

# Das elementare Gesetz der Induktion

Walter Orlov

## Abstract

The elementary law of the inductance

$$\vec{E}\vec{n} = - \oint \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{l}$$

Die Gesetze der Elektrodynamik seien so fest wie in Stein gemeißelt. Wie kann man sie irgendwie abändern, wenn allein moderne Industrie gänzlich darauf fußt?

Und überhaupt, Maxwell'sche Gleichungen bilden eine Grundlage für allerlei praxisorientierte Berechnungen. Was kann bei denen noch falsch sein?

Faraday experimentierte mit einem Wendeldraht und Maxwell kam später zur Vorstellung eines rotierenden elektrischen Feldes.

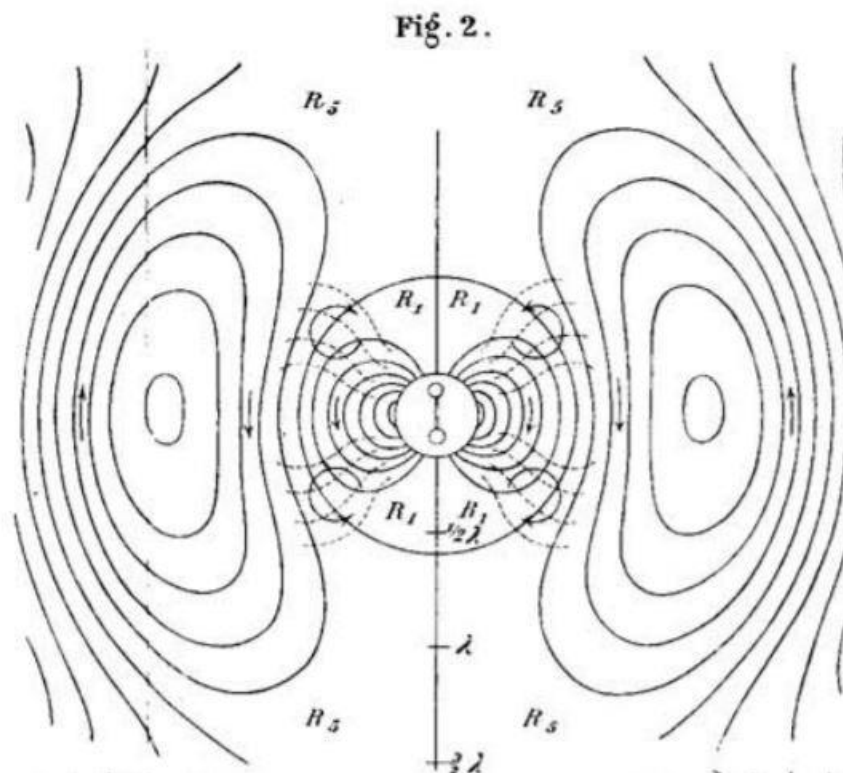
Spiralförmiger Draht ist aber eine Hilfskonstruktion, die zur Verstärkung des Effekts diente. Heutzutage hätte man zum selben Zweck etwa einen Operationsverstärker genommen. Damals gab es aber weder Halbleiter noch Röhren. So wickelte Faraday den Draht mehrfach, um den durch veränderliches Magnetfeld induzierten Strom so weit zu verstärken, dass dieser an einem Galvanometer schlechthin sichtbar wird.

Nun interpretierte Maxwell geometrische Form eines vom Mensch geschaffenen Objekts als physikalische Realität der Natur. Dies sollte sogar durch Hertz experimentell bestätigt worden sein. Jedenfalls zeichnete er in seiner Publikation "Die Kräfte elektrischer Schwingungen, behandelt nach der Maxwell'schen Theorie" geschlossene Linien des elektrischen Feldes.

Dabei beschrieb er aber deren Entstehung folgend:

"Die Kraftlinien nämlich, welche sich am meisten vom Nullpunkt entfernt haben, erhalten bei dem Bestreben, sich zusammenzuziehen, eine seitliche Einbiegung, und indem diese Einbiegung sich mehr und mehr gegen die z-Axe zusammenzieht,

schnürt sich von jeder der äusseren Kraftlinien eine in sich geschlossene Kraftlinie ab, welche selbständig in den Raum fortschreitet..."

