Author
Giuliano Bettini

Title
Crystallography, new classification and descriptive cards.

Abstract
I present a semi-empirical classification with descriptive cards for each crystal class. A notable feature is that each class is represented in a bidirectional and univocal way by a sequence of 5 characteristic properties. Only five. From these, assuming them as "generators", all the class symmetries get defined.

Cristallografia, nuova classificazione e schede descrittive.

1-Premessa

Le elucubrazioni che mi hanno portato fin qui sono ampiamente contenute in miei precedenti lavori ([1], [2], [3], [4]) ma ne darò qui una brevissima esposizione sintetica.
Premetto che le 32 classi sono classificate a 5 bit, denominati 3, 4, 2, m, c a partire dal bit meno significativo (c), fino al bit più significativo (3).
I 5 bit hanno un preciso significato: rappresentano proprietà di simmetria, presenti nella classe o che intervengono nella formazione della classe.
("Nella formazione della classe": tale è per esempio il caso di 4c, classe 4_ dell'asse 4 improprio. La classe non ha la proprietà 4, e non ha nemmeno la proprietà c. Tuttavia è indubbio che per formare la proprietà 4_ debbano intervenire le proprietà 4 e c).
Brevemente:
- in ogni caso i bit 3 e2 significano la presenza di assi di simmetria di rotazione 3 e 2;
- il bit m significa sempre la presenza di piani di riflessione, orizzontali o verticali, singoli o più d'uno;
-il bit c è sempre legato ad una simmetria rispetto al centro ma è così fatto, che la presenza nel cristallo di un centro di inversione comporta la presenza del bit c, ma non è detto il contrario. Si tratta, in effetti, di quasi-centrosimmetria che in quasi tutti i casi coincide con la simmetria d'inversione "i" vera e propria, in altri pochi casi non lo è ma la rappresenta al meglio;
- il bit 4 significa la presenza della simmetria di rotazione 4 ma in alcuni casi è più ambiguo: asse di rotazione 4 comporta la presenza del bit 4 ma non necessariamente il viceversa.
Ma veniamo alla proprietà più importante del nuovo ordinamento.
La peculiarità della sequenza a 5 bit non sta solo nel fatto che essa identifica univocamente la classe, come nelle etichette di uno schedario: la sequenza di bit non solo identifica la classe, ma anche tutte le proprietà di simmetria dela classe.
Infatti presa una qualunque sequenza , esempio 300m0, esiste una ed una sola possibilità d'avere un gruppo cristallografico con le simmetrie 3 ed m da soli. Poi successivamente da quelle uniche proprietà di simmetria, 3 ed m, nascono tutte e sole le operazioni di simmetria della classe.

Nel seguito presento schede per ognuna delle 32 classi, cercando di rendere visibili per ciscuna classe le simmetrie presenti. Mi aiuto con una simbologia grafica: mi aiuto con delle faccettine che mostrano la simmetria. Ho generato la loro posizione tramite Smorf. Una qualsivoglia faccettina, esempio quella arancio, genera per simmetria tutte le rimanenti.

2-Brevissimo riassunto sintetico.

2.1 Raggruppamenti visibili nella cristallografia classica

Lo scopo che mi prefiggo qui è di mostrare come una classificazione a gruppi di 8 sia già ben visibile nella cristallografia così come è nota da tempo
Intendo mostrarlo attraverso l'individuazione di qualità 3, 4, 2 (assi) e m, c.
Prendiamo ad esempio m.
Si tratta di individuare dove sia presente un simbolo di "m mirror", riflessione. Nella simbologia molto elegante e completa della Geometric Algebra questo è indicato con a'=-nan (Hestenes,[5], Hitzer, [6]). Altrimenti si può indicare per mezzo di matrici 3x3 [7].
La cosa, più modestamente, la si può vedere nelle notazioni convenzionali delle simmetrie.
Si tratta di individuare dove sia presente un simbolo di "m mirror" riflessione attraverso un piano, analogo al a'=-nan dell'algebra di Clifford.
Questo si può fare in notazioni convenzionali con "sigma", piano di riflessione.
Prendo le notazioni di simmetria usuali da [8].
Identifico con un circoletto le classi dove appaiono "assi" più "sigma" da solo, senza la centro simmetria "i", e indipendentemente che si tratti di sigma h, sigma v, sigma d ((Figura 1).
Le classi sono quelle circolettate.
Ce ne sono anche altre in cui compaiono sigma h e/o sigma v e/o sigma d ma non da soli.
Compaiono assieme alla simmetria di inversione rispetto al centro "i". Non le considero.

(Ci sarebbe a dire il vero anche la classe 6_, asse 6 improprio, ma questa è una questione di punti di vista. La classe è indicata in Figura 1 con l'asse 3 più il piano di simmetria orizzontale sigma h. Quindi in questo caso appare l'indicazione di piano m. Ma alternativamente la classe può essere indicata con il simbolo S6, asse di rotoinversione così come la classe 4_ dell'asse 4 improprio è indicata con il simbolo S4, asse di rotoinversione. Quindi in questo caso <u>non</u> appare l'indicazione di piano m.)

Complessivamente: 8 classi circolettate.

Faccio lo stesso per le classi "oloedriche" ove compaiono <u>tutti</u> i tipi di simmetrie, assi, piano m e simmetria di inversione rispetto al centro, "i". Ancora 8 classi circolettate (Figura 2).
(Ci sarebbe a dire il vero anche la classe cubica m3, ma anche questa è una questione di punti di vista. In realtà questa non è la classe oloedrica del gruppo. La simmetria m può essere considerata ovvero è conseguenza della simmetria "i" introdotta nella classe 23).

Faccio lo stesso per le classi con soli assi. Queste sono 16 ma le classi con le rotazioni 2, 3, 4 prese singolarmente o in coppia, formano non più di 8 combinazioni. Ancora 8 classi circolettate (Figura 3).

Ciò che resta sono evidentemente le ultime 8 classi circolettate (Figura 4). Queste è inevitabile o quantomeno intuitivo considerarle classi centrosimmetriche fabbricate con simmetrie assiali assieme alla inversione "i" (classi 1_, 3_, 4_, 6_, m3)
oppure
con caratteristiche di quasi-centrosimmetria (classi 222, 432, 622).
In particolare è suggestivo riconoscere una caratteristica quasi-centrosimmetrica in 432 (vedi dopo).

System	Class		Symmetry elements
	International	Schönfließ	
triclinic	1	C_1	E
	$\bar{1}$	C_i	$E\ i$
monoclinic	m	C_s	$E\ \sigma_h$
	2	C_2	$E\ C_2$
	$2/m$	C_{2h}	$E\ C_2\ i\ \sigma_h$
orthorhombic	$2mm$	C_{2v}	$E\ C_2\ \sigma_v'\ \sigma_v''$
	222	D_2	$E\ C_2\ C_2'\ C_2''$
	mmm	D_{2h}	$E\ C_2\ C_2'\ C_2''\ i\ \sigma_h\ \sigma_v'\ \sigma_v''$
tetragonal	4	C_4	$E\ 2C_4\ C_2$
	$\bar{4}$	S_4	$E\ 2S_4\ C_2$
	$4/m$	C_{4h}	$E\ 2C_4\ C_2\ i\ 2S_4\ \sigma_h$
	$4mm$	C_{4v}	$E\ 2C_4\ C_2\ 2\sigma_v'\ 2\sigma_d$
	$\bar{4}2m$	D_{2d}	$E\ C_2\ C_2'\ C_2''\ 2\sigma_d\ 2S_4$
	422	D_4	$E\ 2C_4\ C_2\ 2C_2'\ 2C_2''$
	$4/mmm$	D_{4h}	$E\ 2C_4\ C_2\ 2C_2'\ 2C_2''\ i\ 2S_4\ \sigma_h\ 2\sigma_v'\ 2\sigma_h$
trigonal (rhombohedral)	3	C_3	$E\ 2C_3$
	$\bar{3}$	S_6	$E\ 2C_3\ i\ 2S_6$
	$3m$	C_{3v}	$E\ 2C_3\ 3\sigma_v$
	32	D_3	$E\ 2C_3\ 3C_2$
	$\bar{3}m$	D_{3d}	$E\ 2C_3\ 3C_2\ i\ 2S_6\ 3\sigma_d$
hexagonal	$\bar{6}$	C_{3h}	$E\ 2C_3\ \sigma_h\ 2S_3$
	6	C_6	$E\ 2C_6\ 2C_3\ C_2$
	$6/m$	C_{6h}	$E\ 2C_6\ 2C_3\ C_2\ i\ 2S_3\ 2S_6\ \sigma_h$
	$\bar{6}m2$	D_{3h}	$E\ 2C_3\ 3C_2\ \sigma_h\ 2S_3\ 3\sigma_v$
	$6mm$	C_{6v}	$E\ 2C_6\ 2C_3\ C_2\ 3\sigma_v\ 3\sigma_d$
	622	D_6	$E\ 2C_6\ 2C_3\ C_2\ 3C_2'\ 3C_2''$
	$6/mmm$	D_{6h}	$E\ 2C_6\ 2C_3\ C_2\ 3C_2'\ 3C_2''\ i\ 2S_3\ 2S_6\ \sigma_h\ 3\sigma_d\ 3\sigma_v$
cubic	23	T	$E\ 4C_3\ 4C_3^2\ 3C_2$
	$m3$	T_h	$E\ 4C_3\ 4C_3^2\ 3C_2\ i\ 8S_6\ 3\sigma_h$
	$\bar{4}3m$	T_d	$E\ 8C_3\ 3C_2\ 6\sigma_d\ 6S_4$
	432	O	$E\ 8C_3\ 3C_2\ 6C_2'\ 6C_4$
	$m3m$	O_h	$E\ 8C_3\ 3C_2\ 6C_2\ 6C_4\ i\ 8S_6\ 3\sigma_h\ 6\sigma_d\ 6S_4$

Figura 1-Classi con sola simmetria "assi" più piani "sigma"

System	Class International	Class Schönfließ	Symmetry elements
triclinic	1	C_1	E
	$\bar{1}$	C_i	$E\ i$
monoclinic	m	C_s	$E\ \sigma_h$
	2	C_2	$E\ C_2$
	$2/m$	C_{2h}	$E\ C_2\ i\ \sigma_h$
orthorhombic	$2mm$	C_{2v}	$E\ C_2\ \sigma_v'\ \sigma_v''$
	222	D_2	$E\ C_2\ C_2'\ C_2''$
	mmm	D_{2h}	$E\ C_2\ C_2'\ C_2''\ i\ \sigma_h\ \sigma_v'\ \sigma_v''$
tetragonal	4	C_4	$E\ 2C_4\ C_2$
	$\bar{4}$	S_4	$E\ 2S_4\ C_2$
	$4/m$	C_{4h}	$E\ 2C_4\ C_2\ i\ 2S_4\ \sigma_h$
	$4mm$	C_{4v}	$E\ 2C_4\ C_2\ 2\sigma_v'\ 2\sigma_d$
	$\bar{4}2m$	D_{2d}	$E\ C_2\ C_2'\ C_2''\ 2\sigma_d\ 2S_4$
	422	D_4	$E\ 2C_4\ C_2\ 2C_2'\ 2C_2''$
	$4/mmm$	D_{4h}	$E\ 2C_4\ C_2\ 2C_2'\ 2C_2''\ i\ 2S_4\ \sigma_h\ 2\sigma_v'\ 2\sigma_h$
trigonal (rhombohedral)	3	C_3	$E\ 2C_3$
	$\bar{3}$	S_6	$E\ 2C_3\ i\ 2S_6$
	$3m$	C_{3v}	$E\ 2C_3\ 3\sigma_v$
	32	D_3	$E\ 2C_3\ 3C_2$
	$\bar{3}m$	D_{3d}	$E\ 2C_3\ 3C_2\ i\ 2S_6\ 3\sigma_d$
hexagonal	$\bar{6}$	C_{3h}	$E\ 2C_3\ \sigma_h\ 2S_3$
	6	C_6	$E\ 2C_6\ 2C_3\ C_2$
	$6/m$	C_{6h}	$E\ 2C_6\ 2C_3\ C_2\ i\ 2S_3\ 2S_6\ \sigma_h$
	$\bar{6}m2$	D_{3h}	$E\ 2C_3\ 3C_2\ \sigma_h\ 2S_3\ 3\sigma_v$
	$6mm$	C_{6v}	$E\ 2C_6\ 2C_3\ C_2\ 3\sigma_v\ 3\sigma_d$
	622	D_6	$E\ 2C_6\ 2C_3\ C_2\ 3C_2'\ 3C_2''$
	$6/mmm$	D_{6h}	$E\ 2C_6\ 2C_3\ C_2\ 3C_2'\ 3C_2''\ i\ 2S_3\ 2S_6\ \sigma_h\ 3\sigma_d\ 3\sigma_v$
cubic	23	T	$E\ 4C_3\ 4C_3^2\ 3C_2$
	$m3$	T_h	$E\ 4C_3\ 4C_3^2\ 3C_2\ i\ 8S_6\ 3\sigma_h$
	$\bar{4}3m$	T_d	$E\ 8C_3\ 3C_2\ 6\sigma_d\ 6S_4$
	432	O	$E\ 8C_3\ 3C_2\ 6C_2'\ 6C_4$
	$m3m$	O_h	$E\ 8C_3\ 3C_2\ 6C_2\ 6C_4\ i\ 8S_6\ 3\sigma_h\ 6\sigma_d\ 6S_4$

Figura 2-Classi con simmetria completa: “assi” più piani “sigma” più inversione “i”

