha, \mathbf{q})$ ,  $\alpha \in A$ , si dice gruppo locale ad un parametro di diffeomorfismi se valgono le proprietà (i) e (ii) enunciate per definire l'insieme (3.114).

Ciascuna trasformazione  $\bar{\mathbf{q}}(\alpha, \mathbf{q})$  induce una trasformazione sulle velocità generalizzate definita da

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}} = [J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}(\alpha, \mathbf{q})]\dot{\mathbf{q}}.$$

Viene quindi naturale considerare l'insieme delle trasformazioni  $\mathcal{G}_1 = \{\bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x}), \alpha \in A\}$  definite per  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in U \times \mathbb{R}^\ell$  come

$$\bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x}) = (\bar{\mathbf{q}}(\alpha, \mathbf{q}), [J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}(\alpha, \mathbf{q})]\dot{\mathbf{q}}), \quad \alpha \in A$$

ciascuna delle quali ha per inversa

$$\mathbf{x}(\alpha, \bar{\mathbf{x}}) = (\mathbf{q}(\alpha, \bar{\mathbf{q}}), [J_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q}(\alpha, \bar{\mathbf{q}})]\dot{\bar{\mathbf{q}}}) \quad \alpha \in A.$$

L'insieme delle trasformazioni  $\mathcal{G}_1 = \{\bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x}), \alpha \in A\}$  definite per  $\mathbf{x} \in U \times \mathbb{R}^\ell$  è ancora un gruppo locale ad un parametro di diffeomorfismi definiti nello spazio delle fasi  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ . Infatti, servendosi (5.70) si trova  $J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}(\alpha_1 + \alpha_2, \mathbf{q}) = J_{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{q}}(\alpha_2, \mathbf{y})J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}(\alpha_1, \mathbf{q})$ , pertanto

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(\alpha_2, \bar{\mathbf{x}}(\alpha_1, \mathbf{x})) &= \left( \bar{\mathbf{q}}(\alpha_2, \bar{\mathbf{q}}(\alpha_1, \mathbf{q})), [J_{\mathbf{q}_1}\bar{\mathbf{q}}(\alpha_2, \mathbf{q}_1)]|_{\mathbf{q}_1=\bar{\mathbf{q}}(\alpha_1, \mathbf{q})} [J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}(\alpha_1, \mathbf{q})]\dot{\mathbf{q}} \right) = \\ &= (\bar{\mathbf{q}}(\alpha_1 + \alpha_2, \mathbf{q}), [J_{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}(\alpha_1 + \alpha_2, \mathbf{q})]\dot{\mathbf{q}}) = \bar{\mathbf{x}}(\alpha_1 + \alpha_2, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

La regola di gruppo per lo Jacobiano si ricava tenendo presente che

$$\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial q_k}(\alpha_1 + \alpha_2, \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial y_j}(\alpha_2, \mathbf{y}) \frac{\partial \bar{q}_j}{\partial q_k}(\alpha_1, \mathbf{q}), \quad i, j = 1, \dots, \ell.$$

Se  $\mathbf{v}(\mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{\mathbf{q}}(\alpha, \mathbf{q})|_{\alpha=\alpha_0}$  è il campo (3.123) associato al gruppo  $\bar{\mathbf{q}}(\alpha, \mathbf{q})$ , il campo  $\mathbf{w}(\mathbf{x})$  associato al gruppo  $\mathcal{G}_1$  è

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{\mathbf{q}}(\alpha, \mathbf{q})|_{\alpha=\alpha_0}, \left[ J_{\mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{\mathbf{q}}(\alpha, \mathbf{q})|_{\alpha=\alpha_0} \right] \dot{\mathbf{q}} \right) = (\mathbf{v}(\mathbf{q}), J_{\mathbf{q}}\mathbf{v}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}) \quad (3.132)$$

identificabile con l'operatore (vedi (3.117)) che chiamiamo col medesimo nome

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{q}) \cdot \nabla_{\mathbf{q}} + J_{\mathbf{q}}\mathbf{v}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}. \quad (3.133)$$

Per quanto abbiamo visto, la Lagrangiana  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  è **invariante** rispetto al gruppo  $\mathcal{G}_1$  se verifica la (3.128) (oppure la (3.131)) rispetto alle coordinate  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in U \times \mathbb{R}^\ell$ , ovvero

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}(\alpha, \bar{\mathbf{x}}), t) = \mathcal{L}(\bar{\mathbf{x}}, t) \quad \text{oppure} \quad \mathcal{L}(\bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x}), t) = \mathcal{L}(\mathbf{x}, t). \quad (3.134)$$

Si osservi che questa definizione coincide con quella data in (3.111). Spesso, in effetti, si parla di Lagrangiana invariante rispetto alle trasformazioni di  $\mathcal{G}$ , ovvero riferendosi solo alle variabili  $\mathbf{q}$ .

Data una Lagrangiana  $\mathcal{L}$  e un campo vettoriale  $\mathbf{v}(\mathbf{q})$  di componenti  $\mathbf{K}(\mathbf{q}) = (K_1(\mathbf{q}), \dots, K_\ell(\mathbf{q}))$  rispetto alla scelta  $\mathbf{q}$  di coordinate lagrangiane, la quantità scalare

$$K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{K}(\mathbf{q}) \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L} \quad (3.135)$$

verrà detta **momento della Lagrangiana  $\mathcal{L}$  rispetto al campo  $\mathbf{v}(\mathbf{q})$** .

Essa non dipende dal sistema di coordinate  $\mathbf{q}$  scelto: infatti, si ha (vedi (2.35) e (3.119))

$$\bar{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{q}}) \cdot \nabla_{\dot{\bar{\mathbf{q}}}} = [J_{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}}] \mathbf{K}(\mathbf{q}) \cdot [J_{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}}]^T \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{K}(\mathbf{q}) \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}. \quad (3.136)$$

**Esercizio 3.16** Se  $\mathbf{X}(\mathbf{q}, t)$  è il vettore (2.2) in  $\mathbb{R}^{3n}$  delle coordinate dei punti di un sistema materiale e  $\mathbf{Q}$  è la quantità di moto (1.73), si mostri che

$$K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X}) \mathbf{K} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{Q}_\theta^{(\mathbf{q})} \quad (3.137)$$

(ricordare la (2.21), la (2.46), la (2.71), la (5.64) e la (5.70)).

Dimostriamo la seguente

**Proposizione 3.16** Il momento  $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  di  $\mathcal{L}$  rispetto al campo  $\mathbf{v}$  è un integrale primo del moto indotto dalla Lagrangiana  $\mathcal{L}$  (ovvero  $K$  è costante lungo le soluzioni delle equazioni (3.7)) se e solo se  $\mathcal{L}$  è invariante rispetto al gruppo di trasformazioni (3.123) associato al campo  $\mathbf{v}$ .

**Dim.** Per la Proposizione 3.15,  $\mathcal{L}$  è invariante rispetto al gruppo  $\mathcal{G}_1$  generato da  $\frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{\mathbf{x}}(\alpha, \mathbf{x})|_{\alpha=\alpha_0}$  se e solo se  $\mathbf{w}(\mathbf{x})\mathcal{L} = 0$ , ovvero (da (3.133))

$$0 = \frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{\mathbf{q}}(\alpha, \mathbf{q})|_{\alpha=\alpha_0} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{L} + \left[ J_{\mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{\mathbf{q}}(\alpha, \mathbf{q})|_{\alpha=\alpha_0} \right] \dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}$$

D'altra parte, se calcoliamo la derivata di  $K$  lungo il moto, si ha, tenendo conto di (3.7):

$$\frac{d}{dt} K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \dot{\mathbf{K}}(\mathbf{q}) \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L} + \mathbf{K}(\mathbf{q}) \cdot \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{L}$$

che coincide con l'espressione precedente, dato che, invertendo due volte gli ordini di integrazione:

$$\dot{\mathbf{K}}(\mathbf{q}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{\mathbf{q}}(\alpha, \mathbf{q})|_{\alpha=\alpha_0} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \dot{\bar{\mathbf{q}}}(\alpha, \mathbf{q})|_{\alpha=\alpha_0} = \frac{\partial}{\partial \alpha} [J_{\mathbf{q}} \bar{\mathbf{q}}(\alpha, \mathbf{q})] \dot{\mathbf{q}}|_{\alpha=\alpha_0} = \left[ J_{\mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{\mathbf{q}}(\alpha, \mathbf{q})|_{\alpha=\alpha_0} \right] \dot{\mathbf{q}}.$$

□

E' evidente il contenuto identico della Proposizione appena dimostrata e quello della Proposizione 3.13, a parte l'eventuale dipendenza esplicita dal tempo ammessa per le trasformazioni che danno l'integrale primo (3.112).

Il caso di una variabile ciclica  $q_k$  corrisponde alla conservazione del momento  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$ , che si ottiene da (3.135) ponendo  $\mathbf{K}(\mathbf{q}) = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ , con 1 nella  $k$ -esima posizione. Il gruppo di trasformazioni ad un parametro generato da questo campo è dato dalla traslazione  $\bar{\mathbf{q}}(\alpha, \mathbf{q}) = \mathbf{q} + (0, \dots, \alpha, 0, \dots, 0)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ( $\alpha$  nella  $k$ -esima posizione). Una Lagrangiana nella quale  $q_k$  è ciclica è evidentemente invariante rispetto al gruppo ad un parametro trovato.

In realtà il caso della variabile ciclica non è un caso particolare: si può dimostrare che se un sistema di Lagrangiana  $\mathcal{L}$  ammette un momento (3.135) che si conserva (o, equivalentemente, un gruppo locale ad un parametro sotto il quale  $\mathcal{L}$  è invariante), allora si può trovare un nuovo gruppo di coordinate  $\bar{\mathbf{q}}$  rispetto alle quali la Lagrangiana ha una variabile ciclica, ovvero  $\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\bar{q}}_j} = 0$  per un certo  $j$ ,  $1 \leq j \leq \ell$ .

In effetti, basta ricordare l'invarianza (3.136) e tenere presente che le componenti  $\mathbf{K}(\mathbf{q})$  possono essere sempre scritte, rispetto ad opportune coordinate  $\bar{\mathbf{q}}$ , come  $\bar{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{q}}) = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ , con 1 in posizione  $j$ . La conservazione del momento implica  $\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\bar{q}}_j} = \text{costante}$ , ovvero  $\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\bar{q}}_j} = 0$ , dunque  $\bar{q}_j$  è ciclica.

Sono pertanto equivalenti le tre affermazioni:

- La Lagrangiana ha una variabile ciclica rispetto ad un opportuno sistema di coordinate lagrangiane,
- esiste un momento  $K$  che si conserva,
- esiste un gruppo locale ad un parametro di trasformazioni rispetto al quale la Lagrangiana è invariante.

**Esercizio 3.17** Si consideri il gruppo delle traslazioni generato da  $\mathbf{K}_0$ , vettore costante di  $\mathbb{R}^\ell$ , ovvero  $\bar{\mathbf{q}}(\alpha, \mathbf{q}) = \mathbf{q} + \alpha \mathbf{K}_0$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Si stabilisca sotto quali condizioni la Lagrangiana  $\mathcal{L}$  è invariante rispetto a tale gruppo e determinare la corrispondente quantità conservata  $\mathbf{K}$  di (3.135).

Mediante la (3.137), collegare  $\mathbf{K}$  alla quantità di moto del sistema.

**Esercizio 3.18** Si consideri il gruppo di trasformazioni ad un parametro  $\bar{\mathbf{q}}(\alpha, \mathbf{q}) = A(\alpha)\mathbf{q}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , dove  $A(\alpha)$  è una matrice  $\ell \times \ell$  ortogonale per ogni valore di  $\alpha$ ,  $B(\alpha_0)$  è l'identità per un certo  $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ .

Verificare che il generatore del gruppo è il vettore  $M\mathbf{q}$ , dove  $M$  è una matrice  $\ell \times \ell$  antisimmetrica. Determinare la quantità  $\mathbf{K}$  che si conserva se una Lagrangiana  $\mathcal{L}$  è invariante rispetto al gruppo.

In particolare, considerare il caso  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$  e  $A(\alpha)$  come in (iii) dell'esercizio 3.15 (rotazioni attorno agli assi  $q_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ ). Collegare l'integrale primo trovato (3.137) al momento angolare (2.44). Generalizzare al caso  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{3n}$ .

Concludiamo il Paragrafo esaminando brevemente il caso di simultanea presenza di più trasformazioni invarianti. Siano  $\mathbf{v}_1(\mathbf{q})$  e  $\mathbf{v}_2(\mathbf{q})$  due campi vettoriali come in (3.117). Sia  $\mathbf{v}_3 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$  il campo definito da (3.120). Se  $\mathbf{K}_1(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{K}_2(\mathbf{q})$  sono le componenti di  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  rispetto ad un sistema di coordinate, si ha

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{K}_3(\mathbf{q}) \cdot \nabla_{\mathbf{q}} = \{[J_{\mathbf{q}}\mathbf{K}_2(\mathbf{q})]\mathbf{K}_1(\mathbf{q}) - [J_{\mathbf{q}}\mathbf{K}_1(\mathbf{q})]\mathbf{K}_2(\mathbf{q})\} \cdot \nabla_{\mathbf{q}}. \quad (3.138)$$

Le estensioni (3.132)  $\mathbf{w}_1(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{w}_2(\mathbf{x})$  di  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{v}_3$  nello spazio delle fasi  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  sono

$$\mathbf{w}_i(\mathbf{x}) = (\mathbf{K}_i(\mathbf{q}), [J_{\mathbf{q}}\mathbf{K}_i(\mathbf{q})]\dot{\mathbf{q}}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} = \mathbf{Y}_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.139)$$

D'altra parte, il commutatore (rispetto alle variabili  $\mathbf{x}$ ) dei campi  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$  è

$$[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2] = [J_{\mathbf{x}}\mathbf{Y}_2(\mathbf{x})]\mathbf{Y}_1(\mathbf{x}) - [J_{\mathbf{x}}\mathbf{Y}_1(\mathbf{x})]\mathbf{Y}_2(\mathbf{x}). \quad (3.140)$$

Vogliamo dimostrare la seguente

**Proprietà 3.5** L'estensione  $\mathbf{w}_3$  del commutatore  $\mathbf{v}_3 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$  coincide con il commutatore dei campi estesi  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$ :

$$\mathbf{w}_3 = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]. \quad (3.141)$$

**Dim.** Se elaboriamo l'espressione (3.140), tenendo conto delle formule (5.72), (5.74), si trova:

$$[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2] = (\mathbf{K}_3, J_{\mathbf{q}}[(J_{\mathbf{q}}\mathbf{K}_2)\dot{\mathbf{q}}]\mathbf{K}_1 - J_{\mathbf{q}}[(J_{\mathbf{q}}\mathbf{K}_1)\dot{\mathbf{q}}]\mathbf{K}_2 + [(J_{\mathbf{q}}\mathbf{K}_2)(J_{\mathbf{q}}\mathbf{K}_1) - (J_{\mathbf{q}}\mathbf{K}_1)(J_{\mathbf{q}}\mathbf{K}_2)]\dot{\mathbf{q}}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$$

Partendo invece da (3.139),  $i = 3$ , si trova:

$$\mathbf{w}_3(\mathbf{x}) = (\mathbf{K}_3, J_{\mathbf{q}}[(J_{\mathbf{q}}\mathbf{K}_2)\mathbf{K}_1 - (J_{\mathbf{q}}\mathbf{K}_1)\mathbf{K}_2]\dot{\mathbf{q}}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}.$$

Tutto si riduce dunque a verificare che  $J_{\mathbf{q}}[(J_{\mathbf{q}}\mathbf{K}_2)\dot{\mathbf{q}}]\mathbf{K}_1 + (J_{\mathbf{q}}\mathbf{K}_2)(J_{\mathbf{q}}\mathbf{K}_1)\dot{\mathbf{q}} = J_{\mathbf{q}}[(J_{\mathbf{q}}\mathbf{K}_2)\mathbf{K}_1]\dot{\mathbf{q}}$ .

Per la (5.74), la formula precedente equivale all'uguaglianza dei due vettori di  $\mathbb{R}^\ell$ :

$$\sum_{k=1}^{\ell} \left[ \dot{q}_k J_{\mathbf{q}} \left( \frac{\partial \mathbf{K}_2}{\partial q_k} \right) \right] \mathbf{K}_1 = \sum_{k=1}^{\ell} \left[ X_{1,k} J_{\mathbf{q}} \left( \frac{\partial \mathbf{K}_2}{\partial q_k} \right) \right] \dot{\mathbf{q}},$$

con  $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell) = \dot{\mathbf{q}}$ ,  $(K_{1,1}, \dots, K_{1,\ell}) = \mathbf{K}_1$ . La verifica è lasciata per esercizio (si osservi la simmetria, per  $i$

fissato, della matrice di elementi  $A_{j,k} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\partial K_{2,i}}{\partial q_k} \right) = A_{k,j}$ ,  $j, k = 1, \dots, \ell$ ,  $(K_{2,1}, \dots, K_{2,\ell}) = \mathbf{K}_2$ ).  $\square$

La Proprietà appena dimostrata ha una conseguenza notevole.

Siano  $\mathbf{w}_1(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{w}_2(\mathbf{x})$  due campi come in (3.133) tali che  $\mathbf{w}_1\mathcal{L} = \mathbf{w}_2\mathcal{L} = 0$  per una certa Lagrangiana  $\mathcal{L}$ . La Proposizione 3.16 assicura l'esistenza dei due integrali primi  $K_1$  e  $K_2$  definiti da (3.135) mediante le componenti  $\mathbf{K}_1(\mathbf{q})$  e  $\mathbf{K}_2(\mathbf{q})$  dei due campi.

D'altra parte, dalla definizione (3.120) segue che  $[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]\mathcal{L} = 0$ . Per la (3.141)  $\mathbf{w}_3\mathcal{L} = 0$ , ovvero  $\mathcal{L}$  è invariante rispetto al gruppo locale di diffeomorfismi generato da  $\mathbf{v}_3(\mathbf{q}) = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$  (vedi Proposizione 3.15). In base alla Proposizione 3.16, si è ottenuto la conservazione di un terzo momento  $K_3$  le cui componenti  $\mathbf{K}_3$  sono quelle del commutatore  $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$  calcolate come in (3.121).

Abbiamo così dimostrato la

**Proprietà 3.6**  $K_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{K}_1(\mathbf{q}) \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}$ ,  $K_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{K}_2(\mathbf{q}) \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}$  sono integrali primi del moto per la Lagrangiana  $\mathcal{L}$ , allora esiste un terzo integrale primo  $K_3(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{K}_3(\mathbf{q}) \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}$  i cui coefficienti  $\mathbf{K}_3$  si calcolano come in (3.138).

Ovviamente, il risultato precedente può essere espresso in termini di simmetrie: dalle due simmetrie associate ai campi  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ , si ricava una terza simmetria per la medesima Lagrangiana associata al commutatore.

La Proposizione 3.16 è chiaramente estendibile al caso di più integrali primi (o più simmetrie):

**Proposizione 3.17** I momenti  $K_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \dots, K_s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ ,  $1 \leq s \leq \ell$ , di  $\mathcal{L}$  rispetto ai campi  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$  sono integrali primo del moto indotto da  $\mathcal{L}$  se e solo se  $\mathcal{L}$  è invariante rispetto ai gruppi di trasformazioni (3.123) associati ai campi  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ .

La possibilità invece di associare a ciascun integrale primo (mediante una trasformazione di variabili) una variabile ciclica, come avviene sempre nel caso  $s = 1$ , è legata al fatto che i campi vettoriali abbiano commutatore nullo. A questo proposito, enunciamo il seguente risultato, noto come

**Lemma di Frobenius:** Siano  $\mathbf{v}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{K}_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$ ,  $i = 1, \dots, s \leq N$  campi vettoriali definiti per  $\mathbf{x} \in U \subseteq \mathbb{R}^N$ . Esiste un cambiamento di coordinate  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}})$  rispetto alle quali i campi sono scritti come

$$\mathbf{v}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{e}_i \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{x}}}, \quad i = 1, \dots, s \quad (3.142)$$

con  $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  (1 nella posizione  $i$ ) se e solo se il commutatore fra essi è sempre nullo:

$$[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] = 0 \quad \text{per ogni } i, j = 1, \dots, s.$$

Per quanto osservato prima, la scrittura dei momenti nella forma (3.142) comporta l'assenza delle variabili  $\bar{q}_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ , nella Lagrangiana  $\tilde{\mathcal{L}}$ .

Come applicazione del caso di più integrali primi consideriamo, per semplicità, il caso  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$  (si può pensare alle coordinate  $(x, y, z)$  d un punto materiale nello spazio).

Riferendosi all'Esercizio 3.17, si ha che se una Lagrangiana  $\mathcal{L}$  è invariante rispetto ad una (o più) delle **traslazioni**  $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \alpha \mathbf{e}_s$ ,  $s = 1, 2, 3$  con  $\{\mathbf{e}_s\}$  base canonica in  $\mathbb{R}^3$ , allora si conserva la componente lungo la medesima direzione della quantità di moto  $\mathbf{Q}$ .

Supponiamo che questo avvenga lungo le direzioni  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  e chiediamoci quale terzo integrale primo è previsto dalla Proprietà 3.6. I generatori dei due gruppi sono  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ , rispettivamente.

Calcolando il commutatore (3.138), si vede subito che è il campo nullo:  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = 0$ , dunque  $K_3 \equiv 0$ . La conservazione della quantità di moto lungo due direzioni indipendenti  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  non comporta dunque la conservazione lungo  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ , come è noto.

Questo fatto invece avviene per il momento della quantità di moto. Infatti, partendo stavolta all'Esercizio 3.18, si ha che la conservazione della Lagrangiana rispetto ad una (o più) delle **rotazioni in senso orario** attorno ai tre assi  $\bar{\mathbf{q}} = A_s(\alpha)\mathbf{q}$ ,  $s = 1, 2, 3$ , con (vedi anche Esercizio 3.15)

$$A_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad A_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad A_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rispettivamente attorno agli assi  $q_1, q_2, q_3$  e con generatori, nello stesso ordine,  $\mathbf{K}_1 = (0, q_3, -q_2)$ ,  $\mathbf{K}_2 = (-q_3, 0, q_1)$ ,  $\mathbf{K}_3 = (q_2, -q_1, 0)$ . Dalla (3.138) si ha

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ q_3 \\ -q_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ q_3 \\ -q_2 \end{pmatrix} \right] \cdot \nabla_{\mathbf{q}} = \mathbf{K}_3 \cdot \nabla_{\mathbf{q}}.$$

Si vede anche che  $[\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = \mathbf{K}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{q}}$ ,  $[\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1] = \mathbf{K}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{q}}$ .

Pertanto, se una Lagrangiana  $\mathcal{L}$  è invariante rispetto a due gruppi ad un parametro di rotazioni attorno a due assi,  $\mathcal{L}$  è necessariamente invariante rispetto alle rotazioni attorno al terzo asse. Se  $\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{q}}^2 + U(\mathbf{q})$ , da (3.137) risulta evidente che  $\mathbf{K}_s$  è la componente lungo l'asse  $q_s$  del momento angolare  $(P-O) \wedge m\mathbf{v}$ ,  $s = 1, 2, 3$ : si ha dunque che la conservazione angolare lungo due direzioni ortogonali comporta la conservazione del momento lungo la direzione ortogonale a ciascuna delle due.

Osservare che nel caso delle traslazioni ad ogni componente conservata è associabile una variabile ciclica, mentre nel caso delle rotazioni questo non avviene.

**Esercizio 3.19** *Sempre per  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ , esaminare il caso in cui la Lagrangiana è invariante rispetto ad una delle tre traslazioni e ad una delle tre rotazioni.*

## 4 Sistemi non inerziali. Sistemi anolonomi

### 4.1 Cinematica relativa e assoluta

Consideriamo un sistema di riferimento  $\Sigma$  inerziale (secondo i principi della Meccanica Galileiana) e con assi ortogonali  $(\xi, \eta, \zeta)$  a cui associamo i versori  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Un secondo sistema di riferimento  $S$  di assi  $(x, y, z)$  e versori  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  è in moto rispetto a  $\Sigma$ . Per semplicità, supponiamo che le origini dei due sistemi restino coincidenti nel punto fisso  $O$ . In caso contrario, le modifiche sono del tutto ovvie.

Vogliamo affrontare lo studio del moto di un sistema vincolato di  $n$  punti materiali nel sistema  $S$  (includendo dunque le cosiddette “forze apparenti”) utilizzando il formalismo lagrangiano.

Ciascun punto  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ha coordinate (varianti e controvarianti)  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  in  $\Sigma$  e  $(x_i, y_i, z_i)$  in  $S$ :

$$P_i - O = \xi_i \mathbf{e}_1 + \eta_i \mathbf{e}_2 + \zeta_i \mathbf{e}_3 = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Le relazioni

$$\mathbf{i} = \sum_{i=1}^3 \beta_{1,i} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{j} = \sum_{i=1}^3 \beta_{2,i} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{k} = \sum_{i=1}^3 \beta_{3,i} \mathbf{e}_i \quad (4.1)$$

definiscono la matrice

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} \\ \beta_{3,1} & \beta_{3,2} & \beta_{3,3} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

ovvero la **matrice del cambiamento di base** da  $\Sigma$  in  $S$ .

Le coordinate controvarianti, che in generale si trasformano secondo la regola  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (B^{-1})^T \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ ,

sono legate dalle relazioni

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \\ \zeta_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.3)$$

dal momento che  $B$  è **ortogonale**:  $B^T = B^{-1}$ .

Le formule inverse alle (4.3) si scrivono:

$$\begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \\ \zeta_i \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.4)$$

La matrice  $B$ , che descrive il moto di  $S$  rispetto a  $\Sigma$ , in generale dipende dal tempo.

Derivando rispetto a  $t$  l'espressione  $[B(t)]^T B(t) = I_3$ , dove  $I_3$  è la matrice identità  $3 \times 3$ , si realizza subito che la matrice

$$\Omega^{(3)}(t) = [\dot{B}(t)]^T [B(t)] \quad (4.5)$$

è **antisimmetrica**:  $[\Omega^{(3)}]^T = -\Omega^{(3)}$ .

Definendo gli elementi non nulli di  $W$  come

$$\Omega^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

chiamiamo **velocità angolare** di  $S$  rispetto a  $\Sigma$  il vettore  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3)$ .

Riferendosi alla (4.6), possiamo pensare alla matrice  $[\Omega^{(3)}]^T$  come matrice dell'endomorfismo che associa al vettore  $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^3 y_i \mathbf{e}_i$  il prodotto vettoriale  $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{y}$ ,  $\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \mathbf{e}_i$ , calcolato come

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{y} = \Omega^{(3)} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 4.1** Verificare che nel sistema  $S$  l'endomorfismo si scrive

$$\omega \wedge \mathbf{y} = \bar{\Omega}^{(3)} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

con  $\bar{\Omega}^{(3)} = B\dot{B}^T$ ,  $\mathbf{y} = \bar{y}_1\mathbf{i} + \bar{y}_2\mathbf{j} + \bar{y}_3\mathbf{k}$ .

Verificare inoltre che  $\bar{\Omega}^{(3)}$  è antisimmetrica e, posto

$$\bar{\Omega}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\omega}_3 & \bar{\omega}_2 \\ \bar{\omega}_3 & 0 & -\bar{\omega}_1 \\ -\bar{\omega}_2 & \bar{\omega}_1 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha

$$\begin{pmatrix} \bar{\omega}_1 \\ \bar{\omega}_2 \\ \bar{\omega}_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 4.2** Considerare un vettore con componenti costanti nel sistema  $S$ :  $\mathbf{y} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ ,  $x_0, y_0, z_0$  costanti (vettore solidale).

Derivando rispetto al tempo le (4.1) e utilizzando le formule inverse

$$\mathbf{e}_i = \beta_{i,1}\mathbf{i} + \beta_{i,2}\mathbf{j} + \beta_{i,3}\mathbf{k}, \quad i = 1, 2, 3,$$

si mostri che

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = B\dot{B}^T \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

e, ricordando (4.7), si ottenga la **formula di Poisson**

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \omega \wedge \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \text{ solidale in } S. \quad (4.8)$$

Portandosi ora nello spazio  $\mathbb{R}^{3n}$ , indichiamo con  $\mathcal{X} = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \dots, \xi_n, \eta_n, \zeta_n)$  il vettore rappresentativo delle coordinate dei punti rispetto a  $\Sigma$  e con  $\mathbf{X} = (x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$  il vettore rappresentativo rispetto a  $S$ .

I due vettori sono legati dalla (4.3) scritta  $n$  volte:

$$\mathcal{X} = A(t)\mathbf{X}, \quad (4.9)$$

dove si è chiamato  $A(t)$  la matrice  $3n \times 3n$

$$A(t) = \begin{pmatrix} [B(t)]^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [B(t)]^T & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & [B(t)]^T \end{pmatrix}$$

evidentemente ortogonale:  $A^T = A^{-1}$ .

Al tempo stesso, si definisce

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega^{(3)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Omega^{(3)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \Omega^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{B}^T B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dot{B}^T B & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dot{B}^T B \end{pmatrix} = \dot{A}A^T \quad (4.10)$$

E' immediato verificare che  $\Omega$  è ad ogni istante una matrice antisimmetrica

$$\Omega^T(t) = -\Omega(t). \quad (4.11)$$

e che

$$\Omega(t)A(t) = \dot{A}(t). \quad (4.12)$$

Definiamo inoltre la matrice (vedi Esercizio 4.1)

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} \overline{\Omega}^{(3)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \overline{\Omega}^{(3)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\Omega}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\dot{B}^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B\dot{B}^T & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & B\dot{B}^T \end{pmatrix} = A^T \Omega A. \quad (4.13)$$

La cinematica nei due sistemi si ottiene derivando la (4.9) rispetto al tempo e tenendo conto di (4.12):

$$\dot{\mathcal{X}} = A\dot{\mathbf{X}} + \dot{A}\mathbf{X} = A\dot{\mathbf{X}} + \Omega A\mathbf{X} = A\dot{\mathbf{X}} + \Omega\mathcal{X}. \quad (4.14)$$

Il termine  $\dot{\mathcal{X}}$  è la velocità rispetto al sistema  $S$ , che, seguendo la terminologia della cinematica relativa chiamiamo **velocità assoluta**. Il termine  $\dot{\mathbf{X}}$ , velocità in  $S$ , è la **velocità relativa**, mentre  $\Omega\mathcal{X}$ , che corrisponde alla velocità che avrebbe il sistema se le coordinate  $\mathbf{X}$  non mutassero, è detta **velocità di trascinamento**. In un altro tipo di notazione, la (4.14) non è altro che l'applicazione al vettore posizione della nota formula

$$\left. \frac{d\mathbf{W}}{dt} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d\mathbf{W}}{dt} \right|_S + \Omega\mathbf{W} \quad (4.15)$$

che lega la derivazione rispetto al tempo nel sistema  $\Sigma$ , indicata con  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{\Sigma}$ , alla derivazione nel sistema  $S$ ,

nella quale si considerano costanti le quantità che invarianti rispetto a  $S$  e che è denotata con  $\left. \frac{d}{dt} \right|_S$ .

Definiamo

$$\mathcal{X}_m = (m_1\xi_1, m_1\eta_1, m_1\zeta_1, \dots, m_n\xi_n, m_n\eta_n, m_n\zeta_n)$$

e  $\mathbf{X}_m$  come in (2.45).

Per semplificare le notazioni, conviene considerare anche la matrice  $\Omega_m$  definita in (3.42), ovvero la matrice  $\Omega$  moltiplicata per le masse dei punti, e la matrice (vedi anche (4.13))

$$\tilde{\Omega}_m = A^T \Omega_m A. \quad (4.16)$$

L'**energia cinetica** in  $\Sigma$  e quella relativa a  $S$  sono rispettivamente

$$T_{\Sigma} = \frac{1}{2} \dot{\mathcal{X}}_m \cdot \dot{\mathcal{X}}, \quad T_S = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}}_m \cdot \dot{\mathbf{X}}. \quad (4.17)$$

Utilizzando la (4.14), l'ortogonalità di  $A$  e la (4.12) è immediato verificare che

$$\begin{aligned} T_{\Sigma} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}}_m \cdot \dot{\mathbf{X}} + A\dot{\mathbf{X}} \cdot \Omega A\mathbf{X}_m + \frac{1}{2} \Omega A\mathbf{X} \cdot \Omega A\mathbf{X}_m = T_S + A\dot{\mathbf{X}} \cdot \Omega A\mathbf{X}_m + \frac{1}{2} \Omega A\mathbf{X} \cdot \Omega A\mathbf{X}_m \\ &= T_S + \tilde{\Omega}_m \mathbf{X} \cdot \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_m \mathbf{X} \cdot \tilde{\Omega} \mathbf{X}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Per un **sistema vincolato**, fissiamo la nostra attenzione sul sistema  $S$  e supponiamo di aver scelto  $\ell$  coordinate lagrangiane in modo da rappresentare le configurazioni del sistema mediante  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{q}, t)$ , dove  $t$  indica l'eventuale moto dei vincoli in  $S$ .

La dipendenza del vettore  $\mathcal{X}$  dai parametri lagrangiani si ottiene mediante la formula  $\mathcal{X}(\mathbf{q}, t) = A(t)\mathbf{X}(\mathbf{q}, t)$ . La velocità relativa in termini lagrangiani, ovvero

$$\dot{\mathbf{X}} = (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \quad (4.19)$$

sostituita in (4.14) porta a

$$\dot{\mathcal{X}} = A(J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\dot{\mathbf{q}} + A\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \Omega A\mathbf{X}. \quad (4.20)$$

Si osservi che, essendo

$$A(J_{\mathbf{q}}\mathbf{X}) = J_{\mathbf{q}}\mathcal{X}, \quad A\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial t} + \Omega A\mathbf{X} = \frac{\partial\mathcal{X}}{\partial t},$$

la (4.20) è riconducibile alla velocità lagrangiana in  $\Sigma$ :

$$\dot{\mathcal{X}} = (J_{\mathbf{q}}\mathcal{X})\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial\mathcal{X}}{\partial t} \quad (4.21)$$

(o viceversa, la (4.20) è deducibile dalla (4.21)).

Il confronto di (4.20) con (4.21) permette di affermare che i due sistemi di riferimento registrano le medesime velocità virtuali (il che è ovvio, dato che le coordinate lagrangiane sono le medesime nei due sistemi), mentre la velocità di trascinamento (in senso lagrangiano) nel sistema  $\Sigma$  è data dal sovrapporsi del moto dei vincoli rispetto a  $S$  (ovvero il trascinamento lagrangiano in  $S$ , descritto dal termine  $\partial\mathbf{X}/\partial t$ ) e del moto di  $S$  rispetto a  $\Sigma$  (termine  $\Omega A\mathbf{X} = \Omega\mathcal{X}$ ).

Come si era osservato nel paragrafo dedicato alle forze giroscopiche, se i vincoli sono scritti in modo indipendente dal tempo nel sistema  $S$ , allora la velocità relativa coincide con quella virtuale.

Vogliamo ora individuare i termini  $T_{2,\Sigma}$ ,  $T_{1,\Sigma}$ ,  $T_{0,\Sigma}$ ,  $T_{2,S}$ ,  $T_{1,S}$ ,  $T_{0,S}$  che compongono l'energia cinetica rispetto ai due sistemi

$$T_{\Sigma} = T_{2,\Sigma} + T_{1,\Sigma} + T_{0,\Sigma}, \quad T_S = T_{2,S} + T_{1,S} + T_{0,S}$$

secondo la consueta suddivisione come potenze delle variabili cinetiche.

Dalla (4.19) si ha subito

$$T_{2,S} = \frac{1}{2}(J_{\mathbf{q}}\mathbf{X}_m)\dot{\mathbf{q}} \cdot (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\dot{\mathbf{q}}, \quad T_{1,S} = (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial\mathbf{X}_m}{\partial t}, \quad T_{0,S} = \frac{1}{2}\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial\mathbf{X}_m}{\partial t}. \quad (4.22)$$

Sostituendo poi le espressioni lagrangiane (4.22) e (4.19) in (4.18) troviamo per i termini di  $T_{\Sigma}$  (si ricordi anche la (4.16)):

$$\begin{aligned} T_{2,\Sigma} &= \frac{1}{2}(J_{\mathbf{q}}\mathbf{X}_m)\dot{\mathbf{q}} \cdot (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\dot{\mathbf{q}} = T_{2,S}, \\ T_{1,\Sigma} &= (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial\mathbf{X}_m}{\partial t} + A(J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\dot{\mathbf{q}} \cdot \Omega A\mathbf{X}_m = T_{1,S} + \tilde{\Omega}_m\mathbf{X} \cdot (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\dot{\mathbf{q}}, \\ T_{0,\Sigma} &= \frac{1}{2}\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial\mathbf{X}_m}{\partial t} + A\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial t} \cdot \Omega A\mathbf{X}_m + \frac{1}{2}\Omega A\mathbf{X} \cdot \Omega A\mathbf{X}_m = \\ &= T_{0,S} + \tilde{\Omega}_m\mathbf{X} \cdot \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial t} + \frac{1}{2}\tilde{\Omega}_m\mathbf{X} \cdot \tilde{\Omega}\mathbf{X}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

E' evidente che, se la matrice  $\Omega$  è nulla, i termini coincidono nei due sistemi. Inoltre, se le equazioni vincolari in  $S$  sono tali che il tempo non compare esplicitamente, ovvero sono del tipo  $f_j(\mathbf{X}) = 0$ ,  $j = 1, \dots, m$  (diremo vincoli *fissi* rispetto a  $S$ ), allora  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{q})$  e si ha

$$\begin{cases} T_S = T_{2,S} = T_{2\Sigma}, & T_{1,S} = T_{0,S} = 0, \\ T_{1,\Sigma} = A(J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\dot{\mathbf{q}} \cdot \Omega A\mathbf{X}_m, & T_{0,\Sigma} = \frac{1}{2}\Omega A\mathbf{X} \cdot \Omega A\mathbf{X}_m. \end{cases} \quad (4.24)$$

Per quanto riguarda i vettori **accelerazione** nei due sistemi, si ha, derivando la (4.14) e ricordando la (4.12):

$$\ddot{\mathcal{X}} = A\ddot{\mathbf{X}} + 2\Omega A\dot{\mathbf{X}} + \dot{\Omega}A\mathbf{X} + \Omega\Omega A\mathbf{X}. \quad (4.25)$$

Nella (4.25) riconosciamo l'**accelerazione  $\ddot{\mathbf{X}}$  relativa** a  $S$ , l'**accelerazione di Coriolis  $2\Omega A\dot{\mathbf{X}}$**  (che per un singolo punto  $P_i$  nello spazio tridimensionale scriviamo  $\mathbf{a}_{i,C} = 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_{i,R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  e  $\mathbf{v}_{i,R}$  velocità relativa a  $S$  del punto) e l'**accelerazione di trascinamento  $\dot{\Omega}A\mathbf{X} + \Omega\Omega A\mathbf{X}$**  (ovvero la somma diretta di  $\mathbf{a}_{i,T} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P_i - O) + \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O)]$ ,  $i = 1, \dots, n$ ).