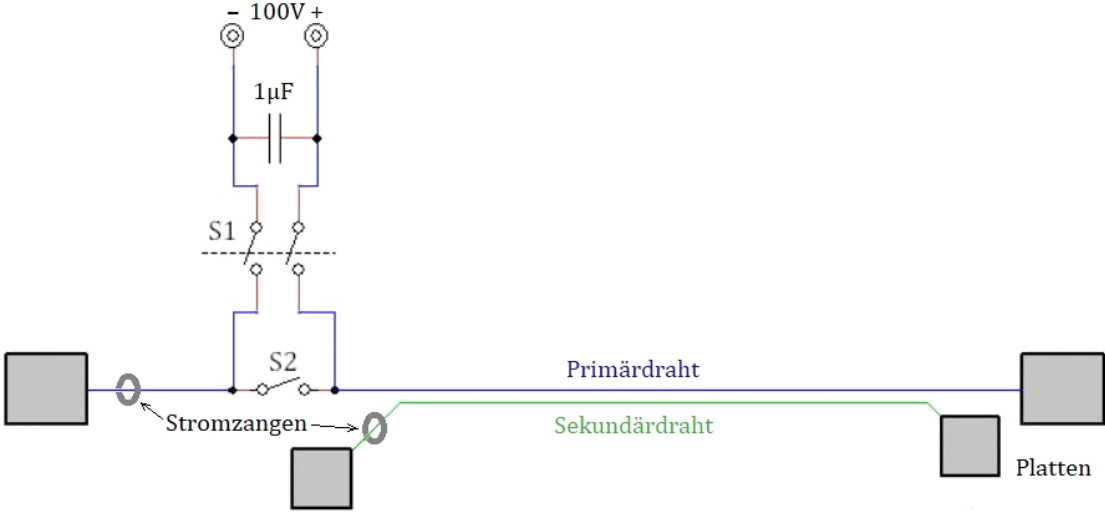


Hertz'sche Beschreibung weicht von Maxwell'scher Vorstellung über Induktionsgesetz stark ab. Offensichtlich entstünden Hertz'sche geschlossene Kraftlinie nicht durch veränderliches Magnetfeld. Sie sind eher die Folge der Überlagerungen von den Feldlinien.

Dass die Induktion auch bei geraden Drähten und ohne geschlossene Stromkreise auftreten kann, lässt sich durchaus zeigen. Kompliziert ist das nicht. Dafür braucht man etwa folgende Einrichtung.

Um die Anwendung und Entstehung von hohen Spannungen (über 100V) zu meiden, habe ich für den Versuch leitende Körper mit möglichst großer Oberfläche verwendet. Zwei voneinander entfernte leitende Körper sollen zuerst aufgeladen und danach entladen werden. Der Strom wird dabei genauso geradlinig fließen, wie gerade der sie miteinander verbindende Draht ist. Auf diese Weise wird die Bildung des geschlossenen Stromkreises ausgeschlossen. Diesen Draht nennen wir "Primärdraht". Ein zweiter gerader Draht wird neben dem ersten gelegt. Diesen

nennen wir "Sekundärdraht". An seine Enden werden zwei weitere leitende Körper angeschlossen. Genauso wie beim Primärdraht wird hier die Bildung des geschlossenen Stromkreises verhindert. Eine entsprechende Schaltanordnung ist unten skizziert.



Die Stromzangen werden gleichsinnig – Stromrichtung nach links – an die Drähte angebracht. Nächstes Foto zeigt verwendete Ausrüstung.

