Pre-relativistic vectors and tensors transformations

Valery Timin

Creative Commons Attribution 3.0 License

(December 21, 2021)

Russia, RME

Pre-relativistic tensor transformations are transformations of 4-dimensional material tensors of classical mechanics

Formulas for transformations of contravariant, covariant, and mixed rank 2 tensors of a pre – relativistic space-the intermediate space between Galilean and relativistic (Minkowski) spaces-are given. The domain of definition is the transformation of coordinates and vectors at infinitesimal velocities of material objects. Such tensors are metric tensors of 4-dimensional space.

(Translated by Yandex Translator Яндекс-Переводчик)

Дорелятивистские преобразования тензоров являются преобразованиями 4-мерных материальных тензоров классической механики.

Даны формулы преобразований контравариантных, ковариантных и смешанных векторов и тензоров ранга 2 дорелятивистского пространства – промежуточного пространства между галилеевыми и релятивистскими (Минковского) пространствами. Область определения – преобразования координат и векторов при бесконечно малых скоростях материальных объектов. Такими тензорами являются вектора и другие тензоры 4-мерного пространства.

(Текст с дополнениями и некоторыми исправлениями).

Оглавление

Преобразования векторов

Областью применения дорелятивистских преобразований координат и тензоров, в т.ч. векторов (ДРПТК) – в (4) являются очень малые значения скорости, значительно меньшие скорости единичного значения (или даже бесконечно малые): $v^i_0 \sim v^i << 1$ как некоторого фундаментального. Область значений элементов вектора A^i и других тензоров при конечных значениях элементов требует дополнительного анализа и обоснования.

1. Преобразования контравариантных векторных параметров

В тензорном 4–х мерном виде координаты и время ведут себя как контравариантные векторы и преобразуются следующим образом:

$$q'^i = g^i_j q^j - q(0)^j. \tag{1}$$

где $g^i{}_j$ – тензор преобразования 4-координат,

$q_{(0)}$ – смещение начала новых значений координат в старой. Далее смещения будем игнорировать.

Галилеевы преобразования координат выполняются в соответствии с формулами:

$$\begin{pmatrix} t' \\ r'^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v^i{}_0 & \omega^i{}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ r^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ r^i - v^i{}_0 t^0 \end{pmatrix}.$$

Они соответствуют принципу абсолютности галилеева времени и расстояний галилеева пространства. Несмотря на не диагональность, эти преобразования можно считать ортонормированными, т.к временная и пространственные координаты преобразуются независимо и можно считать – ортонормированно.

ДРПТК навеяны преобразованиями кинетической энергии и импульса при изменении скорости dv тела:

$$\begin{cases} K' = K + pdv, \\ p'^i = p + dp. \end{cases} \tag{1.2}$$

Решим ее:

$$\begin{aligned} K' &= K_{(0)} + \int_0^v pdv = K_{(0)} + \frac{mv^2}{2}, \\ P' &= P_{(0)} + \int_0^v mdv = P_{(0)} + mv = mv. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь $K_{(0)}$ и $P_{(0)}$ можно считать начальной энергией и импульсом при нулевой скорости тела, а полную энергию и импульс при произвольной скорости можно обозначить как E и P. В 4-мерном пространстве в соответствии с (1) они составляют 4-мерный вектор ($K_{(0)}$, $P_{(0)}$). Начальная энергия $K_{(0)}$ как скалярная величина[1] не обязана быть нулем и должна быть пропорциональна массе m, например[2] – mc^2. Начальный импульс $P_{(0)}$ м.т. является 3–вектором и должна быть изотропна, следовательно, может быть равной только нулю. Таким образом,

[1] Скаляры классической механики на самом деле являются плохими скалярами, которые меняются при преобразованиях координат.
[2] Как в специальной теории относительности: здесь c принимается равной фундаментальной скорости распространения взаимодействий, равной 3×10^8 м/с.

мы получаем покоящийся 4-вектор энергии-импульса (E^0, P^0) = ($K_{(0)}$, 0). Малое преобразование этого вектора в 4-мерной форме можно произвести в тензорной форме по формуле преобразования контравариантных векторов

$$\begin{pmatrix} E'^0 \\ p'^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -dv \\ -dv & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^0 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^0 - pdv \\ p - dp \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

В отличие от (1.3), здесь при параметре скорости преобразования dv имеется знак "–", говорящий о том, что при преобразовании координат с.о. скорость ИСО dv уменьшает скорости алгебраически. Решение для этого уравнения для любой скорости мы нашли выше – см. (1.3).

Избавимся от массы и начальную "энергию" обозначим как v^0. Тогда v^0 должна быть равна $v^0 = c^2$ (в соответствии с нашим выбором), а импульс перейдет в пространственную скорость v^i. По аналогии величину v^0 можно назвать "нулевой" "скоростью" (или соответствующее индексу 0) тела. При равенстве скорости м.т. нулю ее значение будет тождественно равно единице. А преобразования этих "скоростей" будут следующие:

$$\begin{pmatrix} v'^0 \\ v'^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -dv \\ -dv & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^0 - vdv \\ v - dv \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Ее решение аналогично (1.3):

$$\begin{pmatrix} v'^0 \\ v'^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^0 - v^2/2 \\ v - dv \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Если v^0 скорость по временной координате, ее "скорость" должна быть равна 1. Это не гармонирует с c^2, поэтому за скорость v^0 ее значение, деленное на c^2: $v^{(0)} = 1$. Соответственно изменится и ее "партнер" – кинетическая энергия покоя: $K^{(0)} = m$. Далее мы будем предполагать, что параметр скорости c нормирован и равен $c = 1$.

При смешанном матрично–тензорном (далее – матричном) способе представления тензоров вектор будет соответствовать матрице–столбцу, тензор 2–го ранга – квадратной матрице, где строки будут соответствовать 1–му индексу, столбцы – 2–му индексу. где v^i: $i \in \{1..3\}$ – скорость новой системы отсчета относительно старой.

