

# Modelo simple de cuantización: un enfoque desde el caos

Moisés Domínguez Espinosa, Jaime Meléndez Martínez

Email: moi\_de@ciencias.unam.mx

## **RESUMEN**

Hay un paradigma en Mecánica Cuántica que explica la cuantización mediante los modos normales de vibración que surgen de la ecuación de onda de Schrödinger. En este trabajo se propone una metodología alternativa de cuantización de la velocidad angular mediante el uso de conceptos de mecánica Lagrangiana, mecánica Hamiltoniana, sistemas dinámicos y caos, y el modelo de Bohr con los cuales se construye un Toy model.

Copyright Moisés Domínguez Espinosa & Jaime Meléndez Martínez

# CAPÍTULO 1

## Introducción

### 1.1 Cuantización

En física, uno de los fenómenos más interesantes es el de la cuantización, grosso modo se dice que una magnitud física está cuantizada cuando solo puede expresarse como un múltiplo entero de cierta cantidad.

A principios del siglo XX este concepto fue aplicado por el físico Max Planck, quien propuso que la energía del cuerpo negro es absorbida o emitida en forma de paquetes discretos. Por su parte, el físico Niels Bohr postuló que el momento angular dentro del átomo es  $nh$ . Además, Albert Einstein aplicaría estas mismas ideas al efecto fotoeléctrico.

Debido a su importancia, poco tiempo después surgieron varios formalismos que intentaron explicar por qué la energía y el momento angular en el átomo son discretos. Es importante señalar que por lo general la cuantización se asocia al mundo de las partículas pequeñas, no obstante también puede existir a otras escalas.

El formalismo más aceptado que explica este fenómeno, consiste en obtener los modos normales de vibración en una ecuación diferencial con valores de frontera. En el caso de la mecánica cuántica ondulatoria se obtiene al calcular los eigenvalores de la ecuación de onda de Schrödinger.

Una manera intuitiva de ilustrar cómo funciona el formalismo anterior es la siguiente: imaginemos un tubo en el cual dibujaremos una onda, que consiste de una figura sinusoidal inscrita completamente en el tubo, su longitud será de  $L$ . En este tubo solo será posible

dibujar otras ondas cuya longitud sea una fracción de la original, es decir la longitud de estas ondas será de  $\frac{L}{n}$ , ya que no es posible inscribir de manera exacta cualquier onda.

Debido a que la longitud de onda es inversamente proporcional a la frecuencia, las frecuencias de las nuevas ondas solo serán múltiplos enteros de la frecuencia original, lo cual implica que las frecuencias posibles en el tubo están cuantizadas.

## 1.2 Organización de la tesis

En el **Capítulo 2** de esta tesis describimos las técnicas básicas que empleamos. Es importante señalar que el área de sistemas dinámicos es muy amplia y que emplea matemáticas de áreas tan diferentes como la topología y la teoría de números. Nosotros nos enfocaremos a las ecuaciones en diferencias. También en este capítulo haremos un resumen del modelo de Bohr y del rotor pateado, un sistema dinámico ampliamente documentado y similar al usado en este texto.

En el **Capítulo 3** desarrollamos las hipótesis básicas proponiendo un Lagrangiano no conservativo y haremos un análisis de la energía de nuestro sistema. El estudio de los sistemas no conservativos es poco común en comparación con el estudio de los sistemas conservativos porque en general los primeros son más complejos, sin embargo en el mundo físico es común encontrar sistemas no conservativos. Un ejemplo simple: imaginen un coche, como sabemos, el coche recibe energía, en este caso energía química que posee la gasolina, y la cual es disipada en forma de calor y energía de movimiento.

En el **Capítulo 4** describimos varios resultados que emergen del modelo. En el **Capítulo 5** se abordan algunas generalizaciones del modelo y, finalmente en el **Capítulo 6** se presentan las conclusiones y las perspectivas.

## **OBJETIVOS**

- 1.- Explorar y desarrollar un modelo de cuantización del momento angular con base en la dinámica no lineal y el caos.
- 2.-Desarrollar y/o entender las matemáticas y la física necesarias para crear un modelo dinámico de la cuantización del momento angular.
- 3.- Entender y explicar las ventajas y desventajas de este modelo.

Copyright Moisés Domínguez Espinosa & Jaime Meléndez Martínez

Copyright Moisés Domínguez Espinosa & Jaime Meléndez Martínez

## CAPÍTULO 2

### Antecedentes Teóricos

#### 2.1 Ecuaciones en diferencias y sistemas dinámicos

Un sistema dinámico está definido por sus variables de estado, el espacio fase y una ley de evolución. Ejemplo: en física, si hablamos del movimiento de una partícula, las variables de estado están representadas por la posición y la velocidad en un instante. Por otro lado, el espacio fase o el espacio de estado es el espacio formado por estas variables de estado y la ley de evolución puede ser por ejemplo la segunda ley de Newton [1,2,3].

Un sistema dinámico discreto está constituido por una o más ecuaciones en diferencias, las cuales relacionan distintos valores de una sucesión desconocida  $x_j$  donde  $j$  es una variable entera y  $x$  la variable de estado. Una ecuación en diferencias de dimensión uno muy general se puede representar por [2,3].

$$x_{j+1} = f(x_j, j). \quad (2.1)$$

La ecuación (2.1) en general es no lineal y depende de  $j$ . Cuando esta ecuación se denomina como autónoma se representa como:

$$x_{j+1} = f(x_j). \quad (2.2)$$

Ejemplo: la ecuación logística

$$x_{j+1} = \alpha(1 - x_j)x_j. \quad (2.3)$$

En las ecuaciones (2.1) y (2.2), la función  $f$  representa la ley de evolución del sistema dinámico que transforma cada estado en el siguiente estado. Si el sistema tiene un estado inicial  $x_0$  su evolución temporal o solución corresponde a la sucesión  $x_1 = f(x_0)$ ,  $x_2 = f(f(x_0))$ ,  $x_3 = f(f(f(x_0)))$ ...

El tipo de solución más sencilla es aquella en que todos los términos de la sucesión son los mismos  $x_0, x_0, x_0 \dots$  esta sucesión se llama solución de equilibrio. Para determinar este tipo de solución se deben encontrar los puntos fijos o soluciones, es decir aquellos que cumplen con

$$x^* = f(x^*). \quad (2.4)$$

Estas soluciones también se llaman de periodo 1. Las soluciones de periodo 2 cumplen con

$$x^* = f(f(x^*)) = f^2(x^*). \quad (2.5)$$

Estas soluciones corresponden a una segunda composición de funciones. Pueden existir además soluciones de periodo  $k$

$$x^* = f^k(x^*). \quad (2.6)$$

En el caso de la ecuación (2.4), existen tres tipos de soluciones de equilibrio (solución de periodo 1): equilibrio asintóticamente estable, inestable e indiferente [2,3].

Para analizar el tipo de equilibrio de una solución debemos aproximar la función no lineal con una función lineal mediante una serie de Taylor, alrededor del punto de equilibrio  $x^*$ :

$$f(x_j) \approx f(x^*) + (x_j - x^*)f'(x^*) + \frac{1}{2}(x_j - x^*)^2 f''(x^*) + \dots, \quad (2.7)$$

donde  $x_{j+1} = f(x_j)$ . Así, tomando los dos primeros términos del desarrollo tenemos que:

[7]

$$x_{j+1} = f(x^*) + (x_j - x^*)f'(x^*). \quad (2.8)$$

Haciendo los siguientes cambios de variable en la ecuación (2.8) tenemos que

$$\begin{aligned} y_j &= x_j - x^* \\ y_{j+1} &= x_{j+1} - x^*, \end{aligned} \quad (2.9)$$

y recordando que  $x^* = f(x^*)$ , la ecuación (2.8) se convierte en:

$$y_{j+1} = f'(x^*)y_j, \quad (2.10)$$

donde el término  $f'(x^*) = \alpha$  es constante; con lo cual obtenemos que

$$y_{j+1} = \alpha y_j. \quad (2.11)$$

Para resolver la expresión (2.11) introducimos las siguientes condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha y_0 = \alpha^1 y_0 \\ y_2 &= \alpha y_1 = \alpha^2 y_0 \\ y_3 &= \alpha y_2 = \alpha^3 y_0 \\ &\vdots \\ y_j &= \alpha y_{j-1} = \alpha^j y_0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Se puede ver que el término  $f'(x^*) = \alpha$  define el tipo de equilibrio.

El punto fijo es asintóticamente estable o punto fijo atractivo si:



[8]

$$|f'(x^*)| < 1. \quad (2.13)$$

En el primer caso:

$$0 < f'(x^*) < 1. \quad (2.14)$$

La solución converge al punto fijo en una curva que decrece exponencialmente.

En el segundo caso:

$$-1 < f'(x^*) < 0. \quad (2.15)$$

La solución oscila y converge en curvas que crecen y decrecen exponencialmente alrededor del punto fijo [2,3]. El punto fijo es inestable o punto fijo repulsivo si

$$|f'(x^*)| > 1. \quad (2.16)$$

Estos puntos fijos repulsivos divergen exponencialmente. El punto fijo es indiferente si

$$|f'(x^*)| = 1. \quad (2.17)$$

Hay varias clases de puntos fijos indiferentes, estos pueden ser débilmente atractivos, débilmente repulsivos y atractivo-repulsivos.

## 2.2 Caos en ecuaciones en diferencias

La palabra caos, del griego  $\chi\acute{\alpha}\omicron\varsigma$  suele estar relacionada con complejidad, o bien con dificultad de predicción y antítesis de orden. En la antigüedad muchas culturas tenían mitos de creación en donde el caos era una pieza fundamental. En la Teogonía de Hesíodo [4] aparece la palabra  $\chi\acute{\alpha}\omicron\varsigma$  que algunos autores traducen como vacío o abismo. Por otro lado, para los egipcios el Nun era el Dios del océano caótico primordial y Maat que tenía una

pluma en la cabeza era la Diosa del equilibrio y armonía cósmicos, además la serpiente Apofis era la encarnación del caos. Para los babilonios Tiamat representaba al caos y Marduk al orden.