**Osservazione 4.1** Per una matrice quadrata  $\Omega^{(3)}$  di ordine 3, l'operazione  $\Omega^{(3)}\Omega^{(3)}\mathbf{y}$ , con  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ , corrisponde a (vedi Osservazione 4.1)

$$\Omega^{(3)}\Omega^{(3)}\mathbf{y} = \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{y}) = -\omega^2 \mathbf{y}^\perp, \quad (4.26)$$

dove

$$\mathbf{y}^\perp = \mathbf{y} - \frac{\omega \cdot \mathbf{y}}{\omega^2} \omega$$

denota la componente del vettore  $\mathbf{y}$  ortogonale a  $\omega$ .

La (4.26) è riconducibile alla nota formula relativa al doppio prodotto vettoriale  $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$ , valida per ogni terna di vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  in  $\mathbb{R}^3$ .

Si osservi anche che vale la seguente proprietà:

$$\dot{\tilde{\Omega}} = A^T \dot{\Omega} A. \quad (4.27)$$

Infatti, per le (4.11) e (4.12) si ha

$$\dot{\tilde{\Omega}} = \dot{A}^T \Omega A + A^T (\dot{\Omega} A + \Omega \dot{A}) = -A^T \Omega \Omega A + A^T \dot{\Omega} A + A^T \Omega \Omega A$$

e quindi la (4.27).

Dalla formula appena dimostrata segue che  $\tilde{\Omega}$  è costante se e solo se  $\tilde{\Omega}$  è costante, dato che  $A$  è in ogni istante non singolare. Questo corrisponde alla proprietà del vettore  $\omega$  velocità angolare di  $S$  rispetto a  $\Sigma$  di essere costante in  $\Sigma$  se e solo se solidale a  $S$ .

**Esercizio 4.3** Dimostrare, più in generale, che  $\tilde{\Omega} = \lambda(t)\tilde{\Omega}_0$ , con  $\tilde{\Omega}_0$  matrice costante, se e solo se  $\tilde{\Omega} = \lambda(t)\tilde{\Omega}_0$ , dove  $\tilde{\Omega}_0 = A^T(0)\tilde{\Omega}_0 A^T(0)$ .

La proprietà da dimostrare si enuncia anche affermando che il vettore  $\omega$  ha direzione costante in  $\Sigma$  se e solo se ha direzione solidale in  $S$ .

## 4.2 Dinamica relativa e assoluta

Sia  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{X}, \dot{\mathcal{X}}, t)$  il vettore rappresentativo in  $\mathbb{R}^{3n}$  delle coordinate nel sistema  $\Sigma$  delle forze direttamente applicate nel punto di coordinate  $\mathcal{X}$ . Per esprimere il medesimo campo di forze  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t)$  con le coordinate in  $S$ , si deve tenere conto che le componenti di un vettore in  $S$  sono quelle in  $\Sigma$  moltiplicate per  $A^T$ , esattamente come in (4.9). Dunque:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) = A^T(t)\mathcal{F}(A(t)\mathbf{X}, \Omega A(t)\dot{\mathbf{X}} + A(t)\dot{\mathbf{X}}, t). \quad (4.28)$$

Viceversa, se risulta assegnato il campo di forze  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t)$  in  $S$ , ovvero con componenti espresse rispetto al sistema di riferimento  $S$ , lo stesso sistema di forze in  $\Sigma$  è

$$\mathcal{F}(\mathcal{X}, \dot{\mathcal{X}}, t) = A(t)\mathbf{F}(A^T(t)\mathcal{X}, -A(t)\Omega\dot{\mathcal{X}} + A(t)\dot{\mathcal{X}}, t). \quad (4.29)$$

Osserviamo che se  $\mathcal{F}$  è un campo gradiente, ovvero  $\mathcal{F}(\mathcal{X}, t) = \nabla_{\mathcal{X}}\mathcal{U}(\mathcal{X}, t)$ , allora la funzione potenziale per  $\mathbf{F}$  è  $U(\mathbf{X}, t) = \mathcal{U}(A\mathbf{X}, t)$ . Infatti

$$\nabla_{\mathbf{X}}U = A^T \nabla_{\mathcal{X}}\mathcal{U} = A^T \mathcal{F} = \mathbf{F}. \quad (4.30)$$

Viceversa, il potenziale  $U(\mathbf{X}, t)$  di  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$  nelle variabili di  $\Sigma$  è  $\mathcal{U}(\mathcal{X}, t) = U(A^T\mathcal{X}, t)$ .

E' conveniente osservare anche che se  $\mathcal{F}(\mathcal{X}, \dot{\mathcal{X}}, t)$  ammette il potenziale generalizzato  $\mathcal{U}_g(\mathcal{X}, \dot{\mathcal{X}}, t)$ , allora  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t)$  ha come potenziale generalizzato la funzione

$$U_g(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) = \mathcal{U}_g(A\mathbf{X}, \Omega A\dot{\mathbf{X}} + A\dot{\mathbf{X}}, t) \quad (4.31)$$

(la verifica è lasciata per esercizio).

Viceversa, se esiste  $U_g(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t)$  tale che

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) = \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathbf{X}}} U_g) - \nabla_{\mathbf{X}} U_g,$$

allora

$$\mathcal{F}(\mathcal{X}, \dot{\mathcal{X}}, t) = \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathcal{X}}} \mathcal{U}_g) - \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{U}_g,$$

con  $\mathcal{U}_g = U_g(A^T \mathcal{X}, -A^T \Omega \mathcal{X} + A^T \dot{\mathcal{X}}, t)$ .

La scrittura delle **equazioni di moto** può essere effettuata sia nel sistema inerziale  $\Sigma$  sia in  $S$ .

Definiamo i vettori rappresentativi delle quantità di moto nei due sistemi come  $\mathbf{Q}_\Sigma = \dot{\mathcal{X}}_m$  e  $\mathbf{Q}_S = \dot{\mathbf{X}}_m$ .

Nel sistema  $\Sigma$  le equazioni sono semplicemente le (1.74), ovvero

$$\dot{\mathbf{Q}}_\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{X}, \dot{\mathcal{X}}, t) + \Phi(\mathcal{X}, \dot{\mathcal{X}}, t), \quad (4.32)$$

se  $\mathcal{F}$  è il sistema di forze direttamente applicate e  $\Phi$  il vettore rappresentativo delle reazioni vincolari.

La (4.25), riscritta come

$$\dot{\mathbf{Q}}_S = A^T \dot{\mathbf{Q}}_\Sigma - 2A^T \Omega_m A \dot{\mathbf{X}} - A^T (\dot{\Omega}_m A \mathbf{X} + \Omega_m \Omega A \mathbf{X}),$$

ovvero (vedi (4.13), (4.27))

$$\dot{\mathbf{Q}}_S = A^T \dot{\mathbf{Q}}_\Sigma - 2\tilde{\Omega}_m \dot{\mathbf{X}} - \dot{\tilde{\Omega}}_m \mathbf{X} - \tilde{\Omega}_m \tilde{\Omega} \mathbf{X},$$

permette di trovare le equazioni di moto in  $S$  (ricordare la (4.28)):

$$\dot{\mathbf{Q}}_S = \mathbf{F} + \Phi + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_T \quad (4.33)$$

dove  $\mathbf{F} = A^T \mathcal{F}$  sono le forze direttamente applicate espresse nelle coordinate di  $S$ ,  $\Phi = A^T \Phi$  è il sistema delle reazioni in  $S$  e

$$\mathbf{F}_C(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) = -2\tilde{\Omega}_m \dot{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{F}_T(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) = -\dot{\tilde{\Omega}}_m \mathbf{X} - \tilde{\Omega}_m \tilde{\Omega} \mathbf{X}, \quad (4.34)$$

rappresentano i contributi delle cosiddette forze apparenti ( **$\mathbf{F}_C$  forza di Coriolis** e  **$\mathbf{F}_T$  forza di trasciamento**), ovvero le modifiche che devono essere apportate all'equazione della dinamica nel caso in cui il sistema di riferimento sia in movimento.

Riconosciamo nelle (4.34) la somma diretta delle forze in  $\mathbb{R}^3$

$$-2m_i \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_{i,R}, \quad -m_i (\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (\mathbf{P}_i - O) + \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{P}_i - O)]), \quad i = 1, \dots, n$$

(si consideri che l'applicazione lineare  $\Omega$ , che riproduce il prodotto vettoriale, ha come matrice rappresentativa nel sistema  $S$  la matrice  $A^T \Omega A$ , che gioca il ruolo del vettore  $\boldsymbol{\omega}$  velocità angolare scritto con componenti in  $S$ ; lo stesso vale per  $\dot{\Omega}$  e per l'applicazione  $\Omega \Omega$ , rappresentata in  $S$  dalla matrice  $A^T \Omega A A^T \Omega A = A^T \Omega \Omega A$ ). Dimostriamo ora la seguente

**Proposizione 4.1** *Il sistema di forze*

$$\mathbf{F}_A(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) = \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_T = -2\tilde{\Omega}_m \dot{\mathbf{X}} - \dot{\tilde{\Omega}}_m \mathbf{X} - \tilde{\Omega}_m \tilde{\Omega} \mathbf{X} \quad (4.35)$$

ammette come potenziale generalizzato la funzione

$$U_g(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) = \tilde{\Omega}_m \mathbf{X} \cdot \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_m \mathbf{X} \cdot \tilde{\Omega} \mathbf{X}. \quad (4.36)$$

**Dim.**

Abbiamo dimostrato che la funzione  $U_g$  di (3.55) è il potenziale generalizzato per il sistema di forze (3.56).

Per la funzione (4.36), lineare nelle  $\dot{\mathbf{X}}$ , le funzioni  $\mathbf{A}$  e  $B$  di (3.55) sono:

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \tilde{\Omega}_m \mathbf{X}, \quad B(\mathbf{X}, t) = +\frac{1}{2} \tilde{\Omega}_m \mathbf{X} \cdot \tilde{\Omega} \mathbf{X}. \quad (4.37)$$

Calcoliamo  $\mathbf{F}$  della (3.56) con questi coefficienti:

$$\begin{aligned}(\mathbf{J}_X \mathbf{A})^T - (\mathbf{J}_X \mathbf{A}) &= \tilde{\Omega}_m^T - \tilde{\Omega}_m = -2\tilde{\Omega}_m, \\ \nabla_X B &= \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_m^T \tilde{\Omega}_m \mathbf{X} + \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_m^T \tilde{\Omega}_m \mathbf{X} = -\tilde{\Omega}_m \tilde{\Omega}_m \mathbf{X}\end{aligned}$$

(per questa formula tenere presente che  $\nabla_X(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\nabla_X \mathbf{v})^T \mathbf{w} + (\nabla_X \mathbf{w})^T \mathbf{v}$ , per una coppia di funzioni vettoriali  $\mathbf{v}(\mathbf{X}), \mathbf{w}(\mathbf{X})$ ),

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \dot{\tilde{\Omega}}_m \mathbf{X}$$

(per quest'ultima formula tenere conto della (4.27)).

Si conclude che la forza (3.56) corrispondente a (4.36) è proprio  $\mathbf{F}_A$  di (4.35).

□

Occupiamoci ora della scrittura delle equazioni nel **formalismo lagrangiano**.

Per un **sistema olonomo vincolato** ci poniamo in  $S$  e introduciamo i parametri  $q_1, \dots, q_\ell$  in modo da rappresentare la varietà delle configurazioni in  $S$  come  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{q}, t)$ , dove la presenza di  $t$  è dovuta unicamente all'eventuale moto della varietà rispetto a  $S$ .

Il vettore rappresentativo in  $\Sigma$  è funzione delle medesime coordinate lagrangiane mediante

$$\mathcal{X}(\mathbf{q}, t) = A(t)\mathbf{X}(\mathbf{q}, t). \quad (4.38)$$

Notiamo stavolta la presenza del tempo anche attraverso il moto di  $S$  rispetto a  $\Sigma$ .

Le componenti lagrangiane di un medesimo vettore scritto nelle componenti in  $\Sigma$  come  $\mathcal{W}(\mathcal{X}, \dot{\mathcal{X}}, t)$  e in  $S$  come  $\mathbf{W}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) = A^T(t)\mathcal{W}$  sono le medesime funzioni di  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$  e  $t$ .

Infatti, per la (4.29) e la (4.38) si ha

$$\mathcal{W}_\theta^{(\Sigma)} = (J_{\mathbf{q}} \mathcal{X})^T \mathcal{W} = (A J_{\mathbf{q}} \mathbf{X})^T \mathcal{W} = (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X})^T \mathbf{W} = \mathbf{W}_\theta^{(S)}. \quad (4.39)$$

Nel sistema  $\Sigma$  le equazioni lagrangiane del moto si trovano proiettando lungo i vettori dello spazio tangente  $\partial \mathcal{X} / \partial q_k$ ,  $k = 1, \dots, \ell$ , e sono semplicemente le (2.73):

$$(J_{\mathbf{q}} \mathcal{X})^T \dot{\mathbf{Q}}_\Sigma = \left( \dot{\mathbf{Q}}_\Sigma \right)_\theta^{(\Sigma)} = \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T_\Sigma - \nabla_{\mathbf{q}} T_\Sigma = \mathcal{F}_\theta^{(\Sigma)} + \Phi_\theta^{(\Sigma)}, \quad (4.40)$$

con  $\Phi_\theta^{(\Sigma)} = 0$  se i vincoli sono lisci.

Più vantaggiosa può risultare, in molti casi, la scrittura delle equazioni nel sistema non inerziale  $S$ , privilegiando il quale, d'altronde, abbiamo introdotto le coordinate lagrangiane  $\mathbf{q}$ .

Proiettando la (4.33) sullo spazio tangente, si trova

$$(J_{\mathbf{q}} \mathbf{X})^T \dot{\mathbf{Q}}_S = \left( \dot{\mathbf{Q}}_S \right)_\theta^{(S)} = \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T_S - \nabla_{\mathbf{q}} T_S = F_\theta^{(S)} + \Phi_\theta^{(S)} + (F_A)_\theta^{(S)}, \quad (4.41)$$

dove  $\Phi_\theta^{(S)} = 0$  se i vincoli sono lisci.

Per quanto dimostrato nella Proposizione 3.7 e per la (3.64), il termine  $(\mathbf{F}_A)_{\theta,k}^{(S)}$  può essere ricondotto ad un potenziale generalizzato  $U_A$  nelle variabili lagrangiane. Più precisamente:

$$U^{(A)}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \alpha_i(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \beta(\mathbf{q}, t) = U_1^{(A)} + U_0^{(A)} \quad (4.42)$$

dove, al solito,  $U_i^{(A)}$ ,  $i = 0, 1$  indica il grado del polinomio rispetto alle  $\dot{\mathbf{q}}$  e (vedi (3.73) e (4.37))

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{q}, t) &= (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X})^T \mathbf{A} = (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X})^T \tilde{\Omega}_m \mathbf{X}, \\ \beta(\mathbf{q}, t) &= B + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_m \mathbf{X} \cdot \tilde{\Omega}_m \mathbf{X} + \tilde{\Omega}_m \mathbf{X} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}\end{aligned} \quad (4.43)$$

dove  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{q}, t)$ .

Le componenti lagrangiane della forza si ricavano da (3.75):

$$\begin{aligned} (F_{\mathcal{A}})_{\theta} &= -(J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})^T \tilde{\Omega}_m \dot{\mathbf{X}} + (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})^T \left( -\tilde{\Omega}_m \tilde{\Omega}\mathbf{X} - \dot{\tilde{\Omega}}_m \mathbf{X} \right) = \\ &= -2(J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})^T \tilde{\Omega}_m (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X}) \dot{\mathbf{q}} - (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})^T \left( \tilde{\Omega}_m \tilde{\Omega}\mathbf{X} + \dot{\tilde{\Omega}}_m \mathbf{X} \right) - 2(J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})^T \tilde{\Omega}_m \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Ritroviamo nella parte lineare rispetto alle  $\dot{\mathbf{q}}$  la componente giroscopica proveniente dalla forza di Coriolis. Se  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{q})$  in  $S$ , allora la proiezione della forza di Coriolis è proprio la componente giroscopica, come si è visto precedentemente (va notato che la matrice  $\Omega_m$  di (3.44), costruita con le componenti in  $S$  di  $\omega$ , corrisponde qui a  $\tilde{\Omega}_m = A^T \Omega_m A$ ).

Dato che  $U^{(A)}$  è tale che  $\nabla_{\mathbf{q}} U^{(A)} - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} U^{(A)} = (F_{\mathcal{A}})_{\theta}$ , si può dunque definire una **funzione Lagrangiana**  $\mathcal{L}_S = T_s + U^{(A)}$  in modo da poter scrivere le equazioni (4.41) come

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}_S - \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{L}_S = F_{\theta}^{(S)} + \Phi_{\theta}^{(S)}, \quad (4.44)$$

con  $\Phi_{\theta}^{(S)} = 0$  nel caso di vincoli lisci.

Ovviamente, se le forze direttamente applicate derivano da un potenziale  $U$ , ordinario o generalizzato, allora si definisce  $\mathcal{L}_S = T_S + U + U^{(A)}$  e le equazioni di moto, supponendo i vincoli lisci, sono

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}_S - \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{L}_S = \mathbf{0}.$$

### 4.3 Il bilancio energetico nei sistemi non inerziali

Dalle equazioni (4.44) e da (3.85) ricaviamo la seguente equazione di bilancio energetico:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial t} + \hat{W}_F + \hat{W}_{\Phi} \quad (4.45)$$

dove  $\mathcal{L}_S = T_S + U^{(A)}$ ,  $\mathcal{E}$  è definita come in (3.23), ovvero

$$\mathcal{E} = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}_S \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}_S,$$

mentre  $\hat{W}_F$ ,  $\hat{W}_{\Phi}$  sono le potenze virtuali delle forze direttamente applicate e delle forze vincolari, rispettivamente.

Non è sfuggita l'analogia fra i termini che compongono l'energia cinetica e il potenziale generalizzato delle forze apparenti.

**Proposizione 4.2** *Si ha:*

$$T_{1,\Sigma} = T_{1,S} + U_1^{(A)}, \quad T_{0,\Sigma} = T_{0,S} + U_0^{(A)} \quad (4.46)$$

e, se i vincoli sono scritti in modo indipendente dal tempo in  $S$ :

$$T_{1,\Sigma} = U_1^{(A)} = (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})^T \tilde{\Omega}_m \mathbf{X} \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad T_{0,\Sigma} = U_0^{(A)} = \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_m \mathbf{X} \cdot \tilde{\Omega}\mathbf{X} \quad \text{se} \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = 0. \quad (4.47)$$

**Dim.**

È una diretta conseguenza di (4.23), (4.24), (4.42) e (4.43).  $\square$

Possiamo quindi dare la seguente espressione per l'energia  $\mathcal{E}$ :

$$\mathcal{E} = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}_S \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}_S = T_{2,S} - T_{0,S} - U_0^{(A)} = T_{2,S} - T_{0,\Sigma} = T_{2,\Sigma} - T_{0,\Sigma}.$$

Nella duplice intenzione ora di concentrare l'attenzione sulle forze apparenti e di trovare integrali primi del moto, poniamoci pure nel caso in cui le forze direttamente applicate derivino da un potenziale generalizzato  $U^{(G)} = U_1^{(G)} + U_0^{(G)}$  ( $U_1^{(G)} \equiv 0$  nel caso di un potenziale ordinario) e i vincoli siano lisci.