Из (1.5) видно, что тензор преобразования, в отличие от галилеевых преобразований координат, не является ортонормированным: ее детерминант не равен 1 и отклонение определяется квадратом величины скорости ИСО: Det(1.6) = 1 – dv^2. Поэтому сразу надо оговорить область определения ДРПТК очень малыми скоростями, значительно меньшими c = 1. Рассмотрим в свете вышесказанного преобразования координат. При принятии нами нормированной до 1 фундаментальной скорости, скорости и координаты нам необходимо поделить на эту самую величину. Поэтому они должны быть следующими:

$$\begin{pmatrix} t' \\ r'^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -dv^i \\ -dv^i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ r^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \dfrac{r^i dv^i}{c^2} \\ r^i - tdv^i \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Учитывая, что характеристическая скорость $c = 3 \cdot 10^8$ м.с., с учетом того, что реальные скорости "земных" объектов менее 10^3 м/с, является очень большой, в которой характерное значение $v^0{}_i/c^2 \sim 10^3[\text{м/c}]/3^2 \cdot 10^{(8+8)}[\text{м}^2/\text{c}^2] \sim 9 \cdot 10^{-16} << 1$, мы можем принять, что наше условие выполнено. Поэтому при выполнении преобразований координат мы можем принять $t' = t$, и скорость v^i и ускорение w^i м.т. преобразовывать как вектор. При работе с уже нормированными координатами и скоростями уравнение (1.7) изменится:

$$\begin{pmatrix} t' \\ r'^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -dv^i \\ -dv^i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ r^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - r^i dv^i \\ r^i - t dv^i \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Вид символьной записи векторов, матриц–тензоров и преобразований координат и векторов, примененный выше, не соответствует тензорным обозначения. В дальнейшем с целью приведения обозначений в нормальный тензорный вид для матриц преобразований и их "временных" элементов будем применять индекс "ноль" = 0 для "временных" элементов и нижний ковариантный индекс для матриц преобразований. Тогда матрица преобразования координат, которую обозначим через g^i_j, при отсутствии смещения будет определяться следующим матрично-тензорным выражением:

$$g^i{}_j = \begin{pmatrix} 1 & -v^0{}_j \\ -v^i{}_0 & \omega^i{}_j \end{pmatrix} : c^2 = 1, \tag{2}$$

Здесь v^i_0 и $v_0^j \sim v^i$ – численно равны скорости ИСО[3], в которую преобразуются векторы, но противоположного знака. А сами уравнения преобразования, например, координат (1.7), можно записать в матричном виде:

$$q'^i = g^i_j q^j$$

или

$$q'^i = \begin{pmatrix} 1 & -v^0{}_j \\ -v^i{}_0 & \omega^i{}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ r^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - v^0{}_j r^j \\ r^j - v^i{}_0 t \end{pmatrix}. \tag{3}$$

По аналогии, запишем в общем виде преобразования для произвольного контравариантного вектора A^i:

$$A'^i = \begin{pmatrix} 1 & -v^0{}_j \\ -v^i{}_0 & \omega^i{}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 - v^0{}_j A^j \\ A^j - v^i{}_0 A^0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Областью применения ДРПТК в (4) также является очень малые значения скорости, значительно меньшие единичного значения: $v^i_0 \sim v^i << 1$. Область значений элементов произвольных векторов A^i и других тензоров требует дополнительного анализа и обоснования.

2. *Преобразования скорости и ускорения.*

Скорость и ускорение в 4-мерном пространстве–времени являются тензорами 2-го и 3-го рангов в силу следующих равенств:

$$v = \frac{dr^i}{dt} = v^i{}_0;\; w = \frac{dv^i{}_0}{dt} = v^i{}_{00}.$$

В новой с.к.: (5)

$$v' = \frac{dr'^i}{dt'} = v'^i{}_0;\; w' = \frac{dv'^i{}_0}{dt'} = w'^i{}_{00}.$$

В силу этого невозможно с помощью преобразований (1) – (3) преобразовать скорость и

[3] Это договорное условие.

ускорение в новую с.к. как вектор. Но, учитывая, что характеристическая скорость $c = 3\cdot10^8$ м.т. является очень большой, и учитывая формулу преобразования координаты времени

$$t' = t - (v^0{}_i r^i)/c^2, \tag{6}$$

в которой характерное значение $v^0{}_i/c^2 \sim 10^3$[м/с]$/3^2\cdot10^{(8+8)}$[м^2/с^2] $\sim 9\cdot10^{-16} << 1$, можем принять $t' = t$ как скалярный параметр, следовательно, и скорость и ускорение приниать как вектор и преобразовывать как вектор. В галилеевом пространстве именно это и происходит: $dt = dt' = d\tau$, поэтому в (5) нижние индексы можно игнорировать и в нем скорость и ускорение являются настоящими векторами. С учетом этого дорелятивистские преобразования скорости и ускорения в дифференциальной и тензорной формах будут следующими:

$$\frac{dq'^i}{dt'} = \frac{dq'^i}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} t - v^0{}_j r^j \\ r^j - v^i{}_0 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}t - v^0{}_j \frac{d}{dt} r^j \\ \frac{d}{dt} r^j - v^i{}_0 \frac{d}{dt} t \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 - v^0{}_j v^j \\ v^j - v^i{}_0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ v^j - v^i{}_0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Порядок малости выражения $v^0{}_j v^j << 1$ значительно меньше единицы, и мы им пренебрегаем.

Применив 4–х мерные преобразования в тензорной форме к вектору скорости непосредственно, получим то же самое:

$$v'^i = \begin{pmatrix} 1 & -v^0{}_j \\ -v^i{}_0 & \omega^i{}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - v^0{}_j v^j \\ v^j - v^i{}_0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ v^j - v^i{}_0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Для вектора ускорения аналогично. Для ускорения, учитывая, что $w^0 = 0$, в дифференциальной форме имеем:

$$\frac{d^2q'^i}{dt'^2} = \frac{d^2q'^i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} t - v^0{}_j r^j \\ r^j - v^i{}_0 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2}t - v^0{}_j \frac{d^2}{dt^2} r^j \\ \frac{d^2}{dt^2} r^j - v^i{}_0 \frac{d^2}{dt^2} t \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 - v^0{}_j w^j \\ w^j - v^i{}_0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v^0{}_j w^j \\ w^j \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ w^j \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Порядок малости выражения $v^0{}_j w^j$ тот же, что и выше, и мы им пренебрегаем.

Применим 4–х мерные преобразования в тензорной форме к вектору ускорения непосредственно:

$$w'^i = \begin{pmatrix} 1 & -v^0{}_j \\ -v^i{}_0 & \omega^i{}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ w^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - v^0{}_j w^j \\ w^j \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ v^j \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Из вида этих преобразований видно, что координата, скорость, ускорение при 4–х мерных дорелятивистских преобразованиях координат ведут себя одинаково – как контравариантные тензорные величины (векторы), и нет необходимости делить их на векторы разной природы при преобразованиях координат в четырехмерном виде, но при этом иметь в виду, что $v^0 = 1$, $w^0 = 0$.