En tiempos más recientes el matemático y físico Poincaré estudió el problema de los tres cuerpos, descubriendo que pequeños cambios en las condiciones iniciales del sistema podían ejercer cambios importantes en la evolución del sistema. En el siglo XX con la llegada de los ordenadores, la madurez del área de ecuaciones diferenciales y otras áreas, aparecieron varios científicos muy importantes que harían avances cruciales en sistemas dinámicos y caos, algunos ejemplos son: Benoit Mandelbrot, Gaston Julia, Sarkovskii, Edward Lorenz, Robert May, David Ruelle, Floris Takens, Mitchell J. Feigenbaum, Andréi Kolmogórov, Vladimir Arnold y Jürgen Moser.

Otros términos importantes frecuentemente usados en el área de sistemas dinámicos son caos, dinámica no lineal y sistemas complejos. La no linealidad es un elemento importante en estos sistemas. Podemos decir que: “un sistema lineal puede ser descompuesto en partes, resolver cada parte y combinar estas para obtener su solución”<sup>1</sup>. “En este sentido un sistema lineal es la suma de sus partes”<sup>2</sup>. “En la naturaleza muchos fenómenos son no lineales y el principio de superposición de los sistemas lineales falla espectacularmente”<sup>3</sup>. “Por ejemplo: si escuchas al mismo tiempo tus dos canciones favoritas no obtendrás el doble de placer”.<sup>4</sup>

A pesar de que esta área aun esta en desarrollo podemos encontrar una definición provisional de caos (caos determinista): En un sistema determinístico, caos es un comportamiento que es acotado, aperiódico, y que exhibe sensibilidad a las condiciones iniciales [1,5]. Hay otras definiciones que introducen conceptos como el de “mezcla” pero en este trabajo usaremos la definición anterior.

---

<sup>1</sup> Nonlinear Dynamics And Chaos With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering by Steven H. Strogatz, p. 8.

<sup>2</sup> Ídem, p. 9.

<sup>3</sup> Ídem, p. 9.

<sup>4</sup> Ídem. p. 9.

Para visualizar mejor esta idea sea  $\phi_{j+1} = f(\phi_j, K)$ , si graficamos el parámetro  $K$  contra los puntos fijos estables de esta función, es decir  $K$  vs  $\phi^*$  podemos ver una primer región con los puntos fijos estables de periodo uno, después los de periodo dos, y los de periodo 4 y así sucesivamente. Por ejemplo, para los puntos fijos de período 2 se pide que si  $\left| \frac{df(f(x))}{dx} \right|_{x=x^*} < 1$  entonces la solución es estable, algo análogo sucede con otros períodos [2,3]. En la segunda región dentro de los intervalos de períodos grandes existe una zona de caos que posee las características definidas con anterioridad. Más allá de estas dos regiones el sistema deja de estar acotado.

La Figura 1 ilustra este conjunto o diagrama de bifurcación que algunos autores denominan cascada [6]. Más adelante veremos qué consecuencias tiene este comportamiento en nuestro sistema.

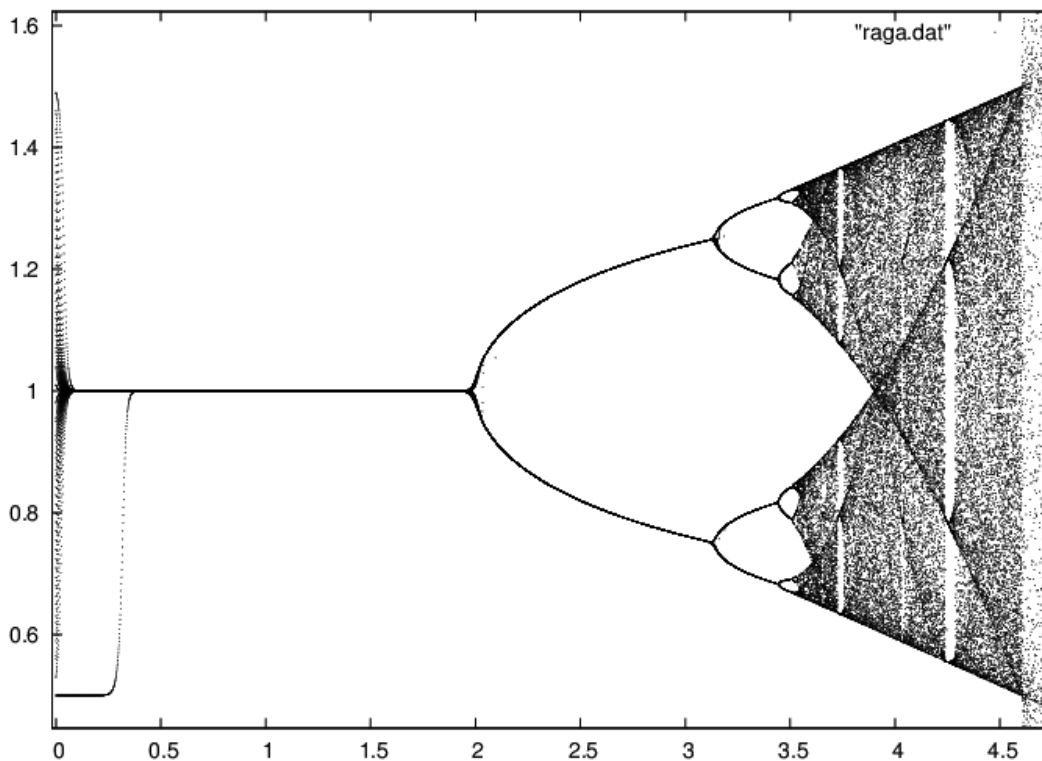


Figura 1. Bifurcación de puntos periódicos  $K$  vs  $\phi^*$ .

En el eje horizontal el parámetro  $K$ . En el eje vertical el punto fijo  $\phi^*$  tiene un solo valor para  $K < 2$ . Para  $K > 2$  exhibe un patrón de bifurcaciones. Para  $K > \sim 3.6$  hay un patrón muy complejo. Para  $K > \sim 4.6$  los puntos fijos divergen.

### 2.3 El rotor periódicamente pateado y el mapeo de Chirikov

Un sistema muy similar y que sirvió de punto de partida para este trabajo es el rotor periódicamente pateado. Este sistema dinámico es uno de los más simples que exhibe un comportamiento caótico en el tiempo [7]:

$$\dot{\varphi} = F \equiv Kf(\varphi) \sum_{j=0}^{\infty} \delta(t - jT). \quad (2.18)$$

Donde  $F$  es el pateo tangencial a una circunferencia de ángulo  $\varphi$ ,  $T$  es el periodo entre 2 patadas. Haciendo las siguientes sustituciones:

$$\begin{aligned} x &= \varphi \\ y &= \dot{\varphi} \\ z &= t \end{aligned} \quad (2.19)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= Kf(x) \sum_{j=0}^{\infty} \delta(z - jT) \\ \dot{z} &= 1. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Al integrar podemos ver este sistema como el mapeo

$$\begin{aligned} x_{j+1} &= x_j + y_j + Kf(x_j) \\ y_{j+1} &= y_j + Kf(x_j). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Si  $f(x_j) = \text{sen}(x_j)$  tenemos el mapeo de Chirikov [7]

$$\begin{aligned}x_{j+1} &= x_j + y_j + K \text{sen}(x_j) \\ y_{j+1} &= y_j + K \text{sen}(x_j),\end{aligned}\tag{2.22}$$

el cual también puede expresarse como

$$\begin{aligned}\theta_{j+1} &= \theta_j + p_j + \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_j) \\ p_{j+1} &= p_j + \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_j).\end{aligned}\tag{2.23}$$

## 2.4 La aplicación circular

Otro mapeo [8] también relacionado al rotor pateado es el mapeo circular el cual tiene la siguiente forma

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \Omega + \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_j).\tag{2.24}$$

Si  $|K| < 1$  y  $\Omega$  es constante y racional observamos en el espacio de parametros  $(\Omega, K)$  las lenguas de Arnold, que consisten en un patrón en forma de triángulos deformados, los cuales se distribuyen como un conjunto de Cantor. Estos patrones han sido observados en diversos fenómenos físicos y el ritmo cardiaco [8].

## 2.5 Modelo de Bohr

A principios del siglo pasado el físico Niels Bohr daría una explicación del espectro del hidrógeno a partir de un modelo muy simple, que consistía en una partícula moviéndose

alrededor de un centro de masa en la cual actúa una fuerza de Coulomb. Si la fuerza centrípeta es igual a la fuerza de Coulomb [9] entonces:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{kZe^2}{r^2}, \quad (2.25)$$

donde  $Z$  es el número atómico para  $Z = 1$  tenemos el átomo de hidrógeno. Despejando  $v$

$$v = \sqrt{\frac{kZe^2}{mr}}. \quad (2.26)$$

Bohr postuló que el momento angular estaba cuantizado, es decir

$$L = mvr = n\hbar, \quad (2.27)$$

donde  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ .

Despejando  $r$  de (2.27) tenemos que

$$r = \frac{n\hbar}{mv}. \quad (2.28)$$

Luego, sustituyendo  $v$  y simplificando obtenemos

$$r = \frac{n^2\hbar^2}{mkZe^2} = \frac{n^2a_0}{Z}, \quad (2.29)$$

donde  $a_0$  es el radio de Bohr y tiene un valor de

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{mke^2} = 5.291772 \times 10^{-11} \text{ m}. \quad (2.30)$$

La energía total es la suma de la energía potencial y la energía cinética

[14]

$$E_T = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{kZe^2}{r} . \quad (2.31)$$

Como el sistema gira alrededor de un punto, toda la energía cinética se debe a la rotación, por lo tanto:

$$E_T = \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - \frac{kZe^2}{r} , \quad (2.32)$$

$$E_{Bohr} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 + U(r). \quad (2.33)$$

La expresión (2.33) es conocida como la energía de Bohr. Además de la ecuación de fuerza centrípeta  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{kZe^2}{2r}$  tenemos que:

$$E_T = \frac{kZe^2}{2r} - \frac{kZe^2}{r} = -\frac{kZe^2}{2r} . \quad (2.34)$$

Sustituyendo el valor de  $r$  en (2.34):

$$E_T = -\frac{mk^2Z^2e^4}{2\hbar^2n^2} = -E_0\frac{Z^2}{n^2} . \quad (2.35)$$

Donde  $E_0$  es:

$$E_0 = \frac{mk^2e^4}{2\hbar^2} = 2.18 \times 10^{-18}J = 13.6 eV. \quad (2.36)$$

Bohr estableció además que cuando un electrón salta de una órbita a otra la energía viene dada por

$$h\nu = E_i - E_f . \quad (2.37)$$

De (2.37) tenemos que

$$v = \frac{E_o Z^2}{h} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right). \quad (2.38)$$

Si  $v = \frac{c}{\lambda}$ , entonces

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_o Z^2}{hc} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (2.39)$$

O bien

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right), \quad (2.40)$$

donde  $R$  es la constante de Rydberg

$$R = \frac{E_o}{hc} = \frac{mk^2 e^4}{4\pi c \hbar^3} = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}. \quad (2.41)$$

## 2.6 Ecuaciones de Lagrange y Hamilton

En la mecánica de Lagrange [10] se define una cantidad llamada Lagrangiano denotado por  $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$  que es una función escalar y que depende de la energía del sistema. Las coordenadas  $q_i(t)$  y  $\dot{q}_i(t)$  se denominan coordenadas generalizadas. Sea  $\mathcal{L} = T - U$ , donde  $T$  es la energía cinética y  $U$  es la energía potencial, el principio fundamental que el Lagrangiano cumple es el principio de Hamilton, que enunciamos a continuación



$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0. \quad (2.42)$$

Este principio es consecuencia del principio de mínima acción. Si  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ , e integrando por partes encontramos la ecuación de Euler-Lagrange [10], tenemos:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0. \quad (2.43)$$

### Conservación de energía

El Lagrangiano que describe un sistema conservativo [10] cumple con:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0. \quad (2.44)$$

Esto implica, usando la ecuación de Euler-Lagrange y el convenio de Einstein para índices repetidos, que

$$\frac{d}{dt} \left( \mathcal{L} - \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0. \quad (2.45)$$

Cuando  $\mathcal{L}$  depende explícitamente del tiempo  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \neq 0$ , entonces

$$\frac{d}{dt} \left( \mathcal{L} - \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (2.46)$$

Regresando a la ecuación (2.45) la cantidad dentro del paréntesis debe ser constante. Esta cantidad se denomina Hamiltoniano  $-\mathcal{H}$  y es tal que

$$\mathcal{L} - \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = -\mathcal{H}. \quad (2.47)$$

Si  $\mathcal{L} = T - U$  y  $U$  no depende explícitamente de la velocidad y del tiempo tenemos que

$$T + U = \mathcal{H} = \text{constante} = E, \quad (2.48)$$

es decir, la energía se conserva. Definimos también los momentos conjugados como:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad (2.49)$$

y reescribimos la función Hamiltoniana  $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$  de la siguiente manera

$$\mathcal{H} = p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}. \quad (2.50)$$

Si calculamos  $\frac{d\mathcal{H}}{dt}$  encontramos las ecuaciones canónicas de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \end{cases} \quad (2.51)$$

Por último

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \quad (2.52)$$

**Ejemplo:**

Presentaremos un ejemplo [11] de un sistema no conservativo que ilustra el análisis ulterior de nuestro sistema. Sea el Lagrangiano dependiente del tiempo de la siguiente forma

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)e^{\lambda t}. \quad (2.53)$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange (2.43) tenemos la ecuación de movimiento

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (2.54)$$

Ahora obtenemos el Hamiltoniano a partir de la ecuación (2.50)

$$\mathcal{H} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)e^{\lambda t}, \quad (2.55)$$

con

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = (-\lambda) \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)e^{\lambda t}. \quad (2.56)$$

Además se cumple:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Cuando  $\lambda = 0$ , tenemos un sistema conservativo, es decir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0.$$

## CAPÍTULO 3

### Un modelo simple de cuantización

#### 3.1 Un modelo simple de cuantización

Supongamos que tenemos un sistema de dos partículas que se atraen entre sí debido a una fuerza central. Este sistema se puede modelar como un sistema de una partícula moviéndose alrededor de su centro de masa. Para simplificar, utilizamos coordenadas esféricas y restringimos el problema a un plano.

Además, la partícula está rodeada de un ruido que constantemente impulsa o pateo al sistema con una frecuencia  $1/T$  que denominaremos *frecuencia de pateo* en [Hz] y otra frecuencia denominada *frecuencia de equilibrio*  $1/\xi$  también en [Hz] cuya naturaleza se discutirá más adelante, por último un parámetro  $K$  con unidades de momento angular [ $J \cdot s$ ]. Este pateo esta descrito por una suma de deltas de Dirac.

El término de las deltas de Dirac y las funciones que modulan el pateo, en este caso una función seno, dependen del tiempo y la velocidad angular. El siguiente *Ansatz* modela el Lagrangiano [4,19] que describe esta situación.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\varphi}^2) - U(r) - K\varphi \sum_{j=0}^{\infty} \text{sen}(\Omega + \xi\dot{\varphi}(jT)) \delta(t - jT), \quad (3.1)$$

donde  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $K, \xi, \Omega$  son parámetros, y  $T$  es el periodo entre cada impulso. El término  $\dot{\varphi}(jT)$  es constante. Como veremos más adelante, el signo negativo del término con sumatoria puede cambiarse a signo positivo dependiendo de nuestro sistema experimental, cambiando con ello el tipo de equilibrio.

El Hamiltoniano [10,11] del sistema lo podemos obtener a partir del Lagrangiano con la siguiente expresión. Usamos para ello el convenio de Einstein para índices repetidos.

$$\mathcal{H} = p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}, \quad (3.2)$$

donde

$$p_i \dot{q}_i \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \dot{r} = m\dot{r}^2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} = mr^2 \dot{\varphi}^2 \end{cases} . \quad (3.3)$$

Con las expresiones anteriores [10,11] podemos escribir el Hamiltoniano del sistema de la siguiente manera

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(m\dot{r}^2 + mr^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) + K\varphi \sum_{j=0}^{\infty} \text{sen}(\Omega + \xi \dot{\varphi}(jT)) \delta(t - jT). \quad (3.4)$$

La ecuación de Euler-Lagrange [10,11] es:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0. \quad (3.5)$$

De la ecuación (3.1) y (3.5) se encuentra que

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial}{\partial r}U(r) = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) + K \sum_{j=0}^{\infty} \text{sen}(\Omega + \xi\dot{\varphi}(jT)) \delta(t - jT) = 0. \quad (3.7)$$

Ahora, calcularemos las variaciones en el tiempo del Hamiltoniano. Derivando usando la regla de la cadena, se tiene que

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{dt} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\dot{r}} \frac{d\dot{r}}{dt} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}. \quad (3.8)$$

Las derivadas temporales las calculamos a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange de la siguiente forma

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = r\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial r} U(r), \quad (3.9)$$

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{-2mr\dot{r}\dot{\varphi} - K \sum_{j=0}^{\infty} \text{sen}(\Omega + \xi\dot{\varphi}(jT)) \delta(t - jT)}{mr^2}$$

y de la ecuación (3.2) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} = & mr^2\dot{\varphi} \left( \frac{-2mr\dot{r}\dot{\varphi} - K \sum_{j=0}^{\infty} \text{sen}(\Omega + \xi\dot{\varphi}(jT)) \delta(t - jT)}{mr^2} \right) \\ & + \dot{\varphi} K \sum_{j=0}^{\infty} \text{sen}(\Omega + \xi\dot{\varphi}(jT)) \delta(t - jT) + m\dot{r} \left( r\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial r} U(r) \right) \\ & + \left( mr\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial}{\partial r} U(r) \right) \dot{r} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Se puede observar directamente que todos los términos se anulan excepto la expresión de los pateos o pulsos  $\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}$ .