System	Class International	 Schönfließ	Symmetry elements
triclinic	1	C_1	E
	$\bar{1}$	C_i	$E\ i$
monoclinic	m	C_s	$E\ \sigma_h$
	2	C_2	$E\ C_2$
	$2/m$	C_{2h}	$E\ C_2\ i\ \sigma_h$
orthorhombic	$2mm$	C_{2v}	$E\ C_2\ \sigma_v'\ \sigma_v''$
	222	D_2	$E\ C_2\ C_2'\ C_2''$
	mmm	D_{2h}	$E\ C_2\ C_2'\ C_2''\ i\ \sigma_h\ \sigma_v'\ \sigma_v''$
tetragonal	4	C_4	$E\ 2C_4\ C_2$
	$\bar{4}$	S_4	$E\ 2S_4\ C_2$
	$4/m$	C_{4h}	$E\ 2C_4\ C_2\ i\ 2S_4\ \sigma_h$
	$4mm$	C_{4v}	$E\ 2C_4\ C_2\ 2\sigma_v'\ 2\sigma_d$
	$\bar{4}2m$	D_{2d}	$E\ C_2\ C_2'\ C_2''\ 2\sigma_d\ 2S_4$
	422	D_4	$E\ 2C_4\ C_2\ 2C_2'\ 2C_2''$
	$4/mmm$	D_{4h}	$E\ 2C_4\ C_2\ 2C_2'\ 2C_2''\ i\ 2S_4\ \sigma_h\ 2\sigma_v'\ 2\sigma_h$
trigonal (rhombohedral)	3	C_3	$E\ 2C_3$
	$\bar{3}$	S_6	$E\ 2C_3\ i\ 2S_6$
	$3m$	C_{3v}	$E\ 2C_3\ 3\sigma_v$
	32	D_3	$E\ 2C_3\ 3C_2$
	$3m$	D_{3d}	$E\ 2C_3\ 3C_2\ i\ 2S_6\ 3\sigma_d$
hexagonal	$\bar{6}$	C_{3h}	$E\ 2C_3\ \sigma_h\ 2S_3$
	6	C_6	$E\ 2C_6\ 2C_3\ C_2$
	$6/m$	C_{6h}	$E\ 2C_6\ 2C_3\ C_2\ i\ 2S_3\ 2S_6\ \sigma_h$
	$\bar{6}m2$	D_{3h}	$E\ 2C_3\ 3C_2\ \sigma_h\ 2S_3\ 3\sigma_v$
	$6mm$	C_{6v}	$E\ 2C_6\ 2C_3\ C_2\ 3\sigma_v\ 3\sigma_d$
	622	D_6	$E\ 2C_6\ 2C_3\ C_2\ 3C_2'\ 3C_2''$
	$6/mmm$	D_{6h}	$E\ 2C_6\ 2C_3\ C_2\ 3C_2'\ 3C_2''\ i\ 2S_3\ 2S_6\ \sigma_h\ 3\sigma_d\ 3\sigma_v$
cubic	23	T	$E\ 4C_3\ 4C_3^2\ 3C_2$
	$m3$	T_h	$E\ 4C_3\ 4C_3^2\ 3C_2\ i\ 8S_6\ 3\sigma_h$
	$\bar{4}3m$	T_d	$E\ 8C_3\ 3C_2\ 6\sigma_d\ 6S_4$
	432	O	$E\ 8C_3\ 3C_2\ 6C_2'\ 6C_4$
	$m3m$	O_h	$E\ 8C_3\ 3C_2\ 6C_2\ 6C_4\ i\ 8S_6\ 3\sigma_h\ 6\sigma_d\ 6S_4$

Figura 3-Classi con sola simmetria "assi": 2, 3, 4, singoli o in coppia.

System	Class International	 Schönfließ	Symmetry elements
triclinic	1	C_1	E
	$\bar{1}$	C_i	$E\ i$
monoclinic	m	C_s	$E\ \sigma_h$
	2	C_2	$E\ C_2$
	$2/m$	C_{2h}	$E\ C_2\ i\ \sigma_h$
orthorhombic	$2mm$	C_{2v}	$E\ C_2\ \sigma_v'\ \sigma_v''$
	222	D_2	$E\ C_2\ C_2'\ C_2''$
	mmm	D_{2h}	$E\ C_2\ C_2'\ C_2''\ i\ \sigma_h\ \sigma_v'\ \sigma_v''$
tetragonal	4	C_4	$E\ 2C_4\ C_2$
	$\bar{4}$	S_4	$E\ 2S_4\ C_2$
	$4/m$	C_{4h}	$E\ 2C_4\ C_2\ i\ 2S_4\ \sigma_h$
	$4mm$	C_{4v}	$E\ 2C_4\ C_2\ 2\sigma_v'\ 2\sigma_d$
	$\bar{4}2m$	D_{2d}	$E\ C_2\ C_2'\ C_2''\ 2\sigma_d\ 2S_4$
	422	D_4	$E\ 2C_4\ C_2\ 2C_2'\ 2C_2''$
	$4/mmm$	D_{4h}	$E\ 2C_4\ C_2\ 2C_2'\ 2C_2''\ i\ 2S_4\ \sigma_h\ 2\sigma_v'\ 2\sigma_h$
trigonal (rhombohedral)	3	C_3	$E\ 2C_3$
	$\bar{3}$	S_6	$E\ 2C_3\ i\ 2S_6$
	$3m$	C_{3v}	$E\ 2C_3\ 3\sigma_v$
	32	D_3	$E\ 2C_3\ 3C_2$
	$\bar{3}m$	D_{3d}	$E\ 2C_3\ 3C_2\ i\ 2S_6\ 3\sigma_d$
hexagonal	$\bar{6}$	C_{3h}	$E\ 2C_3\ \sigma_h\ 2S_3$
	6	C_6	$E\ 2C_6\ 2C_3\ C_2$
	$6/m$	C_{6h}	$E\ 2C_6\ 2C_3\ C_2\ i\ 2S_3\ 2S_6\ \sigma_h$
	$\bar{6}m2$	D_{3h}	$E\ 2C_3\ 3C_2\ \sigma_h\ 2S_3\ 3\sigma_v$
	$6mm$	C_{6v}	$E\ 2C_6\ 2C_3\ C_2\ 3\sigma_v\ 3\sigma_d$
	622	D_6	$E\ 2C_6\ 2C_3\ C_2\ 3C_2'\ 3C_2''$
	$6/mmm$	D_{6h}	$E\ 2C_6\ 2C_3\ C_2\ 3C_2'\ 3C_2''\ i\ 2S_3\ 2S_6\ \sigma_h\ 3\sigma_d\ 3\sigma_v$
cubic	23	T	$E\ 4C_3\ 4C_3^2\ 3C_2$
	$m3$	T_h	$E\ 4C_3\ 4C_3^2\ 3C_2\ i\ 8S_6\ 3\sigma_h$
	$\bar{4}3m$	T_d	$E\ 8C_3\ 3C_2\ 6\sigma_d\ 6S_4$
	432	O	$E\ 8C_3\ 3C_2\ 6C_2'\ 6C_4$
	$m3m$	O_h	$E\ 8C_3\ 3C_2\ 6C_2\ 6C_4\ i\ 8S_6\ 3\sigma_h\ 6\sigma_d\ 6S_4$

Figura 4-Classi con sola simmetria “assi” più centrosimmetria o quasi-centrosimmetria

2.2-Sintesi

Abbiamo dunque raggruppamenti di 8 classi che già sono visibili nella cristallografia classica.
Abbiamo quelli dove appare 0c, oppure m0, oppure mc, oppure quelle che ho chiamato le classi "soli assi", 00.
In tutto sono 4 casi, classificabili con 2 bit:
00, 0c, m0, mc.

Voglio ora mettere l'accento sulle 8 classi "soli assi".
Anticipo: 8 significa 3 bit.
What's meaning?
Si può osservare, come ho già osservato, che le rotazioni effettivamente fondamentali, fra quelle lecite, sono 2, 3, 4 (180°. 120°, 90°). Infatti la rotazione 6 si ottiene ed è la combinazione 2+3.
Si può poi osservare, come ho già osservato, che le rotazioni lecite 2, 3, 4 prese singolarmente o in coppia, formano non più di 8 combinazioni che rammentate graficamente sono le seguenti (Figura 5, prima colonna).

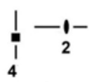
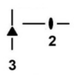
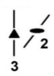
Combinazioni	Significato	Classi	3 bit
No rotational symmetry	Nessun asse	monohedron no symmetry 1 C1 00000	000
	Asse 2 da solo	sphenoid 2 C2 00200	002
	Asse 4 da solo	tetragonal pyramid 4 C4 04000	040
	Asse 4 + asse 2 a 90°	tetragonal trapezohedron 422 D4 04200	042
	Asse 3 da solo	trigonal pyramid 3 C3 30000	300
	Asse 3 + asse 2 a 90°	trigonal trapezohedron 32 D3 30200	302
	Assi 3+2 (asse 6)	hexagonal pyramid 6 C6 34000	340
	Assi 3+2 sghembi (cubo)	tetartoid 23 T 34200	342

Figura 5- Otto classi con sola simmetria "assi" identificate a 3 bit

In effetti queste combinazioni con 2, 3, 4 sono presenti nelle classi cristalline, il loro significato essendo rammentato in Figura 5, seconda colonna.
Le relative classi compaiono nella terza colonna e sono, appunto, le classi con le sole simmetrie assiali fondamentali

Quello che si può ora osservare è che queste 8 classi
1 essendo otto, si prestano come ho già detto ad essere enumerate con 3 bit ovvero invitano ad essere enumerate con 3 bit, nelle combinazioni 000, 001, 010, 011 eccetera;
2 tre bit sono già naturalmente presenti con le "qualità" assiali 2, 3, 4;
3 identificando 2, 3, 4 come bit, da 2 less significant bit a 3 most significant bit, nasce la sequenza 000, 002, 040, 042, 300 eccetera (Figura 5, quarta colonna), che si presta in modo naturale ad individuare le precedenti classi;
4 appare così anche il significato della presenza del bit 4. Esso è o la rotazione 4 medesima (in 040 e 042), oppure assi 2 e 3 rispettivamente paralleli (340) o sghembi (342, simmetria del cubo).

Da questo, in conclusione, segue la classificazione delle 32 classi con 5 bit. Ci sono 3 bit (i bit 2 3 e 4) per rappresentare otto gruppi con otto classi di soli assi. Poi ci sono ancora 2 bit (m e c) per rappresentare l'evoluzione delle simmetrie in ciscun gruppo.
Totale: 4x8=32.
Specificamente, come può realizzarsi tutto questo? Mossa essenziale è spostare 432 da cubica a tetragonale.
Secondo le definizioni della cristallografia i cristalli tetragonali hanno (devono avere) lati di base a=b ma l'altezza c deve essere maggiore o minore di a=b. Se a=b=c il cristallo appartiene al sistema cubico (Figura 6).
Decido di ignorare questa definizione e ipotizzo che anche il quinto cristallo si possa pure lui considerare tetragonale.

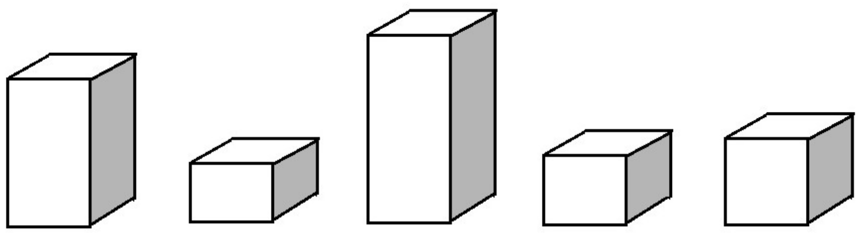


Figura 6- Cristalli tetragonali e (l'ultimo) cubico

Così facendo, le classi cristalline risultano divise in due gruppi da 16.
Inoltre abbiamo un gruppo di 8 classi (2 nel sistema triclino + 3 nel sistema monoclino + 3 nel sistema ortorombico).
Con poche altre considerazioni si arriva in modo abbastanza naturale a una numerazione binaria.

3-Discussione

Questo paragrafo contiene alcune considerazioni, che si possono leggere oppure saltare direttamente al paragrafo successivo.
Ciò che manca in tutti questi bla bla è un fatto estremamente sintetico che si esprime in una riga; manca una semplice dimostrazione matematica, la corrispondenza biunivoca fra la classificazione a 5 bit e quella per esempio di David Hestenes [5].
Dico Hestenes ma potrei indifferentemente citare la classificazione di Coxeter, o Hermann Mauguin, o Schoenflies o eccetera, perché tutte queste sono già in corrispondenza biunivoca tra di loro. Io questa semplice corrispondenza biunivoca posso dire di averla trovata, o quantomeno proposta, solamente in modo empirico.

E' senz'altro notevole, sarebbe notevole, se tutte e sole le classi cristalline potessero essere trovate con questa semplice regola: una qualunque delle 8 simmetrie assiali di base, seguita da una qualunque combinazione delle simmetrie 00, 0c, m0, mc.
Questo fatto è misterioso. Intuisco che esso deve basarsi su più o meno nascoste simmetrie.
Già questo l'avevo intuito quando pubblicai alcune tra le mie prime elucubrazioni, parlavo di "hidden mathematical symmetries in the 32 crystal point groups" [9].