3. Скалярное произведение и сопряженные векторы

Соответствующие друг другу контравариантный и ковариантный векторы называются сопряженными. Именно через сопряженные векторы определяется скалярное произведение векторов:

$$A \cdot B = A^i B_i. \tag{11}$$

В дорелятивистском пространстве, так же как и в любом другом тензорном пространстве, такое скалярное произведение двух векторов можно определить в соответствии с этими же формулами (11). Если контра– и ковариантный векторы уже заданы – то проблем со скалярным произведением нет. Если оба вектора одного типа, то чтобы определить скалярную длину вектора, необходимо определить способ "сопряжения" векторов.

В тензорной алгебре сопряженный вектор может быть получен операцией опускания индексов для контравариантных и операцией поднятия индексов для ковариантных векторов. Операция поднятия-опускания индексов осуществляется с помощью невырожденного, а в ортонормированном метрическом пространстве еще и диагонального метрического тензорова g_{ij} и g^{ij}:

$$\begin{gathered} g_{ij}A^j = A_j \text{ – опускание индекса,} \\ g^{ij}A_j = A^j \text{ – поднятие индекса.} \end{gathered} \tag{12}$$

В галилеевом пространстве такого тензора не имеется. Следовательно, невозможно стандартно определить сопряженные вектора, опираясь на не существующее сопряжение векторов в галилеевом пространстве: они в ней просто "существуют" в заранее определенном статусе. Но в дорелятивистском пространстве такую операцию можно определить.

Вспомним, что закон сохранения энергии или перехода работы в энергию и наоборот имеет форму скалярного произведения с диагональным метрическим тензором

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

С использованием этого метрического тензора закон сохранения энергии записывается в виде:

$$\begin{gathered} dK - dA = 0 \rightarrow \\ \rightarrow \left(P, F^i\right) \cdot \left(dt, dr^i\right) = 0 \rightarrow \\ \rightarrow \left(P^0 \cdot dt^0 - F^i \cdot dr^i\right) = 0. \end{gathered} \tag{14.1}$$

Это уравнение можно записать в матрично–тензорной форме:

$$\begin{gathered} \langle dK - dA = 0 \rangle \rightarrow \\ \left(P^0, F^i\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt^0 \\ , dr^j \end{pmatrix} = 0 \colon g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta_{ij} \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{14.2}$$

В качестве метрического тензора, с помощью которого осуществляется операция сопряжения векторов, здесь выступает псевдоединичная матрица–тензор g_{ij}. Вместе с существованием метрического тензора появляется возможность осуществления операций опускания-поднятия индекса тензора.

$$(P_0, F_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta_{ij} \end{pmatrix} (P^0, F^j) \sim (P^0, -F^j). \tag{15.1}$$

В качестве первого примера используем операцию опускания индекса к произвольному контравариантному вектор:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta_{il} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ -A_i \end{pmatrix}. \tag{15.2}$$

Как видим, при сопряжении изменяется знак при элементах с пространственными индексами 1..3.

Для поднятия индекса необходимо использовать сопряженный метрический тензор. Численно сопряженным к псевдоединичному тензору является этот же самый тензор, только записанный с верхними индексами. В качестве примера использования операции поднятия индекса используем тензор ГПТК (2):

$$g^i_j = \begin{pmatrix} 1 & -v^0{}_j \\ -v^i{}_0 & \omega^i{}_j \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Поднимем второй (нижний) индекс этого тензора, обозначенный как j:

$$\begin{pmatrix} 1 & -v^0{}_j \\ -v^i{}_0 & \omega^i{}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta^{jk} \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 1 & v^{0k} \\ -v^{i0} & -\omega^{ik} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Как видим, опускание и/или поднятие пространственного индекса сопровождается изменением знака соответствующего индекса. При этом элемент с "временным" индексом 0 не меняет значения.

4. Преобразования ковариантных векторных параметров

Надо ожидать, что тензор преобразования ковариантных векторов может отличаться от случая преобразования контравариантных векторов. Это отличие заключается в том, что для преобразования векторов используется сопряженный к (2) тензор.

$$g^i{}_j \to g_i{}^j.$$

Частично операцию "сопряжения" этого тензора мы провели в (17). Осталось опустить индекс i при элементах получившегося тензора. Проведем ее.

$$g_i{}^j => \begin{pmatrix} 1 & v^{0k} \\ -v^{i0} & -\omega^{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta_{il} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v^{0k} \\ v^{l0} & \omega^{lk} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Этот тензор преобразования отличается от матрицы преобразования контравариантных векторов только своими знаками при элементах с одним нулевым индексом. Поэтому имеем следующую матрицу преобразования ковариантных векторов:

$$g_i{}^j = \begin{pmatrix} g_0{}^0 & g_0{}^j \\ g_i{}^0 & g_i{}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v^{0j} \\ v^{i0} & \omega^{ij} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

где $v_i^0 \sim v^i$ – скорость новой системы отсчета относительно старой. Здесь $v_i^0 \sim v^i$ численно соответствуют друг другу, поэтому в дальнейшем изложении мы в записях подобного вида будем иметь в виду, что при параметре v^i (v^j) имеется еще контравариантный индекс со значением 0.

Запишем в общем виде преобразования для произвольного ковариантного вектора A_i:

$$A'_i = \begin{pmatrix} 1 & v_0{}^j \\ v_i{}^0 & \omega_i{}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 + v_0{}^j A_j \\ A_0 v_i{}^0 + \omega_i{}^j A_j \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Преобразования тензоров

5. Преобразования дорелятивистских тензоров ранга 2

Рассмотрим расширенные галилеевы преобразования тензоров ранга 2 как произведения преобразованных соответствующих типов (ковариантного или контравариантного) векторов A_i, A^i, B_j или B^j:

$$A'^i = \begin{pmatrix} 1 & -v^0{}_n \\ -v^i{}_0 & \omega^i{}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 - v^0{}_n A^n \\ \omega^i{}_n A^n - v^i{}_0 A^0 \end{pmatrix}.$$
$$A'_i = \begin{pmatrix} 1 & v_0{}^n \\ v_i{}^0 & \omega_i{}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 + v_0{}^n A_n \\ v_i{}^0 A_0 + \omega_i{}^n A_n \end{pmatrix}. \quad (1)$$

$$B'^j = \begin{pmatrix} 1 & -v^0{}_m \\ -v^j{}_0 & \omega^j{}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^0 \\ B^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^0 - v^0{}_m B^m \\ \omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0 \end{pmatrix}.$$
$$B'_j = \begin{pmatrix} 1 & v_0{}^m \\ v_j{}^0 & \omega_j{}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 + v_0{}^m B_m \\ v_j{}^0 B_0 + \omega_j{}^m B_m \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Также имеем в виду, что:

1) $v^0{}_j$ и $v_0{}^j$ численно равны, но при поднятии/опускании индекса необходимо учитывать правила смены знаков;

2) $\omega^i{}_j$ и $\omega_i{}^j$ численно равны;

3) $E^i{}_j$ – единичная диагональная матрица;

4) "*" может означать, что необходимо учитывать, выражения вида $v^0{}_i v_0{}^j A$... в последующих формулах может быть того же порядка, что и $v^0{}_j A$... .