Además se cumple:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}.$$

Cuando  $K = 0$ , tenemos un sistema conservativo, es decir

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0.$$

Sin embargo, el sistema no es conservativo, ya que en general  $\frac{d\mathcal{H}}{dt}$  es diferente de cero:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} K\varphi \sum_{j=0}^{\infty} \text{sen}(\Omega + \xi\varphi(jT)) \delta(t - jT). \quad (3.11)$$

Resolveremos la ecuación (3.7) para  $r$  constante, utilizando el método de la transformada de Laplace (ver apéndice 2):

$$\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}) = -\frac{K}{mr^2} \sum_{j=0}^{\infty} \text{sen}(\Omega + \xi\varphi(jT)) \delta(t - jT). \quad (3.12)$$

La solución y su derivada para  $j$  pulsaciones es una recurrencia no lineal (ver apéndice 2):

$$\begin{cases} \varphi_{(j+1)T} = \varphi_{jT} + T\dot{\varphi}_{jT} - \frac{KT}{mr^2} \text{sen}(\Omega + \xi\varphi_{jT}) \\ \dot{\varphi}_{(j+1)T} = \dot{\varphi}_{jT} - \frac{K}{mr^2} \text{sen}(\Omega + \xi\varphi_{jT}) \end{cases}. \quad (3.13)$$

### 3.2 Cuantización del momento angular y estabilidad

Para conocer el estado del sistema cuando el tiempo tiende a infinito es necesario encontrar los puntos fijos o de equilibrio estable e inestable. A partir de las ecuaciones de recurrencia (3.7) encontraremos el punto fijo para la velocidad angular es decir  $\dot{\varphi}_{(j+1)T} = \dot{\varphi}_{jT} = \dot{\varphi}^*$

$$\dot{\varphi}^* = \dot{\varphi}^* - \frac{K}{mr^2} \text{sen}(\Omega + \xi \dot{\varphi}^*). \quad (3.14)$$

La ecuación anterior implica que

$$\text{sen}(\Omega + \xi \dot{\varphi}^*) = 0. \quad (3.15)$$

Por lo tanto, los puntos fijos son

$$\dot{\varphi}^* = \frac{n\pi - \Omega}{\xi}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.16)$$

La condición para que estos puntos de equilibrio sean asintóticamente estables es

$$|f'(\dot{\varphi}^*)| < 1, \quad (3.17)$$

donde

$$f'(\dot{\varphi}^*) = 1 - \frac{K\xi}{mr^2} \cos(\Omega + \xi \dot{\varphi}^*). \quad (3.18)$$

Tomando los puntos fijos para  $n$  par obtenemos los puntos fijos estables ya que suponemos que  $\frac{K\xi}{mr^2} > 0$ . Denotaremos un punto fijo estable con el subíndice  $s$  correspondiente a la palabra *stable* en inglés y los puntos fijos inestables con la letra  $u$  correspondiente a la palabra *unstable* en inglés, de manera que



[24]

$$\dot{\varphi}_s^* = \frac{2n\pi - \Omega}{\xi}. \quad (3.19)$$

Si queremos que los puntos fijos con  $n$  par sean inestables basta con hacer el siguiente cambio de signo en la recurrencia lo cual siempre es posible,

$$\dot{\varphi}^* = \dot{\varphi}^* + \frac{K}{mr^2} \text{sen}(\Omega + \xi \dot{\varphi}^*). \quad (3.20)$$

La condición de estabilidad implica que

$$0 < \frac{K\xi}{mr^2} < 2. \quad (3.21)$$

Ahora introducimos un parámetro de estabilidad sin unidades<sup>5</sup>,  $0 < \lambda < 2$  que nos permite movernos a lo largo de este intervalo, tal que,  $\frac{K\xi}{mr^2} = \lambda$ . De esta manera podemos reescribir la ecuación (3.19) de la siguiente forma

$$\dot{\varphi}_s^* = \frac{(2n\pi - \Omega)K}{\lambda mr^2}. \quad (3.22)$$

Ahora, introduciremos otro parámetro que nos ayudará a tener variaciones de la constante de pateo  $K$  de la siguiente manera<sup>6</sup>  $K = \varphi H$ . Además, escogemos  $\Omega = 0$ , de manera que

$$L_n = \left( \frac{2\pi\varphi}{\lambda} \right) nH. \quad (3.23)$$

<sup>5</sup>  $\lambda$  es una letra griega arcaica llamada sampi.

<sup>6</sup>  $\varphi$  es una letra griega arcaica llamada koppa.

Con  $L_n = \dot{\varphi}_s^* m r^2$ , finalmente, si  $2\pi\varrho = \lambda$  y  $0 < \varrho < \frac{1}{\pi}$ ,

$$L_n = nH . \quad (3.24)$$

Esta  $H$  tiene unidades de momento angular y puede tomar la escala que se elija, siempre que se cumplan las condiciones de estabilidad de la ecuación (3.21). Para los puntos inestables tenemos

$$|f'(\dot{\varphi}^*)| > 1 , \quad (3.25)$$

y tomando los valores impares de  $n$  en la ecuación (3.16) se encuentra que

$$\dot{\varphi}_u^* = \frac{(2n+1)\pi - \Omega}{\xi} . \quad (3.26)$$

Introduciendo los parámetros de estabilidad tenemos que

$$L_n = \left( \frac{2\pi\varrho}{\lambda} \right) \left( n + \frac{1}{2} \right) H . \quad (3.27)$$

Ahora si  $\frac{2\pi\varrho}{\lambda} = 1$  tenemos lo siguiente

$$L_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) H . \quad (3.28)$$

Copyright Moisés Domínguez Espinosa & Jaime Meléndez Martínez

# CAPÍTULO 4

## Resultados

### 4.1 Energía y el modelo de Bohr

El modelo de Bohr logró explicar las series espectrales del hidrógeno a partir del postulado de la cuantización del momento angular. Sin embargo, su modelo no pudo permanecer vigente debido a que el electrón radia cuando rota y este terminaría por radiar toda su energía.

En este trabajo se propone que es plausible aplicar el modelo de Bohr cuando el sistema está en equilibrio ya que bajo ciertas hipótesis la energía del término no conservativo es aproximadamente cero.

Es decir, no obstante que este modelo es en general no conservativo tiene un comportamiento patológico, ya que puede comportarse como conservativo cuando está en equilibrio. Para lo anterior analicemos el término no conservativo, es decir, la sumatoria de las deltas de Dirac en la ecuación (3.4).

Los índices de la sumatoria corresponden al tiempo de pateo. Aunque físicamente no es posible hablar de tiempos infinitos, si podemos pensar en tiempos grandes. Por otro lado, es posible que las condiciones iniciales de nuestro sistema estén lejos de las condiciones de equilibrio. Sin embargo, el sistema se acercaría rápidamente a los puntos de equilibrio. Lo anterior es respaldado por el cálculo numérico. La recurrencia fue programada en Python (ver apéndice 3).

Cuando la velocidad angular inicial está cerca de la velocidad angular de equilibrio el término de sumatoria vale aproximadamente cero. Se pide también que  $r$  sea constante y por lo tanto  $m\dot{r}^2 = 0$ , tenemos luego que

$$\mathcal{H}_{en\ equilibrio} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + U(r) \quad (4.1)$$

$$+ K\varphi \underbrace{\sum_{j=0}^{j=grande} \text{sen}(\Omega + \xi\dot{\varphi}(jT)) \delta(t - jT)}_{\text{sen}(\Omega + \xi\dot{\varphi}(jT)) \rightarrow 0}$$

Se puede observar en la expresión anterior que, cuando el sistema está cerca del equilibrio, el término con sumatoria tiende a cero. El término de la sumatoria vale cero en  $t \neq jT$ , debido a las propiedades de la función Delta de Dirac, y  $\text{sen}(\Omega + \xi\dot{\varphi}(jT)) \approx 0$  cuando el sistema esta cerca del equilibrio.

Además, siempre se puede elegir una velocidad angular inicial  $\varphi_0 \approx \varphi^*$  de tal manera que

$$K\varphi \underbrace{\sum_{j=0}^{j=grande} \text{sen}(\Omega + \xi\dot{\varphi}(jT)) \delta(t - jT)}_{\text{sen}(\Omega + \xi\dot{\varphi}(jT)) \rightarrow 0} \ll \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + U(r) \quad (4.2)$$

Por lo tanto, bajo estas hipótesis tenemos que

$$\mathcal{H}_{en\ equilibrio} \approx \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + U(r) = \text{Energía de Bohr}. \quad (4.3)$$

Cuando el sistema está en equilibrio  $K$  y  $\xi$  son diferentes de cero y la velocidad angular también es diferente de cero.

Cuando la velocidad angular inicial es diferente de la velocidad angular de equilibrio, es decir  $\varphi_0 \neq \varphi^*$ , el término de la sumatoria puede no ser tan pequeño en comparación a la energía de Bohr. Físicamente es plausible pensar que fuera del equilibrio  $m\dot{r}^2 \neq 0$  y

$r \neq \text{constante}$ . Por lo tanto tomando condiciones iniciales fuera del equilibrio  $(\varphi_0, \dot{\varphi}_0, r_0, \dot{r}_0)$  obtenemos lo siguiente:

Si  $a \in (0, 1T)$

$$t = 0 \quad \mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}(m\dot{r}_0^2 + mr_0^2\dot{\varphi}_0^2) + U(r_0) + K\varphi_0 \text{sen}(\Omega + \xi_0\dot{\varphi}(0)) \delta(t - 0)$$

$$t = (0, 1T) \quad \mathcal{H}_{0+a} = \frac{1}{2}(m\dot{r}_{0+a}^2 + mr_{0+a}^2\dot{\varphi}_{0+a}^2) + U(r_{0+a})$$

$$t = 1T \quad \mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}(m\dot{r}_1^2 + mr_1^2\dot{\varphi}_1^2) + U(r_1) + K\varphi_1 \text{sen}(\Omega + \xi_1\dot{\varphi}(1T)) \delta(t - 1T)$$

$$t = (1T, 2T) \quad \mathcal{H}_{1+a} = \frac{1}{2}(m\dot{r}_{1+a}^2 + mr_{1+a}^2\dot{\varphi}_{1+a}^2) + U(r_{1+a})$$

$$t = 2T \quad \mathcal{H}_2 = \frac{1}{2}(m\dot{r}_2^2 + mr_2^2\dot{\varphi}_2^2) + U(r_2) + K\varphi_2 \text{sen}(\Omega + \xi_2\dot{\varphi}(2T)) \delta(t - 2T)$$

$$t = (2T, 3T) \quad \mathcal{H}_{2+a} = \frac{1}{2}(m\dot{r}_{2+a}^2 + mr_{2+a}^2\dot{\varphi}_{2+a}^2) + U(r_{2+a})$$

⋮

$$t = (j-1)T \quad \mathcal{H}_{j-1} = \frac{1}{2}(m\dot{r}_{j-1}^2 + mr_{j-1}^2\dot{\varphi}_{j-1}^2) + U(r_{j-1}) + \underbrace{K\varphi_{j-1} \text{sen}(\Omega + \xi_{j-1}\dot{\varphi}((j-1)T)) \delta(t - (j-1)T)}_{\text{este término} \approx 0}$$

$$t = ((j-1)T, jT) \quad \mathcal{H}_{j-1+a} = \frac{1}{2}(mr_{j-1+a}^2 \dot{\phi}_{j-1+a}^2 + mr_{j-1+a}^2 \dot{\phi}_{j-1+a}^2) + U(r_{j-1+a}).$$

Una interpretación plausible es que mediante este proceso numérico el sistema perdería o bien obtendría la energía necesaria para llegar al estado de equilibrio.