Questa è la Natura.
Va detto però a questo proposito che immaginare un semplice modo di procedere della Natura per successive simmetrie (provo con nessuna simmetria, 00, poi 0c, m0. mc, poi inserisco una simmetria 2, 200, 20c, 2m0, 2mc, eccetera) è molto suggestivo ma è falso.
Credo che sia falso.
La Natura presumibilmente realizza tutti gli assemblamenti. Tutti. Quindi per esempio due oggetti con simmetria assiale 8 possono essere collegati assieme, ma con un oggetto a simmetria assiale 8 non si realizza nessuna entità ripetitiva, uguale a sé stessa, senza buchi o sovrapposizioni (crystallogrphic restriction theorem). Solo gli oggetti con simmetria assiale 1, 2, 3, 4, 6 lo possono fare. Ma questo la Natura non lo sa, perché non ha letto il relativo libro.
Semplicemente un oggetto a simmetria assiale 8 non può crescere (ripetitivo e uguale a sé stesso).
Non ce la fa a diventare grande.
Invece da un oggetto elementare con simmetrie per esempio 3 + 2 perpendicolari può nascere una entità ripetitiva, uguale a sé stessa, senza buchi o sovrapposizioni: nella fattispecie, il quarzo, [10].
Può diventare grande. Lo possiamo vedere.
Si potrebbe anche dire, ma così è, che mangia, cresce, e si riproduce.
Mangia, se ha cibo adatto a disposizione (silicio e ossigeno).
Cresce, se ha temperatura pressione etc adeguati (l'ambiente adatto).
Si riproduce, perché da piccoli semi ne possono nascere altri uguali.
Così pure da un oggetto elementare con simmetria assiale 3 e simmetria destra/sinistra m può nascere una entità ripetitiva, uguale a sé stessa, senza buchi o sovrapposizioni. Esempio, la tormalina elbaite, [11].
Può nascere mangiare diventare grande e riprodursi.
Se ha il cibo adatto: Na, Li, Al, Si, Bo, O, H.
Ognuno ha i suoi gusti.

4-Schede

Seguo il nuovo ordinamento, completo, 5 bit symbols, e short, abbreviato (Figura 7). Accanto è riportata la denominazione delle classi così ordinate, usando i simboli di Hermann Mauguin. E in più l'ordine (group order).

5 bit symbols	Short	Hermann Mauguin	Order
00000	1	1	1
0000c	c	1_	2
000m0	m	m	2
000mc	mc	2/m	4
00200	2	2	2
0020c	2c	222	4
002m0	2m	mm2	4
002mc	2mc	mmm	8
04000	4	4	4
0400c	4c	4_	4
040m0	4m	4mm	8
040mc	4mc	4/m	8
04200	42	422	8
0420c	42c	432	24
042m0	42m	4_2m	8
042mc	42mc	4/mmm	16
30000	3	3	3
3000c	3c	3_	6
300m0	3m	3m	6
300mc	3mc	3_2/m	12
30200	32	32	6
3020c	32c	622	12
302m0	32m	6_m2	12
302mc	32mc	6/mmm	24
34000	6	6	6
3400c	6c	6_	6
340m0	6m	6mm	12
340mc	6mc	6/m	12
34200	23	23	12
3420c	23c	m3	24
342m0	23m	4_3m	24
342mc	23mc	m3m	48

Figura 7- nuovo ordinamento, notazione a 5 bit e short, abbreviata

I quadri di Figg. 8 e 9 sono riassuntivi, poi li espando con schede, una per ciascuna classe. I nomi delle 32 classi sono presi da Webmineral [12].

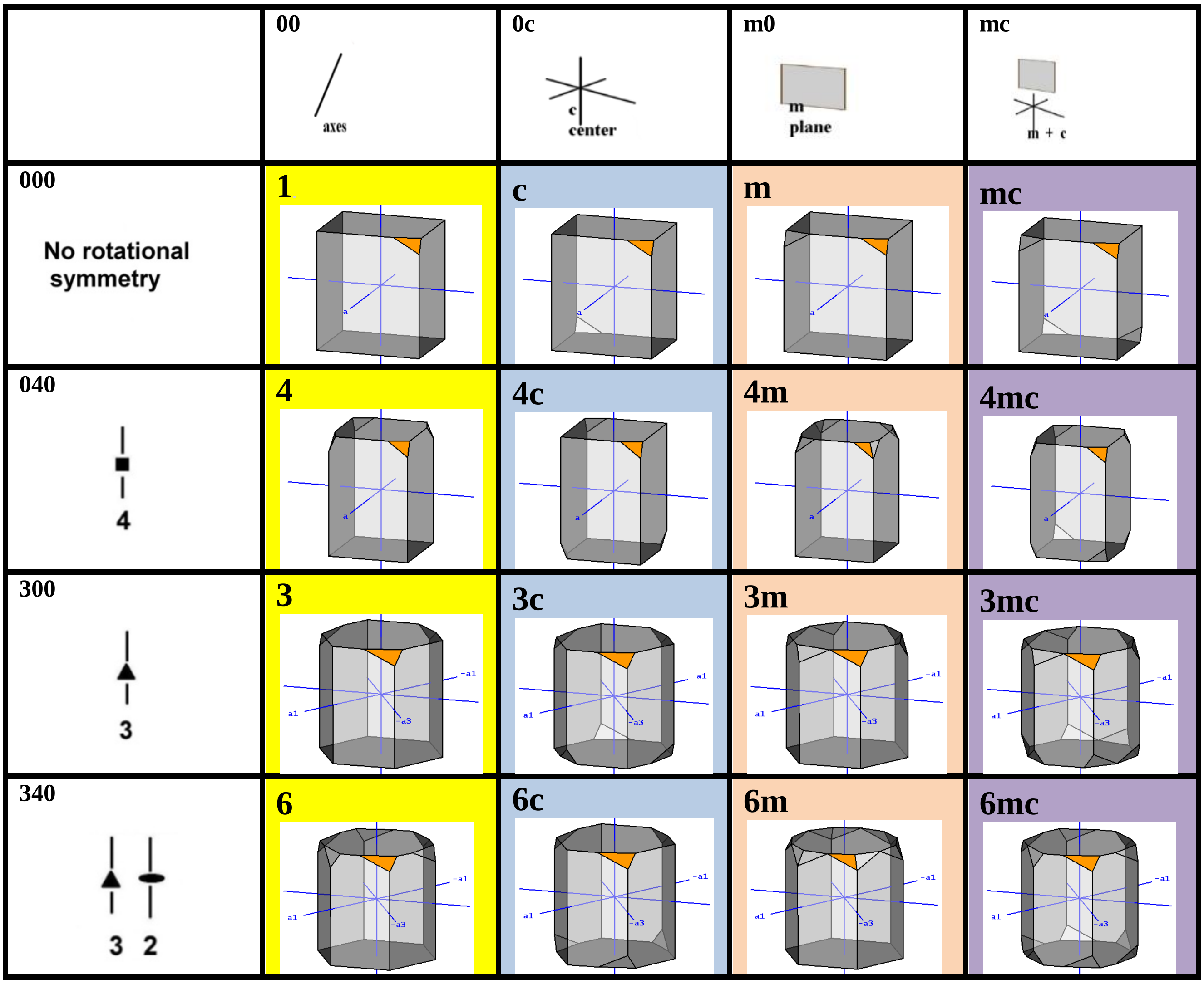


Figura 8- Primo quadro riasssuntivo

Cito da Wikipedia: Schoenflies notation.
In Schoenflies notation, point groups are denoted by a letter symbol with a subscript. The symbols used in crystallography mean the following:
Cn (for cyclic) indicates that the group has an n-fold rotation axis. Cnh is Cn with the addition of a mirror (reflection) plane perpendicular to the axis of rotation. Cnv is Cn with the addition of n mirror planes parallel to the axis of rotation.
S2n (for Spiegel, German for mirror) denotes a group with only a 2n-fold rotation-reflection axis.
(omissis)

Questi in Figura 8 li posso considerare una generalizzazione o semplificazione degli Schoenflies “cyclic”, semplicemente con “n-fold rotation axis”, con l’aggiunta delle simmetrie 00, 0c, mo, mc.

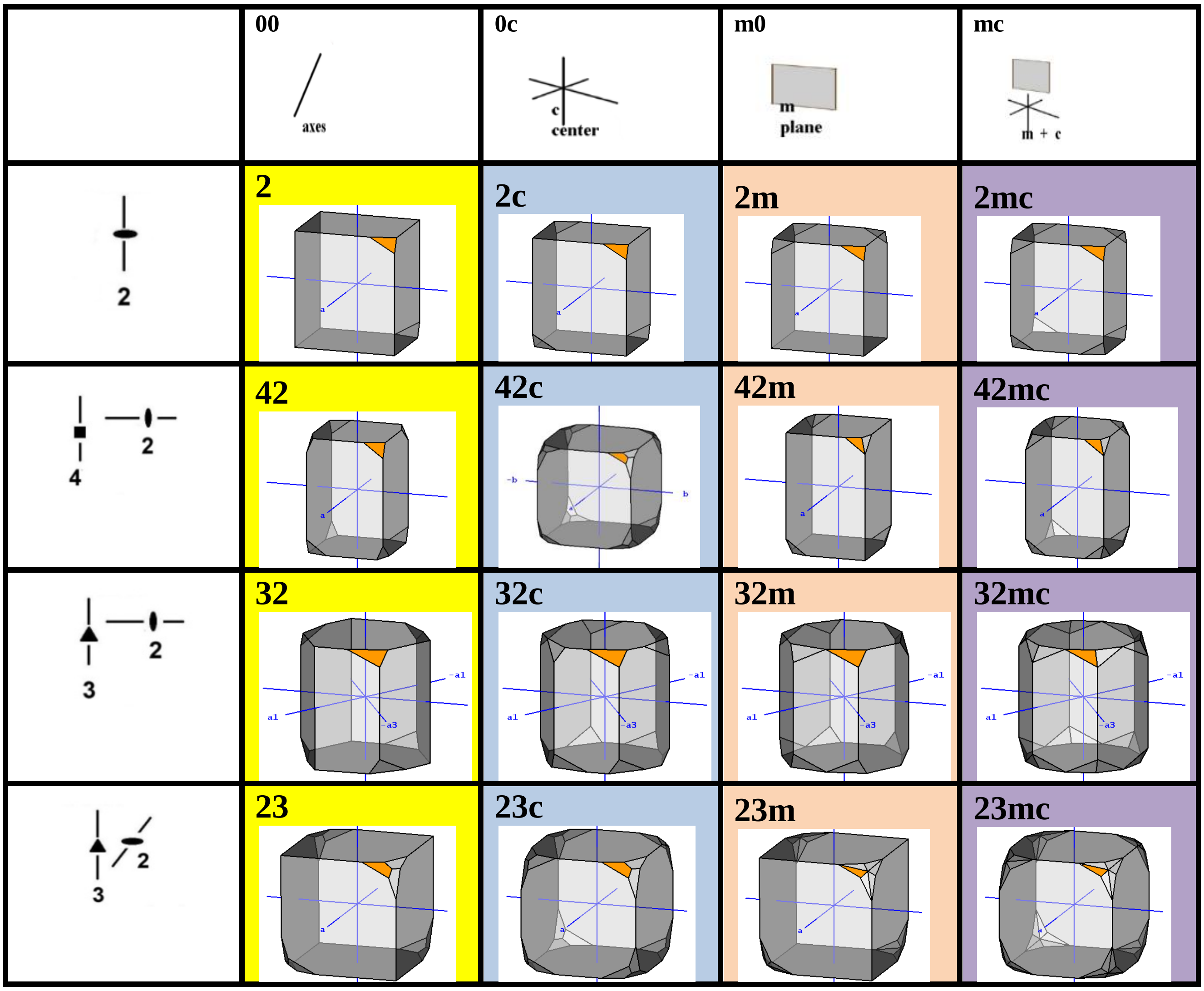


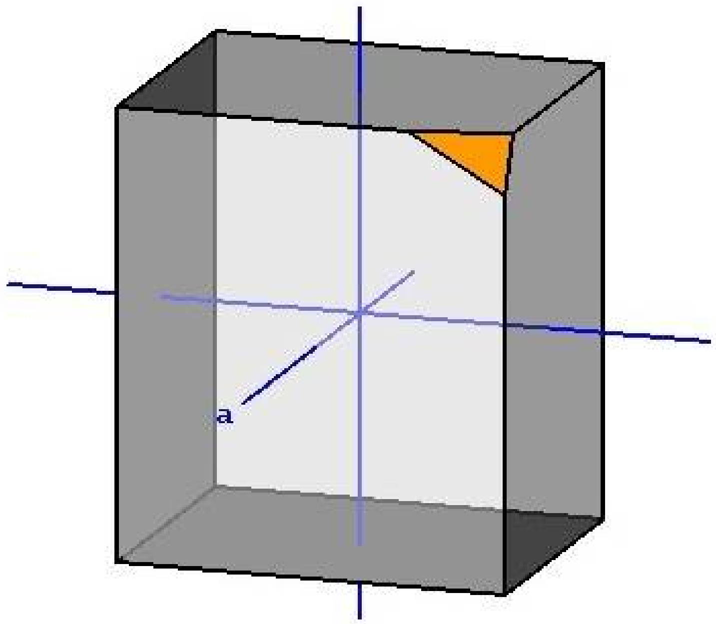
Figura 9- Secondo quadro riassuntivo

Da Wikipedia. Schoenflies notation.
(omissis)
Dn (for dihedral, or two-sided) indicates that the group has an n-fold rotation axis plus n twofold axes perpendicular to that axis. Dnh has, in addition, a mirror plane perpendicular to the n-fold axis. Dnd has, in addition to the elements of Dn, mirror planes parallel to the n-fold axis.
The letter T (for tetrahedron) indicates that the group has the symmetry of a tetrahedron. Td includes improper rotation operations, T excludes improper rotation operations, and Th is T with the addition of an inversion.
The letter O (for octahedron) indicates that the group has the symmetry of an octahedron (or cube), with (Oh) or without (O) improper operations (those that change handedness).

Questi 4x4 in Figura 9 contengono gran parte dei "dihedral, two-sided"di Schoenflies, con assi 2 che si aggiungono orizzontalmente alle simmetrie rotazionali 4, 3, e 23 già presenti. La prima riga per omogeneità con le altre si può pensare come asse 2 che si aggiuge orizzontalmente alla simmetria rotazionale 1 (360°) già presente.