6. Преобразования контравариантных тензоров ранга 2

В тензорных обозначениях контравариантный тензор ранга 2 A^{ij} при смене системы отсчета преобразуется следующим образом:

$$C'^{ij} \Leftrightarrow (g^i{}_n A^n)\,(g^j{}_m A^m) = A'^i B'^j \to C'^{ij}. \quad (3)$$

Проведем это преобразование как произведение двух преобразованных контравариантных векторов:

$$A'^{i}=\begin{pmatrix}1 & -v^{0}{}_{n}\\ -v^{i}{}_{0} & \omega^{i}{}_{n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{0}\\ A^{n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^{0}-v^{0}{}_{n}A^{n}\\ \omega^{i}{}_{n}A^{n}-v^{i}{}_{0}A^{0}\end{pmatrix}.$$
$$B'^{j}=\begin{pmatrix}1 & -v^{0}{}_{m}\\ -v^{j}{}_{0} & \omega^{j}{}_{m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B^{0}\\ B^{m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^{0}-v^{0}{}_{m}B^{m}\\ \omega^{j}{}_{m}B^{m}-v^{j}{}_{0}B^{0}\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Умножим эти два вектора друг на друга:

$$A'^{i}B'^{j}=\begin{pmatrix}A^{0}-v^{0}{}_{n}A^{n}\\ \omega^{i}{}_{n}A^{n}-v^{i}{}_{0}A^{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B^{0}-v^{0}{}_{m}B^{m} & \omega^{j}{}_{m}B^{m}-v^{j}{}_{0}B^{0}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}(A^{0}-v^{0}{}_{n}A^{n})(B^{0}-v^{0}{}_{m}B^{m}) & (A^{0}-v^{0}{}_{n}A^{n})\left(\omega^{j}{}_{m}B^{m}-v^{j}{}_{0}B^{0}\right)\\ \left(\omega^{i}{}_{n}A^{n}-v^{i}{}_{0}A^{0}\right)(B^{0}-v^{0}{}_{m}B^{m}) & \left(\omega^{i}{}_{n}A^{n}-v^{i}{}_{0}A^{0}\right)\left(\omega^{j}{}_{m}B^{m}-v^{j}{}_{0}B^{0}\right)\end{pmatrix}= \tag{5}$$

$$=\begin{pmatrix}A^{0}B^{0}-v^{0}{}_{n}A^{n}B^{0}-A^{0}v^{0}{}_{m}B^{m}+v^{0}{}_{n}A^{n}v^{0}{}_{m}B^{m} & A^{0}\omega^{j}{}_{m}B^{m}-A^{0}v^{j}{}_{0}B^{0}-v^{0}{}_{n}A^{n}\omega^{j}{}_{m}B^{m}+v^{0}{}_{n}A^{n}v^{j}{}_{0}B^{0}\\ \omega^{i}{}_{n}A^{n}B^{0}-v^{i}{}_{0}A^{0}B^{0}-\omega^{i}{}_{n}A^{n}v^{0}{}_{m}B^{m}+v^{i}{}_{0}A^{0}v^{0}{}_{m}B^{m} & \omega^{i}{}_{n}A^{n}\omega^{j}{}_{m}B^{m}-\omega^{i}{}_{n}A^{n}v^{j}{}_{0}B^{0}+v^{i}{}_{0}A^{0}v^{j}{}_{0}B^{0}-v^{i}{}_{0}A^{0}\omega^{j}{}_{m}B^{m}\end{pmatrix}$$

Переведем этот результат по аналогии на преобразование контравариантного тензора:

$$C'^{ij}$$
$$=\begin{pmatrix}A^{00}-(v^{0}{}_{n}A^{n0}+v^{0}{}_{m}A^{0m})+v^{0}{}_{n}v^{0}{}_{m}A^{nm} & \omega^{j}{}_{n}A^{0m}-v^{j}{}_{0}A^{00}-v^{0}{}_{n}\omega^{j}{}_{m}A^{nm}+v^{0}{}_{n}v^{j}{}_{0}A^{n0}\\ \omega^{i}{}_{n}A^{n0}-v^{i}{}_{0}A^{00}-\omega^{i}{}_{n}v^{0}{}_{m}A^{nm}+v^{i}{}_{0}v^{0}{}_{m}A^{0m} & \omega^{i}{}_{n}\omega^{j}{}_{m}A^{nm}-\left(\omega^{i}{}_{n}v^{j}{}_{0}A^{n0}+v^{i}{}_{0}\omega^{j}{}_{m}A^{0m}\right)+v^{i}{}_{0}v^{j}{}_{0}A^{00}\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Если учесть, что эти преобразования ограничены очень малыми скоростями, преобразования (6) запишутся в виде

$$C'^{ij}=\begin{pmatrix}A^{00}-(v^{0}{}_{n}A^{n0}+v^{0}{}_{m}A^{0m}) & \omega^{j}{}_{n}A^{0m}-v^{j}{}_{0}A^{00}-v^{0}{}_{n}\omega^{j}{}_{m}A^{nm}\\ \omega^{i}{}_{n}A^{n0}-v^{i}{}_{0}A^{00}-\omega^{i}{}_{n}v^{0}{}_{m}A^{nm} & \omega^{i}{}_{n}\omega^{j}{}_{m}A^{nm}-\left(\omega^{i}{}_{n}v^{j}{}_{0}A^{n0}+v^{i}{}_{0}\omega^{j}{}_{m}A^{0m}\right)\end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Если нет поворота с.о., то преобразование еще упростится:

$$C'^{ij}=\begin{pmatrix}A^{00}-(v^{0}{}_{n}A^{n0}+v^{0}{}_{m}A^{0m})+v^{0}{}_{n}v^{0}{}_{m}A^{nm} & A^{0j}-\left(v^{j}{}_{0}A^{00}+v^{0}{}_{n}A^{nj}\right)+v^{0}{}_{n}v^{j}{}_{0}A^{n0}\\ A^{i0}-\left(v^{i}{}_{0}A^{00}+v^{0}{}_{m}A^{im}\right)+v^{i}{}_{0}v^{0}{}_{m}A^{0m} & A^{ij}-\left(v^{j}{}_{0}A^{i0}+v^{i}{}_{0}A^{0j}\right)+v^{i}{}_{0}v^{j}{}_{0}A^{00}\end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