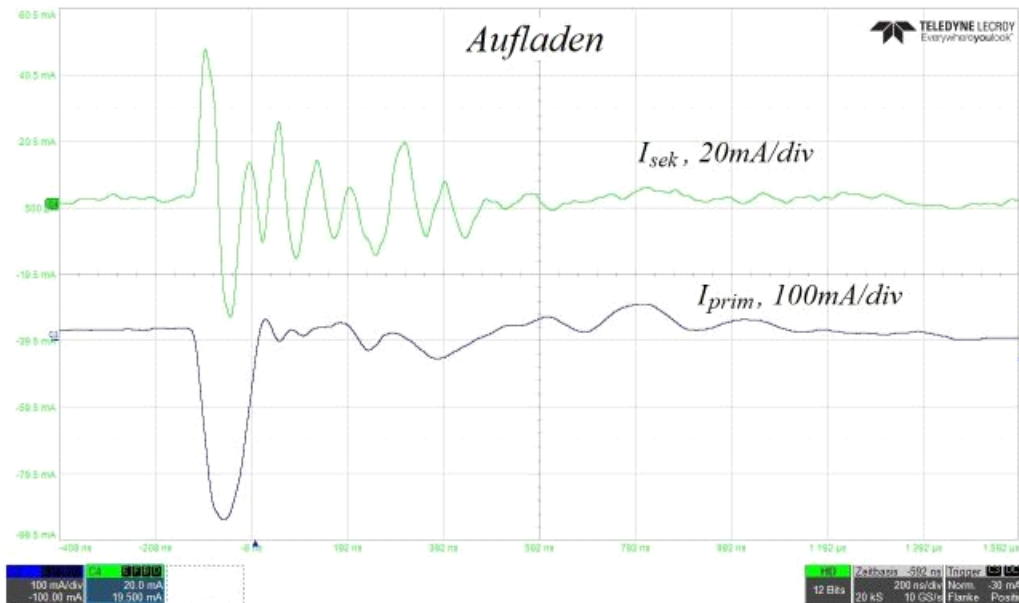


Als leitende Körper des Primärdrahtes dienten die Alu-Platten 0.8m x 1m, die im Abstand von ca. 4.5m voneinander standen. Der Sekundärdraht wurde an die Eisenbleche 0.5m x 0.5m angeschlossen. Abstand zwischen ihnen betrug ca. 2.2m. Die Entfernung von jedem von ihnen zu den Alu-Platten des Primärdrahtes war mehr als 1m. Wo die Drähte zusammen verliefen (ca. 2m), wurde zweiaderiges Kabel (0.14mm<sup>2</sup> je Draht) ohne Schirm genommen. Dazu kamen ein einfacher und ein zweifacher Leitungsschutzschalter. Mechanische Schalter im allgemein darf man nicht unterschätzen. Sie prallen zwar, aber erste Kontaktierung findet in Zeiten von wenigen Nanosekunden statt, was nicht jeder Halbleiter schafft. Das Prallen danach kann man schlicht ignorieren. Das war also alles, was ich gerade zur Hand hatte. Und hier ist das Foto von der Messeinheit mit den Stromzangen.

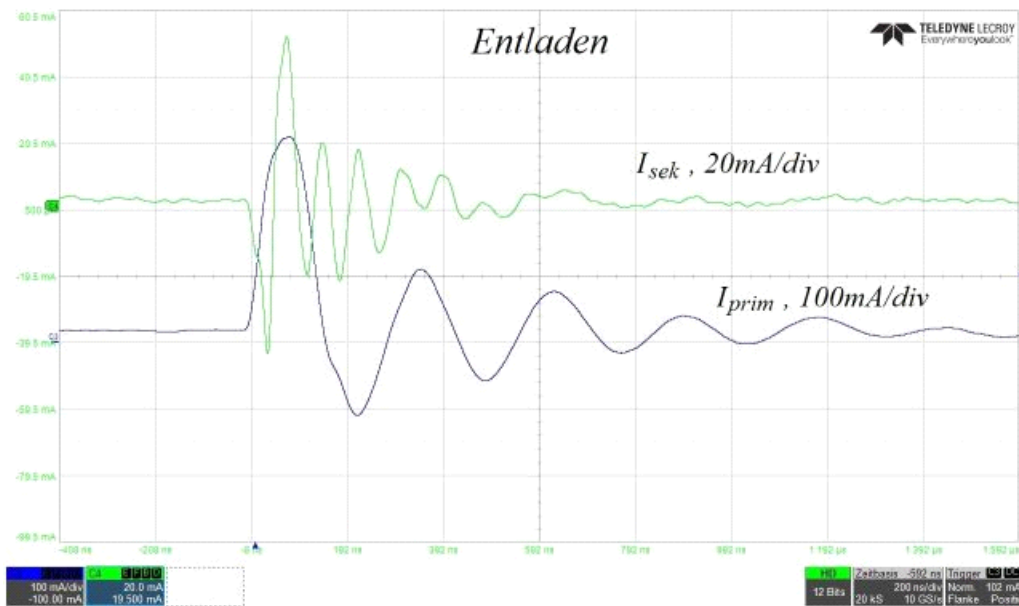


Die Schalthandlungen waren folgende: Das DC-Netzteil wurde an 1μF Kondensator über Bananen-Stecker angeschlossen und die Ausgangsspannung auf 100V eingestellt. Während einfacher Schalter S2 weiterhin offen blieb, wurde