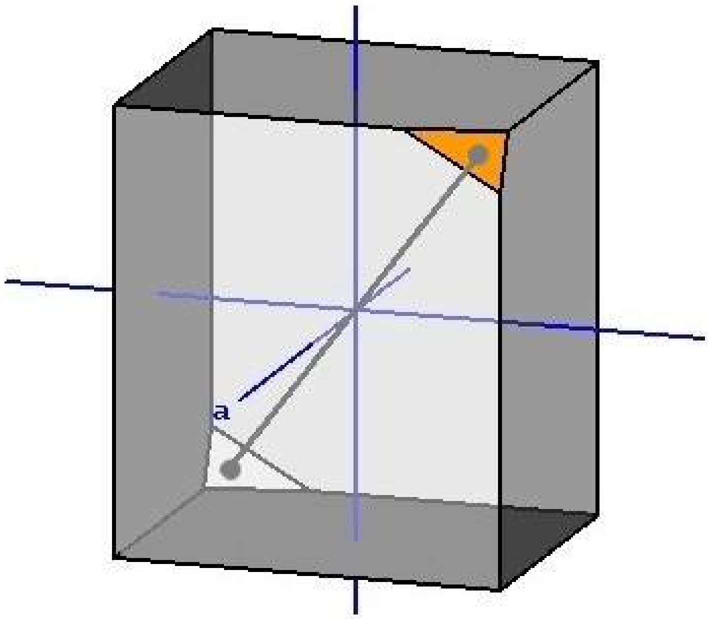
Schede

1				
Name	**5 bit symbols**	**Short**	**HM Symbol**	**Class Order**
Triclinic Pedial	**00000**	**1**	**1**	**1**



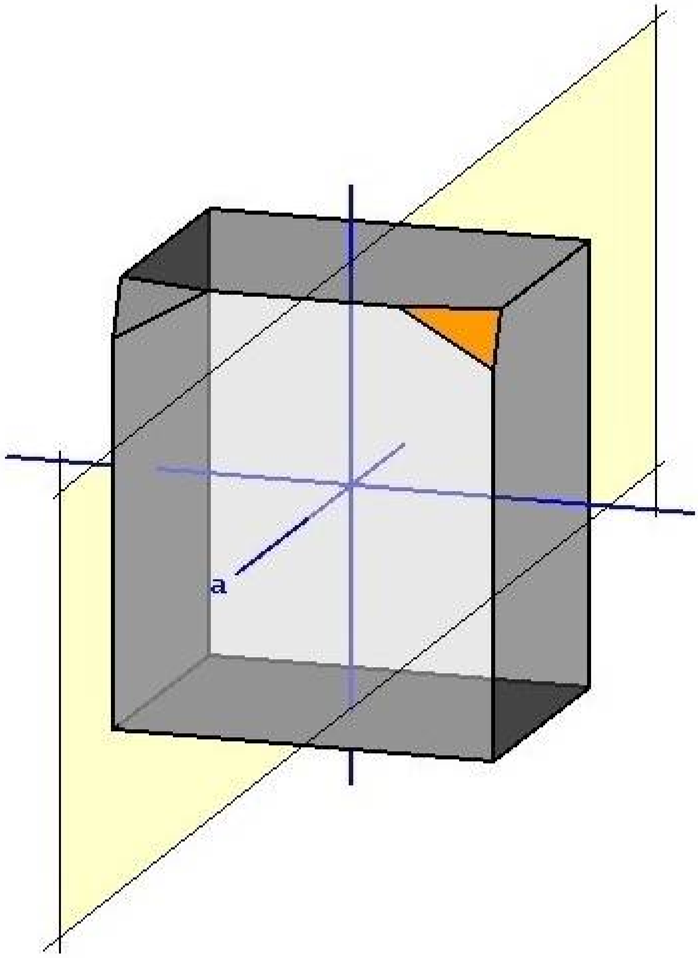
In questa classe c'è poco da dire: essa non ha nessuna simmetria.
Madre Natura ad una faccia cristallina non associa nessuna simmetria.
Non fa niente.
Questa operazione corrisponde alla sequenza 00000. Nessuna simmetria di rotazione, anzi nessuna simmetria in assoluto.
Graficamente le proprietà di simmetria della classe sono rappresentate dalla faccetta arancione sola ed isolata, in figura.

c				
Name	**5 bit symbols**	**Short**	**HM Symbol**	**Class Order**
Triclinic Pinacoidal	**0000c**	**c**	**1_**	**2**



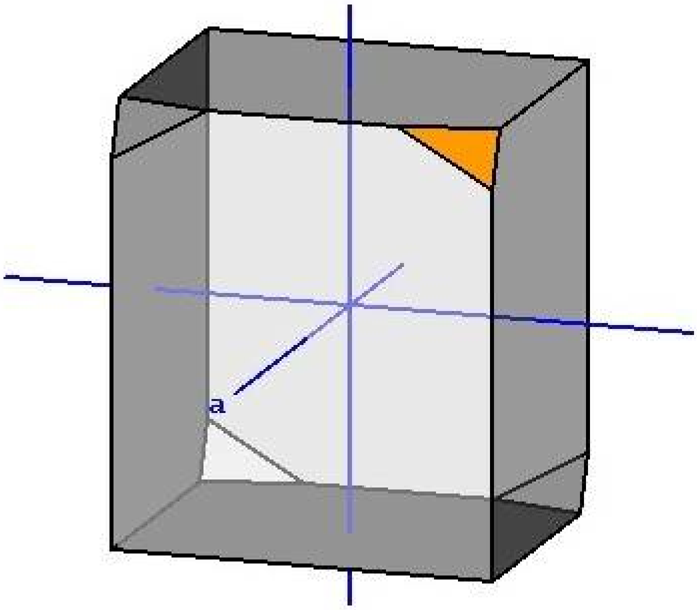
In questa classe ad ogni punto o faccia ne è associata un'altra simmetrica rispetto al centro di simmetria.
Questa operazione corrisponde alla sequenza 0000c.
Nella figura la faccia arancione è mostrata con la sua centrosimmetrica, unite da una linea grigia

m				
Name	5 bit symbols	Short	HM Symbol	Class Order
Monoclinic Domatic	000m0	m	m	2



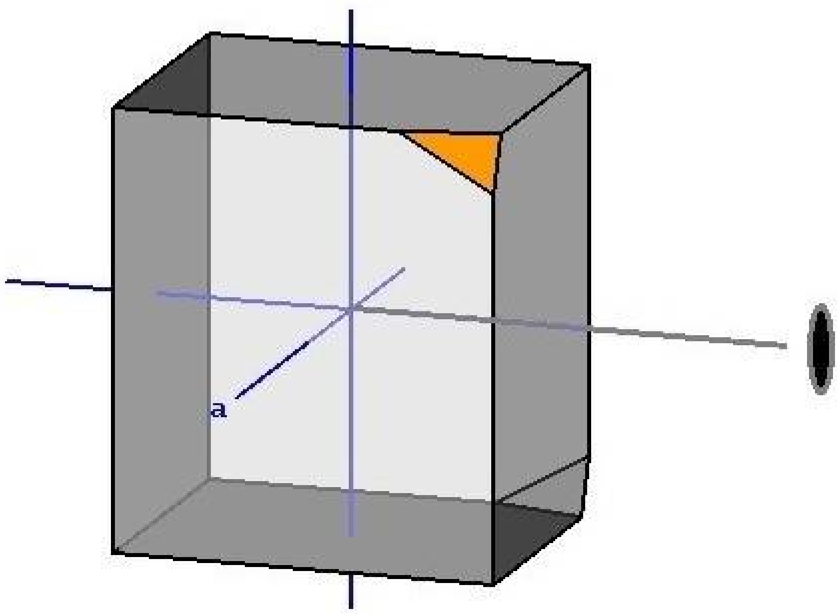
Qui ad ogni faccia ne è associata un'altra simmetrica rispetto a un piano di simmetria. Questa operazione corrisponde alla sequenza 000m0.
Smorf genera automaticamente per questa classe, associata ad una qualsiasi faccia (qui la faccina arancione), la sua faccia simmetrica.

mc				
Name	**5 bit symbols**	**Short**	**HM Symbol**	**Class Order**
Monoclinic Prismatic	**000mc**	**mc**	**2/m**	**4**

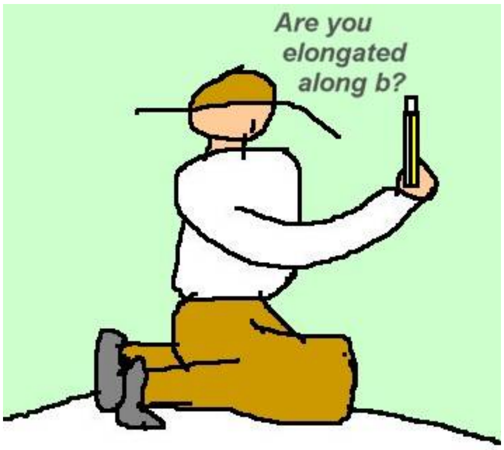


Nella classe 2/m Madre Natura crea un oggetto formato in modo da possedere sia la proprietà di simmetria rispetto a un centro c che la proprietà di simmetria rispetto a un piano m.
Questa operazione corrisponde alla sequenza 000mc.
Dalle simmetrie m e c nasce obbligatoriamente un asse 2 perpendicolare a m.

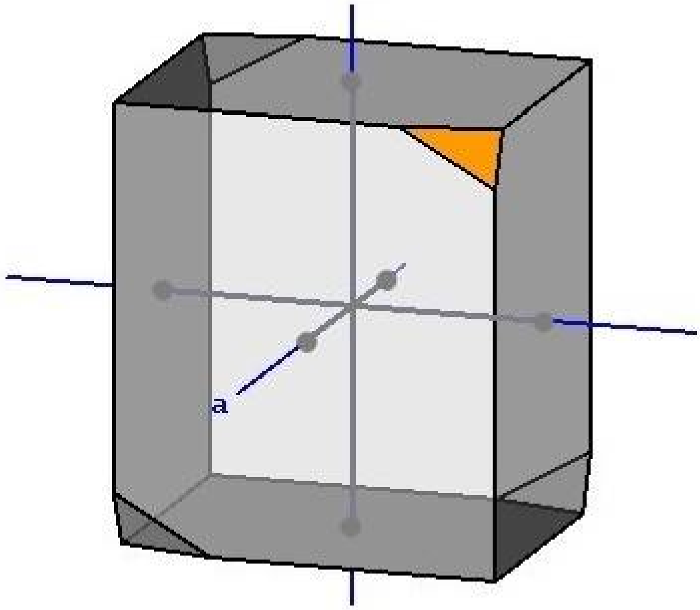
2				
Name	5 bit symbols	Short	HM Symbol	Class Order
Monoclinic Sphenoidal	00200	2	2	2



Questa classe possiede la simmetria 2 e nessuna altra simmetria. Nel disegnarla, Smorf assume convenzionalmente y come asse di simmetria, così come appare in figura. Questa operazione corrisponde alla sequenza 00200.

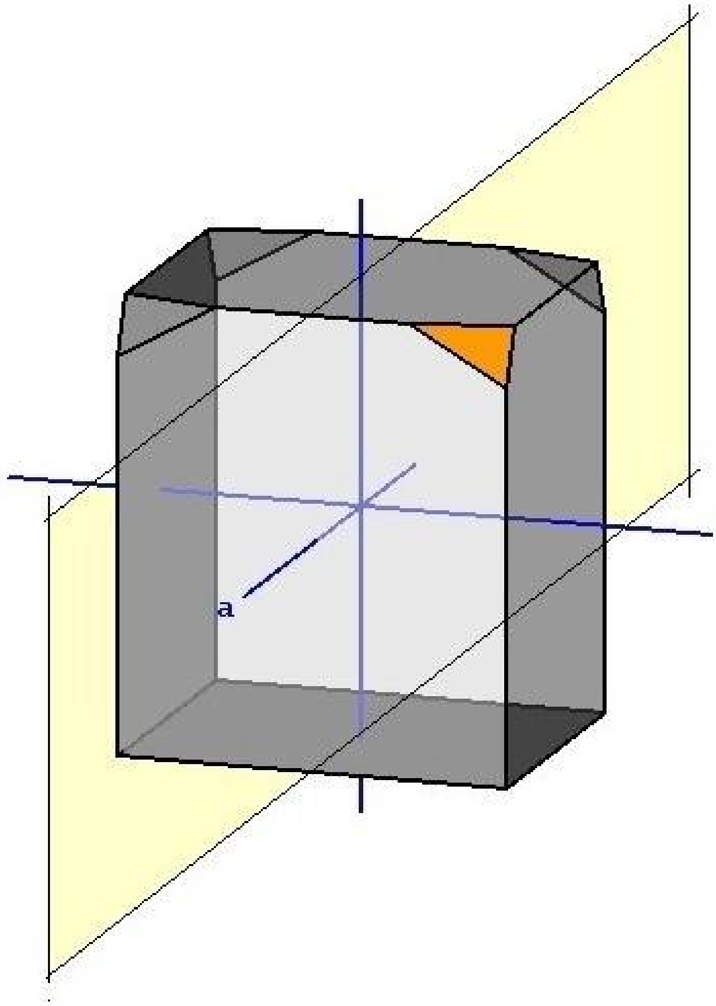


2c				
Name	**5 bit symbols**	**Short**	**HM Symbol**	**Class Order**
Orthorhombic Disphenoidal	**0020c**	**2c**	**222**	**4**