При антисимметричной смешанной части формула (6.1) упрощается:

$$C'^{ij}$$
$$=\begin{pmatrix}A^{00}+v^{0}{}_{n}v^{0}{}_{m}A^{nm} & A^{0j}-\left(v^{j}{}_{0}A^{00}+v^{0}{}_{n}A^{nj}\right)+v^{0}{}_{n}v^{j}{}_{0}A^{n0}\\ A^{i0}-\left(v^{i}{}_{0}A^{00}+v^{0}{}_{m}A^{im}\right)+v^{i}{}_{0}v^{0}{}_{m}A^{0m} & A^{ij}-\left(v^{j}{}_{0}A^{i0}+v^{i}{}_{0}A^{0j}\right)+v^{i}{}_{0}v^{j}{}_{0}A^{00}\end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

При наличии только вращения пространственных координат ($v^{i}{}_{0}=0$) временной элемент (6) не изменяется, пространственно-временные (смешанные) элементы получают одинарное вращение, а пространственная часть тензора получает двойное вращение:

$$C'^{ij}=\begin{pmatrix}A^{00} & \omega^{j}{}_{n}A^{0m}\\ \omega^{i}{}_{n}A^{n0} & \omega^{i}{}_{n}\omega^{j}{}_{m}A^{nm}\end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Следствия.

1). Из (6) видно, что временная часть тензора при ГПТК не изменяется только при поворотах с.к., а остальные изменяются.

2). Если тензор $A^{ij} = -A^{ji}$ (антисимметричен), то $A^{ii} = 0$ (в т.ч. $A^{00} = 0$), формула преобразования упрощается, причем она остается антисимметричной, более того – неизменной. В общем случае насчет галилеева преобразования контравариантного тензора можно сказать, что она не теряет свойство симметричности и/или антисимметричности.

7. Преобразования ковариантных тензоров ранга 2

В тензорных обозначениях контравариантный тензор ранга 2 A_{ij} при смене системы отсчета преобразуется следующим образом:

$$C'_{i\,j} \Leftrightarrow (g_i{}^n A_n)\,(g_i{}^m B_m) = A'_i B'_j \rightarrow C'_{i\,j}. \tag{7}$$

Проведем это преобразование как произведение двух ковариантных векторов:

$$\begin{gathered} A'_i = \begin{pmatrix} 1 & v_0{}^n \\ v_i{}^0 & \omega_i{}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 + v_0{}^n A_n \\ v_i{}^0 A_0 + \omega_i{}^n A_n \end{pmatrix}. \\ B'_j = \begin{pmatrix} 1 & v_0{}^m \\ v_j{}^0 & \omega_j{}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 + v_0{}^m B_m \\ v_j{}^0 B_0 + \omega_j{}^m B_m \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{8}$$

Умножим эти два вектора друг на друга:

$$\begin{gathered} A'_i B'_j = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_n \end{pmatrix}' (B_0 \quad B_m)' = \\ = \begin{pmatrix} A_0 + v_0{}^n A_n \\ v_i{}^0 A_0 + \omega_i{}^n A_n \end{pmatrix} \left(B_0 + v_0{}^m B_m \quad v_j{}^0 B_0 + \omega_j{}^m B_m\right) = \\ = \begin{pmatrix} (A_0 + v_0{}^n A_n)(B_0 + v_0{}^m B_m) & (A_0 + v_0{}^n A_n)\left(v_j{}^0 B_0 + \omega_j{}^m B_m\right) \\ \left(v_i{}^0 A_0 + \omega_i{}^n A_n\right)(B_0 + v_0{}^m B_m) & \left(v_i{}^0 A_0 + \omega_i{}^n A_n\right)\left(v_j{}^0 B_0 + \omega_j{}^m B_m\right) \end{pmatrix} = \end{gathered} \tag{9}$$

$$= \begin{pmatrix} A_0 B_0 + v_0{}^n A_n B_0 + A_0 v_0{}^m B_m + v_0{}^n A_n v_0{}^m B_m & A_0 v_j{}^0 B_0 + v_0{}^n A_n v_j{}^0 B_0 + A_0 \omega_j{}^m B_m + v_0{}^n A_n \omega_j{}^m B_m \\ v_i{}^0 A_0 B_0 + \omega_i{}^n A_n B_0 + v_i{}^0 A_0 v_0{}^m B_m + \omega_i{}^n A_n v_0{}^m B_m & v_i{}^0 A_0 v_j{}^0 B_0 + \omega_i{}^n A_n v_j{}^0 B_0 + v_i{}^0 A_0 \omega_j{}^m B_m + \omega_i{}^n A_n \omega_j{}^m B_m \end{pmatrix}.$$

Переведем этот результат по аналогии на преобразование ковариантного тензора:

$$\begin{array}{c} C'_{ij} \\ = \begin{pmatrix} A_{00} + (v_0{}^n A_{n0} + v_0{}^m A_{0m}) + v_0{}^n v_0{}^m A_{nm} & v_j{}^0 A_{00} + v_0{}^n v_j{}^0 A_{n0} + \omega_j{}^m A_{0m} + v_0{}^n \omega_j{}^m A_{nm} \\ v_i{}^0 A_{00} + \omega_i{}^n A_{n0} + v_i{}^0 v_0{}^m A_{0m} + \omega_i{}^n v_0{}^m A_{nm} & v_i{}^0 v_j{}^0 A_{00} + \left(\omega_i{}^n v_j{}^0 A_{n0} + v_i{}^0 \omega_j{}^m A_{0m}\right) + \omega_i{}^n \omega_j{}^m A_{nm} \end{pmatrix}. \end{array} \tag{10}$$