È necessario definire nuovamente la Lagrangiana come  $\mathcal{L}_S = T + U^{(A)} + U^{(G)}$  e nel bilancio energetico il lavoro delle forze direttamente applicate si trasferisce in  $\mathcal{E}$ :

$$\mathcal{E} = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}_S \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}_S = T_{2,S} - T_{0,S} - U_0^A - U_0^G = T_{2,\Sigma} - T_{0,\Sigma} - U_0^G. \quad (4.48)$$

Se dunque  $\mathcal{L}_S$  non dipende esplicitamente dal tempo, la quantità  $\mathcal{E}$  in (4.48) risulta costante. Un caso in cui questa proprietà si verifica può essere facilmente immaginato e ricondotto ad una situazione nota.

Supponiamo infatti che i vincoli siano lisci e fissi in  $S$ , ovvero  $\partial\mathbf{X}/\partial t = 0$ , che le forze direttamente applicate  $\mathbf{F}$  siano indipendenti dal tempo in  $S$ , dunque il potenziale  $U_0^G$  non dipende esplicitamente dal tempo.

Supponiamo inoltre che  $\Omega$  (dunque  $\tilde{\Omega}$ , per la (4.27) sia costante. Con queste richieste, la funzione Lagrangiana  $\mathcal{L}_S$  è tale che  $\partial\mathcal{L}_S/\partial t = 0$ , dunque la quantità (4.48) rimane costante.

Osservare che in questa circostanza il potenziale  $U^A$  è costituito dalla parte  $U_1^A$  che dà luogo alle forze giroscopiche di Coriolis e dalla parte  $U_0^A$  che proviene dalle forze di trascinamento, in questo caso posizionali e indipendenti dalle  $\dot{\mathbf{q}}$ .

Il caso descritto descrive la **rotazione uniforme** del sistema  $S$  attorno ad una direzione, con vincoli indipendenti dal tempo in  $S$  e con forze applicate non dipendenti esplicitamente da  $t$  in  $S$ .

**Esercizio 4.4** *Esaminare il caso di una rotazione uniforme di  $S$  attorno ad uno degli assi coordinati.*

**Esercizio 4.5** *Un punto materiale  $P$  di massa  $m$  è vincolato ad avere distanza costante pari a  $l$  da  $A$  ed è soggetto unicamente alla forza peso (**pendolo di Foucault**).*

*Considerare un sistema di riferimento non inerziale con origine nel centro  $O$  della terra, asse  $z$  coincidente con la verticale  $OA$ , asse  $x$  e asse  $y$  con versori paralleli ai versori del meridiano e del parallelo passanti per  $A'$ , rispettivamente, dove  $A'$  è la proiezione di  $A$  sul suolo terrestre (ovvero  $O$ ,  $A'$  e  $A$  sono allineati sulla verticale). Studiare il moto del punto.*

#### 4.4 Sistemi anolonomi: vincoli misti

Ci occupiamo ora di derivare le equazioni di moto nel caso di un sistema sottoposto a vincoli in parte olonomi e in parte non olonomi. Abbiamo già ricavato le equazioni di moto del primo tipo (vedi (1.85)). Tuttavia, la presenza di alcuni vincoli di tipo olonomo permette comunque l'introduzione di un set di variabili lagrangiane che semplificherà la struttura delle equazioni.

Consideriamo dunque un sistema di  $n$  punti soggetto a  $\mu$  vincoli geometrici e  $\nu$  vincoli differenziali lineari:

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0}, \quad (4.49)$$

$$A(\mathbf{X}, t)\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0}, \quad (4.50)$$

dove  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_\mu)$  è una funzione vettoriale da  $\mathbb{R}^{3n+1}$  a valori in  $\mathbb{R}^\nu$ ,  $\mu < 3n$ ,  $A(\mathbf{X}, t)$  è una matrice  $\nu \times 3n$ , in modo che  $\mu + \nu < 3n$ , e  $\mathbf{B}(\mathbf{X}, t)$  è un vettore in  $\mathbb{R}^\nu$ .

Utilizzando dapprima solo i vincoli finiti (4.49), che supponiamo indipendenti, possiamo esprimere il vettore rappresentativo delle posizioni in funzione di  $\ell = 3n - \mu$  coordinate indipendenti  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_\ell)$ , ottenendo

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{q}, t) \quad (4.51)$$

L'espressione del vettore velocità è sempre la (2.26), ovvero  $\dot{\mathbf{X}} = (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\dot{\mathbf{q}} + \partial\mathbf{X}/\partial t$ , dove però le variabili velocità generalizzate  $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell)$  non sono indipendenti, dato che devono soddisfare i vincoli cinetici (4.50). Sostituendo la (2.26) nelle equazioni vincolari (4.50), si trova

$$\alpha(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} + \beta(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}, \quad (4.52)$$

dove  $\alpha$  è la matrice  $\nu \times \ell$  e  $\beta$  il vettore in  $\mathbb{R}^\nu$  definiti da

$$\begin{cases} \alpha(\mathbf{q}, t) = A(\mathbf{X}(\mathbf{q}, t), t)(J_{\mathbf{q}}\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^{\nu \times \ell} \\ \beta(\mathbf{q}, t) = A(\mathbf{X}(\mathbf{q}, t), t)\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{X}(\mathbf{q}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{X}(\mathbf{q}, t), t) \in \mathbb{R}^\nu. \end{cases} \quad (4.53)$$

Un modo per scrivere le equazioni di moto può consistere senz'altro nel ripercorrere il metodo utilizzato in (2.77), pensando stavolta di aggiungere vincoli di tipo cinematico anziché intero. Supponendo di avere

forze direttamente applicate riconducibili ad un potenziale, eventualmente generalizzato, si ha, ricordando la (1.86) e procedendo come per la (2.75) (vedi anche Esercizio 3.1):

$$\mathbf{0} = (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})^T (\dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{F} - \Phi) = \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - [\alpha(\mathbf{q}, t)]^T \bar{\lambda}, \quad (4.54)$$

dove  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^\nu$  è il vettore dei moltiplicatori. Le  $\ell$  equazioni (4.54), unitamente alle  $\nu$  condizioni vincolari cinematiche (4.50), forniscono le equazioni di moto nelle  $\ell + \nu$  incognite  $\mathbf{q}, \bar{\lambda}$ . In sostanza, si tratta delle equazioni di prima specie (1.85) rilette nelle variabili lagrangiane  $\mathbf{q}$ , utilizzando le quali possiamo dimenticare le condizioni vincolari intere (4.49).

Vogliamo però cercare una scrittura delle equazioni di moto ancora più ridotta, utilizzando, per così dire, eventuali informazioni geometriche provenienti dai vincoli cinematici: l'obiettivo è quello di ridurre il problema al numero essenziale di parametri, ovvero  $\sigma = 3n - (\mu + \nu)$ . Il ruolo fondamentale in questa operazione è giocato dalla linearità delle condizioni (4.50).

Iniziamo con l'osservare che le  $\nu$  equazioni (4.52) nelle  $\ell$  variabili  $\dot{\mathbf{q}}$  consentono di esprimere  $\nu$  variabili in funzione delle restanti  $\sigma = \ell - \nu$  (si osservi che  $\sigma = 3n - (\mu + \nu) > 0$  è il numero di gradi di libertà del sistema). Le  $\sigma$  velocità generalizzate indipendenti hanno valori arbitrari e determinano i valori delle restanti  $\nu$  velocità generalizzate.

Oppure, anziché procedere direttamente per questa via, in alcuni casi può risultare conveniente scegliere come quantità indipendenti non le  $\sigma$  velocità generalizzate, ma un'opportuna combinazione lineare  $\eta \in \mathbb{R}^\sigma$  di tutte le variabili velocità:

$$\eta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = Z(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^\sigma \quad (4.55)$$

dove  $Z$  è una matrice  $\sigma \times \ell$  da specificare.

Le  $\eta_i, i = 1, \dots, \sigma$ , vengono dette **pseudovelocità**. In particolare, alcune di esse possono coincidere con alcune delle velocità generalizzate  $\dot{\mathbf{q}}$ .

La facoltà di scegliere liberamente  $\sigma$  velocità nella  $\ell$ -upla  $\dot{\mathbf{q}}$  si trasferisce nell'arbitrarietà di scelta delle  $\sigma$  componenti di  $\eta$ . La matrice  $Z$  dei coefficienti in (4.55) viene scelta nel modo più conveniente per affrontare il problema. L'unica condizione che imponiamo è la possibilità di risolvere il sistema formato dalle  $\nu$  equazioni date dalle (4.52), e dalle (4.55) nelle  $\ell$  variabili  $\mathbf{q}$ . Si richiede dunque che il determinante della matrice  $\ell \times \ell$  che a blocchi è definita da

$$M(\mathbf{q}, t) = \begin{pmatrix} \alpha(\mathbf{q}, t) \\ Z(\mathbf{q}, t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell} \quad (4.56)$$

sia diverso da zero. Per ogni  $\eta \in \mathbb{R}^\sigma$  arbitrario si ottiene dunque un'unica  $\ell$ -upla di velocità generalizzate  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^\ell$ .

Risulta abbastanza intuitivo immaginare che le velocità virtuali del sistema siano combinazioni lineari del tipo  $(J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\dot{\mathbf{q}}$ , con  $\dot{\mathbf{q}}$  soluzione del sistema formato dalle (4.52) nella versione a tempo bloccato, ovvero ponendo  $\beta = \mathbf{0}$ , e dalle (4.55). Per ogni stringa fissata  $\eta$  si ottiene un'unica soluzione, in maniera corrispondente al fatto che lo spazio delle velocità virtuali  $\hat{\mathbf{X}}$  ha dimensione  $\sigma = 3n - (\mu + \nu)$ .

Vogliamo ora stabilire rigorosamente questa procedura e, partendo dall'equazione simbolica della dinamica (1.84), trovare le equazioni di moto del sistema.

## 4.5 Le equazioni di moto di Appell

Le velocità virtuali  $\hat{\mathbf{X}}$  permesse dai vincoli (4.49) e (4.50) devono soddisfare il sistema (1.61), ovvero

$$\begin{cases} J_{\mathbf{X}}\mathbf{f}(\mathbf{X}, t)\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{0}, \\ A(\mathbf{X}, t)\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (4.57)$$

Da (4.49) e (4.51) si trova  $J_{\mathbf{X}}\mathbf{f}J_{\mathbf{q}}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ , dunque ciascun vettore colonna di  $J_{\mathbf{q}}\mathbf{X}$  verifica il primo rigo di equazioni in (4.57) (corrispondente a  $\mu$  equazioni scalari). Dato che per ipotesi i vincoli  $\mathbf{f}$  sono indipendenti, anche i vettori colonna di  $J_{\mathbf{q}}\mathbf{X}$  lo sono e la totalità delle soluzioni del primo blocco di equazioni in (4.57) è dunque una qualsiasi combinazione lineare

$$\hat{\mathbf{X}} = (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\lambda \in \mathbb{R}^{3n}$$

con  $\lambda \in \mathbb{R}^\ell$  arbitrario, ovvero dallo spazio lineare di dimensione  $3n - \mu = \ell$  ortogonale ai vettori  $\nabla_{\mathbf{x}} f_k$ ,  $k = 1, \dots, \mu$ .

La compatibilità di queste soluzioni parziali con le restanti  $\nu$  equazioni in (4.57) comporta che esse devono risolvere il sistema

$$A\hat{\mathbf{X}} = A(J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\lambda = \alpha(\mathbf{q}, t)\lambda \in \mathbb{R}^\nu \quad (4.58)$$

(vedi (4.53)).

Il sistema (4.58) di  $\nu$  equazioni nelle  $\ell$  incognite  $\lambda$  viene risolto in forma parametrica aggiungendo le  $\sigma = \ell - \nu$  equazioni

$$\eta = Z(\mathbf{q}, t)\lambda \in \mathbb{R}^\sigma \quad (4.59)$$

contenenti i parametri arbitrari  $\eta$  e i coefficienti di  $Z$  della definizione delle pseudovelocità (4.55).

Il sistema formato dalle (4.58) e dalle (4.59) assume la forma  $M(\mathbf{q}, t)\lambda = \tilde{\eta}$ , dove  $M$  è la matrice  $\ell \times \ell$  definita in (4.56) e  $\tilde{\eta} = (\mathbf{0}, \eta) \in \mathbb{R}^\ell$ , con  $\mathbf{0}$  vettore nullo di  $\mathbb{R}^\nu$ .

Essendo per ipotesi  $M$  invertibile, è possibile determinare  $\lambda = M^{-1}\tilde{\eta}$ .

Definendo, per comodità, i blocchi di  $M^{-1}$  come

$$M^{-1}(\mathbf{q}, t) = \begin{pmatrix} \Theta(\mathbf{q}, t) & \Gamma(\mathbf{q}, t) \end{pmatrix}, \quad (4.60)$$

con  $\Theta \in \mathbb{R}^{\ell \times \nu}$ ,  $\Gamma \in \mathbb{R}^{\ell \times \sigma}$ , si vede subito che

$$\lambda = \Gamma\eta \in \mathbb{R}^\ell. \quad (4.61)$$

L'insieme  $\hat{\mathbf{X}}$  delle velocità virtuali è dunque lo spazio lineare di dimensione  $\sigma$

$$\hat{\mathbf{X}} = \{ \bar{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{3n} \mid \bar{\mathbf{X}} = (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\Gamma\eta, \eta \in \mathbb{R}^\sigma \}.$$

L'equazione di moto (1.84) assume così l'espressione (assumiamo pure i vincoli lisci, ovvero (1.83), in caso contrario le modifiche sono ovvie)

$$\dot{\mathbf{Q}} \cdot (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\Gamma\eta = \mathbf{F} \cdot (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\Gamma\eta. \quad (4.62)$$

Ponendo

$$\bar{\Gamma}(\mathbf{q}, t) = (J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\Gamma \in \mathbb{R}^{3n \times \sigma} \quad (4.63)$$

e chiamando

$$\Pi = [(J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\Gamma]^T \mathbf{F} = \bar{\Gamma}^T \mathbf{F} \in \mathbb{R}^\sigma \quad (4.64)$$

**forze generalizzate corrispondenti alle pseudovelocità**  $\eta$ , si ha che la (4.62) assume la forma

$$\left( \bar{\Gamma}^T \dot{\mathbf{Q}} - \Pi \right) \eta = \mathbf{0}$$

che, per l'arbitrarietà delle  $\eta$ , equivale a

$$\bar{\Gamma}^T \dot{\mathbf{Q}} - \Pi = \mathbf{0} \quad (4.65)$$

che sono le equazioni di moto in  $\mathbb{R}^\sigma$  cercate.

Nell'intenzione ora di determinare l'espressione della velocità lagrangiana (2.26) in termini delle pseudovelocità, vediamo che le  $\dot{\mathbf{q}}$  verificano il sistema di  $\nu + \sigma = \ell$  equazioni date dalle (2.26) e (4.55). Il sistema corrisponde a

$$M\dot{\mathbf{q}} = (-\beta, \eta) \in \mathbb{R}^\ell,$$

con  $M$  definita in (4.56) e  $\beta \in \mathbb{R}^\nu$  in (4.53).

Si ha dunque (vedi (4.60))

$$\dot{\mathbf{q}} = \Gamma\eta - \Theta\beta \in \mathbb{R}^\ell \quad (4.66)$$

e, sostituendo in (2.26),

$$\dot{\mathbf{X}}(\mathbf{q}, \eta, t) = \bar{\Gamma}(\mathbf{q}, t)\eta + \Lambda(\mathbf{q}, t) \in \mathbb{R}^{3n} \quad (4.67)$$

con  $\bar{\Gamma}$  definito in (4.63) e

$$\Lambda(\mathbf{q}, t) = -(J_{\mathbf{q}}\mathbf{X})\Theta\beta + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \in \mathbb{R}^{3n}.$$

La (4.67) ha una chiave di lettura che ci riporta alla scomposizione della velocità lagrangiana che conosciamo. Infatti, se chiamiamo  $\mathbf{\Gamma}_j \in \mathbb{R}^{3n}$ ,  $j = 1, \dots, \sigma$  i vettori colonna di  $\bar{\Gamma}$ , la (4.63) mostra che essi sono opportune combinazioni lineari, secondo i coefficienti  $\Gamma$ , dei vettori  $\partial \mathbf{X} / \partial q_k$ ,  $k = 1, \dots, \ell$ , dunque il primo termine in (4.67), riconducibile alla componente virtuale della velocità, è un qualunque vettore del sottospazio di dimensione  $\sigma < \mathbf{\Gamma}_1, \dots, \mathbf{\Gamma}_\sigma > \subseteq < \partial \mathbf{X} / \partial q_1, \dots, \partial \mathbf{X} / \partial q_\ell >$ . L'effetto dei vincoli anolonomi lineari (4.50) è dunque quello di ridurre la dimensione dello spazio delle velocità istantanee permesse da  $\ell$  a  $\ell - \nu = \sigma$ .

Il vettore  $\Lambda$ , invece, è dovuto al trascinarsi dei vincoli e si annulla se i vincoli stazionari, essendo in tal caso  $\beta = \mathbf{0}$ .

Derivando rispetto a  $t$  la (4.67) e volendo mettere in evidenza la dipendenza del risultato dalle **pseudoaccelerazioni**  $\ddot{\eta}$ , ci accorgiamo che

$$\ddot{\mathbf{X}} = \bar{\Gamma} \ddot{\eta} + \Xi(\mathbf{q}, \eta, t) \quad (4.68)$$

dove il vettore  $\Xi$ , che proviene dalla derivazione di  $\bar{\Gamma}$  e di  $\Lambda$  non dipende dalle pseudoaccelerazioni.

Ricordiamo la definizione di **energia delle accelerazioni** (vedi (2.86))

$$\mathcal{Y} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}} \cdot \ddot{\mathbf{X}} = \mathcal{Y}(\mathbf{q}, \eta, \dot{\eta}, t).$$

Tramite la (4.68), si vede che (confronta con (2.87))

$$\nabla_{\dot{\eta}} \mathcal{Y} = (J_{\dot{\eta}} \ddot{\mathbf{X}})^T \dot{\mathbf{Q}} = \bar{\Gamma}^T \dot{\mathbf{Q}}$$

Si giunge pertanto alla scrittura delle (4.65) come

$$\nabla_{\dot{\eta}} \mathcal{Y}(\mathbf{q}, \eta, \dot{\eta}, t) = \Pi(\mathbf{q}, \eta, \dot{\eta}, t) \in \mathbb{R}^\sigma. \quad (4.69)$$

Le  $\sigma$  equazioni (4.69) sono chiamate **equazioni di Appell**. Esse contengono le  $\sigma + \ell$  incognite  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^\ell$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^\sigma$  e vanno considerate unitamente alle  $\ell$  equazioni (4.61).

La specificazione dei dati iniziali  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^0$ ,  $\eta(0) = \eta^0$  determina univocamente il moto del sistema anolonomo. Va osservato che questi dati iniziali, arbitrari, individuano la posizione iniziale del sistema (mediante la (4.51)) e le velocità iniziali (mediante la (4.55)) compatibili con i vincoli.

Se, in un caso particolare, si considerano come pseudovelocità  $\sigma$  velocità generalizzate indipendenti  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\sigma$ , allora si ha

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \Gamma_1(\mathbf{q}, t) \end{pmatrix}$$

con  $\mathbf{I}$  matrice identità  $\sigma \times \sigma$  e  $\Gamma_1$  matrice in  $\mathbb{R}^{\ell-\sigma, \sigma}$ .