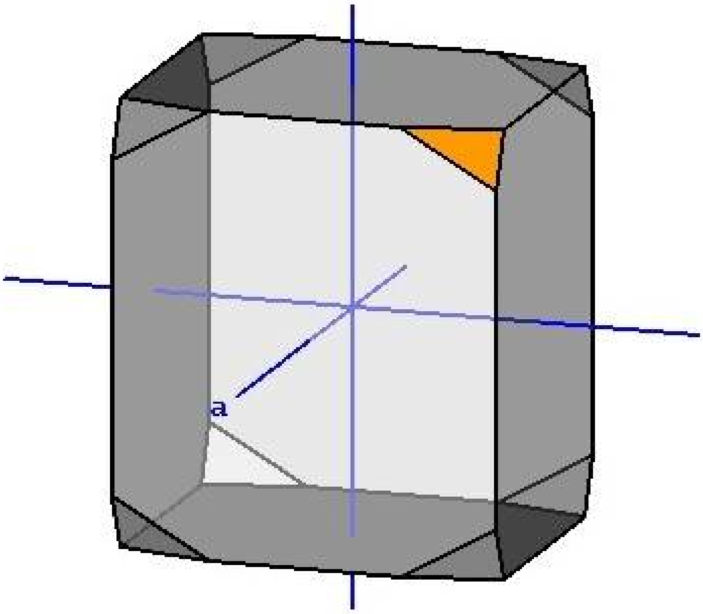
A 2 si aggiunge la simmetria c:
un oggetto formato in modo da possedere sia la proprietà 2 che la proprietà c.
Qui Madre Natura trova una difficoltà, ossia un oggetto che avesse sia la proprietà 2 che la proprietà di simmetria c possederebbe anche la simmetria m (questo perché, come insegna la cristallografia, 2 + c comporta un piano di simmetria m perpendicolare a 2). E poi coinciderebbe con 2/m che c'è già. Non è quello che si propone Madre Natura, che vuole una disposizione di oggetti con solamente simmetria 2 e simmetria c, e nessun'altra.
Come si fa?
Non c'è nessun'altra possibilità per rendere la disposizione di oggetti massimamente simmetrica rispetto a un centro che non sistemare, in modo "centrosimmetrico", gli assi di simmetria 2, riproponendoli per l'appunto simmetricamente.
Per simmetria si genera un totale di quattro punti. I punti non sono centrosimmetrici, ma una qualsiasi coppia ha come corrispondente dall'altra parte del centro un'altra coppia. Questo è indicato in figura da linee grigie e pallini grigi.
Chiamo questa un quasi-centrosimmetria.
La classe corrisponde alla sequenza 00200.

2m				
Name	5 bit symbols	Short	HM Symbol	Class Order
Orthorhombic Pyramidal	002m0	2m	mm2	4



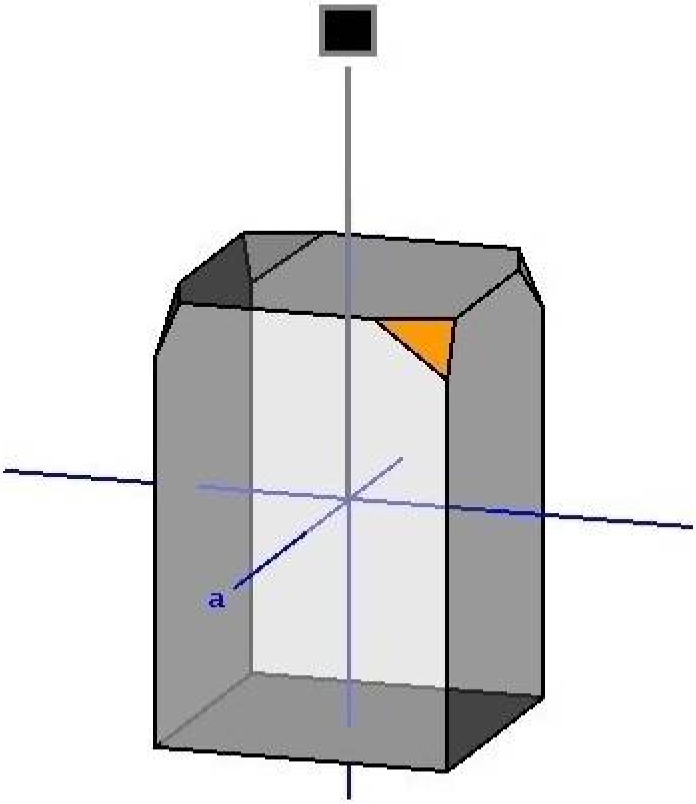
In questa classe ad un asse di simmetria 2, qui disegnato in verticale, si aggiunge un piano di simmetria m parallelo all'asse.
La sequenza di bit corrispondente è 002m0.
Si noti che non ci sono altri modi per realizzare questa sequenza: il piano deve essere parallelo all'asse (qui verticale) e posto che sia verticale può essere qualunque.
E' questo un ottimo esempio di come la sequenza a 5 bit non solo identifica univocamente la classe, come nelle etichette di uno schedario: essa individua anche tutte le proprietà di simmetria dela classe.

2mc				
Name	**5 bit symbols**	**Short**	**HM Symbol**	**Class Order**
Orthorhombic Dipyramidal	**002mc**	**2mc**	**mmm**	**8**



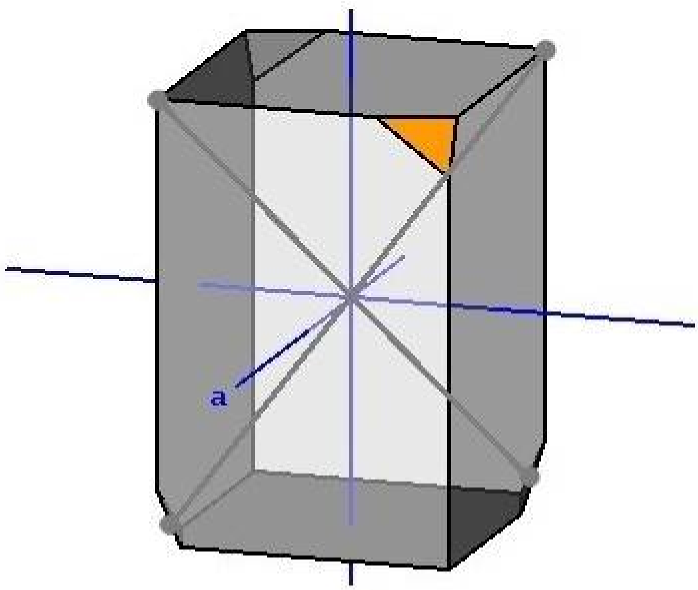
Questa classe contiene tutte le simmetrie del gruppo, sia 2, che m e c.
Non indico le simmetrie, che sono abbastanza evidenti dalla figura.
La sequenza di bit corrispondente è 002m0c

4				
Name	**5 bit symbols**	**Short**	**HM Symbol**	**Class Order**
Tetragonal Disphenoidal	**04000**	**4**	**4**	**4**



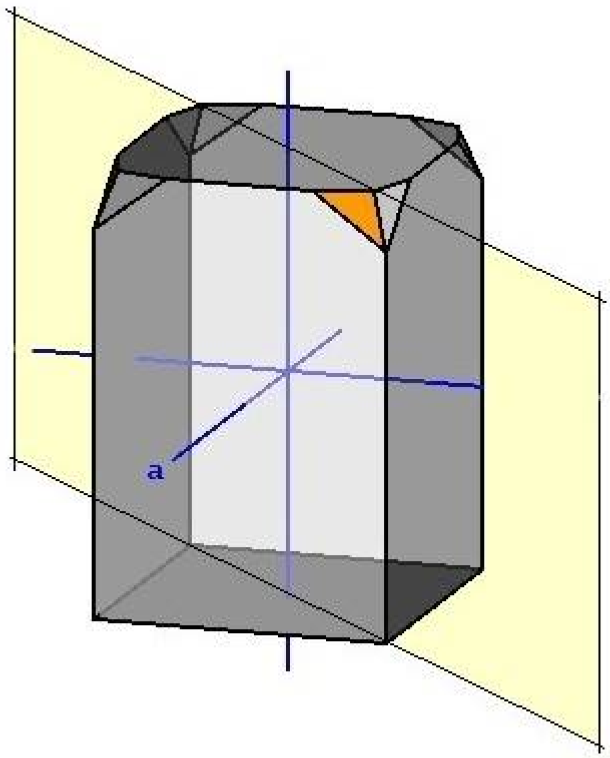
Questa è la classe con sole simmetrie assiali capostipite del gruppo 04000 0400c 040m0 040mc.
Nella figura è indicato l'asse di rotazione quaternario.

4c				
Name	5 bit symbols	Short	HM Symbol	Class Order
Tetragonal Pyramidal	0400c	4c	4_	4



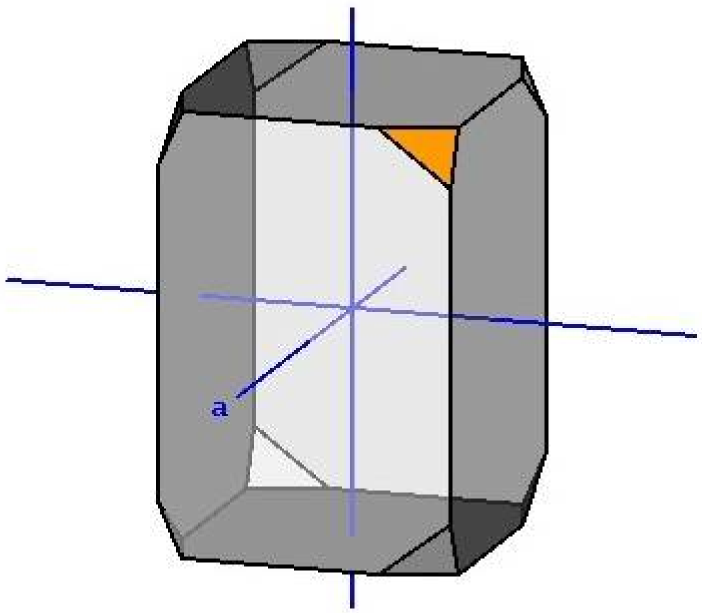
La classe non ha la proprietà 4, e non ha nemmeno la proprietà c. Tuttavia per formare l'asse improprio 4_ intervengono le proprietà 4 e c.
Come mostra la figura le faccette di sotto hanno come centrosimmetriche non quelle di sopra, ma quelle di sopra ruotate con un asse 4 (asse improprio 4_).
Rotazione 4 più inversione.

4m				
Name	5 bit symbols	Short	HM Symbol	Class Order
Tetragonal Ditetragonal pyramidal	040m0	4m	4mm	8



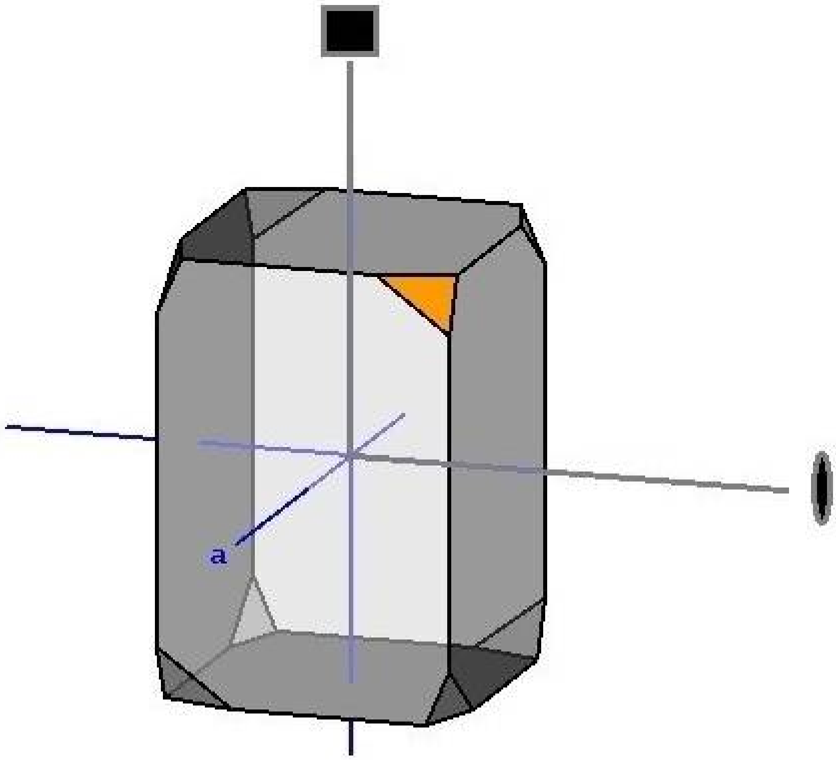
Qui all'asse 4 si aggiunge la simmetria m, che non può consistere in un piano orizzontale altrimenti la sequenza non sarebbe soltanto 040m0.
Quindi necessariamente piani verticali.

4mc				
Name	5 bit symbols	Short	HM Symbol	Class Order
Tetragonal Dipyramidal	040mc	4mc	4/m	8



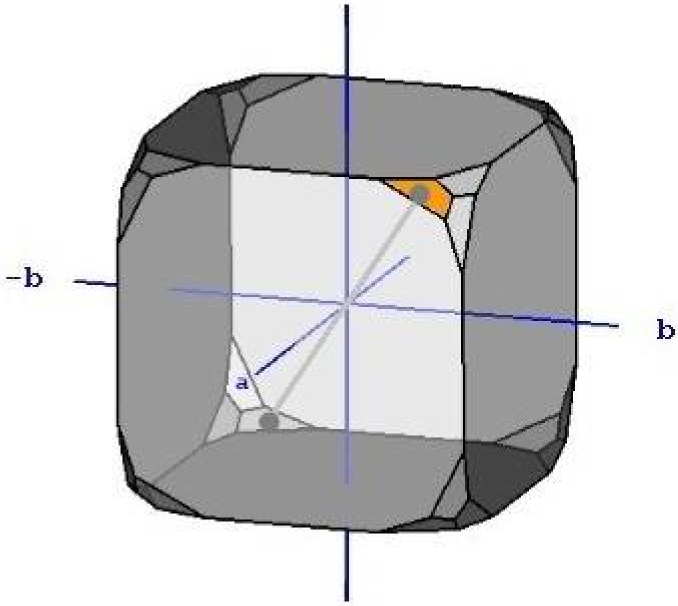
Questa classe contiene tutte le simmetrie 4, m e c, con la simmetria m che non può consistere in piani verticali altrimenti la sequenza per la presenza del centro sarebbe 042mc.
Ancora una volta non mostro nella figura piani e centrosimmetrie, per non imbrattare il disegno.