Если учесть, что эти преобразования ограничены очень малыми скоростями, преобразования (10) запишутся в виде

$$C'_{ij} = \begin{pmatrix} A_{00} + (v_0{}^n A_{n0} + v_0{}^m A_{0m}) & v_j{}^0 A_{00} + A_{0m} \omega_j{}^m + v_0{}^n \omega_j{}^m A_{nm} \\ v_i{}^0 A_{00} + \omega_i{}^n A_{n0} + \omega_i{}^n v_0{}^m A_{nm} & \left(\omega_i{}^n v_j{}^0 A_{n0} + v_i{}^0 \omega_j{}^m A_{0m}\right) + \omega_i{}^n \omega_j{}^m A_{nm} \end{pmatrix}. \tag{10.1}$$

Если нет поворота с.о., то преобразование (10) еще упростится:

$$C'_{ij} = \begin{pmatrix} A_{00} + (v_0{}^n A_{n0} + v_0{}^m A_{0m}) + v_0{}^n v_0{}^m A_{nm} & A_{0j} + v_j{}^0 A_{00} + v_0{}^n A_{n0} v_j{}^0 + v_0{}^n A_{nj} \\ v_i{}^0 A_{00} + A_{i0} + v_i{}^0 v_0{}^m A_{0m} + A_{im} v_0{}^m & v_i{}^0 v_j{}^0 A_{00} + \left(A_{i0} v_j{}^0 + v_i{}^0 A_{0j}\right) + A_{ij} \end{pmatrix}. \quad (10.2)$$

При антисимметричной смешанной части формула упрощается:

$$C'_{ij} = \begin{pmatrix} A_{00} + v_0{}^n v_0{}^m A_{nm} & v_j{}^0 A_{00} + A_{0j} + v_0{}^n A_{nj} + v_0{}^n \omega_j{}^m A_{nm} \\ v_i{}^0 A_{00} + A_{i0} + v_0{}^m A_{im} + \omega_i{}^n v_0{}^m A_{nm} & v_i{}^0 v_j{}^0 A_{00} + \left(A_{i0} v_j{}^0 + v_i{}^0 A_{0j}\right) + \omega_i{}^n \omega_j{}^m A_{nm} \end{pmatrix}. \quad (10.3)$$

При наличии только вращения пространственных координат ($v^i{}_0 = 0$) временной элемент не изменяется, пространственно-временные (смешанные) элементы получают одинарное вращение, а пространственная часть тензора получает двойное вращение:

$$C'_{ij} = \begin{pmatrix} A_{00} & \omega_j{}^m A_{0m} \\ \omega_i{}^n A_{n0} & \omega_i{}^n \omega_j{}^m A_{nm} \end{pmatrix}. \quad (10.4)$$

Следствия:

1). Если тензор антисимметричен: $A_{ij} = - A_{ji}$, то $A_{ii} = 0$ (в т.ч. $A_{00} = 0$), и формула преобразования упрощается, причем она остается антисимметричной. В общем случае насчет галилеева преобразования ковариантного тензора можно сказать, что она не теряет свойство симметричности и антисимметричности.

2). (псевдо)Метрический тензор изменяется:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -E_{ij} \end{pmatrix} \rightarrow g'_{ij} = \begin{pmatrix} A_{00} + v_0{}^n v_0{}^m A_{nm} & A_{00} v_j{}^0 + v_0{}^n A_{nj} \\ v_i{}^0 A_{00} + A_{im} v_0{}^m & v_i{}^0 v_j{}^0 A_{00} + A_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - v^2 & 0 \\ 0 & v_i v_j - E_{ij} \end{pmatrix}. \quad (11.1)$$

3). Метрический временной тензор не сохраняет свою структуру и изменяется следующим образом:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow g'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & v_j{}^0 \\ v_i & v_i{}^0 v_j{}^0 \end{pmatrix}. \quad (11.2)$$

4). Пространственный тензор также не сохраняет свою структуру:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{ij} \end{pmatrix} \rightarrow g'_{ij} = \begin{pmatrix} v_0{}^n v_0{}^m A_{nm} & v_0{}^n \omega_j{}^m A_{nm} \\ \omega_i{}^n v_0{}^m A_{nm} & \omega_i{}^n \omega_j{}^m A_{nm} \end{pmatrix}. \quad (11.3)$$

5). Метрический пространственный тензор также не сохраняет свою структуру:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{ij} \end{pmatrix} \rightarrow g'_{ij} = \begin{pmatrix} v_0{}^n v_0{}^m E_{nm} & 0 \\ 0 & E_{ij} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} v_0{}^n v_{0n} & 0 \\ 0 & E_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & E_{ij} \end{pmatrix}. \quad (11.4)$$

8. Преобразования смешанных тензоров $C^i{}_j$

В тензорных обозначениях контравариантный тензор ранга 2 A_{ij} при смене системы отсчета преобразуется следующим образом:

$$C'^{i}{}_{j} \Leftrightarrow (g^{j}{}_{n}A^{n})\,(g_{i}{}^{m}B_{m}) \;= A'^{i}B'_{j} \rightarrow C'_{i}{}^{j}. \tag{12}$$

где $g^{j}{}_{n}$ и $g_{i}{}^{m}$ – взаимно обратные галилеевы преобразования соответственно для контравариантного и ковариантного векторов.

Проведем это преобразование как произведение двух соответствующих векторов:

$$A'^{i} = \begin{pmatrix} 1 & -v^{0}{}_{n} \\ -v^{i}{}_{0} & \omega^{i}{}_{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{0} \\ A^{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{0} - v^{0}{}_{n}A^{n} \\ \omega^{i}{}_{n}A^{n} - v^{i}{}_{0}A^{0} \end{pmatrix}.$$

$$B'_{j} = \begin{pmatrix} 1 & v_{0}{}^{m} \\ v_{j}{}^{0} & \omega_{j}{}^{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{0} \\ B_{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{0} + v_{0}{}^{m}B_{m} \\ v_{j}{}^{0}B_{0} + \omega_{j}{}^{m}B_{m} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Умножим эти два вектора друг на друга:

$$C'^{i}{}_{j} = A'^{i}B'_{j} = \begin{pmatrix} A^{0} - v^{0}{}_{n}A^{n} \\ \omega^{i}{}_{n}A^{n} - v^{i}{}_{0}A^{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{0} + v_{0}{}^{m}B_{m} & v_{j}{}^{0}B_{0} + \omega_{j}{}^{m}B_{m} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (A^{0} - v^{0}{}_{n}A^{n})(B_{0} + v_{0}{}^{m}B_{m}) & (A^{0} - v^{0}{}_{n}A^{n})\left(v_{j}{}^{0}B_{0} + \omega_{j}{}^{m}B_{m}\right) \\ \left(\omega^{i}{}_{n}A^{n} - v^{i}{}_{0}A^{0}\right)(B_{0} + v_{0}{}^{m}B_{m}) & \left(\omega^{i}{}_{n}A^{n} - v^{i}{}_{0}A^{0}\right)\left(v_{j}{}^{0}B_{0} + \omega_{j}{}^{m}B_{m}\right) \end{pmatrix} = \tag{14}$$