Per comprendere la struttura di  $\bar{\Gamma}$  si scrivono i blocchi di  $J_{\mathbf{q}} \mathbf{X}$  come (vedi (5.72))

$$J_{\mathbf{q}} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} J_{\mathbf{q}_\sigma} \mathbf{X}_\sigma & J_{\mathbf{q}_{\ell-\sigma}} \mathbf{X}_\sigma \\ J_{\mathbf{q}_\sigma} \mathbf{X}_{3n-\sigma} & J_{\mathbf{q}_{\ell-\sigma}} \mathbf{X}_{3n-\sigma} \end{pmatrix}$$

dove  $\mathbf{q}_\sigma = (q_1, \dots, q_\sigma) \in \mathbb{R}^\sigma$ , dove  $\mathbf{q}_{\ell-\sigma} = (q_{\sigma+1}, \dots, q_\ell) \in \mathbb{R}^{\ell-\sigma}$  e analogha scomposizione per  $\mathbf{X}_\sigma \in \mathbb{R}^\sigma$ ,  $\mathbf{X}_{3n-\sigma} \in \mathbb{R}^{3n-\sigma}$ ,  $(\mathbf{X}_\sigma, \mathbf{X}_{3n-\sigma}) = \mathbf{X}$ .

Si ha da (4.63):

$$\bar{\Gamma} = \begin{pmatrix} J_{\mathbf{q}_\sigma} \mathbf{X}_\sigma + (J_{\mathbf{q}_{\ell-\sigma}} \mathbf{X}_\sigma) \Gamma_1 \\ J_{\mathbf{q}_\sigma} \mathbf{X}_{3n-\sigma} + (J_{\mathbf{q}_{\ell-\sigma}} \mathbf{X}_{3n-\sigma}) \Gamma_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3n \times \sigma},$$

dunque

$$\Pi = [J_{\mathbf{q}_\sigma} \mathbf{X}_\sigma + (J_{\mathbf{q}_{\ell-\sigma}} \mathbf{X}_\sigma) \Gamma_1]^T \mathbf{F}_\sigma + [J_{\mathbf{q}_\sigma} \mathbf{X}_{3n-\sigma} + (J_{\mathbf{q}_{\ell-\sigma}} \mathbf{X}_{3n-\sigma}) \Gamma_1]^T \mathbf{F}_{3n-\sigma} \in \mathbb{R}^\sigma, \quad (4.70)$$

dove  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3n}$  è stato scomposto in  $\mathbf{F}_\sigma \in \mathbb{R}^\sigma$  e  $\mathbf{F}_{3n-\sigma} \in \mathbb{R}^{3n-\sigma}$ , in modo che  $(\mathbf{F}_\sigma, \mathbf{F}_{3n-\sigma}) = \mathbf{F}$ .

Le equazioni (4.69) scritte con  $\Pi$  come in (4.70) contengono il caso dei **sistemi olonomi**, in cui tutte le velocità generalizzate sono indipendenti ( $\nu = 0$ ,  $\sigma = \ell$ ). Si ha  $\Pi = (J_{\mathbf{q}} \mathbf{X})^T \mathbf{F}$  (4.69) coincidono con le (2.88).

In ogni caso, la scrittura delle equazioni di Appell mediante pseudovelocità scritte per i sistemi olonomi porta ad equazioni di moto differenti dalle equazioni di Lagrange del secondo tipo.

**Esercizio 4.6** Verificare che le (4.69) sono le (2.88), nel caso dei sistemi olonomi in cui si scelga  $\eta = \dot{\mathbf{q}}$ .

**Esercizio 4.7** Determinare mediante le equazioni di Appell il moto del sistema descritto nell'esercizio (1.1), (5), utilizzando come variabili  $q_1, q_2, q_3$  le coordinate del centro di massa  $(x, y)$  e l'angolo  $\varphi$  che la sbarretta forma con l'asse delle ascisse e ponendo come pseudovelocità  $\eta_1 = \dot{x}/\cos\varphi$ ,  $\eta_2 = \dot{\varphi}$ .

## 5 Il moto geodetico. Richiami di geometria differenziale e di algebra lineare

### 5.1 Moto spontaneo su una sottovarietà

Sia dato un sistema olonomo a vincoli scleronomi con  $\ell$  gradi di libertà. L'energia cinetica del sistema è data da (vedi (2.50))

$$T \equiv T_2 = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{\ell} a_{h,k}(\mathbf{q}) \dot{q}_h \dot{q}_k \quad (5.1)$$

con

$$a_{h,k} = \frac{\partial \mathbf{X}_m}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_k}.$$

La parametrizzazione scelta individua in ogni punto  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(\mathbf{q}_0)$  i vettori (vedi (2.9))

$$\mathbf{e}_k(\mathbf{q}_0) = \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_k} \right|_{\mathbf{q}_0}, \quad k = 1, \dots, \ell,$$

base dello spazio tangente  $\mathcal{T}_{\mathbf{X}_0}$ .

Utilizziamo ora i coefficienti  $a_{h,k}$  dell'energia cinetica per definire una metrica sulla varietà, ponendo (vedi (5.19))

$$g_{i,j} = a_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, \ell.$$

Se dunque

$$\mathbf{y}_1 = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i^{(1)} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y}_2 = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i^{(2)} \mathbf{e}_i,$$

sono due vettori di  $\mathcal{T}_{\mathbf{X}_0}$ , il prodotto scalare (5.20) indotto dalla metrica è

$$\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \rangle = \sum_{h,k=1}^{\ell} a_{h,k} \mu_h^{(1)} \mu_k^{(2)}. \quad (5.2)$$

È immediato verificare che la (5.2) definisce una **forma  $\mathcal{M}$  bilineare simmetrica** sullo spazio tangente  $\mathcal{T}_{\mathbf{X}_0}$ , con matrice rappresentativa

$$a_{h,k}(\mathbf{q}_0) = \langle \mathbf{e}_h(\mathbf{q}_0), \mathbf{e}_k(\mathbf{q}_0) \rangle, \quad h, k = 1, \dots, \ell. \quad (5.3)$$

In virtù della Proposizione (3.3), la forma  $\mathcal{M}$  è **definita positiva**. La regolarità della dipendenza di  $\mathbf{X}$  dalle  $q_1, \dots, q_\ell$  assicura poi che la dipendenza della forma bilineare da  $\mathbf{q}_0$  sia differenziabile. Pertanto,  $\mathcal{M}$  definisce una **metrica riemanniana** sulla varietà delle configurazioni.

**Osservazione 5.1** *Se  $n = 1$ , la metrica definita da (5.3) definisce l'ordinario prodotto scalare moltiplicato per la massa  $m$  dell'unico punto, dato che*

$$a_{h,k} = m \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_k}.$$

Consideriamo ora il moto sulla sottovarietà  $\ell$ -dimensionale fissa in assenza di forze direttamente applicate (**moto spontaneo**). Le equazioni di Lagrange di secondo tipo sono (vedi (2.85)), supponendo i vincoli lisci:

$$\sum_{i=1}^{\ell} a_{i,k} \ddot{q}_i + \sum_{i,j=1}^{\ell} \left( \frac{\partial a_{i,k}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{i,j}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j = 0, \quad k = 1, \dots, \ell \quad (5.4)$$

È utile ora fare la seguente osservazione riguardo ad una qualunque matrice quadrata  $A$  di ordine  $\ell$ . Dall'identità

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}$$

si deduce che  $A$  è decomponibile nella somma di una matrice simmetrica  $S = \frac{A + A^T}{2}$  e di una matrice antisimmetrica  $M = \frac{A - A^T}{2}$ .

La forma bilineare associata ad  $A$  definita da  $\mathbf{y}^T \cdot A\mathbf{y}$  per ogni vettore  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^\ell$  si può dunque scrivere

$$\mathbf{y}^T \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{y}^T \cdot S\mathbf{y} + \mathbf{y}^T \cdot M\mathbf{y}.$$

Dato che  $M$  è antisimmetrica, si ha  $\mathbf{y}^T \cdot M\mathbf{y} = 0$ . Infatti:

$$\mathbf{y}^T \cdot M\mathbf{y} = (\mathbf{y}^T \cdot M\mathbf{y})^T = (M\mathbf{y})^T \cdot \mathbf{y} = -\mathbf{y}^T M \cdot \mathbf{y}$$

e l'unico numero coincidente con il suo opposto è zero.

Si conclude che  $\mathbf{y}^T \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{y}^T \cdot S\mathbf{y}$ .

Applicando il ragionamento alla matrice  $A$  di elementi  $A_{i,j} = \frac{\partial a_{i,k}}{\partial q_j}$ ,  $i, j = 1, \dots, \ell$  con  $k$  fissato e pensando al vettore  $\mathbf{y}$  come  $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell)$ , otteniamo, per ogni  $k$  compreso fra 1 e  $\ell$ :

$$\sum_{i,j=1}^{\ell} \frac{\partial a_{i,k}}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\ell} \left( \frac{\partial a_{i,k}}{\partial q_j} + \frac{\partial a_{j,k}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Moltiplichiamo ora le (5.4) per l'elemento  $a^{k,r}$  della matrice inversa di  $(a_{i,j})$ , sommando poi rispetto a  $k$  da 1 a  $\ell$ . Si ottiene:

$$\ddot{q}_r + \sum_{i,j=1}^{\ell} \left[ \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{2} a^{k,r} \left( \frac{\partial a_{i,k}}{\partial q_j} + \frac{\partial a_{j,k}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{i,j}}{\partial q_k} \right) \right] \dot{q}_i \dot{q}_j = 0, \quad r = 1, \dots, \ell \quad (5.5)$$

Confrontando con (5.26), ci accorgiamo che le (5.5) sono formalmente le equazioni (5.25) scritte con i coefficienti  $g_{i,j} = a_{i,j}$  e rispetto al parametro  $t$ :

$$\ddot{q}_r + \sum_{i,j=1}^{\ell} \Gamma_{ij}^k \dot{q}_i \dot{q}_j = 0, \quad r = 1, \dots, \ell. \quad (5.6)$$

In base alla Proposizione (11.1), possiamo affermare che le curve soluzioni di (5.6) (quindi di (5.4)) sono geodetiche della varietà riemanniana  $\ell$ -dimensionale con la metrica indotta dall'energia cinetica. Dunque, il moto spontaneo avviene su di esse. La medesima proprietà ci assicura che l'ascissa curvilinea è proporzionale al tempo  $t$ . Questo fatto, d'altra parte, risulta anche dalla definizione medesima di  $s$  (vedi (5.24))

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\sum_{i,j=1}^{\ell} a_{h,k} \dot{q}_i \dot{q}_j} dt = \int_{t_0}^t \sqrt{2T} dt$$

e dall'osservazione che l'energia cinetica  $T$  rimane costante (vedi (3.19)).

Osserviamo infine che la scelta delle condizioni iniziali (2.78) si traducono per la geodetica nel fissare il punto di passaggio e la direzione tangente in quel punto.

## 5.2 Il caso $n = 1, m = 1$

Il caso semplice del moto di un unico punto vincolato su una superficie fissa e liscia si presta a varie considerazioni di carattere geometrico, che lasciamo da dimostrare come esercizi.

**Esercizio 5.1** *Nel caso in esame le geodetiche della varietà sono caratterizzate dall'aver il versore normale allineato con la normale alla superficie, ovvero curvatura geodetica nulla (vedi (5.35)). Sfruttare questa caratterizzazione per dimostrare che il moto spontaneo avviene lungo le geodetiche, scomponendo l'equazione  $m\mathbf{a} = \Phi$  nelle direzioni del triedro principale della curva.*

**Esercizio 5.2** Estendere la dimostrazione precedente al caso in cui il punto è soggetto ad un campo di forze conservative  $\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{x}}U$ , con  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ , e vincolato ad una superficie equipotenziale  $U(\mathbf{x}) = c$ , con  $c$  costante.

**Esercizio 5.3** Mostrare che la curvatura normale (vedi (5.35)) della traiettoria di un punto vincolato su una superficie di equazione  $f(\mathbf{x}) = 0$  verifica

$$k_n = -\frac{\mathbf{t}^T \cdot H_{\mathbf{x}}f\mathbf{t}}{|\nabla_{\mathbf{x}}f|}$$

dove  $\mathbf{t}$  è il versore tangente alla traiettoria, scelto concorde con la direzione della velocità  $\dot{\mathbf{x}}$  e  $H$  è la matrice Hessiana della funzione  $f$ .

Traccia: Partire dalla formula (1.69), che nel caso in questione si scrive

$$\dot{\mathbf{x}}^T \cdot H_{\mathbf{x}}f\dot{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}}f \cdot \ddot{\mathbf{x}} = 0.$$

Ricordare poi che  $k_n = \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{N}$  (vedi (5.35)), dove  $\mathbf{N}$  è il versore normale alla superficie

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla_{\mathbf{x}}f}{|\nabla_{\mathbf{x}}f|}$$

e utilizzare la formula

$$\mathbf{x}'' = k\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{x}'(\lambda)|^2} \left( \mathbf{x}''(\lambda) - \frac{\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}''(\lambda)}{|\mathbf{x}'(\lambda)|^2} \mathbf{x}'(\lambda) \right)$$

( $k$  curvatura,  $\mathbf{n}$  versore normale alla curva) ponendo  $\lambda = t$ .

**Esercizio 5.4** Considerare un punto materiale vincolato su una superficie fissa e liscia e soggetto alla forza peso. Se  $\mathbf{x}_0$  è una configurazione di equilibrio stabile, mostrare che le pulsazioni  $\omega_1, \omega_2$  delle piccole oscillazioni si trovano risolvendo rispetto a  $\omega$

$$\det(\omega^2 G - gB) = 0$$

dove  $G$  è la matrice della prima forma fondamentale sulla superficie  $g_{i,j}$ ,  $B$  la matrice della seconda forma fondamentale  $\beta_{i,j}$  (vedi (5.44)) e  $-mg\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}$  versore verticale ascendente, è la forza peso.

### 5.3 Alcuni richiami di geometria differenziale

Se  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_\ell)$  è un elemento di  $\mathbb{R}^\ell$ , denotiamo con  $r_i$  l' $i$ -esima **funzione coordinata**

$$r_1 : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}, \quad r_i(\mathbf{a}) = a_i, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

Pre una funzione  $\mathbf{f}$  che va da un insieme  $\mathbf{X}$  in  $\mathbb{R}^\ell$ ,  $f_i = r_i \circ \mathbf{f}$ ,  $i = 1, \dots, \ell$  è l' $i$ -esima componente.

Sia  $U$  un aperto di  $\mathbb{R}^\ell$ . Diciamo che  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  è una **funzione differenziabile di classe  $C^k$**  se esistono e sono continue in  $U$  le derivate parziali  $\frac{\partial^\alpha f_i}{\partial \xi_\alpha}$ , per  $[\alpha] \leq k$ , dove  $(f_1, \dots, f_\ell) = \mathbf{f}$  e

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial^{[\alpha]}}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \dots \partial \xi_\ell^{\alpha_\ell}}, \quad [\alpha] = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i.$$

Per una funzione vettoriale  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^N$  la differenziabilità si definisce su ogni componente  $F_i = r_i \circ \mathbf{F} : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Uno **spazio localmente Euclideo**  $M$  di dimensione  $\ell$  è uno spazio topologico di Hausdorff in cui ciascun punto  $m \in M$  ammette un intorno aperto  $U \subset M$  omeomorfo ad un aperto  $\varphi(U)$  dello spazio Euclideo  $\mathbb{R}^\ell$  mediante l'omeomorfismo (cioè applicazione continua, bigettiva che manda aperti in aperti e chiusi in chiusi)  $\varphi$ . La coppia  $(U, \varphi)$  si dice **carta di dominio  $U$**  e **applicazione coordinata  $\varphi$** . Ciascuna componente

$\varphi_i = r_i \circ \varphi$ ,  $i = 1, \dots, \ell$  è detta **funzione coordinata**, mentre, dato un punto  $m \in M$ , le  $\ell$ -uple  $(\xi_1, \dots, \xi_\ell) \in \varphi(U)$ , con  $\xi_i = r_i \circ \varphi(m)$ , si dicono **coordinate locali** di  $m$ .

Il variare delle coordinate locali fornisce una **parametrizzazione** della porzione considerata di  $M$ .

Una **struttura differenziabile** o **atlante**  $\mathcal{F}$  di classe  $\mathcal{C}^k$  su uno spazio localmente euclideo  $M$  è un insieme di sistemi di coordinate

$$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in A\}$$

che soddisfano le seguenti proprietà:

(a)

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M,$$

(b)  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  sono funzioni  $\mathcal{C}^k$  per ogni  $\alpha, \beta \in A$ .

Una **varietà differenziabile** di dimensione  $\ell$  e di classe  $\mathcal{C}^k$  è una coppia  $(M, \mathcal{F})$  formata da uno spazio localmente Euclideo  $M$  di dimensione  $\ell$  e da una struttura differenziabile  $\mathcal{F}$  di classe  $\mathcal{C}^k$ .

Esempi immediati di strutture differenziabili di dimensione  $\ell$  sono:

(i) lo spazio Euclideo  $\mathbb{R}^\ell$ , con la struttura differenziabile data dall'applicazione identità,

(ii) uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione  $\ell$ , considerando una base dello spazio duale  $V^*$  come sistema globale di coordinate,

(iii) ogni sottovarietà regolare di dimensione  $\ell$ .

La dimostrazione del caso (iii), che ci interessa maggiormente, si basa sul teorema della funzione implicita e la possibilità di trovare localmente sistemi di coordinate.

Date due varietà differenziabili  $(M_1, \mathcal{F}_1)$  e  $(M_2, \mathcal{F}_2)$  di classe  $\mathcal{C}^k$  e di dimensioni rispettivamente  $\ell_1$  e  $\ell_2$ , si dice che un'applicazione  $F : M_1 \rightarrow M_2$  è **differenziabile** di classe  $\mathcal{C}^h$ ,  $h \leq k$ , se, detti  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  e  $(V_\beta, \psi_\beta)$  due atlanti di  $M_1$  e  $M_2$  rispettivamente, la funzione

$$\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap H) \subset \mathbb{R}^{\ell_1} \rightarrow \psi_\beta(V_\beta) \subset \mathbb{R}^{\ell_2}$$

è di classe  $\mathcal{C}^h$  per ogni  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  e  $(V_\beta, \psi_\beta)$  tali che  $U \cap H \neq \emptyset$ , dove  $H = F^{-1}(V_\beta)$ .

In altri termini, la funzione  $F$  è differenziabile se, composta nel modo suddetto con funzioni coordinate, dà origine a applicazioni di  $\mathbb{R}^{\ell_1}$  in  $\mathbb{R}^{\ell_2}$  differenziabili di classe  $\mathcal{C}^h$ . Tenendo conto della definizione di differenziabilità negli spazi  $\mathbb{R}^N$ , si può dire che una funzione  $F$  fra due varietà è di classe  $\mathcal{C}^h$  se tali risultano le funzioni

$$\eta_j = r_j \circ F \circ \varphi_\alpha(\xi_1, \dots, \xi_{\ell_1}), \quad j = 1, \dots, \ell_2. \quad (5.7)$$

Un'applicazione differenziabile  $F$  di classe  $\mathcal{C}^k$  fra varietà  $(M_1, \mathcal{F}_1)$  e  $(M_2, \mathcal{F}_2)$  di medesima dimensione  $\ell_1$  si dice **diffeomorfismo** se è biunivoca con inversa differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$ .