Después de un número suficiente de pateos tenemos el sistema cerca del equilibrio:

$$\mathcal{H}_{en\ equilibrio} \approx \mathcal{H}_j. \quad (4.5)$$

Cuando  $r = r_0$  es constante entonces  $\xi_j = \xi_0$  también es constante. Entonces se tiene que

Si  $a \in (0, 1T)$

$$t = 0 \quad \mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}mr_0^2 \dot{\phi}_0^2 + U(r_0) + K\phi_0 \text{sen}(\Omega + \xi_0 \dot{\phi}(0)) \delta(t-0)$$

$$t = (0, 1T) \quad \mathcal{H}_{0+a} = \frac{1}{2}mr_0^2 \dot{\phi}_{0+a}^2 + U(r_0)$$

$$t = 1T \quad \mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}mr_0^2 \dot{\phi}_1^2 + U(r_0) + K\phi_1 \text{sen}(\Omega + \xi_0 \dot{\phi}(1T)) \delta(t-1T)$$

$$t = (1T, 2T) \quad \mathcal{H}_{1+a} = \frac{1}{2}mr_0^2 \dot{\phi}_{1+a}^2 + U(r_0)$$

$$t = 2T \quad \mathcal{H}_2 = \frac{1}{2}mr_0^2 \dot{\phi}_2^2 + U(r_0) + K\phi_2 \text{sen}(\Omega + \xi_0 \dot{\phi}(2T)) \delta(t-2T)$$

[31]

$$t = (2T, 3T) \quad \mathcal{H}_{2+a} = \frac{1}{2}mr_0^2\dot{\varphi}_{2+a}^2 + U(r_0)$$

⋮

$$t = (j-1)T \quad \mathcal{H}_{j-1} = \frac{1}{2}mr_0^2\dot{\varphi}_{j-1}^2 + U(r_0) + \underbrace{K\varphi_{j-1} \text{sen}(\Omega + \xi_0\dot{\varphi}((j-1)T)) \delta(t - (j-1)T)}_{\text{este término} \approx 0}$$

$$t = ((j-1)T, jT) \quad \mathcal{H}_{j-1+a} = \frac{1}{2}mr_0^2\dot{\varphi}_{j-1+a}^2 + U(r_0).$$

Después de un número suficiente de pateos tenemos nuevamente el sistema cerca del equilibrio:

$$\mathcal{H}_{\text{en equilibrio}} \approx \mathcal{H}_j . \quad (4.7)$$

Como esto depende de  $T$  entonces una pregunta interesante es ¿qué pasa con el valor de  $T$ ?  
Si observamos la recurrencia

$$\varphi_{(j+1)T} = \varphi_{jT} + T\dot{\varphi}_{jT} - \frac{KT}{mr^2} \text{sen}(\Omega + \xi\dot{\varphi}_{jT}) , \quad (4.8)$$

cuando el sistema esta en equilibrio llegamos a que

$$\varphi_{(j+1)T} = \varphi_{jT} + T\dot{\varphi}^* . \quad (4.9)$$



Del artículo de Olsen y McDonald [12] sabemos que el tiempo de caída es de  $t_{fall} = 1.6 \times 10^{-11}$  s. Este tiempo debería ser mucho mas grande que  $T$  ya que de otra manera la partícula tendría tiempo de caer.

Además, la energía en el estado fundamental  $E_0 = 2.18 \times 10^{-18}$  J tiene un tiempo asociado de  $t_{E_0} = 3.04 \times 10^{-16}$  s a partir de la expresión  $E_0 = h\nu$ .

Sea  $E_T$  la energía asociada a los pateos, intuitivamente es plausible pedir que  $E_T \leq E_0$  tomando como hipótesis que el sistema no debería recibir o disipar más energía de la que tiene. Entonces podemos acotar el tiempo de pateo, es decir

$$t_{E_0} \leq T \ll t_{fall},$$

$$3.04 \times 10^{-16} \text{ s} \leq T \ll 1.6 \times 10^{-11} \text{ s}.$$

Con estos valores se puede acotar la energía que es absorbida o disipada. Otra observación es que en la ecuación (4.9) el producto  $T\dot{\phi} \cong 3.04 \times 10^{-16} (\dot{\phi}) \cong 2\pi$ .

Por otro lado, tenemos para tiempos desde cero hasta tiempos pequeños que la sumatoria es una cantidad finita y constante de tal manera que su derivada respecto al tiempo da cero. De la ecuación (3.11) tenemos

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} K\phi \sum_{j=0}^{i=\text{pequeño}} \text{sen}(\Omega + \xi\phi(jT)) \delta(t - jT) = \frac{\partial}{\partial t} \text{constante} = 0. \quad (4.10)$$

Esta última expresión nos dará la energía absorbida o disipada por el sistema antes de llegar al equilibrio desde sus condiciones iniciales.

La sumatoria desde tiempos pequeños hasta tiempos grandes, también es cero ya que el término  $\text{sen}(\Omega + \xi\dot{\varphi}(jT)) \approx 0$  por estar acercándose a un punto de equilibrio, es decir

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} K\varphi \sum_{j=\text{pequeño}}^{\infty} \text{sen}(\Omega + \xi\dot{\varphi}(jT)) \delta(t - jT) \approx 0 . \quad (4.11)$$

Por último, el momento angular cuando el sistema está en equilibrio se conserva usando las mismas hipótesis anteriores

$$\frac{d}{dt} \dot{\varphi}_{\text{en equilibrio}} = -\frac{K}{mr^2} \sum_{j=0}^{i=\text{grande}} \text{sen}(\Omega + \xi\dot{\varphi}(jT)) \delta(t - jT) \approx 0 . \quad (4.12)$$

Si observamos la recurrencia  $\dot{\varphi} * = \dot{\varphi} * - \frac{K}{mr^2} \text{sen}(\Omega + \xi\dot{\varphi} *)$  podemos distinguir tres interesantes aspectos:

1. Es paradójica. Como mostramos la energía del sistema es aproximadamente igual a la energía del sistema conservativo cuando está en equilibrio. No obstante, es en general un sistema no conservativo.
2. Hay autorreferencia. Podemos decir que esta recurrencia es autorreferente ya que la velocidad angular depende de ella misma y la dependencia es una función no lineal.
3. Es un bucle. El sistema representa a una partícula que está girando alrededor de un punto, está acotada y la velocidad angular es constante cuando está en equilibrio.

Podemos decir de 1, 2 y 3 que el sistema es candidato a un bucle extraño ya que reúne las características descritas por Hofstadter [13].

## 4.2 Modelo de Bohr y estabilidad

Podemos introducir las condiciones de estabilidad al modelo de Bohr ya que hemos mostrado que es plausible usar la energía de Bohr cuando el sistema está en equilibrio.

Una consecuencia interesante de la condición de estabilidad es que si escogemos  $K = \varrho \hbar$ , sustituimos en  $\frac{K\xi}{mr^2} = \lambda$ , donde  $\hbar$  es la constante de Planck, y tomamos  $r$  como en el modelo de Bohr [9,12,14], es decir,  $r^2 = \frac{n^4 \hbar^4}{m^2 k^2 e^4}$ , donde  $k$  es la constante de Coulomb, y definimos  $\nu_\xi^S = \frac{1}{\xi}$ , que es la frecuencia de equilibrio, entonces tenemos que

$$\nu_\xi^S = \frac{4\pi\varrho R c}{\lambda n^4}, \quad (4.13)$$

donde  $R = \frac{mk^2 e^4}{4\pi c \hbar^3}$  es la constante de Rydberg con un valor de  $R = 1.0972 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$  y  $c$  es la velocidad de la luz. Entonces si,  $2\pi\varrho = \lambda$  tenemos que

$$\nu_\xi^S = \frac{2Rc}{n^4}. \quad (4.14)$$

Cuando escogemos un valor específico de  $H$  escogemos la escala que deseamos, en este caso la escala de Planck. Ahora podemos construir una tabla con los valores de esta frecuencia (ver Tabla 1).

$n$	$\frac{2Rc}{n^4} [\text{Hz}]$
1	$6.580 \times 10^{15}$
2	$4.112 \times 10^{14}$
3	$8.123 \times 10^{13}$
4	$2.570 \times 10^{13}$
5	$1.053 \times 10^{13}$
6	$5.077 \times 10^{12}$
7	$2.740 \times 10^{12}$
8	$1.606 \times 10^{12}$

9	$1.003 \times 10^{12}$
10	$6.580 \times 10^{11}$
11	$4.494 \times 10^{11}$
12	$3.173 \times 10^{11}$
13	$2.304 \times 10^{11}$
14	$1.712 \times 10^{11}$
15	$1.299 \times 10^{11}$

Tabla 1

La frecuencia de equilibrio estable  $\nu_{\xi}^S = \frac{2Rc}{n^4}$  es la necesaria para cuantizar la velocidad angular.