42				
Name	**5 bit symbols**	**Short**	**HM Symbol**	**Class Order**
Tetragonal Trapezohedral	**04200**	**42**	**422**	**8**



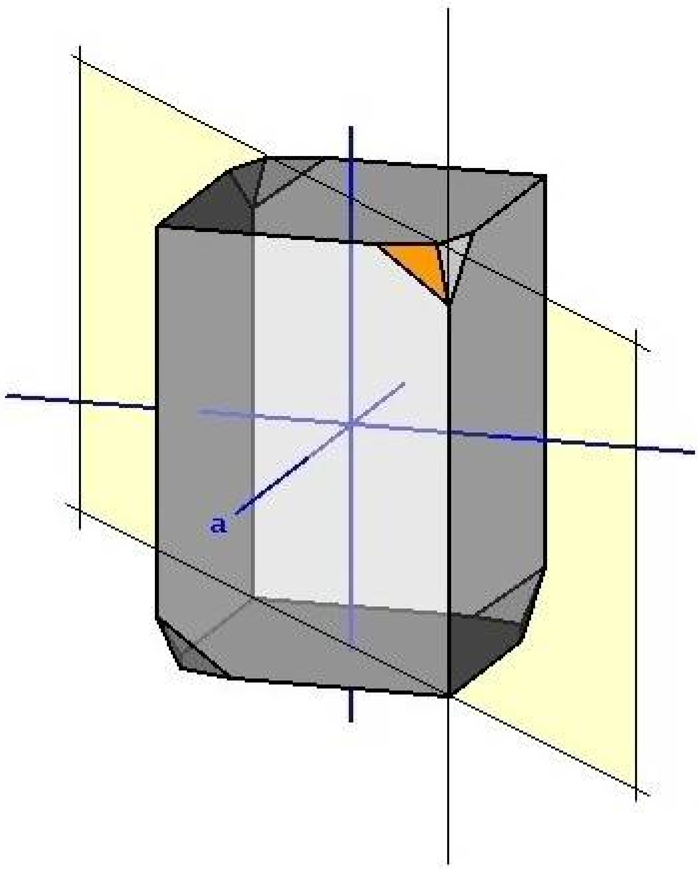
Simmetrie rotazionali 4 in verticale e 2 in orizzontale, come indicato in figura.

42c				
Name	5 bit symbols	Short	HM Symbol	Class Order
Isometric Gyroidal	0420c	42c	432	24



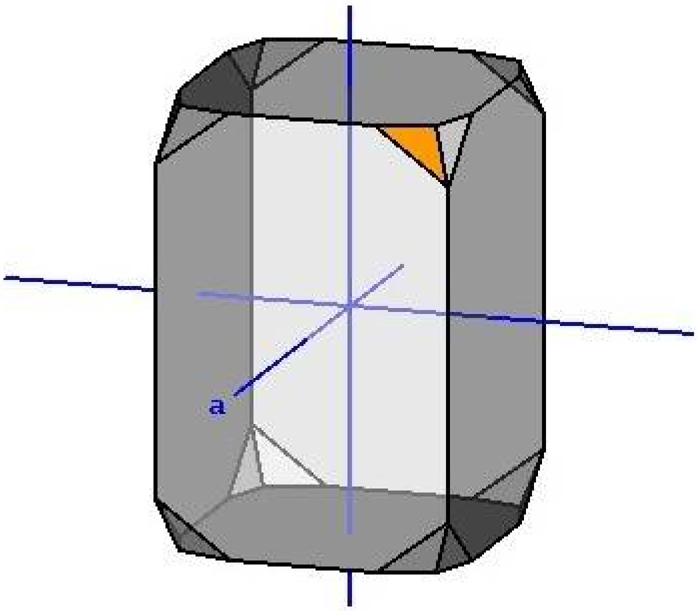
Asse 4 verticalmente e 4 orizzontalmente (quindi anche asse 2). Seguono automaticamente tutte le simmetrie della classe giroidale. La classe non è centrosimmetrica ma ogni faccetta ha la corrispondente centrosimmetrica dall'altra parte
La sequenza rappresentativa è 0420c.

42m				
Name	**5 bit symbols**	**Short**	**HM Symbol**	**Class Order**
Tetragonal Scalenohedral	**042m0**	**42m**	**4_2m**	**8**



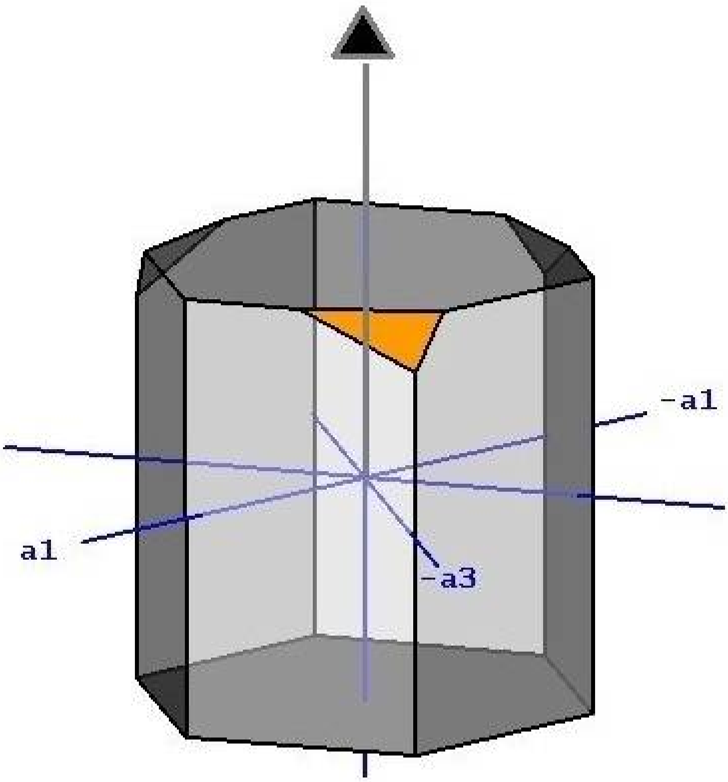
Questa classe è l'unica che possa corrispondere alla sequenza 042m0. Infatti qualsiasi altra combinazione con l'asse 4 e piani avrebbe inevitabilmente il centro e coinciderebbe con la classe oloedrica 042mc. Per evitare questo non resta che far intervenire l'asse 4 come asse improprio 4_.

42mc				
Name	**5 bit symbols**	**Short**	**HM Symbol**	**Class Order**
Tetragonal Ditetragonal dipyramidal	**042mc**	**42mc**	**4/mmm**	**16**



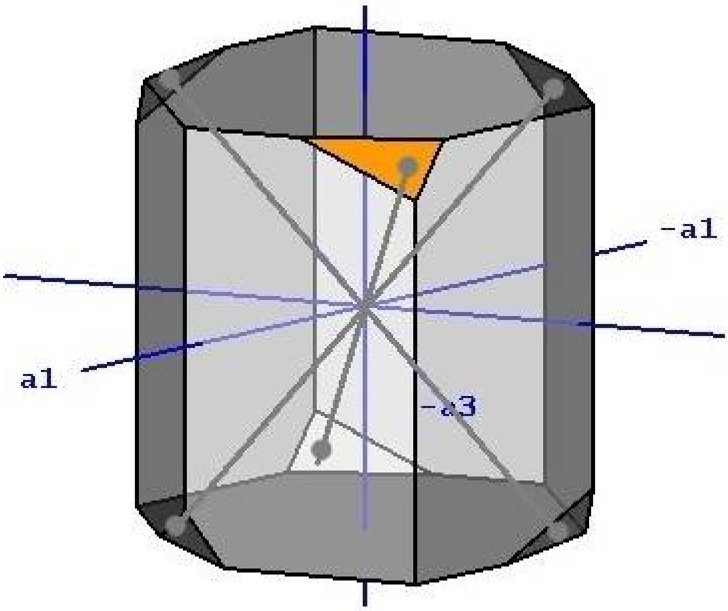
Classe oloedrica.
Possiede tutte e simmetrie 042mc.
Non le mostro in figura per non complicare il disegno, ma sono evidenti.

3				
Name	5 bit symbols	Short	HM Symbol	Class Order
Trigonal Pyramidal	30000	3	3	3



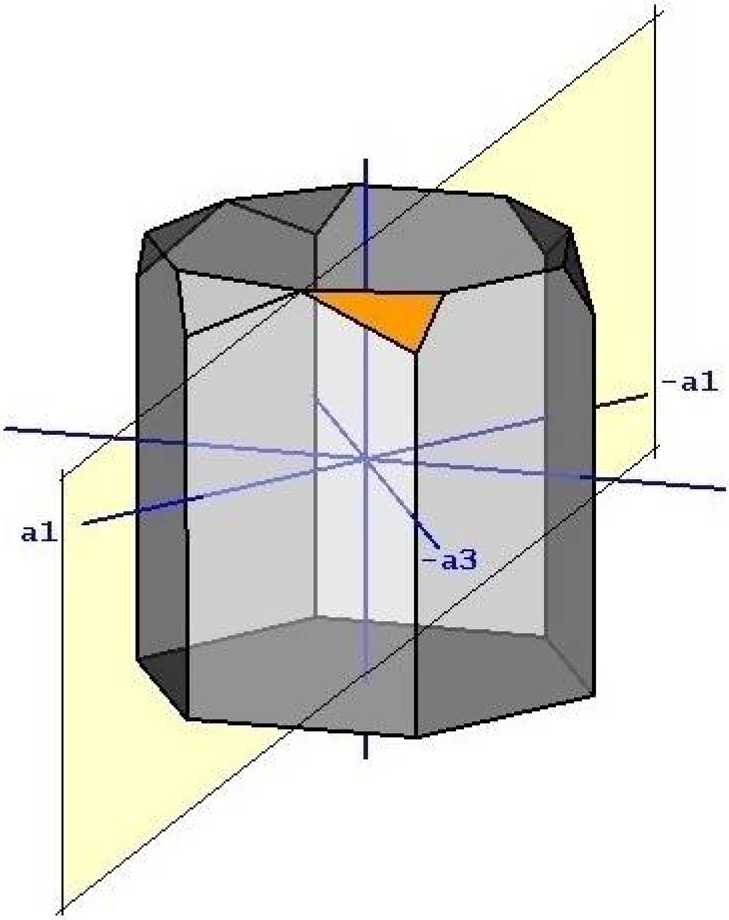
Asse 3 polare.
La sola simmetria è 3.
Sequenza rappresentativa 30000.

3c				
Name	5 bit symbols	Short	HM Symbol	Class Order
Trigonal Rhombohedral	3000c	3c	3_	6



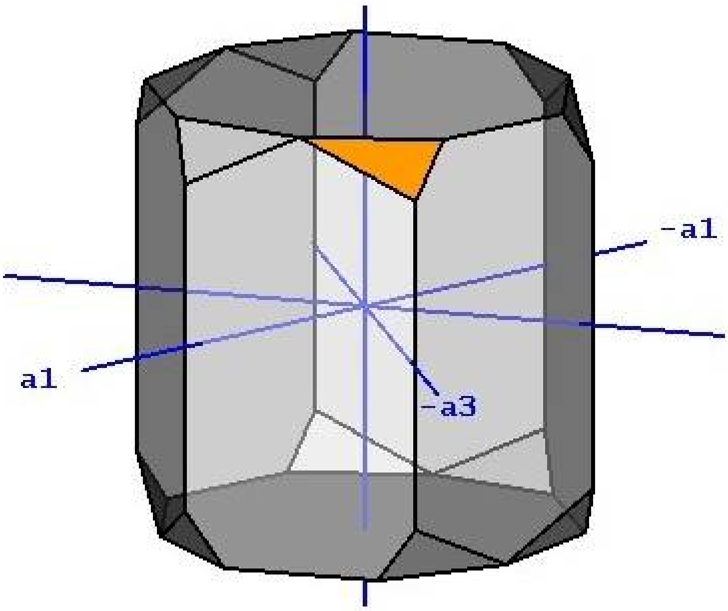
Questa classe ha le simmetrie 3000c.
La centrosimmetria è mostrata in figura. Qui non solo le facce sono centrosimmetriche ma anche ogni e qualsivoglia punto ha il suo centrosimmetrico dall’altra parte.