zweifacher Schalter  $S1$  zugeschaltet. Das Oszilloskop triggerte auf Primärstrompuls und zeichnete folgende Kurvenverläufe.



Danach wurde zweifacher Schalter  $S1$  abgeschaltet und einfacher Schalter  $S2$  sofort geschlossen. Das Ergebnis ist in nächstem Oszillogramm gezeigt:



Relevant sind die Anfänge der Pulse, also solange die Ströme noch erzwungen

werden und es keine Nachschwingungen gibt. In den Oszillogrammen erkennen wir, dass der Sekundärstrom  $I_{sek}$  zuerst in entgegengesetzte Richtung fließt als Primärstrom  $I_{prim}$ . Das ist ein klares Indiz dafür, dass wir hier mit dem induzierten Strom, also, mit der Induktionserscheinung im allgemein zu tun haben. Dafür spricht auch die Höhe des Sekundärstromes und zwar sie ist nur ca. fünfmal kleiner als Höhe des Primärstromes, d.h. der Sekundärstrom kann nicht die Folge der Einstrahlung von den Funkwellen sein. Um die Erzeugung von den Funkwellen zu minimieren, allein deswegen, habe ich nur mit relativ kleiner Spannung von 100V gearbeitet. Außerdem haben ich hier keinen zusätzlichen elektronischen Verstärker eingesetzt, weil dessen Fehlverhalten bei Störstrahlung zu falschen Ergebnissen führen könnte.

Somit ist anfängliche Vermutung, dass die Induktion auch bei geraden Leitungen stattfinden kann, experimentell bewiesen!

Eigentlich würde es schon reichen, wenn nur der Sekundärdraht keine geschlossene Leiterschleife gebildet hätte. Diese Möglichkeit habe ich auch ausprobiert: Der Abschnitt des Primärdrahts, wo beide Drähte zusammenverliefen, wurde vom Rest der Schaltung abgetrennt und über einen 50Ω-Widerstand in Reihe an den Funktionsgenerator angeschlossen. In der Tat lieferte das rechteckige Signal, genauer, seine steigende bzw. fallende Flanken ähnliche Stromverläufe für die Sekundärseite wie in oberen Oszillogrammen, d.h. es gab als erstes stets einen Stromstoß in entgegengesetzte Richtung.

Anders wäre es auch nicht zu erwarten. Alleine die Selbstinduktion deutet in gleiche Richtung hin. Obwohl man dabei üblicherweise gewickelte Drahtspulen betrachtet, besitzt gerader Draht auch eine gewisse Induktivität. Sie ist sehr klein, aber im Prinzip ist sie da und deshalb wird die der Änderung des Stromes entgegenwirkende Spannung auch in geraden Drähten induziert.