Podemos observar en la Tabla 1 que para  $n = 8$  la frecuencia tiene un valor de  $1.606 \times 10^{12}$  Hz. Este valor es aproximadamente 10 veces el pico o máximo de la frecuencia de la radiación de fondo de microondas cósmica (CMB por sus siglas en inglés: Cosmic Microwave Background Radiation<sup>7</sup>)  $\nu_{CMB} = 1.6023 \times 10^{11}$  Hz.

Además observamos que  $\frac{Rc}{12^4} = 1.586 \times 10^{11}$  Hz este valor es aproximadamente igual a  $\nu_{CMB}$  con 1% de error. De la fórmula de Rydberg, tenemos que  $\nu_R = \frac{Rc}{n^2}$  en  $n = 143.27$  es aproximadamente  $\nu_{CMB}$ . En la Figura 2, podemos comparar  $\nu_{CMB}$ ,  $\nu_R = \frac{Rc}{n^2}$ ,  $\nu_{\xi}^S = \frac{2Rc}{n^4}$ .

La intersección entre las curvas  $\nu_R = \frac{Rc}{n^2}$ ,  $\nu_{\xi}^S = \frac{2Rc}{n^4}$  es en  $n = \sqrt{2}$ . La intersección entre  $\nu_{CMB}$  y  $\nu_{\xi}^S = \frac{2Rc}{n^4}$  es en  $n = 14.27$ . Una observación es que si  $n \rightarrow \infty$ ,  $\nu_{\xi}^S \rightarrow 0$  muy rápido ya que es  $\propto \frac{1}{n^4}$ . En este caso  $\nu_{CMB}$  podría ser considerada la frecuencia frontera de estabilidad para el sistema, a menos que existiera otra fuente cuya frecuencia lo mantuviera estable. Esto es posible ya que la radiación de fondo es en realidad una distribución de frecuencias.

<sup>7</sup> Recuperado de: [https://en.wikipedia.org/wiki/Cosmic\\_microwave\\_background](https://en.wikipedia.org/wiki/Cosmic_microwave_background) Consultado: 10/08/2017

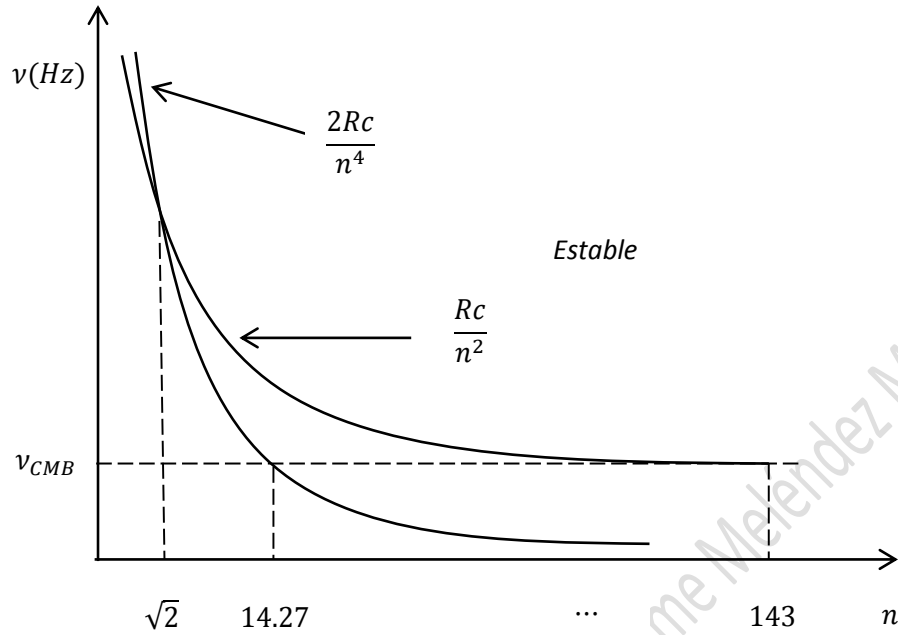


Figura 2. Curvas de frecuencias.

Comparación entre la frecuencia de estabilidad  $\nu_{\xi}^s = \frac{2Rc}{n^4}$ , la frecuencia de la fórmula de Rydberg  $\nu_R = \frac{Rc}{n^2}$  y la frecuencia de la radiación cósmica de fondo  $\nu_{CMB} = 1.6023 \times 10^{11} \text{ Hz}$ .

Analicemos también los puntos de equilibrio inestable

$$L_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar. \quad (4.15)$$

Aplicando el modelo de Bohr obtenemos la siguiente expresión,

$$\nu_{\xi}^u = \frac{2Rc}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^4}. \quad (4.16)$$

Construimos con esta fórmula, la siguiente tabla

$n$	$\frac{2Rc}{(n+\frac{1}{2})^4} [Hz]$
0.5	$1.053 \times 10^{17}$
1.5	$1.299 \times 10^{15}$
2.5	$1.684 \times 10^{14}$
3.5	$4.384 \times 10^{13}$
4.5	$1.604 \times 10^{13}$
5.5	$7.189 \times 10^{12}$
6.5	$3.685 \times 10^{12}$
7.5	$2.079 \times 10^{12}$
8.5	$1.260 \times 10^{12}$
9.5	$8.077 \times 10^{11}$
10.5	$5.412 \times 10^{11}$
11.5	$3.761 \times 10^{11}$
12.5	$2.695 \times 10^{11}$
13.5	$1.981 \times 10^{11}$
14.5	$1.488 \times 10^{11}$

Tabla 2

La frecuencia de equilibrio inestable  $v_{\xi}^u = \frac{2Rc}{(n+\frac{1}{2})^4}$  es la necesaria para cuantizar la velocidad angular.

Ahora construiremos la tabla 3 con los armónicos  $M$  de  $v_{CMB}$ , contra una aproximación de los puntos estables e inestables del sistema usando la expresión  $n = \sqrt[4]{\frac{2Rc}{Mv_{CMB}}}$ .

$M$	$\sqrt[4]{\frac{2Rc}{Mv_{CMB}}}$
2	11.97
4	10.07
5	9.52
10	8.01
13	7.50
17	7.01
23	6.50

32	5.99
45	5.50
66	4.99
100	4.50
161	4.00
273	3.50
510	3.00
1059	2.50
2592	2.00
8192	1.50
41472	1.00
663552	0.5

Tabla 3

$$n = \sqrt[4]{\frac{2Rc}{M\nu_{CMB}}} \text{ en función de los armónicos } M$$

y la frecuencia de radiación de fondo cósmica  
 $\nu_{CMB} = 1.6023 \times 10^{11} \text{ Hz.}$

En los primeros armónicos podemos ver que hay una buena aproximación para varios valores de  $n$ , por ejemplo para el armónico  $M = 2$  tenemos  $n = 11.97 \approx 12$ .

Los armónicos grandes pueden ser aproximados por otra frecuencia distinta de la radiación de fondo y es muy discutible que exista correlación, aunque físicamente sigue siendo interesante que se aproximen algunos armónicos pequeños.

Hay que recordar que la radiación de fondo esta compuesta por un conjunto de frecuencias que tienen una distribución de Planck o de cuerpo negro.

Otra observación notable, es la siguiente:

Tomando la velocidad angular  $\dot{\varphi} = \frac{mk^2 e^4}{\hbar^3 n^3} = \frac{4\pi Rc}{n^3}$  y  $2\pi\nu_B = \dot{\varphi}$ , donde la frecuencia  $\nu_B$  es la frecuencia con la que gira la partícula de nuestro sistema, y es por lo tanto:  $\nu_B = \frac{2Rc}{n^3}$  y si  $n = 34.5$  tenemos que:  $\nu_B = 1.602314 \times 10^{11} \text{ Hz}$  que corresponde con gran aproximación al pico o máximo de frecuencia de la radiación de fondo de microondas que

es  $\nu_{CMB} = 1.6023 \times 10^{11} \text{ Hz}$ . Hemos tomado  $R = 1.09737315685 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$  y  $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$  para nuestro cálculo. Es importante destacar de este cálculo, que el valor de  $n$  es con gran aproximación un semintero que corresponde a un punto de equilibrio en este modelo.

El máximo de frecuencia de radiación de fondo de microondas puede calcularse apartir de la ley de Planck<sup>8</sup> para la radiación de cuerpo negro a una temperatura<sup>9</sup>  $T = 2.72548 \text{ K}$  con la siguiente expresión

$$\nu_{CMB} = \frac{3k_B T}{h} \left( 1 + \frac{W(-3e^{-3})}{3} \right). \quad (4.17)$$

Donde la función  $W(x)$  se denomina función de Lambert<sup>10</sup> y puede ser aproximada por  $W(x) = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8}{3}x^4 \dots$  siempre que se cumpla que:  $\forall x, x$  sea tal que  $|x| < e^{-1}$  y donde  $k_B = 1.38064852 \times 10^{-23} \text{ J/K}$  es la constante de Boltzmann. Si igualamos la frecuencia  $\nu_B$  con la fórmula (4.17) obtenemos

$$\frac{2Rc}{n^3} = \frac{3k_B T}{h} \left( 1 + \frac{W(-3e^{-3})}{3} \right). \quad (4.18)$$

Si  $T = 2.72548 \text{ K}$  entonces  $n = 34.5$  aproximadamente. Despejando  $n$  de (4.18)

$$n = \sqrt[3]{\frac{hRc}{\frac{3k_B T}{2} \left( 1 + \frac{W(-3e^{-3})}{3} \right)}}. \quad (4.19)$$