3m				
Name	5 bit symbols	Short	HM Symbol	Class Order
Trigonal Ditrigonal pyramidal	300m0	3m	3m	6



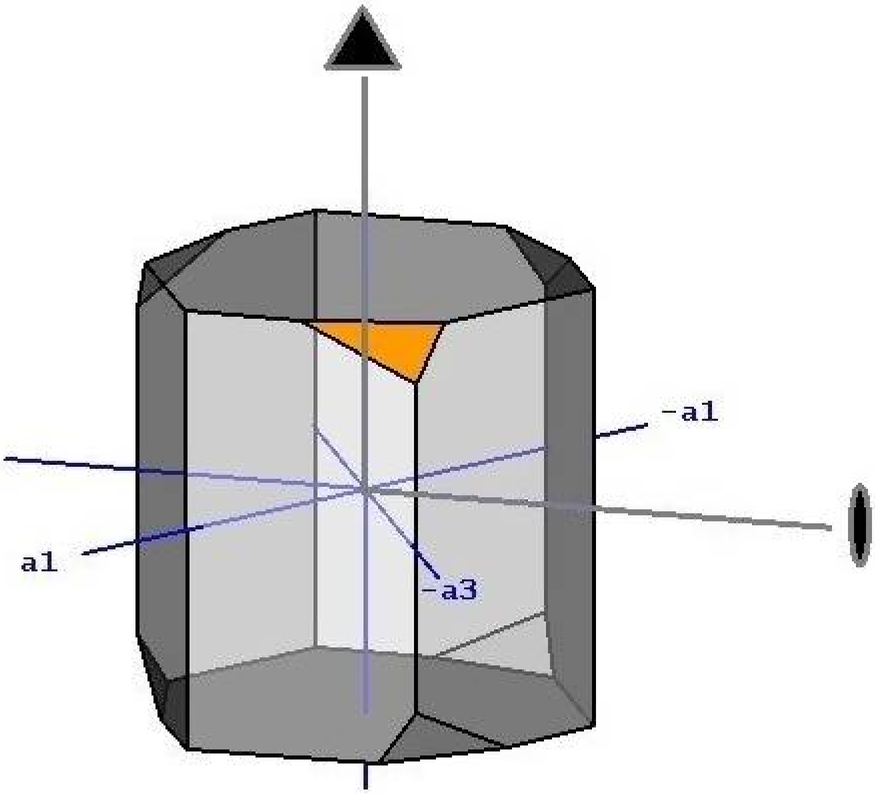
La sequenza 300m0, dove compaiono solamente 3 ed m, impone la presenza di piani m che non possono che essere verticali.

3mc				
Name	5 bit symbols	Short	HM Symbol	Class Order
Trigonal Hexagonal scalenohedral	300mc	3mc	3_2/m	12



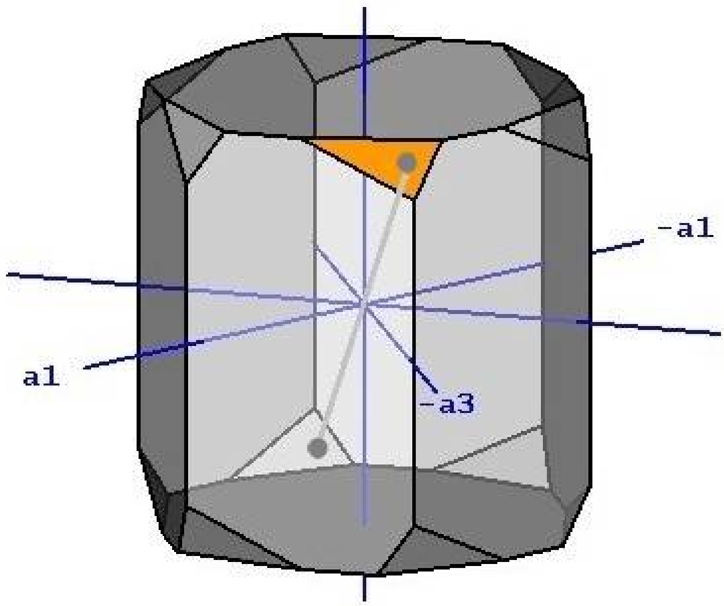
Tutte le simmetrie del gruppo.
La sequenza rappresentativa è 300mc.
E’ esclusa la presenza di piani orizzontali in quanto la presenza del centro di simmetria farebbe nascere un asse 2 verticale, e quindi la classe 6/mmm.

32				
Name	5 bit symbols	Short	HM Symbol	Class Order
Trigonal Trapezohedral	30200	32	32	6



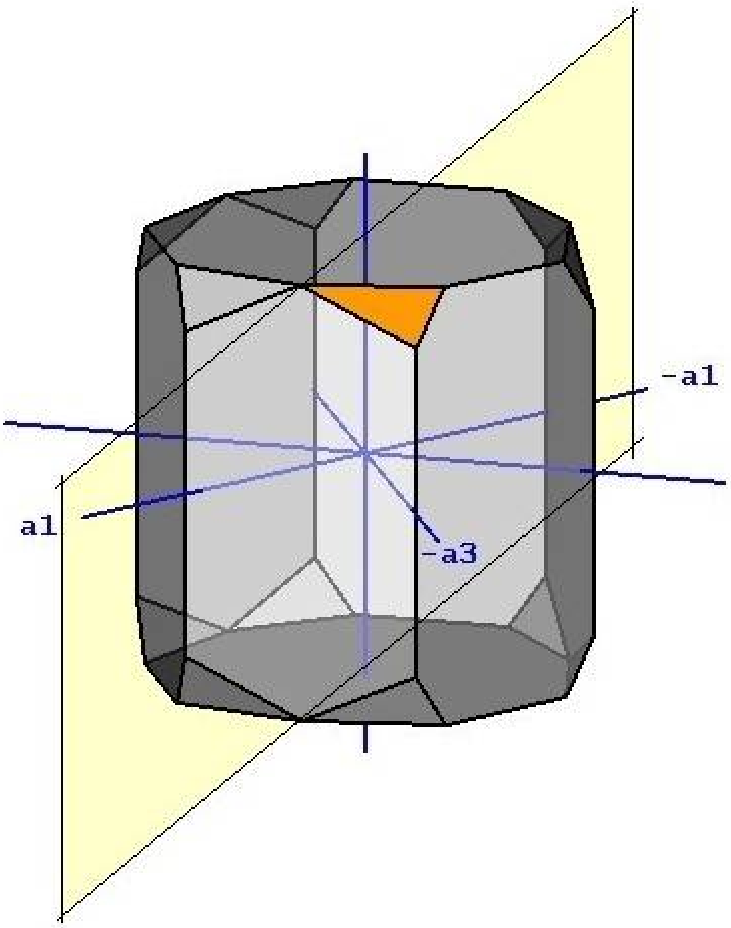
Asse 3 verticale più asse 2 orizzontale.

32c				
Name	5 bit symbols	Short	HM Symbol	Class Order
Hexagonal Trapezohedral	3020c	32c	622	12



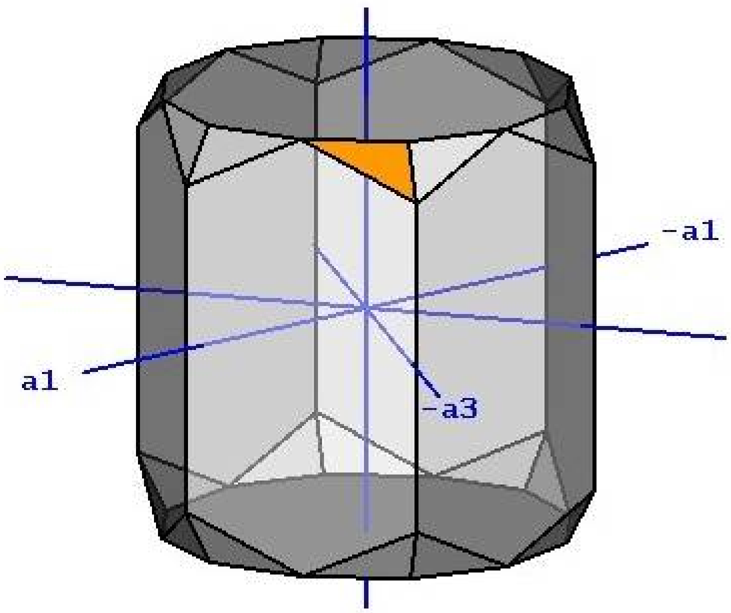
Classe quasi-centosimmetrica 3020c. La classe non è centrosimmetrica in senso stretto, tuttavia all’asse 3 si aggiungono le simmetrie della classe 222.

32m				
Name	5 bit symbols	Short	HM Symbol	Class Order
Hexagonal Ditrigonal dipyramidal	302m0	32m	6_m2	12



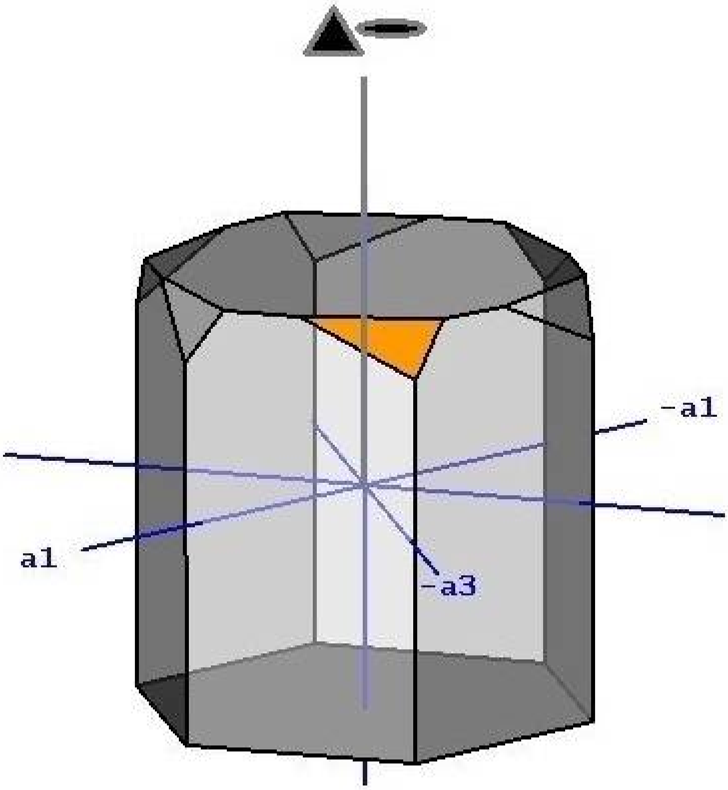
A questa classe corrisponde la sequenza 302m0. La assenza del centro obbliga i piani verticali m a <u>non</u> essere perpendicolari agli assi 2.
Tutto il resto è conseguenza, compreso un piano orizzontale che assieme all'asse 3 può essere interpretato come asse 6_ improprio.

32mc				
Name	**5 bit symbols**	**Short**	**HM Symbol**	**Class Order**
Hexagonal Dihexagonal dipyramidal	**302mc**	**32mc**	**6/mmm**	**24**



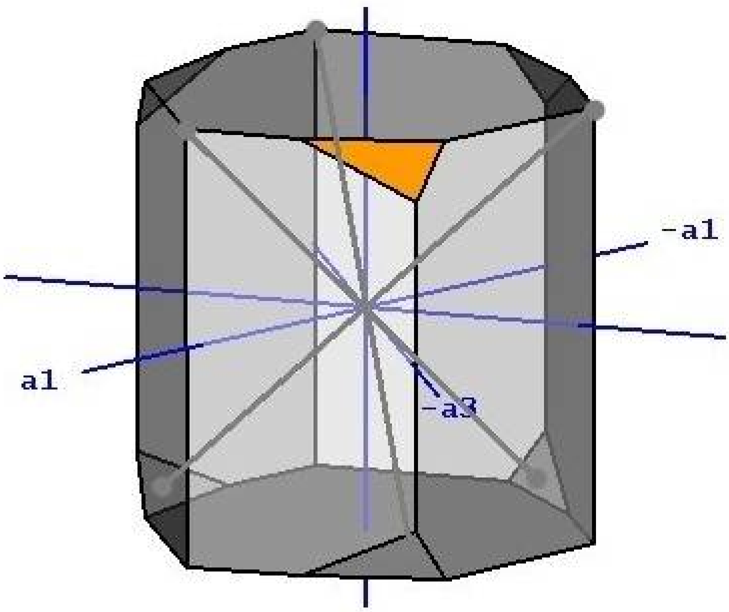
Questa classe possiede tutte le simmetrie rappresentate dalla sequenza 302mc. Nella figura sono evidenti ma non sono indicate per non appesantire il disegno.

6				
Name	**5 bit symbols**	**Short**	**HM Symbol**	**Class Order**
Hexagonal Pyramidal	**34000**	**6**	**6**	**6**



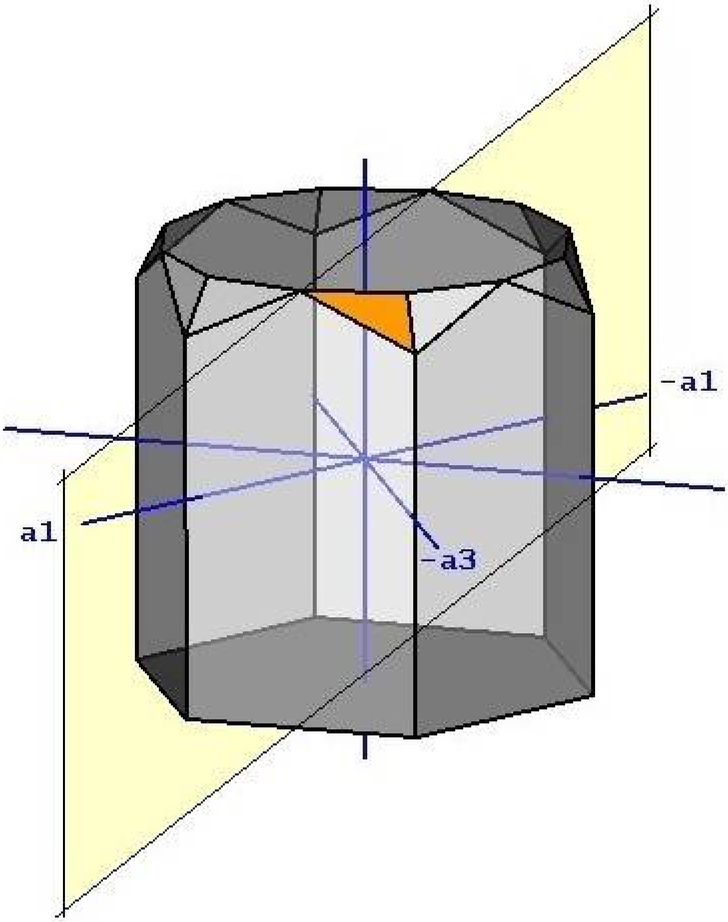
Asse 6. La sequenza di bit rappresentativa è convenzionalmente 34000.