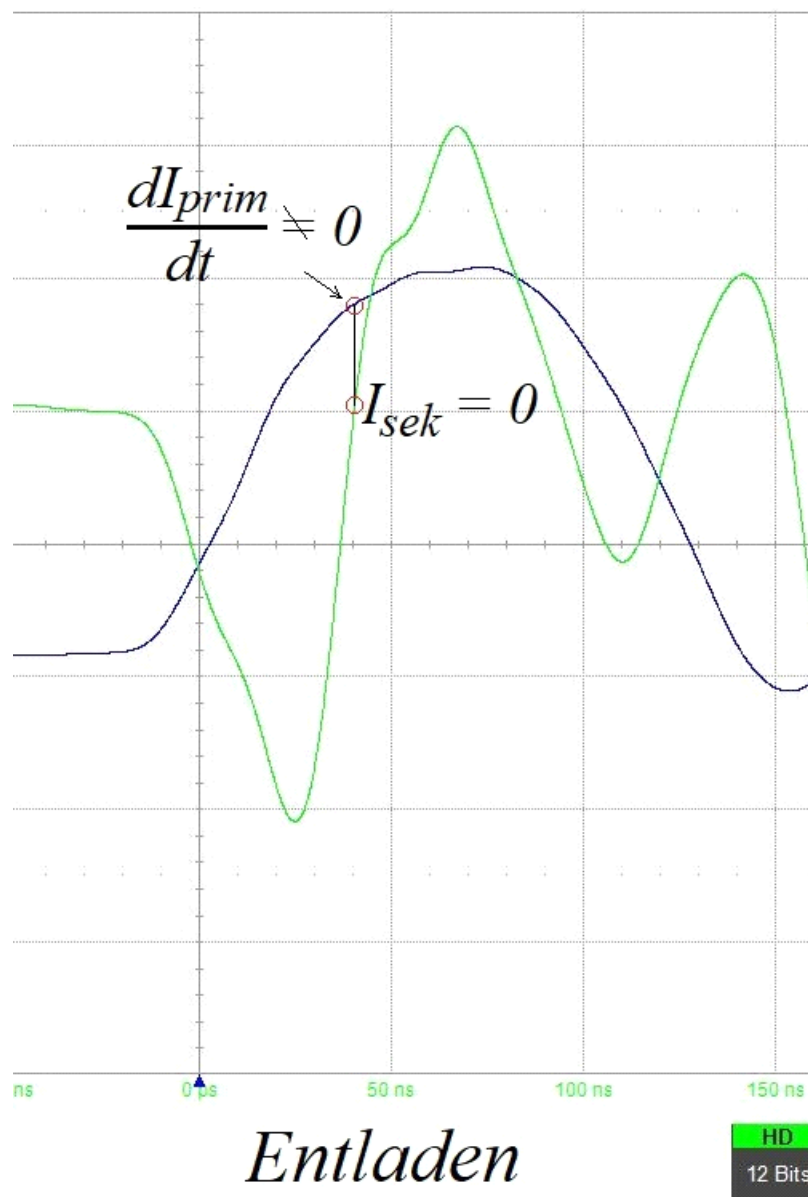
Zurück zu unseren Oszillogrammen. Versuchen wir diese weiter zu analysieren. Der Sekundärstrom beginnt abzunehmen noch während der Primärstrom steil steigt. Dies kann so erklärt werden, dass durch Aufladen der Platten an Enden des Sekundärdrahtes die Spannung entsteht, die dem induzierten Strom entgegenwirkt. Es handelt sich logischerweise um induzierte Spannung. Fällt der Sekundärstrom bis auf null, hat diese Spannung ihren Scheitelwert erreicht. Bemerkenswert ist es aber, dass der Primärstrom in diesem Punkt weiterhin steigt (nächstes Oszillogramm). Seine aktuelle Steigung dürfte also durch induzierte Spannung exakt ausgeglichen werden.

Deshalb können wir annehmen, dass induzierte Spannung  $U_{ind}$ , die den Sekundärstrom stoppt, noch bevor der Primärstrom zu wachsen aufhört, mindestens

zur ersten Ableitung des Primärstromes nach der Zeit proportional ist:

$$U_{ind} \propto \frac{dI_{prim}}{dt}$$

Die Kurven sind an dieser Stelle abgerundet, deshalb schreibe ich "mindestens zur ersten Ableitung". Es könnten also zweite oder dritte Ableitungen sein, aber der Nulldurchgang passiert schnell und deshalb nehmen wir an, dass es sich doch um erste Zeitableitung handeln soll. Außerdem gingen Faraday und Maxwell beim Induktionsgesetz davon aus.