<sup>8</sup> Recuperado de: [https://en.wikipedia.org/wiki/Planck%27s\\_law](https://en.wikipedia.org/wiki/Planck%27s_law) Consultado: 2/03/2019

<sup>9</sup> Recuperado de: [https://en.wikipedia.org/wiki/Cosmic\\_microwave\\_background](https://en.wikipedia.org/wiki/Cosmic_microwave_background) Consultado: 2/03/2019

<sup>10</sup> Recuperado de: [https://en.wikipedia.org/wiki/Lambert\\_W\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_W_function) Consultado:2/03/2019



Es notable que aparezca:  $E_{CMP} = \frac{3k_B T}{2}$  y  $|E_0| = hRc = 13.6 \text{ eV}$  que son la energía cinética molecular promedio y la energía del estado base de Bohr, respectivamente. Un diagrama de estabilidad para los datos anteriores puede resumirse de la siguiente forma:

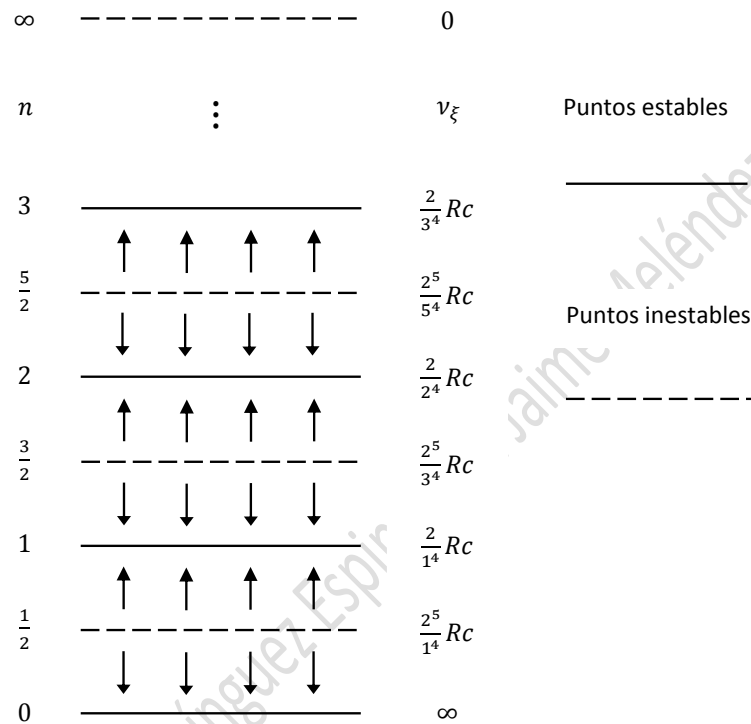


Figura 3. Puntos estables e inestables.

Los puntos estables atraen a la partícula a su posición de equilibrio. Los puntos inestables repelen a la partícula de su posición de equilibrio.

En la Figura 3 en el nivel 0 se muestra un punto estable (atractor) representado por una línea continua, las líneas punteadas representan puntos inestables (repulsivos). La intuición física nos dice que necesitamos invertir el orden de puntos estables e inestables con el objetivo de evitar que el nivel cero corresponda a un punto atractor.

Otra posibilidad es que al necesitarse una frecuencia de pateo infinita, el nivel 0 sea físicamente poco plausible (ver Figura 4). Se pueden generar las siguiente preguntas: ¿Cuál

de los dos escenarios es más probable desde el punto de vista físico? ¿Experimentalmente son sostenibles estos dos escenarios? ¿Es plausible físicamente que los niveles  $\frac{n}{2}$  correspondan ya sea al equilibrio estable o bien al equilibrio inestable?

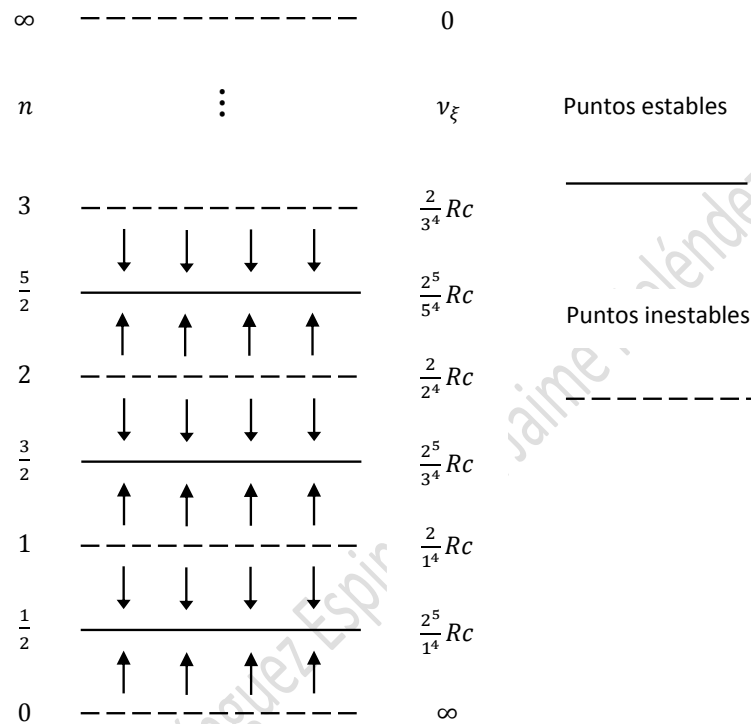


Figura 4. Inversión de puntos estables e inestables.

Inversión del orden de los puntos estables e inestables, estos puntos siguen siendo puntos de equilibrio. Nótese el comportamiento en infinito.

### 4.3 Principio de incertidumbre

El principio de incertidumbre de Heisenberg [9] es un elemento importante de la teoría cuántica, el cual se puede enunciar como una desigualdad. Este modelo sugiere de manera natural una desigualdad, tomando algunas hipótesis importantes. De la condición de estabilidad tenemos:

[42]

$$0 < \frac{K\xi}{mr^2} < 2 . \quad (4.20)$$

Sustituyendo  $K = \rho\hbar$  se obtiene

$$0 < \frac{\rho\hbar\xi}{mr^2} < 2. \quad (4.21)$$

Apartir de la ecuacion (3.19) si  $n = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\dot{\varphi} = \frac{v}{r}$  y  $\xi \frac{v}{r} = 2\pi n$  donde  $v$  es la norma de velocidad tangencial de la partícula. Sustituyendo estos términos en (4.21) tenemos

$$\frac{2\pi\rho n\hbar}{mr v} < 2, \quad (4.22)$$

luego, si  $p = mv$  es el momento lineal y  $n = 1$ , entonces

$$\frac{2\pi\rho\hbar}{2} < p \cdot r . \quad (4.23)$$

Si  $2\pi\rho = 1$ , tendríamos una condición equivalente a que  $\frac{2\pi\rho}{\lambda} = 1$  con  $\lambda = 1$ , entonces

$$\frac{\hbar}{2} < p \cdot r . \quad (4.24)$$

Para obtener el principio de incertidumbre necesitamos la hipótesis de De Broglie que desarrollamos en la siguiente sección, sea  $\lambda = \frac{h}{p}$  con  $\lambda = 2\pi r$  por lo tanto

$$2\pi r = \frac{h}{p} , \quad (4.25)$$

tomando variaciones finitas en la expresión anterior, tenemos

$$\frac{2\pi\Delta r}{\Delta p} = -\frac{h}{p^2}, \quad (4.26)$$

De la ecuación (4.25) y tomando el valor absoluto en la anterior expresión, obtenemos

$$\frac{2\pi\Delta r}{\Delta p} = \frac{h}{p^2} = \frac{2\pi r}{p}, \quad (4.27)$$

luego

$$p = \frac{\Delta p}{\Delta r} \cdot r, \quad (4.28)$$

combinando las expresiones (4.24) y (4.28), tenemos

$$\frac{\hbar}{2} < \Delta p \cdot \frac{r^2}{\Delta r}. \quad (4.29)$$

Ahora tomaremos como hipótesis que  $r \sim \Delta r$  debido a que estamos en escalas pequeñas en las cuales el error experimental es grande en comparación con los objetos de medición, finalmente

$$\frac{\hbar}{2} < \Delta p \cdot \Delta r. \quad (4.30)$$

#### 4.4 Hipótesis de De Broglie

Una manera de deducir la hipótesis de De Broglie [9], es la siguiente: en la ecuación (3.14) tenemos el término  $\text{sen}(\Omega + \xi\dot{\phi}(jT))$ , este término en general no presenta condiciones de equilibrio, es decir:

[44]

$$\xi \dot{\phi}(jT) = \xi \dot{\phi}_{jT} = \varphi . \quad (4.31)$$

Cuando tenemos equilibrio estable y  $\Omega = 0$  , tenemos

$$\xi \dot{\phi} = 2\pi n. \quad (4.32)$$

Como la velocidad angular es  $\dot{\phi} = \frac{v}{r}$  , (4.32) se transforma en

$$\xi \frac{v}{r} = 2\pi n. \quad (4.33)$$

Además, de la condición de estabilidad, ecuación (3.21) tenemos que  $\lambda = \frac{\varrho \hbar \xi}{mr^2}$ , de donde

$$\xi = \frac{\lambda mr^2}{\varrho \hbar}. \quad (4.34)$$

Sustituyendo (4.33) en la ecuación anterior

$$\frac{\lambda mr^2}{\varrho \hbar} \frac{v}{r} = 2\pi n. \quad (4.35)$$

Arreglando términos y si  $p = mv$

$$2\pi r = \left( \frac{2\pi \varrho}{\lambda} \right) \frac{hn}{p}, \quad (4.36)$$

si  $n = 1$ ,  $2\pi \varrho = \lambda$  ,  $\lambda = 2\pi r$ , entonces

$$\lambda = 2\pi r = \frac{h}{p}. \quad (4.37)$$

En la ecuación (4.37), introduciremos un parámetro nuevo  $\zeta$ <sup>11</sup>, este parámetro nos ayudará a estudiar la región, tal que  $\lambda > 2$ , es decir

$$\lambda = \left( \frac{2\pi\varphi}{\lambda} \right) \frac{h(n \pm \frac{\zeta}{2\pi})}{p}. \quad (4.38)$$

¿Qué pasa cuando  $n = 1$ ,  $2 < \lambda < 4.5$  y cuando  $\lambda > \sim 4.5$  en la ecuación (4.38)? Podemos distinguir 3 tipos de intervalos. Primer tipo: los intervalos asociados a períodos mayores a 1 para  $2 < \lambda < 4.6$ . Segundo tipo, en el mismo intervalo  $2 < \lambda < 4.6$  los puntos aperiódicos y los de tercer tipo, en  $\lambda > \sim 4.6$ , que corresponde a una zona donde los valores de la velocidad angular ya no están acotados como se muestra en la Figura 1.