$$= \begin{pmatrix} A^{0}B_{0} + A^{0}v_{0}{}^{m}B_{m} - v^{0}{}_{n}A^{n}B_{0} - v^{0}{}_{n}A^{n}v_{0}{}^{m}B_{m} & A^{0}v_{j}{}^{0}B_{0} + A^{0}\omega_{j}{}^{m}B_{m} - v^{0}{}_{n}A^{n}v_{j}{}^{0}B_{0} - v^{0}{}_{n}A^{n}\omega_{j}{}^{m}B_{m} \\ \omega^{i}{}_{n}A^{n}B_{0} - v^{i}{}_{0}A^{0}B_{0} + \omega^{i}{}_{n}A^{n}v_{0}{}^{m}B_{m} - v^{i}{}_{0}A^{0}v_{0}{}^{m}B_{m} & \omega^{i}{}_{n}A^{n}v_{j}{}^{0}B_{0} + \omega^{i}{}_{n}\omega_{j}{}^{m}A^{n}B_{m} - v^{i}{}_{0}A^{0}v_{j}{}^{0}B_{0} - v^{i}{}_{0}\omega_{j}{}^{m}A^{0}B_{m} \end{pmatrix}$$

Переведем этот результат по аналогии на преобразование смешанного тензора:

$$C'^{i}{}_{j}$$

$$= \begin{pmatrix} A^{0}{}_{0} + (v_{0}{}^{m}A^{0}{}_{m} - v^{0}{}_{n}A^{n}{}_{0}) - v^{0}{}_{n}v_{0}{}^{m}A^{n}{}_{m} & v_{j}{}^{0}A^{0}{}_{0} + \omega_{j}{}^{m}A^{0}{}_{m} - v^{0}{}_{n}v_{j}{}^{0}A^{n}{}_{0} - v^{0}{}_{n}\omega_{j}{}^{m}A^{n}{}_{m} \\ \omega^{i}{}_{n}A^{n}{}_{0} - v^{i}{}_{0}A^{0}{}_{0} + \omega^{i}{}_{n}v_{0}{}^{m}A^{n}{}_{m} - v^{i}{}_{0}v_{0}{}^{m}A^{0}{}_{m} & \omega^{i}{}_{n}\omega_{j}{}^{m}A^{n}{}_{m} + \left(\omega^{i}{}_{n}v_{j}{}^{0}A^{n}{}_{0} - v^{i}{}_{0}\omega_{j}{}^{m}A^{0}{}_{m}\right) - v^{i}{}_{0}v_{j}{}^{0}A^{0}{}_{0} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Если учесть, что эти преобразования ограничены очень малыми скоростями, преобразования (15) запишутся в виде

$$C'^{i}{}_{j} = \begin{pmatrix} A^{0}{}_{0} + (v_{0}{}^{m}A^{0}{}_{m} - v^{0}{}_{n}A^{n}{}_{0}) & \omega_{j}{}^{m}A^{0}{}_{m} + v_{j}{}^{0}A^{0}{}_{0} - v^{0}{}_{n}\omega_{j}{}^{m}A^{n}{}_{m} \\ \omega^{i}{}_{n}A^{n}{}_{0} - v^{i}{}_{0}A^{0}{}_{0} + \omega^{i}{}_{n}v_{0}{}^{m}A^{n}{}_{m} & \omega^{i}{}_{n}\omega_{j}{}^{m}A^{n}{}_{m} + \left(\omega^{i}{}_{n}v_{j}{}^{0}A^{n}{}_{0} - v^{i}{}_{0}\omega_{j}{}^{m}A^{0}{}_{m}\right) \end{pmatrix}. \tag{15.1}$$

При наличии только галилеевых преобразований смешанного тензора формула преобразования следующая:

$$C'^{i}{}_{j}$$

$$= \begin{pmatrix} A^{0}{}_{0} + (v_{0}{}^{m}A^{0}{}_{m} - v^{0}{}_{n}A^{n}{}_{0}) - v^{0}{}_{n}v_{0}{}^{m}A^{n}{}_{m} & A^{0}{}_{j} + v_{j}{}^{0}A^{0}{}_{0} - v^{0}{}_{n}A^{n}{}_{j} - v^{0}{}_{n}v_{j}{}^{0}A^{n}{}_{0} \\ A^{i}{}_{0} - v^{i}{}_{0}A^{0}{}_{0} - v^{i}{}_{0}v_{0}{}^{m}A^{0}{}_{m} + v_{0}{}^{m}A^{i}{}_{m} & A^{i}{}_{j} + \left(v_{j}{}^{0}A^{i}{}_{0} - v^{i}{}_{0}A^{0}{}_{j}\right) - v^{i}{}_{0}v_{j}{}^{0}A^{0}{}_{0} \end{pmatrix}. \tag{15.2}$$

При симметричной смешанной части формула упрощается:

$$C'^{i}{}_{j} = \begin{pmatrix} A^0{}_0 - v^0{}_n v_0{}^m A^n{}_m & A^0{}_j + v_j{}^0 A^0{}_0 - v^0{}_n v_j{}^0 A^n{}_0 - v^0{}_n A^n{}_j \\ A^i{}_0 - v^i{}_0 A^0{}_0 - v^i{}_0 v_0{}^m A^0{}_m + v_0{}^m A^i{}_m & A^i{}_j + \left(v_j{}^0 A^i{}_0 - v^i{}_0 A^0{}_j\right) - v^i{}_0 v_j{}^0 A^0{}_0 \end{pmatrix}. \qquad (15.3)$$

При наличии только вращения для смешанного тензора формула преобразования значительно упрощается:

$$C'^{i} = \begin{pmatrix} A^0{}_0 & \omega_j{}^m A^0{}_m \\ \omega^i{}_n A^n{}_0 & \omega^i{}_n \omega_j{}^m A^n{}_m \end{pmatrix}. \qquad (15.4)$$

9. *Преобразования смешанных тензоров $C_i{}^j$*

В тензорных обозначениях контравариантный тензор ранга 2 A_{ij} при смене системы отсчета преобразуется следующим образом:

$$C'_i{}^j \Leftrightarrow (g_i{}^m A_m)\,(g^j{}_n B^n) = A'_i B'^j. \qquad (16)$$

где $g^j{}_n$ и $g_i{}^m$ – взаимно обратные галилеевы преобразования соответственно для контравариантного и ковариантного векторов.