Der Primärstrom erzeugt rotierendes Magnetfeld (Amperesches Gesetz):

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

wobei  $\vec{j}$  die Stromdichte ist. Somit

$$U_{\text{ind}} \propto \frac{d}{dt} \operatorname{rot} \vec{B}$$

Die Induktionsspannung wird durch die Integration der elektrischen Feldstärke über die Länge des Drahtes berechnet. Deshalb können wir auch schreiben

$$\vec{E} \propto \frac{d}{dt} \operatorname{rot} \vec{B}$$

Nun wollen wir einen Ersatz für Faraday-Maxwell-Gleichung

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}$$

finden. Um gleiche Einheiten von beiden Seiten bei unserer Gleichung zu bekommen, müssen wir als analog zur Stromdichte noch die Dichte elektrischer Feldstärke einführen:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\vec{E}}{A}, (V/m^3)$$

wobei  $A$  die Fläche ist, durch die das elektrische Feld durchdringt. Sie liegt stets senkrecht zu den Feldlinien. Mit der Berücksichtigung der Polarität induzierter Spannung ist gesuchte Formel:

$$\vec{\mathcal{E}} = - \operatorname{rot} \frac{d\vec{B}}{dt}$$

In Integralform können wir auf neue Größe  $\vec{\mathcal{E}}$  verzichten:

$$\vec{E} \vec{n} = - \oint \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{l}$$

wobei  $\vec{n}$  die Oberflächennormal und  $d\vec{l}$  ein Linienelement des Randes von betrachteter Fläche  $A$  sind. Wollen wir induzierte Spannung zwischen Enden eines



beliebig geformten Drahtes berechnen, sollen wir beide Seiten der Gleichung über der Länge des Drahtes integrieren.

Das war keine strenge Herleitung. Mehr von mir kann man aber auch nicht erwarten, denn ich beschäftige mich mit der Physik nur hobbyweise.

Man fragt sich selbstverständlich, ob man aus dieser neuen Gleichung die "alte" Gleichung von Maxwell herleiten kann? Wie gesagt ist die Leiterschleife ein künstliches Objekt.



Faradays Induktionsring war im Grunde genommen ein Transformator. Es gab keine relative Bewegung zwischen den Spulen, die Krümmung von magnetischen Feldlinien war immer gleich. Daher fand die Änderung der Rotation des Magnetfeldes allein durch die Änderung der Feldstärke. So konnte die geometrisch bedingte Rotation und halt gesamte Rotation außer Acht gelassen werden und von rechter Seite bliebe nur  $-d\vec{B}/dt$ .

Von linker Seite macht man die Integration elektrischer Feldstärke entlang der Sekundärwicklung und mit Hilfe vom Integralsatz von Stokes geht man zur Rotation des elektrischen Feldes über:  $rot\vec{E}$ .

Man fragt sich auch, ob sich die Wellengleichung mit neuer Formel herleiten lässt? Das darf prinzipiell möglich sein. Mit der Berücksichtigung vom Maxwell'schen Verschiebungsstrom

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

von dem wir noch eine Zeitableitung nehmen

$$\operatorname{rot} \frac{d\vec{B}}{dt} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$$

bekommen wir die Gleichung

$$\frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{E}$$

die dem Hookeschen Gesetz der Mechanik ähnelt. Lediglich brauchen wir die Fläche  $A$ , durch die das elektrische Feld durchdringt, quasi wie eine Masse im Federpendel zu behandeln und so bekommen wir Hookesches Gesetz der Elektrodynamik:

$$A \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{E}$$

Daraus ergibt sich die Federkonstante

$$k = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} = c^2$$

wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist. Die Fläche  $A$  hat offensichtlich eine besondere physikalische Bedeutung. Sie bestimmt die Eigenfrequenz, mit der das induzierte Elektrofeld nach seiner Erzeugung von selbst zu schwingen beginnt:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c^2}{A}} = \frac{1}{2\pi} \frac{c}{\sqrt{A}}$$

Diese Fläche sei der Querschnitt des gesamten induzierten Bündels des elektrischen Feldes. Zusammen mit induziertem Wirbel des Magnetfeldes drum herum bildet es eine schwingende Einheit. In der Elektrotechnik würde solche Einheit als Schwingkreis bezeichnet. Der Querschnitt entspreche dann der LC-Kombination.

Von einer Seite kann die Fläche an sich für die Kapazitive Eigenschaft des

Raumes verantwortlich gemacht werden und von anderer Seite sorgen magnetische Wirbel innerhalb der Fläche für Induktive Eigenschaft des Raumes.

Gehen wir davon aus, dass das schwingende Bündel rund ist und elektromagnetische Wellen aussendet, haben diese die Wellenlänge:

$$\lambda = 2\pi^{3/2}r$$

wobei  $r$  der Radius des Bündels ist.