## 5.4 Curve, spazio tangente, fibrato tangente

Una **curva** di classe  $\mathcal{C}^h$ ,  $h \leq k$ , su una varietà differenziabile  $(M, \mathcal{F})$  di classe  $\mathcal{C}^k$  è un'applicazione differenziabile  $\gamma$  da un aperto connesso  $I \subset \mathbb{R}$  in  $M$ . Tenendo conto della (5.7), si ha che  $\gamma$  è una curva di classe  $\mathcal{C}^h$  se sono tali le funzioni

$$\xi_i = r_i \circ \varphi \circ \gamma(\lambda) = \xi_i(\lambda), \quad \lambda \in I, \quad i = 1, \dots, \ell, \quad (5.8)$$

Le (5.8) si dicono **equazioni parametriche** della curva  $\gamma$  nella carta  $(U, \varphi)$ .

Data una carta  $(U, \varphi)$  di coordinate locali  $(\xi_1, \dots, \xi_\ell)$ , consideriamo un punto  $m_0 \in U$  identificato dalle coordinate  $(\xi_1^0, \dots, \xi_\ell^0)$ . Chiamiamo  **$i$ -esima curva coordinata** in  $m_0$  la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi_1^0, \\ \dots \\ \xi_i = \lambda, \\ \dots \\ \xi_\ell = \xi_\ell^0. \end{cases} \quad (5.9)$$

dove  $\lambda$  varia in un intorno  $I = (\xi_i^0 - \delta, \xi_i^0 + \delta) \in \mathbb{R}$  con  $\delta$  sufficientemente piccolo in modo che la curva resti in  $U$ .

Vogliamo ora definire lo spazio tangente in un punto della varietà differenziabile  $M$ . A tale proposito, si consideri un punto  $m_0$  su  $M$  e una curva  $\gamma$  passante per esso. Sia inoltre  $f$  una funzione differenziabile di classe almeno  $\mathcal{C}^1$  definita su un intorno di  $m_0$  in  $\mathbb{R}$  e  $\mathcal{D}_f(m_0)$  la totalità di esse.

Sia  $m_0 = \alpha(\lambda_0)$ . Si definisce **vettore tangente alla curva**  $\gamma$  in  $m_0$  l'applicazione  $\mathbf{v}_{m_0} : \mathcal{D}_f(m_0) \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\mathbf{v}_{m_0}(f) = \left[ \frac{d}{d\lambda}(f \circ \gamma(\lambda)) \right] \Big|_{\lambda=\lambda_0} \quad (5.10)$$

Il vettore tangente (5.10) è un operatore di **derivazione direzionale**, cioè un'applicazione che ad ogni funzione  $f$  di classe  $\mathcal{C}^1$  in  $m_0$  associa la derivata direzionale di  $f$  lungo la curva  $\alpha$ .

**Osservazione 5.2** *Nello spazio Euclideo tridimensionale  $\mathcal{R}^3$ , la precedente definizione si scrive, nel punto  $p_0$ :*

$$\mathbf{v}_{p_0}f = \nabla_{p_0}f \cdot \mathbf{t} = (\mathbf{t} \cdot \nabla)_{p_0}f$$

dove  $\mathbf{t}$  è il vettore tangente alla curva in  $p_0$ . In tal modo, il vettore tangente  $\mathbf{t}$  definisce l'operatore di derivazione che ad  $f$  associa la derivata direzionale di  $f$  in  $p_0$  lungo la curva  $\alpha$ . Inversamente, assegnando per ogni  $f$  la derivata direzionale, resta definito l'operatore  $(\mathbf{t} \cdot \nabla)_{p_0}$ . C'è dunque una corrispondenza biunivoca tra i vettori tangenti alle curve passanti per  $p_0$  e gli operatori di derivazione che ad  $f \in \mathcal{D}_f(p_0)$  associano la loro derivata direzionale.

Sia ora  $\mathcal{T}_{p_0}(M)$  l'insieme di tutte le applicazioni (5.10) ottenute al variare di  $\alpha$  nell'insieme delle curve di classe  $\mathcal{C}^1$  passanti per  $m_0$ . L'insieme  $\mathcal{T}_{p_0}(M)$ , detto **spazio tangente** in  $m_0$  alla varietà  $M$ , è dotato di una struttura di spazio vettoriale sui reali per mezzo delle operazioni

$$\begin{cases} (\mathbf{v}_{m_0} + \mathbf{w}_{m_0})f = \mathbf{v}_{m_0}f + \mathbf{w}_{m_0}f, \\ (\mu\mathbf{v}_{m_0})(f) = \mu(\mathbf{v}_{m_0}f), \quad \mu \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.11)$$

Introdotta un sistema di coordinate  $(\xi_1, \dots, \xi_\ell)$  in un intorno del punto  $m_0$ , si ha:

$$\mathbf{v}_{m_0}f = f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma(\lambda) = f \circ \varphi^{-1}(\xi_1(\lambda), \dots, \xi_\ell(\lambda)) = \sum_{i=1}^{\ell} \left( \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) \Big|_{\varphi(m_0)} \left( \frac{d\xi}{d\lambda} \right) \Big|_{\lambda_0}. \quad (5.12)$$

La formula (5.12) mette in evidenza la struttura di un qualunque vettore tangente  $\mathbf{v}f$  come combinazione lineare (secondo i coefficienti  $\frac{d\xi}{d\lambda}$  che dipendono unicamente dalla curva  $\gamma$ ) dei vettori tangenti

$$(\mathbf{e}_i)_{m_0} = \left( \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) \Big|_{\varphi(m_0)}, \quad i = 1, \dots, \ell \quad (5.13)$$

alle curve coordinate in  $m_0$ . Infatti, se  $\gamma_i(\lambda)$  è la  $i$ -esima curva coordinata di equazioni (5.9), si ha

$$(\mathbf{e}_i)_{m_0}(f) = \left[ \frac{d}{d\lambda}(f \circ \gamma_i(\lambda)) \right] \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \sum_{i=1}^{\ell} \left( \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) \Big|_{\varphi(m_0)} \delta_{i,j}$$

con  $\delta_{i,j}$  simboli di Kronecher.

Una ulteriore importante proprietà degli  $\ell$  vettori (5.13) consiste nel fatto che sono linearmente indipendenti. Infatti, scegliendo  $f = r_i \circ \varphi$ , si ha:

$$\sum_{j=1}^{\ell} \mu_j (\mathbf{e}_j)_{m_0} r_i \circ \varphi = \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} r_i(\xi_1, \dots, \xi_\ell) \Big|_{\varphi(m_0)} = \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j \delta_{i,j} = 0$$

che implica l'annullarsi di tutti i coefficienti  $\mu_j$  della combinazione lineare.

Lo spazio  $\mathcal{T}_{m_0}(M)$  è dunque uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  di dimensione  $\ell$  e i vettori (5.13) tangenti in  $m_0$  alle linee coordinate ne costituiscono una base:

$$\mathbf{v}_{m_0} = \sum_{i=1}^{\ell} \eta_i (\mathbf{e}_i)_{m_0}, \quad \forall \mathbf{v}_{m_0} \in \mathcal{T}_{m_0}(M). \quad (5.14)$$

I numeri reali  $\eta_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$  si dicono **componenti controvarianti** di  $\mathbf{v}_{m_0}$  nella base naturale (5.13) associata al sistema di coordinate  $(\xi_1, \dots, \xi_\ell)$  nell'intorno di  $m_0$ .

**Esercizio 5.5** Verificare che, operando una trasformazione di coordinate

$$(U, (\xi_1, \dots, \xi_\ell)) \rightarrow (V, (\xi'_1, \dots, \xi'_\ell))$$

in un intorno di  $m_0$  si ha:

$$\mathbf{v}_{m_0} = \sum_{i=1}^{\ell} \eta_i (\mathbf{e}_i)_{m_0} = \sum_{i=1}^{\ell} \eta'_i (\mathbf{e}'_i)_{m_0}$$

con

$$\eta'_i = \sum_{j=1}^{\ell} \left( \frac{\partial \xi'_i}{\partial \xi_j} \right) \Big|_{\varphi(m_0)} \xi_j$$

e  $\mathbf{e}'_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ , vettori tangenti in  $m_0$  alle linee coordinate associate al sistema  $(\xi'_1, \dots, \xi'_\ell)$ .

Lo spazio vettoriale duale dello spazio tangente si dice **spazio cotangente** o **spazio dei covettori**  $\tilde{\mathcal{T}}_{m_0}(M)$ . Esso è costituito da tutte le applicazioni lineari che portano i vettori di  $\mathcal{T}_{m_0}(M)$  in  $\mathbb{R}$ . Fra queste, vi è il **differenziale**  $(df)_{m_0}$  di una funzione  $f \in \mathcal{D}_f(m_0)$ :

$$(df)_{m_0} : \tilde{\mathcal{T}}_{m_0}(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

definito nel modo seguente:

$$(df)_{m_0}(\mathbf{v}_{m_0}) = \mathbf{v}_{m_0} f, \quad \forall \mathbf{v}_{m_0} \in \mathcal{T}_{m_0}(M). \quad (5.15)$$

In una base naturale, risulta

$$(df)_{m_0}(\mathbf{v}_{m_0}) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \eta_i$$

dove  $\alpha_i = (\mathbf{e}_i)_{m_0}(f)$  e  $\eta_i$  è definito in (5.14).

Le relazioni

$$\omega_{m_0}^i (\mathbf{e}_i)_{m_0} = \delta_j^i$$

con  $\delta_j^i$  simboli di Kronecher, individuano  $\ell$  forme lineari  $\omega_{m_0}^i$  di  $\tilde{\mathcal{T}}_{m_0}(M)$  che costituiscono una base del medesimo spazio, detta **base duale** di  $(\mathbf{e}_1)_{m_0}, \dots, (\mathbf{e}_\ell)_{m_0}$ . Dato un sistema di coordinate  $(\xi_1, \dots, \xi_\ell)$  definite dalla carta  $(U, \varphi)$  nell'intorno  $U$  di  $m_0$ , si possono considerare i differenziali delle funzioni  $(\xi_1, \dots, \xi_\ell)$ . Dalla definizione (5.15), si trova

$$(d\xi_i)_{m_0} (\mathbf{e}_j)_{m_0} = (\mathbf{e}_j)_{m_0} \xi_i = (\mathbf{e}_j)_{m_0} r_i \circ \varphi = \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_j} \right) = \delta_j^i. \quad (5.16)$$

Dunque, la base duale di quella naturale in  $m_0$  è costituita dai differenziali (5.16).

**Esercizio 5.6** Verificare che, operando un cambiamento di coordinate come nell'esercizio (11.1), posto

$$\omega = \sum_{i=1}^{\ell} \nu_i (d\xi_i)_{m_0} = \sum_{i=1}^{\ell} \nu'_i (d\xi'_i)_{m_0}$$

per un qualunque elemento  $\omega \in \tilde{\mathcal{T}}_{m_0}(M)$ , si ha

$$\nu_i = \left( \frac{\partial \xi_{j'}}{\partial \xi_j} \right) \Big|_{\varphi(m_0)} \nu_{j'}.$$

L'insieme

$$\mathcal{T}(M) = \bigcup_{m \in M} \{m\} \times \mathcal{T}_m(M) \quad (5.17)$$

è formato da tutte le coppie il cui primo elemento è un punto della varietà  $M$ , il secondo è un vettore dello spazio tangente relativo al medesimo punto. L'applicazione  $\pi : \mathcal{T}(M) \rightarrow M$ , detta **proiezione**, è definita da

$$\pi(m, \mathbf{v}) = m, \quad m \in M, \mathbf{v} \in \mathcal{T}_m(M).$$

La retroimmagine  $\pi^{-1}(m) = \{m\} \times \mathcal{T}_m(M)$  è detta **fibra**.

Dato un sistema di coordinate locali su  $M$ , un punto  $m \in U \subset M$  è individuato dalle  $\ell$  coordinate  $(\xi_1, \dots, \xi_\ell)$ . Inoltre, un vettore  $\mathbf{v} \in \mathcal{T}_m(M)$  è definito dalle sue componenti  $\eta_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$  rispetto alla base (2.9) associata in  $m$  alle coordinate  $\xi_i$  (vedi (5.14)). Resta dunque definita una corrispondenza biunivoca

$$\Phi : \mathcal{U} = \bigcup_{m \in U} \{m\} \times \mathcal{T}_m(M) \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^\ell$$

Si può munire l'insieme  $\mathcal{T}(M)$  di una topologia in modo che  $\Phi$  risulti un omeomorfismo.

Le carte  $(\mathcal{U}, (\xi_1, \dots, \xi_\ell, \eta_1, \dots, \eta_\ell))$  costituiscono un atlante per  $\mathcal{T}(M)$  di classe pari a quella di  $M$ . Alla varietà differenziale di dimensione  $2\ell$  che si ottiene si dà il nome di **fibrato tangente** e le coordinate  $(\xi_1, \dots, \xi_\ell, \eta_1, \dots, \eta_\ell)$  sono dette **coordinate naturali** per  $\mathcal{T}(M)$ .

Quanto detto può essere ripetuto per l'insieme

$$\tilde{\mathcal{T}}_{m_0}(M) = \bigcup_{m \in M} \{m\} \times \tilde{\mathcal{T}}_m(M) \quad (5.18)$$

Si definisce **campo vettoriale**  $\mathbf{W}$  su  $M$  un'applicazione differenziabile

$$\mathbf{W} : M \rightarrow \mathcal{T}(M)$$

tale che  $\pi(\mathbf{W}(m)) \in \mathcal{T}_m(M)$ , cioè associa ad ogni punto  $m \in M$  un vettore  $\mathbf{v} \in \mathcal{T}_m(M)$  in modo differenziabile.

Si chiama **1-forma differenziale** su  $M$  un'applicazione differenziabile

$$\omega : M \rightarrow \tilde{\mathcal{T}}(M)$$

tale che  $\pi(\omega(m)) \in \tilde{\mathcal{T}}_m(M)$ , cioè un'applicazione che associa ad ogni punto  $m$  un covettore  $\omega_m \in \tilde{\mathcal{T}}_m(M)$ .

## 5.5 Varietà riemanniane

Una **metrica riemanniana** su una varietà differenziabile  $M$  di dimensione  $\ell$  consiste in una forma bilineare simmetrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  definita positiva nello spazio tangente  $\mathcal{T}_m(M)$ , che vari in modo differenziabile al variare di  $m$  in  $M$ . Una varietà differenziabile si dice **varietà di Riemann** o **varietà riemanniana** se su di essa è assegnata una metrica riemanniana.

Fissata una parametrizzazione  $q_1, \dots, q_\ell$ , se  $(\mathbf{e}_i)_{m_0}$ ,  $i = 1, \dots, \ell$  è una base dello spazio tangente definita come in (2.9), la conoscenza dei valori dell'applicazione sui vettori della base determina completamente la forma bilineare:

$$g_{h,k}(m_0) = \langle (\mathbf{e}_h)_{m_0}, (\mathbf{e}_k)_{m_0} \rangle, \quad h, k = 1, \dots, \ell. \quad (5.19)$$

Si identifica quindi la forma con la matrice simmetrica e definita positiva  $G$  di elementi  $g_{h,k}$ ,  $h, k = 1, \dots, \ell$ . L'introduzione di una metrica riemanniana permette di definire il **prodotto scalare** fra due vettori dello spazio tangente, definito come il numero reale associato dalla forma bilineare. In componenti, se

$$\mathbf{v}_{m_0}^{(1)} = \sum_{i=1}^{\ell} \eta_i^{(1)} (\mathbf{e}_i)_{m_0}, \quad \mathbf{v}_{m_0}^{(2)} = \sum_{i=1}^{\ell} \eta_i^{(2)} (\mathbf{e}_i)_{m_0}$$

sono due vettori in  $\mathcal{T}_{m_0}(M)$ , si ha

$$\langle \mathbf{v}_{m_0}^{(1)}, \mathbf{v}_{m_0}^{(1)} \rangle = \sum_{h,k=1}^{\ell} g_{h,k} \eta_h^{(1)} \eta_k^{(2)} \quad (5.20)$$

Formalmente, si dice che la struttura riemanniana su  $M$  è definita dalla “forma quadratica”

$$ds^2 = \sum_{h,k} g_{h,k} d\xi_h d\xi_k \quad (5.21)$$

dove  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$  dipendono dalla parametrizzazione.

**Esercizio 5.7** Verificare che, operando un cambiamento di coordinate come nell'esercizio (11.1), i coefficienti della forma cambiano secondo le formule

$$g'_{h,k} = \sum_{i,j=1}^{\ell} g_{i,j} \frac{\partial \xi_i}{\partial \xi'_h} \frac{\partial \xi_j}{\partial \xi'_k}. \quad (5.22)$$

La metrica permette di definire la **lunghezza di una curva** sulla varietà  $M$ . Infatti, data la curva  $\gamma$  di equazioni parametriche (5.8), con  $I = (\lambda_0, \lambda_1) \subset \mathbb{R}$ , si definisce la sua lunghezza come

$$\mathcal{L}(\gamma)_{(\lambda_0, \lambda_1)} = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{\sum_{h,k=1}^{\ell} g_{h,k}(\xi_1(\lambda), \dots, \xi_{\ell}(\lambda)) \frac{d\xi_h(\lambda)}{d\lambda} \frac{d\xi_k(\lambda)}{d\lambda}} d\lambda \quad (5.23)$$

**Esercizio 5.8** Verificare che la lunghezza non dipende dalle coordinate locali  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ , né dalla parametrizzazione  $\lambda$ .

La definizione di lunghezza porta a individuare il **parametro naturale** o **ascissa curvilinea** di  $\gamma$ , definito come la lunghezza della curva fra i punti su  $M$   $\gamma(\lambda_0)$  e  $\gamma(\lambda)$ , con  $\lambda \in I$ :

$$s(\lambda) = \mathcal{L}(\gamma)_{(\lambda_0, \lambda)} \quad (5.24)$$

La curva  $\gamma$  può dunque essere vista come applicazione da  $(s_0, s_1)$  in  $M$  tale che

$$\sum_{h,k=1}^{\ell} g_{h,k}(\xi_1(s), \dots, \xi_{\ell}(s)) \frac{d\xi_h(s)}{ds} \frac{d\xi_k(s)}{ds} = 1 \quad \forall s \in (s_0, s_1)$$

dove  $\xi_i(s) = r_i \circ \varphi \circ \gamma(s)$ .

## 5.6 Curve geodetiche

Per definizione, le curve che verificano le equazioni differenziali del secondo ordine

$$\frac{d\xi_k^2}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^{\ell} \Gamma_{ij}^k \frac{d\xi_i}{ds} \frac{d\xi_j}{ds} = 0, \quad k = 1, \dots, \ell \quad (5.25)$$

dove

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\ell} g^{k,n} \left( \frac{\partial g_{i,n}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial g_{j,n}}{\partial \xi_i} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial \xi_n} \right) \quad (5.26)$$

e  $(g^{k,n})$  è la matrice inversa della matrice  $(g_{i,j})$ , sono dette **curve geodetiche** della varietà differenziabile rispetto alla metrica indotta da  $(g_{i,j})$ . I coefficienti  $\Gamma_{ij}^k$ , che dipendono dalle coordinate locali  $\xi_1, \dots, \xi_{\ell}$ , sono detti **simboli di Christoffel**.

Le equazioni (5.25) sono accompagnate dalle condizioni iniziali

$$q_i(s_0) = q_i^0, \quad \dot{q}_i(s_0) = \dot{q}_i^0, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

In base al teorema di esistenza e unicità per i sistemi di equazioni differenziali, possiamo affermare che, dato un punto  $m_0$  sulla varietà e un vettore  $\mathbf{v}_{m_0} \in \mathcal{T}_{m_0}$ , esiste una e una sola geodetica sulla varietà passante per  $m_0$  e con vettore tangente in  $m_0$  pari a  $\mathbf{v}_{m_0}$ . Le componenti di  $\mathbf{v}_0$  rispetto alla base coordinata forniscono le condizioni iniziali  $\dot{q}_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ .

**Esercizio 5.9** Verificare che i coefficienti (5.26) sono invarianti rispetto ad un cambiamento di variabili che trasforma i coefficienti  $g_{i,j}$ ,  $i, j = 1, \dots, \ell$ , come in (5.22).

Mostriamo ora la seguente

**Proposizione 5.1** Se una curva sulla varietà verifica le equazioni (5.25) rispetto ad un parametro  $\lambda$ , ovvero

$$\frac{d\xi_k^2}{d\lambda^2} + \sum_{i,j=1}^{\ell} \Gamma_{ij}^k \frac{d\xi_i}{d\lambda} \frac{d\xi_j}{d\lambda} = 0, \quad k = 1, \dots, \ell \quad (5.27)$$

allora  $\lambda = cs$ , con  $c$  costante.

**Dim.** Dalla (5.24) si ha

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = \sum_{h,k=1}^{\ell} g_{h,k}(\xi_1(\lambda), \dots, \xi_{\ell}(\lambda)) \frac{d\xi_h(\lambda)}{d\lambda} \frac{d\xi_k(\lambda)}{d\lambda} = h(\lambda).$$

Verifichiamo che  $h$  è costante. Si ha

$$\frac{dh}{d\lambda} = \sum_{h,k,j=1}^{\ell} \frac{\partial g_{h,k}}{\partial \xi_j} \frac{d\xi_j}{d\lambda} \frac{d\xi_h}{d\lambda} \frac{d\xi_k}{d\lambda} + \sum_{h,k=1}^{\ell} g_{h,k} \frac{d^2 \xi_h}{d\lambda^2} \frac{d\xi_k}{d\lambda} + \sum_{h,k=1}^{\ell} g_{h,k} \frac{d\xi_h}{d\lambda} \frac{d^2 \xi_k}{d\lambda^2}. \quad (5.28)$$

Moltiplicando la (5.26) per  $g_{r,k}$  e sommando rispetto a  $k$  si trova

$$\sum_{k=1}^{\ell} \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\ell} \delta_{r,n} \left( \frac{\partial g_{i,n}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial g_{j,n}}{\partial \xi_i} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial \xi_n} \right)$$

dove  $\delta_{r,n} = 1$  se  $r = n$ , zero altrimenti,  $1 \leq n, r \leq \ell$ .

Permutando l'indice  $i$  con l'indice  $r$  nella formula appena scritta e sommando le due equazioni ottenute, si vede che

$$\frac{\partial g_{i,r}}{\partial \xi_j} = \sum_{k=1}^{\ell} (g_{r,k} \Gamma_{i,j}^k + g_{i,k} \Gamma_{r,j}^k). \quad (5.29)$$

Sostituendo la (5.29) in (5.28) (con gli indici appropriati), si ha

$$\frac{dh}{d\lambda} = 2 \sum_{k,r=1}^{\ell} g_{k,r} \left( \frac{d^2 \xi_r}{d\lambda^2} + \sum_{h,j=1}^{\ell} \Gamma_{h,j}^r \frac{d\xi_h}{d\lambda} \frac{d\xi_j}{d\lambda} \right) \frac{d\xi_k}{d\lambda}.$$

L'espressione trovata è nulla perché  $\xi_1(\lambda), \dots, \xi_{\ell}(\lambda)$  verificano le equazioni (5.27).  $\square$

In virtù della proprietà appena dimostrata, se una curva verifica le equazioni (5.27), la curva è necessariamente una geodetica (basta operare il cambiamento di parametro  $s = \lambda/c$ ).

Definiamo **isometria** fra due varietà riemanniane  $M_1$  e  $M_2$  di medesima dimensione un diffeomorfismo  $F$  tale che la lunghezza di ogni curva resta inalterata mediante l'applicazione:  $\mathcal{L}(C) = \mathcal{L}(F(C))$ .

Non è difficile verificare che  $F$  è un'isometria se e solo se per ogni punto  $m \in M_1$  di coordinate  $(\xi_1, \dots, \xi_{\ell})$  si ha

$$g_{i,j}^{(1)}(\xi_1, \dots, \xi_{\ell}) = \sum_{h,k=1}^{\ell} g_{h,k}^{(2)}(\eta_1(\xi_1, \dots, \xi_{\ell}), \dots, \eta_{\ell}(\xi_1, \dots, \xi_{\ell})) \frac{\partial \eta_h}{\partial \xi_i} \frac{\partial \eta_k}{\partial \xi_j}, \quad i, j = 1, \dots, \ell \quad (5.30)$$

dove  $(\xi_1, \dots, \xi_{\ell})$  e  $(\eta_1, \dots, \eta_{\ell})$  sono coordinate locali in un intorno di  $m$  e di  $F(m)$ , rispettivamente, e  $g_{i,j}^{(r)}$  sono i coefficienti delle forme fondamentali di  $M_r$ ,  $r = 1, 2$ .

La (5.30) mostra che le isometrie modificano i coefficienti della forma fondamentale allo stesso modo dei cambiamenti di coordinate (5.26), rispetto ai quali le funzioni (5.26) sono invarianti. Segue che un'isometria fra due varietà porta geodetiche in geodetiche.

## 5.7 Superfici in $\mathbb{R}^3$

Consideriamo l'insieme dei punti

$$f(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3. \quad (5.31)$$

La (5.31) definisce una sottovarietà regolare di dimensione due (che chiamiamo **superficie**) in tutti i punti in cui  $\nabla_{\mathbf{x}}f \neq 0$ ,  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ . Il vettore rappresentativo assume la forma  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q_1, q_2)$  mentre, nel punto  $\mathbf{x}_0$  corrispondente ai valori dei parametri  $q_1^0, q_2^0$  lo spazio normale e lo spazio tangente sono

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\mathbf{x}_0} &= \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{y} = \lambda \nabla_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x}_0), \quad \alpha \in \mathbb{R} \}, \\ \mathcal{T}_{\mathbf{x}_0} &= \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{z} = \alpha \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1}(q_1^0, q_2^0) + \beta \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2}(q_1^0, q_2^0), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

Indichiamo la base di quest'ultimo con  $\mathbf{x}_{q_i} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Il vettore di modulo unitario

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_{q_1} \wedge \mathbf{x}_{q_2}}{|\mathbf{x}_{q_1} \wedge \mathbf{x}_{q_2}|}$$

che ha la direzione di  $\nabla_{\mathbf{x}}f$  può essere scelto come base per lo spazio normale. La metrica (5.19) definita dai coefficienti

$$g_{i,j} = \mathbf{x}_{q_i} \cdot \mathbf{x}_{q_j}, \quad i, j = 1, 2$$

permette di definire la lunghezza di una curva  $\mathbf{x}(q_1(\lambda), q_2(\lambda))$ ,  $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$ , come (vedi (5.23) e (5.24))

$$s(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \sqrt{\sum_{h,k=1}^2 g_{h,k} q'_h(\lambda) q'_k(\lambda)} d\lambda, \quad \lambda \leq \lambda_1 \quad (5.32)$$

dove  $q'_i = \frac{dq_i}{d\lambda}$ ,  $i = 1, 2$ .

Data una curva parametrizzata mediante l'ascissa curvilinea  $s$ , il **versore tangente** è  $\mathbf{x}'(s) = \frac{d}{ds}\mathbf{x}(s)$ .

Definiamo il **vettore curvatura**

$$\mathbf{x}''(s) = \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{x}(s) = \sum_{i=1}^2 q''_i(s) \mathbf{x}_{q_i} + \sum_{i,j=1}^2 q'_i(s) q'_j(s) \mathbf{x}_{q_i, q_j} \quad (5.33)$$

dove

$$\mathbf{x}_{q_i, q_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q_i \partial q_j}.$$

Il vettore curvatura si può scrivere in ogni punto  $\mathbf{x}_0$  della superficie univocamente nella forma

$$\mathbf{x}'' = k_n \mathbf{N} + \tau \quad (5.34)$$

dove  $\tau \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}_0}$ . Inoltre, dato che  $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'' = 0$ ,  $\tau$  risulta perpendicolare sia a  $\mathbf{N}$  che a  $\mathbf{x}'$ . Dunque  $\tau = k_t \mathbf{N} \wedge \mathbf{x}'$  e la (5.34) si scrive

$$\mathbf{x}'' = k_n \mathbf{N} + k_t \mathbf{N} \wedge \mathbf{x}'. \quad (5.35)$$

I due scalari  $k_n(s)$  e  $k_t(s)$  prendono il nome di **curvatura normale** e **curvatura geodetica** rispettivamente. Dalla (5.35) si trova

$$k_t = \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{N} \wedge \mathbf{x}', \quad (5.36)$$

ovvero

$$k_t = \mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{N}. \quad (5.37)$$

Equivalentemente, introducendo i versori della terna intrinseca alla curva

$$\mathbf{t} = \mathbf{x}', \quad \mathbf{n} = \frac{1}{k} \mathbf{x}'', \quad \mathbf{b} = \mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}'',$$

rispettivamente versore tangente, normale e binormale ( $k > 0$  curvatura), possiamo esprimere la (5.37) come

$$k_t = k \mathbf{N} \cdot \mathbf{b}, \quad (5.38)$$

formula che mette in evidenza il carattere non intrinseco della curvatura geodetica, in quanto relativa alla immersione della curva nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$ .

Da (5.35) appare chiaro che l'annullarsi di  $k_t$  significa l'allineamento della direzione normale alla curva con la normale alla superficie. La stessa conclusione si può far derivare da (5.37), in quanto  $k_t = 0$  equivale a  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{N}$  complanari, ovvero che la normale alla superficie appartiene al piano osculatore della curva. Dato che sia  $\mathbf{N}$  che  $\mathbf{n}$  sono, in ogni caso, perpendicolari a  $\mathbf{t}$ , si conclude che una curva con curvatura geodetica nulla ha la normale  $\mathbf{n}$  allineata con la normale alla superficie  $\mathbf{N}$ .

Si vede facilmente che l'annullarsi dell'espressione (5.37) (ovvero (5.38)) in un punto della curva non dipende dalla parametrizzazione scelta sulla curva. Infatti, se  $\lambda$  è un secondo parametro per la curva, dalle formule di derivazione (si indica con il punto la derivazione rispetto a  $\lambda$ )

$$\dot{\mathbf{x}}(\lambda) = \dot{s}(\lambda) \mathbf{x}'(s), \quad \ddot{\mathbf{x}}(\lambda) = \dot{s}^2(\lambda) \mathbf{x}''(s) + \ddot{s}(\lambda) \mathbf{x}'(s),$$

si trova

$$\mathbf{x}''(s(\lambda)) = \frac{1}{\dot{s}^2(\lambda)} \ddot{\mathbf{x}}(\lambda) - \frac{\ddot{s}(\lambda)}{\dot{s}^3(\lambda)} \dot{\mathbf{x}}(\lambda).$$

Dalla (5.37) si ha dunque

$$k_t(\lambda) = \frac{1}{\dot{s}^3(\lambda)} \dot{\mathbf{x}}(\lambda) \wedge \ddot{\mathbf{x}}(\lambda) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}(\lambda)). \quad (5.39)$$

Pertanto, l'annullarsi della curvatura geodetica, ossia

$$\dot{\mathbf{x}}(\lambda) \wedge \ddot{\mathbf{x}}(\lambda) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}(\lambda)) = 0 \quad (5.40)$$

è una proprietà geometrica.

Vogliamo ora mostrare che la validità di (5.40) in ogni punto della curva corrisponde alla richiesta che la curva sia una **geodetica** della superficie di appartenenza. Per le sottovarietà bidimensionali di  $\mathbb{R}^3$ , dunque, le curve geodetiche sono caratterizzate dalla proprietà geometrica di avere la direzione normale  $\mathbf{n}$  parallela a quella della normale  $\mathbf{N}$  alla superficie in ogni punto.

Per mostrare questo fatto, consideriamo una curva sulla superficie parametrizzata mediante ascissa curvilinea  $\mathbf{x}(q_1(s), q_2(s))$  e confrontiamo la rappresentazione del vettore curvatura (5.35) con la (5.33). Ciascun vettore  $\mathbf{x}_{q_i q_j}$ ,  $i, j = 1, 2$  di quest'ultima formula è esprimibile come combinazione della base  $\mathbf{x}_{q_1}$ ,  $\mathbf{x}_{q_2}$ ,  $\mathbf{N}$ :

$$\mathbf{x}_{q_i q_j} = \sum_{h=1}^2 \alpha_{i,k}^h \mathbf{x}_{q_h} + \beta_{i,j} \mathbf{N}, \quad i, j = 1, 2. \quad (5.41)$$

Sostituendo le (5.41) nella (5.33) si trova

$$\mathbf{x}''(s) = \sum_{h=1}^2 \left( q_h'' + \sum_{i,j=1}^2 \alpha_{i,j}^h q_i' q_j' \right) \mathbf{x}_{q_h} + \sum_{i,j=1}^2 \beta_{i,j} q_i' q_j' \mathbf{N} \quad (5.42)$$

Il confronto tra (5.42) e 5.35) permette di scrivere

$$k_n = \sum_{i,j=1}^2 \beta_{i,j} q_i' q_j' \quad (5.43)$$

Le quantità

$$\beta_{i,j} = \mathbf{x}_{q_i q_j} \cdot \mathbf{N}, \quad i, j = 1, 2 \quad (5.44)$$

definiscono i coefficienti della **seconda forma fondamentale** della superficie.

**Esercizio 5.10** *Mostrare che  $\beta_{i,j} = -\mathbf{x}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial q_j}$ ,  $i, j = 1, 2$ .*

Sempre dal confronto tra le medesime equazioni si trova

$$k_t \mathbf{N} \wedge \mathbf{x}' = \mathbf{x}'' - k_n \mathbf{N} = \sum_{h=1}^2 \left( q_h'' + \sum_{i,j=1}^2 \alpha_{i,j}^h q_i'' q_j'' \right) \mathbf{x}_{q_h}.$$

Dato che i vettori  $\mathbf{x}_{q_1}$  e  $\mathbf{x}_{q_2}$  sono linearmente indipendenti, l'annullarsi della curvatura geodetica è dunque equivalente al sistema di equazioni

$$q_k'' + \sum_{i,j=1}^2 \alpha_{i,j}^k q_i'' q_j'' = 0, \quad k = 1, 2. \quad (5.45)$$

Basta ora verificare che  $\alpha_{i,j}^k = \Gamma_{i,j}^k$ , dove  $\Gamma_{i,j}^k$  sono i simboli di Christoffel definiti in (5.26), per dimostrare che la condizione (5.45) equivale alle equazioni delle curve geodetiche (5.25).

Poniamo  $\Gamma_{ikj} = \mathbf{x}_{q_i, q_k} \cdot \mathbf{x}_{q_j}$ . Si ha  $\Gamma_{ikj} = \Gamma_{kij}$  e, dalla (5.41)

$$\Gamma_{ikj} = \sum_{h=1}^2 \alpha_{i,k}^h g_{j,h}, \quad i, k, j = 1, 2 \quad (5.46)$$

D'altra parte:

$$\frac{\partial g_{i,j}}{\partial q_k} = \mathbf{x}_{q_i, q_j} \cdot \mathbf{x}_{q_k} + \mathbf{x}_{q_i} \cdot \mathbf{x}_{q_k, q_j} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji}.$$

Permutando gli indici  $i, k$  e  $j$  si ottiene per somma e sottrazione:

$$\Gamma_{ikj} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{i,k}}{\partial q_j} + \frac{\partial g_{i,j}}{\partial q_k} - \frac{\partial g_{k,j}}{\partial q_i} \right) \quad (5.47)$$

Introducendo poi la matrice inversa alla  $(g_{i,j})$ :

$$(g^{i,j}) = (g_{i,j})^{-1} = \frac{1}{g_{1,1}g_{2,2} - g_{1,2}^2} \begin{pmatrix} g_{2,2} & -g_{1,2} \\ -g_{1,2} & g_{1,1} \end{pmatrix},$$

si ha dalle (5.46) e (5.47)

$$\alpha_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^2 g^{k,h} \left( \frac{\partial g_{i,h}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial g_{j,h}}{\partial \xi_i} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial \xi_h} \right), \quad i, j, k = 1, 2$$

ossia esattamente le (5.26).

## 5.8 Coordinate controvarianti e covarianti

Dato uno spazio vettoriale  $\mathbf{V}$  di dimensione  $\ell$  e una sua base  $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\ell \rangle$ , un qualunque vettore  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  può essere espresso univocamente tramite la combinazione lineare

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{\ell} a^i \mathbf{u}_i, \quad a^1, \dots, a^\ell \in \mathbb{R}.$$

I numeri reali  $a^1, \dots, a^\ell$ , si dicono **componenti controvarianti** del vettore  $\mathbf{v}$  rispetto alla base  $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\ell \rangle$ . Convenzionalmente, si usa porre gli indici in alto per tali componenti.

Se utilizziamo una seconda base  $\langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_\ell \rangle$  per il medesimo spazio vettoriale  $\mathbf{V}$ , il vettore  $\mathbf{u}_i$  della prima base dovrà esprimersi mediante componenti controvarianti  $\eta_i^1, \dots, \eta_i^\ell$ ,  $i = 1, \dots, \ell$  rispetto alla nuova base, ovvero

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^{\ell} \eta_i^j \mathbf{w}_j, \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (5.48)$$

Se dunque il generico vettore  $\mathbf{v}$  ha componenti controvarianti  $(\alpha^1, \dots, \alpha^\ell)$  nella seconda base, ossia  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha^i \mathbf{w}_i$ , si ha dalla (5.48)

$$\mathbf{v} = \sum_{i,j=1}^{\ell} a^i \eta_i^j \mathbf{w}_j$$

che, per l'unicità della rappresentazione in una medesima base, comporta

$$\alpha^i = \sum_{k=1}^{\ell} \eta_k^i a^k, \quad i = 1, \dots, \ell, \quad (5.49)$$

ovvero, in forma matriciale,  $\alpha = A^T \mathbf{a}$ , dove  $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^\ell)$ ,  $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^\ell)$  (vettori colonna) e la matrice  $A$  ha per elementi  $(A)_{i,j} = \eta_i^j$ ,  $i, j = 1, \dots, \ell$ .

La (5.49) fornisce la regola di trasformazione delle componenti controvarianti nel passare dalla base  $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\ell \rangle$  alla base  $\langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_\ell \rangle$ .

Se chiamiamo  $f$  l'endomorfismo (applicazione lineare dello spazio in sé) di  $\mathbf{V}$  definito da  $f(\mathbf{u}_i) = \mathbf{w}_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ , la matrice  $B$  associata a tale applicazione viene determinata dalle relazioni

$$\mathbf{w}_i = \sum_{j=1}^{\ell} \theta_i^j \mathbf{u}_j, \quad i = 1, \dots, \ell, \quad (5.50)$$

ponendo  $(B)_{i,j} = \theta_i^j$ ,  $i, j = 1, \dots, \ell$ . La (5.50), in altri termini, specifica le componenti controvarianti dei vettori della base nuova rispetto alla base di partenza.

Sostituendo (5.50) in (5.48), è immediato verificare che  $AB = I$ , ovvero che la matrice  $A$  (matrice associata al calcolo delle nuove componenti controvarianti) e  $B$  (matrice del cambiamento di base) sono una inversa dell'altra. Naturalmente, la situazione è speculare, nel senso che la matrice  $A$  è la matrice dell'endomorfismo  $g = f^{-1}$  definito da  $g(\mathbf{w}_i) = \mathbf{u}_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$  (matrice del cambiamento di base), mentre  $B$  è la matrice associata alla trasformazione delle componenti controvarianti nel cambiamento di base  $\langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_\ell \rangle \rightarrow \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\ell \rangle$ :

$$a^i = \sum_{k=1}^{\ell} \theta_k^i \alpha^k, \quad i = 1, \dots, \ell, \quad (5.51)$$

ovvero  $\mathbf{a} = B^T \alpha$ .