6c				
Name	**5 bit symbols**	**Short**	**HM Symbol**	**Class Order**
Hexagonal Trigonal Dipyramidal	**3400c**	**6c**	**6_**	**6**



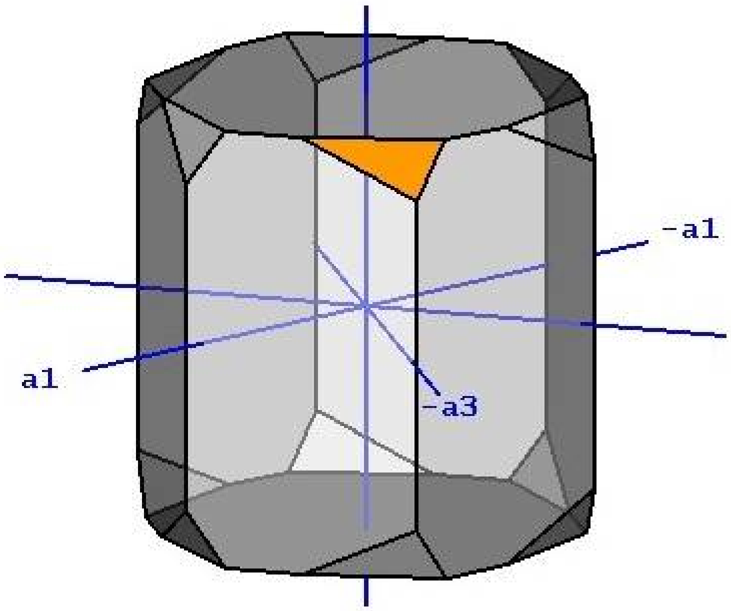
La classe non ha la proprietà 6, e non ha nemmeno la proprietà c. Tuttavia per formare l'asse improprio 6_ intervengono le proprietà 6 e c.
Come mostra la figura le faccette di sotto hanno come centrosimmetriche non quelle di sopra, ma quelle di sopra ruotate con un asse 6 (asse improprio 6_).
Rotazione 6 più inversione.

6m				
Name	**5 bit symbols**	**Short**	**HM Symbol**	**Class Order**
Hexagonal Dihexagonal pyramidal	**340m0**	**6m**	**6mm**	**12**



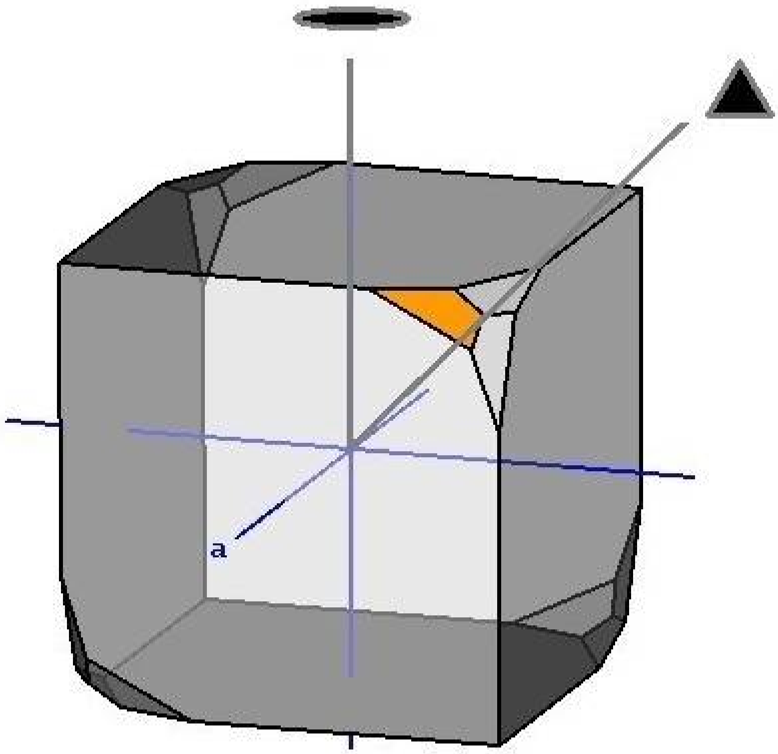
Qui all'asse 6 si aggiunge la simmetria m, che non può consistere in un piano orizzontale altrimenti la sequenza non sarebbe soltanto 340m0.
Quindi necessariamente piani verticali.

6mc				
Name	5 bit symbols	Short	HM Symbol	Class Order
Hexagonal Dipyramidal	340mc	6mc	6/m	12



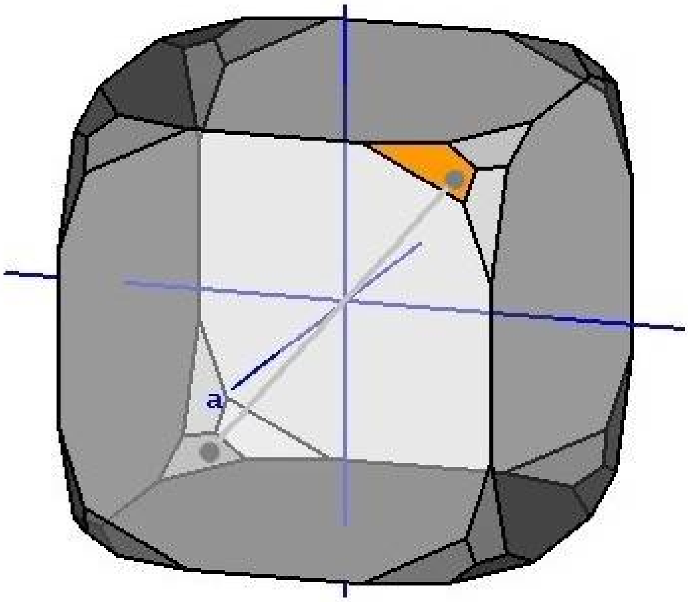
Questa classe contiene tutte le simmetrie 6 m e c, con la simmetria m che non può consistere in piani verticali altrimenti per la presenza del centro nascerebbero assi 2 orizzontali che non ci sono.
Non mostro nella figura piani e centrosimmetrie, per non imbrattare il disegno, ma sono evidenti..

23				
Name	5 bit symbols	Short	HM Symbol	Class Order
Isometric Tetartoidal	34200	23	23	12



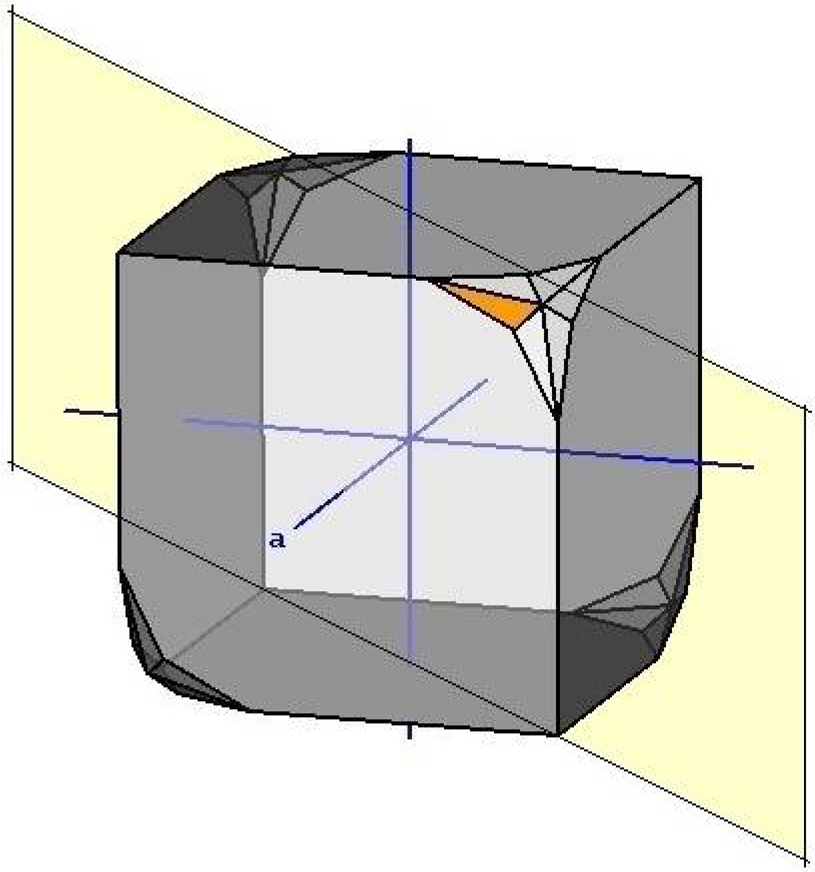
Asse 2 secondo le facce del cubo più asse 3 secondo i vertici del cubo.
Questi due unici assi sono sufficienti per generare tutte le simmetrie della classe 23.
La sequenza di bit caratteristica è 34200 . Come rappresentazione semplificata uso semplicemente 23.

23c				
Name	**5 bit symbols**	**Short**	**HM Symbol**	**Class Order**
Isometric Diploidal	**3420c**	**23c**	**m3**	**24**



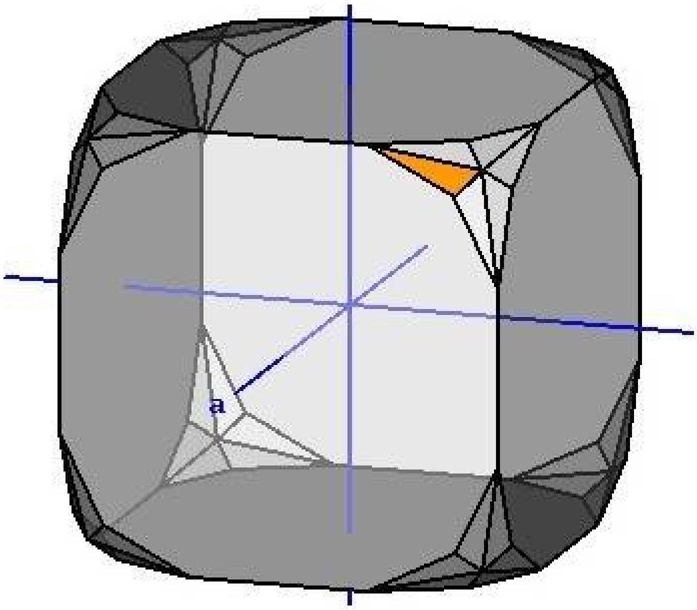
Questa classe è rigorosamente centrosimmetrica, ad ogni punto è associato un altro simmetrico rispetto al centro di simmetria. Tali risultano ovviamente anche le facce.
Nella figura non sono mostrate tutte le faccette centrosimmetriche, ma solo la arancione e la sua centrosimmetrica, unite da una linea grigia.
Ognuna delle 3x4=12 faccette di sopra ha come simmetrica una delle 3x4=12 faccette di sotto.

23m				
Name	5 bit symbols	Short	HM Symbol	Class Order
Isometric Hextetrahedral	342m0	23m	4_3m	24



In questa classe alle simmetrie assiali della classe 23 si aggiunge soltanto la simmetria m ben visibile in figura.

23mc				
Name	**5 bit symbols**	**Short**	**HM Symbol**	**Class Order**
Isometric Hexoctahedral	**342mc**	**23mc**	**m3m**	**48**



Questa è la classe con il massimo numero di simmetrie.
Ad ognuna delle 4x6=24 facce di sotto corrispondono 24 facce di sopra.
Più in particolare, qualsivoglia punto possiede il suo centrosimmetrico.

REFERENCES

[1] Bettini, G, "32 Point Groups of Three Dimensional Crystal Cells Described by 5 Bits" viXra:1012.0052

[2] Bettini, G, "A new classification proposed for Crystal Classes – UPDATE#2" https://www.mindat.org/article.php/1887/A+new+classification+proposed+for+Crystal+Classes+-+UPDATE%231

[3] Bettini, G, "Crystal Classes and Systems", https://vixra.org/abs/2008.0080

[4] Bettini, G, "Mother Nature and the 32 Crystal Classe", https://vixra.org/abs/2107.0140

[5] David Hestenes and Jeremy Holtb, "The Crystallographic Space Groups in Geometric Algebra", http://geocalc.clas.asu.edu/pdf/CrystalGA.pdf

[6] Eckhard Hitzer and Christian Perwass, "Crystal Cells in Geometric Algebra", Proceedings of the International Symposium on Advanced Mechanical Engineering Between University of Fukui – Pukyong National University, November 27, 2004, University of Fukui, Fukui, Japan, also available as http://vixra.org/pdf/1306.0146v1.pdf

[7] Bilbao Server http://www.cryst.ehu.es/cryst/get_point_genpos.html

[8] Crystallography, 32 point Groups arranged in six crystal systems, https://faculty.fiu.edu/~srimal/Earth%20Material/chapter_2-2%20Crystallography%20B.pdf

[9] Bettini, G, "Hidden Mathematical Symmetries in the 32 Crystal Point Groups?" https://vixra.org/abs/1101.0052.

[10] "Minerals in the Trigonal crystal system, trapezohedral class (32)" https://www.mindat.org/system_search.php?g=12.

[11] "Minerals in the Trigonal crystal system, Ditrigonal Pyramidal class (3m)" https://www.mindat.org/system_search.php?g=11.

[12] Webmineral http://webmineral.com/crystall.shtml#.YVJlBlUzbIU