Проведем это преобразование как произведение двух соответствующих векторов:

$$A'_i = \begin{pmatrix} 1 & v_0{}^n \\ v_i{}^0 & \omega_i{}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 + v_0{}^n A_n \\ v_i{}^0 A_0 + \omega_i{}^n A_n \end{pmatrix}.$$
$$B'^j = \begin{pmatrix} 1 & -v^0{}_m \\ -v^j{}_0 & \omega^j{}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^0 \\ B^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^0 - v^0{}_m B^m \\ \omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0 \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

Умножим эти два вектора друг на друга:

$$C'_i{}^j = A'_i B'^j = \begin{pmatrix} A_0 + v_0{}^n A_n \\ v_i{}^0 A_0 + \omega_i{}^n A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^0 - v^0{}_m B^m & \omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (A_0 + v_0{}^n A_n)(B^0 - v^0{}_m B^m) & (A_0 + v_0{}^n A_n)\left(\omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0\right) \\ \left(v_i{}^0 A_0 + \omega_i{}^n A_n\right)(B^0 - v^0{}_m B^m) & \left(v_i{}^0 A_0 + \omega_i{}^n A_n\right)\left(\omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0\right) \end{pmatrix} = \qquad (18)$$

$$= \begin{pmatrix} A_0 B^0 + v_0{}^n A_n B^0 - A_0 v^0{}_m B^m - v_0{}^n A_n v^0{}_m B^m & \omega^j{}_m A_0 B^m - v^j{}_0 A_0 B^0 + v_0{}^n A_n \omega^j{}_m B^m - v_0{}^n A_n v^j{}_0 B^0 \\ v_i{}^0 A_0 B^0 + \omega_i{}^n A_n B^0 - v_i{}^0 A_0 v^0{}_m B^m - \omega_i{}^n A_n v^0{}_m B^m & v_i{}^0 A_0 \omega^j{}_m B^m - v_i{}^0 A_0 v^j{}_0 B^0 + \omega_i{}^n A_n \omega^j{}_m B - \omega_i{}^n A_n v^j{}_0 B^0 \end{pmatrix}$$

Переведем этот результат по аналогии на преобразование смешанного тензора:

$$C'_i{}^j$$
$$= \begin{pmatrix} A_0{}^0 + \left(v_0{}^n A_n{}^0 - A_0{}^m v^0{}_m\right) - v_0{}^n A_n{}^m v^0{}_m & \omega^j{}_m A_0{}^m - v^j{}_0 A_0{}^0 + v_0{}^n \omega^j{}_m A_n{}^m - v_0{}^n v^j{}_0 A_n{}^0 \\ v_i{}^0 A_0{}^0 + \omega_i{}^n A_n{}^0 - v_i{}^0 v^0{}_m A_0{}^m - \omega_i{}^n v^0{}_m A_n{}^m & \omega_i{}^n \omega^j{}_m A_n{}^m + v_i{}^0 \omega^j{}_m A_0{}^m - \omega_i{}^n v^j{}_0 A_n{}^0 - v_i{}^0 v^j{}_0 A_0{}^0 \end{pmatrix}. \qquad (19)$$

Если учесть, что эти преобразования ограничены очень малыми скоростями, преобразования (19) запишутся в виде

$$C'{}_i{}^j = \begin{pmatrix} A_0{}^0 + v_0{}^n A_n{}^0 - A_0{}^m v^0{}_m & \omega^j{}_m A_0{}^m - v^j{}_0 A_0{}^0 + v_0{}^n \omega^j{}_m A_n{}^m \\ \omega_i{}^n A_n{}^0 + v_i{}^0 A_0{}^0 - \omega_i{}^n v^0{}_m A_n{}^m & \omega_i{}^n \omega^j{}_m A_n{}^m + v_i{}^0 \omega^j{}_m A_0{}^m - \omega_i{}^n v^j{}_0 A_n{}^0 \end{pmatrix}. \qquad (19.1)$$

При наличии только галилеевых преобразований смешанного тензора формула преобразования практически не упрощается:

$$C'{}_i{}^j = \begin{pmatrix} A_0{}^0 + v_0{}^n A_n{}^0 - A_0{}^m v^0{}_m - v_0{}^n A_n{}^m v^0{}_m & A_0{}^j - v^j{}_0 A_0{}^0 + v_0{}^n A_i{}^j - v_0{}^n v^j{}_0 A_n{}^0 \\ v_i{}^0 A_0{}^0 + A_i{}^0 - v^0{}_m A_i{}^m - v_i{}^0 v^0{}_m A_0{}^m & v_i{}^0 A_0{}^j + A_i{}^j - v^j{}_0 A_i{}^0 - v_i{}^0 v^j{}_0 A_0{}^0 \end{pmatrix}. \qquad (19.2)$$

При симметричной смешанной части формула упрощается:

$$C'{}_i{}^j = \begin{pmatrix} A_0{}^0 - v_0{}^n A_n{}^m v^0{}_m & A_0{}^j - v^j{}_0 A_0{}^0 + v_0{}^n A_i{}^j - v_0{}^n v^j{}_0 A_n{}^0 \\ v_i{}^0 A_0{}^0 + A_i{}^0 - v_i{}^0 v^0{}_m A_0{}^m - v^0{}_m A_i{}^m & A_i{}^j + \left(v_i{}^0 A_0{}^j - v^j{}_0 A_i{}^0\right) - v_i{}^0 v^j{}_0 A_0{}^0 \end{pmatrix}. \qquad (19.3)$$

При наличии только вращения для смешанного тензора формула преобразования значительно упрощается:

$$C'{}_i{}^j = \begin{pmatrix} A_0{}^0 & \omega^j{}_m A_0{}^m \\ \omega_i{}^n A_n{}^0 & \omega_i{}^n \omega^j{}_m A_n{}^m \end{pmatrix}. \qquad (19.4)$$

Литература

1. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. – М.: Наука, 1972. – 351 с.
2. Детлаф, А.А. Курс общей физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. - М. Высшая школа, 2017. - 245 с.
3. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2001. – 575 с. 74
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики: В 10 т.: т. 2. – М.: Физматлит, 2002. – 224 с

Мои работы

http://vixra.org/author/valery_timin