Uno spazio vettoriale  $\mathbf{V}$  si dice **spazio vettoriale euclideo** se è assegnata in esso una forma bilineare simmetrica non degenera, ovvero un'applicazione  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

- (i)  $\varphi(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) + \varphi(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ ,  $\varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + \varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$ , per ogni  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbf{V}$ ,
- (ii)  $\varphi(\alpha \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \alpha \varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \varphi(\mathbf{v}_1, \alpha \mathbf{v}_2)$ , per ogni  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}$  e per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,
- (iii)  $\varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \varphi(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)$  per ogni  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}$ ,
- (iv) se  $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1) = 0$  per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ , allora  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ .

L'applicazione  $\varphi$  viene detta **prodotto scalare**. Due vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}$  si dicono **ortogonali** se  $\varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$ . La condizione (iv) di non degenerazione significa dunque che l'unico vettore ortogonale a tutti i vettori dello spazio è il vettore nullo.

Fissata una base  $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\ell \rangle$  di  $\mathbf{V}$ , indichiamo con  $g_{i,j}$  i prodotti scalari  $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$ . Se  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}$  hanno componenti controvarianti rispettivamente  $(a^1, \dots, a^\ell)$  e  $(b^1, \dots, b^\ell)$ , si ha, per le proprietà del prodotto scalare:

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \sum_{i,j=1}^{\ell} g_{i,j} a^i b^j, \quad (5.52)$$

ovvero, in forma matriciale,  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \mathbf{a}^T G \mathbf{b}$ , dove  $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^\ell)$ , (la trasposizione dà luogo ad un vettore riga),  $\mathbf{b} = (b^1, \dots, b^\ell)$   $G$  è la matrice  $\ell \times \ell$  di elementi  $g_{i,j}$ ,  $i, j = 1, \dots, \ell$ .

Se utilizziamo una seconda base  $\langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_\ell \rangle$  per lo spazio  $\mathbf{V}$ , se  $(\alpha^1, \dots, \alpha^\ell)$  e  $(\beta^1, \dots, \beta^\ell)$  sono le componenti controvarianti di  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ , rispettivamente, nella nuova base, si ha

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \sum_{i,j=1}^{\ell} \gamma_{i,j} \alpha^i \beta^j = \alpha^T \Gamma \beta \quad (5.53)$$

dove  $\gamma_{i,j} = (\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)$  e  $\Gamma$  è la matrice di elementi  $(\Gamma)_{i,j} = \gamma_{i,j}$ ,  $i, j = 1, \dots, \ell$ . Richiamando la (5.50), si vede subito che

$$\gamma_{i,j} = \sum_{r,s=1}^{\ell} \theta_i^r \theta_j^s g_{r,s} \quad (5.54)$$

ovvero  $\Gamma = BGB^T$ , con  $(\Gamma)_{i,j} = \gamma_{i,j}$ ,  $i, j = 1, \dots, \ell$ .

**Osservazione 5.3** La matrice rappresentativa  $\Gamma$  è simmetrica, ovvero  $\Gamma^T = -\Gamma^T$  [risp. antisimmetrica, ovvero  $\Gamma^T = -\Gamma$ ] se e solo se  $G$  è simmetrica [risp. antisimmetrica].

Questo permette di verificare facilmente che le espressioni (5.52) e (5.53) coincidono, in quanto

$$\alpha^T \Gamma \beta = \mathbf{a}^T ABGB^T A^T \mathbf{b} = \mathbf{a}^T G \mathbf{b}. \quad (5.55)$$

**Esercizio 5.11** Verificare che la proprietà (iv) di non degenerazione è equivalente a richiedere  $\det G \neq 0$ .

La forma bilineare  $\varphi$  si dice **definita positiva** se  $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$  per ogni vettore  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  non nullo, ovvero se

$$\sum_{i,j=1}^{\ell} g_{i,j} a^i a^j = \mathbf{a}^T G \mathbf{a} > 0 \quad \text{per ogni } (a_1, \dots, a_\ell) \neq (0, \dots, 0). \quad (5.56)$$

**Esercizio 5.12** Verificare che la proprietà (5.56) è indipendente dalla scelta della base per lo spazio  $\mathbf{V}$ .

Il prodotto  $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \alpha^T \Gamma \alpha$  si dice **forma quadratica** associata al prodotto  $\varphi$ .

**Proposizione 5.2** Se la matrice  $\Gamma$  è antisimmetrica, allora  $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ .

Uno spazio vettoriale in cui è fissata una base  $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\ell \rangle$  e dotato di una forma bilineare simmetrica definita positiva si dice **propriamente euclideo** e in esso possiamo definire la **norma**

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{\ell} g_{i,j} a^i a^j} = \sqrt{\mathbf{a}^T G \mathbf{a}} \quad (5.57)$$

dove  $\mathbf{v}$  ha componenti controvarianti  $\mathbf{a}$  rispetto alla base scelta e  $g_{i,j} = (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$ ,  $i, j = 1, \dots, \ell$ . Scegliendo una seconda base  $\langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_\ell \rangle$ , in base alla (5.55) abbiamo  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\alpha^T \Gamma \alpha}$  dove  $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$  sono le componenti controvarianti di  $\mathbf{v}$  nella nuova base e  $(\Gamma)_{i,j} = (\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)$ ,  $i, j = 1, \dots, \ell$ .

Dato il vettore  $\mathbf{v}$  dello spazio  $\mathbf{V}$ , si definiscono **componenti covarianti** di  $\mathbf{v}$  rispetto ad una base prescelta  $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\ell \rangle$  le quantità

$$a_i = (\mathbf{v}, \mathbf{u}_i), \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (5.58)$$

Rispetto ad un'altra base, si ha (vedi (5.50))

$$\alpha_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_i = \sum_{j=1}^{\ell} \theta_i^j a_j, \quad i = 1, \dots, \ell$$

ovvero  $\alpha_c = B \mathbf{a}_c$ , con  $\alpha_c = (\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ ,  $\mathbf{a}_c = (a_1, \dots, a_\ell)$ . Si osservi che le componenti covarianti variano come i vettori della base e non secondo la matrice inversa.

La relazione fra componenti covarianti e controvarianti è la seguente:

$$a_i = \sum_{j=1}^{\ell} a^j g_{i,j}, \quad j = 1, \dots, \ell.$$

Se dunque nello spazio  $\mathbf{V}$  si adotta una **base ortonormale**, ovvero una base  $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_\ell \rangle$  tale che  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{i,j}$  (simboli di Kronecher), allora componenti covarianti e controvarianti coincidono:  $a_i = a^i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$  e si ha la scomposizione

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{\ell} a^i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{\ell} (\mathbf{v}, \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i.$$

## 5.9 Prodotto vettoriale e endomorfismo associato

Sia  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$  una base ortonormale per lo spazio  $\mathbb{R}^3$ . Fissato un vettore non nullo  $\mathbf{w}$  in  $\mathbb{R}^3$  di coordinate  $(w_1, w_2, w_3)$  rispetto alla base scelta, possiamo pensare al **prodotto vettoriale**

$$\mathbf{w} \wedge \mathbf{y} = (y_3 w_2 - y_2 w_3) \mathbf{u}_1 + (y_1 w_3 - y_3 w_1) \mathbf{u}_2 + (y_2 w_1 - y_1 w_2) \mathbf{u}_3, \quad \mathbf{y} = y_1 \mathbf{u}_1 + y_2 \mathbf{u}_2 + y_3 \mathbf{u}_3$$

al variare di  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ , come un'applicazione lineare  $f$  di  $\mathbb{R}^3$  in sè (endomorfismo):

$$f(\mathbf{y}) = \mathbf{w} \wedge \mathbf{y}. \quad (5.59)$$

Come è noto, l'endomorfismo è completamente determinato dai valori su una base:

$$f(\mathbf{u}_i) = \sum_{j=1}^3 a_{i,j} \mathbf{u}_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

Il vettore  $f(\mathbf{y})$ , dove  $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^3 y_i \mathbf{u}_i$ , si ottiene calcolando  $A^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ , essendo  $A$  è la matrice  $a_{i,j}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ .

Dato che  $\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}_1 = w_3 \mathbf{u}_2 - w_2 \mathbf{u}_3$ ,  $\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}_2 = -w_3 \mathbf{u}_1 + w_1 \mathbf{u}_3$ ,  $\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}_3 = w_2 \mathbf{u}_1 - w_1 \mathbf{u}_2$ , la matrice dell'endomorfismo (5.59) è

$$W = \begin{pmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, eseguire il prodotto vettoriale  $\mathbf{w} \wedge \mathbf{y}$  corrisponde ad applicare la matrice  $W^T$  alle componenti di  $\mathbf{y}$  rispetto alla base scelta:

$$\mathbf{w} \wedge \mathbf{y} = W^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \quad (5.60)$$

Si osservi che  $W$  è una matrice antisimmetrica.

La (5.60) va intesa nel senso che le componenti del vettore  $\mathbf{w} \wedge \mathbf{y}$  (di per sé definito intrinsecamente) nella base scelta per scrivere  $W$  e le componenti di  $\mathbf{y}$  si ottengono mediante il prodotto matrice per vettore indicato dalla formula.

Se utilizziamo una differente base  $\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{u}}_3$  per lo spazio, la matrice dell'endomorfismo diventa  $\bar{W} = B W B^{-1}$ , dove  $B$  è la matrice  $b_{i,j}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , del cambiamento di base, che si ottiene dalle relazioni

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \sum_{j=1}^3 b_{i,j} \mathbf{u}_j, \quad i = 1, 2, 3,$$

mentre le componenti del vettore  $\mathbf{y}$  nella nuova base (ossia i coefficienti  $\bar{y}_i$  tali che  $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^3 \bar{y}_i \bar{\mathbf{u}}_i$ ) diventano

$$\begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \end{pmatrix} = (B^{-1})^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \quad (5.61)$$

L'endomorfismo nella nuova base si scrive pertanto

$$\mathbf{w} \wedge \mathbf{y} = \bar{W}^T \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \end{pmatrix} = [(B^{-1})^T W^T B^T] (B^{-1})^T W^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (B^{-1})^T W^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

così che il risultato coincide, come dev'essere, con le componenti del vettore  $W^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$  di (5.60) trasformate secondo la regola (5.61). Si osservi che  $\bar{W}$  è ancora antisimmetrica.

## 5.10 Promemoria di formule utili

Elenchiamo alcune formule utilizzate più volte nelle dispense. La verifica di ognuna di esse, come anche la precisazione delle regolarità richieste per le funzioni coinvolte, sono a cura del lettore.

**Matrice Jacobiana.** Se  $\mathbf{F}(\mathbf{y}) = (F_1(x_1, \dots, x_N), \dots, F_M(x_1, \dots, x_N))$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in U \subseteq \mathbb{R}^N$ , è una funzione vettoriale a valori in  $\mathbb{R}^M$ , il simbolo  $J_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x})$  denota la matrice Jacobiana  $M \times N$  di elementi  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ ,  $i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N$ :

$$J_{\mathbf{x}}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_M}{\partial x_1} & \frac{\partial F_M}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_M}{\partial x_N} \end{pmatrix} \quad (5.62)$$

**Matrice Hessiana.** Data una funzione  $f$  definita per  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in U \subseteq \mathbb{R}^N$  e a valori reali, si chiama **hessiana** la matrice  $N \times N$   $H_{\mathbf{x}}f = J_{\mathbf{x}}(\nabla_{\mathbf{x}}f)$ , ovvero

$$H_{\mathbf{x}}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_N} \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) & \cdots & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_N} \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial x_N} \right) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial x_N} \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_N} \left( \frac{\partial F}{\partial x_N} \right) \end{pmatrix} \quad (5.63)$$

La matrice  $H$  è ovviamente simmetrica ogni volta che nelle derivate seconde si può invertire l'ordine di derivazione (per questo è sufficiente che le derivate seconde siano continue, Teorema di Schwarz).

**Proprietà del prodotto scalare.** Sia  $\mathbf{a}$  un vettore di  $\mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{b}$  un vettore di  $\mathbb{R}^M$  e  $A$  una matrice  $M \times N$ . Si ha:

$$\mathbf{a} \cdot A\mathbf{b} = A^T \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (5.64)$$

**Derivata totale di una funzione**  $f : U \subseteq \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{x}(t), t) = \nabla_{\mathbf{x}}f \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (5.65)$$

**Derivata totale di un vettore:** se  $\mathbf{v}(\mathbf{y}, t) = (v_1(\mathbf{y}, t), \dots, v_M(\mathbf{y}, t))$  è una funzione vettoriale definita per  $\mathbf{y} \in U \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$  a valori in  $\mathbb{R}^M$ , la derivata lungo il moto  $\mathbf{y}(t)$  è

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}(\mathbf{y}(t), t) = (J_{\mathbf{y}}\mathbf{v})|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)}\dot{\mathbf{y}}(t) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)}. \quad (5.66)$$

In particolare, se  $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  si ha:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) = (J_{\mathbf{x}}\mathbf{v})\dot{\mathbf{x}}(t) + (J_{\dot{\mathbf{x}}}\mathbf{v})\ddot{\mathbf{x}}(t) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \quad (5.67)$$

Se  $\mathbf{v} = \nabla_{\dot{\mathbf{x}}}f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ , si ha:

$$\frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{\mathbf{x}}}f) = \nabla_{\dot{\mathbf{x}}}\left(\frac{df}{dt}\right) - \nabla_{\mathbf{x}}f. \quad (5.68)$$

**Gradiente composto.** Sia  $f(\mathbf{x})$  una funzione da  $U \subseteq \mathbb{R}^N$  in  $\mathbb{R}$  e  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y})$  una funzione definita per  $\mathbf{y} \in V \subseteq \mathbb{R}^M$  a valori in  $U$ . Se  $\tilde{f} : V \rightarrow \mathbb{R}$  è la funzione  $\tilde{f}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{y}))$ , si ha

$$\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{f}(\mathbf{y}) = (J_{\mathbf{y}}\mathbf{x})^T \nabla_{\mathbf{x}}f|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{y})}. \quad (5.69)$$

Se in particolare  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y})$  è una trasformazione invertibile di variabili da  $U \subseteq \mathbb{R}^N$  in  $\mathbb{R}^N$ , si ha anche  $\nabla_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x}) = (J_{\mathbf{x}}\mathbf{y})^T \nabla_{\mathbf{y}}\tilde{f}|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}(\mathbf{x})}$ .

**Gradiente di un prodotto scalare.** Siano  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  due funzioni vettoriali definite per  $\mathbf{x} \in U$  aperto di  $\mathbb{R}^N$  e a valori in  $\mathbb{R}^M$ .

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x})) = [J_{\mathbf{x}}\mathbf{a}(\mathbf{x})]^T \mathbf{b}(\mathbf{x}) + [J_{\mathbf{x}}\mathbf{b}(\mathbf{x})]^T \mathbf{a}(\mathbf{x}). \quad (5.70)$$

**Jacobiano composto.** Sia  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), \dots, F_S(\mathbf{x}))$  una funzione vettoriale definita per  $\mathbf{x} \in U$  e codominio in  $\mathbb{R}^S$  e  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y})$  una funzione definita per  $\mathbf{y} \in V \subseteq \mathbb{R}^M$  a valori in  $U$ .

Chiamando  $\tilde{\mathbf{F}} : V \rightarrow \mathbb{R}^S$  la funzione  $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{y}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(\mathbf{y}))$ , si ha:

$$J_{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{y}) = J_{\mathbf{x}}\mathbf{F}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{y})} J_{\mathbf{y}}\mathbf{x}(\mathbf{y}) \quad (5.71)$$

e, se  $M = N$  e  $\mathbf{x}(\mathbf{y})$  è invertibile:  $J_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{F}}|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}(\mathbf{x})} J_{\mathbf{x}}\mathbf{y}(\mathbf{x})$ .

**Jacobiano con gruppi di variabili.** Siano  $\mathbf{F} = (F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \dots, F_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ ,  $\mathbf{G} = (G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \dots, G_R(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ , due funzioni vettoriali definite per  $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ ,  $\mathbf{x} \in U \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{y} \in V \subseteq \mathbb{R}^M$ . Detta  $\mathbf{H}(\mathbf{z}) = (\mathbf{F}(\mathbf{z}), \mathbf{G}(\mathbf{z}))$ ,  $\mathbf{H} : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^{S+R}$ , si ha:

$$J_{\mathbf{z}}\mathbf{H}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} J_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & J_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ J_{\mathbf{x}}\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & J_{\mathbf{y}}\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \quad (5.72)$$

(osservare che  $J_{\mathbf{z}}\mathbf{H}$  è una matrice  $(S+R) \times (N+M)$ ,  $J_{\mathbf{x}}\mathbf{F}$  è  $S \times N$ ,  $J_{\mathbf{y}}\mathbf{F}$  è  $S \times M$ ,  $J_{\mathbf{x}}\mathbf{G}$  è  $R \times N$ ,  $J_{\mathbf{y}}\mathbf{G}$  è  $R \times M$ ).

**Derivata totale seconda** di  $f(\mathbf{x}, t)$ . Sia  $f$  come in (5.65), con derivate seconde continue. Si ha:

$$\frac{d^2}{dt^2}f(\mathbf{x}(t), t) = (H_{\mathbf{x}}f)\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}}f \cdot \ddot{\mathbf{x}} + 2\nabla_{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (5.73)$$

Per dimostrare la (5.73), si chiama  $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \in U \times \mathbb{R}^\ell$  e  $f_1(\mathbf{y}, t) = \frac{d}{dt}f(\mathbf{x}, t)$ . Applicando la (5.65) a  $f_1$ , si trova  $\frac{d}{dt}f_1(\mathbf{y}, t) = \nabla_{\mathbf{y}}f_1 \cdot \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial f_1}{\partial t}$  e, tenuto conto delle (5.70) e (5.72), si giunge alla (5.73). Si osservi che si suppone anche  $\nabla_{\mathbf{x}}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\mathbf{x}}f$ .

**Jacobiano di una matrice per un vettore.** Sia  $A(\mathbf{x})$  una matrice  $M \times N$  i cui elementi dipendono dalle variabili  $\mathbf{x} \in U \subseteq \mathbb{R}^S$  e  $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = (b_1(\mathbf{x}), \dots, b_N(\mathbf{x}))$  una funzione vettoriale da  $U$  in  $\mathbb{R}^N$ . La matrice Jacobiana  $J_{\mathbf{x}}(A\mathbf{b})$  (di dimensioni  $M \times S$ ) è data da

$$J_{\mathbf{x}}[A(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x})] = \sum_{k=1}^N [b_k(\mathbf{x})J_{\mathbf{x}}\mathbf{A}_k(\mathbf{x})] + A(\mathbf{x})J_{\mathbf{x}}\mathbf{b}(\mathbf{x}), \quad (5.74)$$

dove  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_N \in \mathbb{R}^M$  sono i vettori colonna della matrice  $A$ .

## Riferimenti bibliografici

M. Abate, F. Tovena, Geometria Differenziale, Springer Unitext, 2011

V. I. Arnold, Metodi matematici della meccanica classica, Editori Riuniti Univ. Press, 2010

A. Fasano, S. Marmi, Meccanica analitica, Bollati Boringhieri, 2002

F. R. Gantmacher, Lezioni di Meccanica analitica, Editori Riuniti, Roma 1980