Una interpretación de lo anterior es que ya no podemos hablar de ondas de De Broglie excepto cuando estamos en los intervalos que corresponden a otros períodos, es decir, podemos relacionar los conceptos de colapso de la función de onda y decoherencia, con el comportamiento del sistema en los intervalos de caos y el comportamiento en la zona no acotada, ya que no es posible definir un solo valor para nuestra onda de longitud  $\lambda$  sino que tenemos muchos valores. Resumiendo: la longitud  $\lambda$  y la velocidad angular toman muchos valores de manera errática ya que  $\frac{\zeta}{2\pi}$  esta en la zona de caos o bien crece en el tiempo en la zona no acotada.

Otra consecuencia que obtenemos de este modelo, si partimos de la ecuación (4.32) :

$$\xi \dot{\phi} = 2\pi n. \quad (4.39)$$

Y si,  $\dot{\phi} = \frac{v}{r}$  y  $\frac{1}{v_{\xi}} = \xi$  donde  $v_{\xi}$  es la frecuencia de estabilidad. Sustituyendo en (4.39) se obtiene

---

<sup>11</sup> Letra griega sigma minúscula

[46]

$$\frac{v}{2\pi r} = n\nu_{\xi}. \quad (4.40)$$

Si definimos como en (4.37), a  $\lambda = 2\pi r$  la longitud de onda De Broglie. Podemos entonces obtener la frecuencia de De Broglie, si  $c = \lambda\nu_{Broglie}$  sustituyendo en (4.39), obtenemos

$$\nu_{Broglie} \left( \frac{v}{c} \right) = n\nu_{\xi}. \quad (4.41)$$

De nuevo apartir de la ecuación (4.32) podemos deducir la frecuencia con la gira la partícula  $2\pi\nu_B = \dot{\phi}$  y de (4.39), se tiene

$$\nu_B = n\nu_{\xi}. \quad (4.42)$$

Ahora de las ecuaciones (4.41) y de (4.42), deducimos que

$$\nu_{Broglie} \left( \frac{v}{c} \right) = \nu_B. \quad (4.43)$$

La ecuación (4.43) puede interpretarse como un corrimiento debido al efecto Doppler de la frecuencia de De Broglie. Aunque no aparece el factor relacionado al término de Lorentz, tenemos a  $\frac{v}{c}$ , que a bajas velocidades corresponde a una aproximación de dicho factor. Finalmente, si  $\alpha = \frac{v}{c}$  es decir, la constante de estructura fina, podemos reescribir (4.43) como

$$\alpha\nu_{Broglie} = \nu_B \quad (4.44)$$

## 4.5 Límite Clásico

Ahora podemos obtener el límite clásico del sistema. Para esto tomaremos valores grandes para la masa y las distancias, de donde

$$\frac{d}{dt}(\dot{\phi}) = -\frac{K}{mr^2} \sum_{j=0}^{\infty} \text{sen}(\Omega + \xi \dot{\phi}(jT)) \delta(t - jT) . \quad (4.45)$$

La ecuación anterior contiene la contribución del potencial pateado. Si tomamos los valores  $K = \varphi \hbar$  y  $\varphi = \frac{1}{2\pi}$  tenemos

$$\frac{d}{dt}(\dot{\phi}) = -\frac{\hbar}{2\pi mr^2} \sum_{j=0}^{\infty} \text{sen}(\Omega + \xi \dot{\phi}(jT)) \delta(t - jT) . \quad (4.46)$$

En esta última expresión para valores grandes de la masa y la distancia  $\frac{\hbar}{2\pi mr^2} \approx 0$  ya que  $\hbar \sim 10^{-34} [j \cdot s]$ . Por lo tanto, para un intervalo pequeño de tiempo cualquiera:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\phi}) \approx 0. \quad (4.47)$$

Esta última aproximación corresponde al momento angular para un sistema conservativo. Físicamente podemos imaginar que tenemos una partícula “grande” recibiendo constantemente pulsos muy débiles, que no afectan a su dinámica.

Otra manera de ver este límite consiste en estudiar la recurrencia para para estos mismos valores, es decir



[48]

$$\dot{\phi}_{(j+1)T} = \dot{\phi}_{iT} - \frac{\hbar}{2\pi m r^2} \text{sen}(\Omega + \xi \dot{\phi}_{jT}). \quad (4.48)$$

Como la masa y la distancia son grandes:

$$\frac{\hbar}{2\pi m r^2} = \epsilon \approx 0. \quad (4.49)$$

Luego

$$\dot{\phi}_{(j+1)T} = \dot{\phi}_{jT} - \epsilon, \quad (4.50)$$

donde  $\epsilon \ll \dot{\phi}_{jT}$ , finalmente tenemos

$$\dot{\phi}_{(j+1)T} = \dot{\phi}_{jT}. \quad (4.51)$$

Es decir, la velocidad angular es constante.

Copyright Moisés Domínguez Espinosa & Jaime Meléndez Martínez

## CAPÍTULO 5

### Generalizaciones del modelo y aplicaciones

#### 5.1 Ecuación de energía y ecuación de Shrödinger

Sustituyendo en la ecuación (4.1) los valores de  $K$  para cerca del régimen estable, i.e.,  $\varphi \approx \dot{\varphi}t$  y  $r \approx \text{constante}$  tenemos que

$$\mathcal{H}_{\text{cercaequilibrio}} \approx \frac{1}{2}(m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\varphi}^2) + U(r) + \frac{\hbar\dot{\varphi}}{2\pi}t \sum_{j=0}^{\infty} \text{sen}(\Omega + \xi\dot{\varphi}(jT)) \delta(t - jT). \quad (5.1)$$

Además, tomando  $\dot{\varphi} = \frac{n\hbar}{mr^2}$  y tomando en cuenta que  $\epsilon = \frac{t}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \text{sen}(\Omega + \xi\dot{\varphi}(jT)) \delta(t - jT)$  es una cantidad que tiende a cero, llegamos a que

$$\mathcal{H}_{\text{cercaequilibrio}} \approx \frac{1}{2} \left( m\dot{r}^2 + \frac{n^2\hbar^2}{mr^2} \right) + U(r) + \frac{n\hbar^2}{2mr^2} \epsilon. \quad (5.2)$$

Así, la energía del equilibrio estable<sup>12</sup> es por lo tanto:

$$\mathcal{H}_{\text{equilibrioestable}} = U(r) + \frac{\hbar^2 n^2}{2mr^2}, \quad (5.3)$$

donde  $p^2 = 0$  ya que  $\dot{r} = 0$ .

Luego, escribamos la ecuación de onda radial de Schrödinger [9]

---

<sup>12</sup> Para el equilibrio inestable tenemos:  $\mathcal{H}_{\text{equilibrioinestable}} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{4r^2} \right) + U(r) + \frac{\hbar^2 n(n+1)}{2mr^2}$

$$Eu = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2u}{dr^2} + \left( U(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \right) u, \quad (5.4)$$

donde  $\hbar^2 \approx 10^{-68} \text{Js} \approx 0$  y  $u = u(r) = rR(r)$ . Si comparamos las ecuaciones (5.3) que corresponde a los puntos estables y la ecuación de los puntos inestables (ver pie de página 12) y las comparamos con (5.4), se tiene que la ecuación de los puntos inestables es mas similar a la ecuación de Schrödinger.

## 5.2. Número de elementos químicos estables

En el modelo de Bohr tenemos una expresión que incluye el valor de  $Z$  es decir del número atómico

$$r^2 = \frac{n^4 \hbar^4}{m^2 k^2 Z^2 e^4}. \quad (5.5)$$

De la condición de estabilidad tenemos

$$0 < \frac{K\xi}{mr^2} < 2. \quad (5.6)$$

Si  $K = \frac{\hbar}{2\pi}$  y  $v_\xi = \frac{1}{\xi}$ , usando la constante  $R = \frac{mk^2 e^4}{4\pi\hbar^3}$  tenemos

$$Z^2 < \frac{n^4 v_\xi}{Rc}. \quad (5.7)$$

Esto implica que:

$$Z < \sqrt{\frac{n^4 v_\xi}{Rc}}. \quad (5.8)$$

En la Tabla 1 podemos observar que existe un valor máximo para el número de armónicos, este valor máximo se alcanza para  $n = 1$ . Una pregunta interesante es la siguiente: ¿qué sucede con estos armónicos cuando tenemos un número  $Z > 1$ ? Podemos reformular el problema de la siguiente manera. Supongamos que  $n = 1$  en la expresión (5.8). Observamos entonces que la frecuencia  $\nu_\xi$  alcanza su máximo:

$$Z < \sqrt{\frac{\nu_\xi^{max}}{Rc}}. \quad (5.9)$$

Como hipótesis proponemos que el número máximo de armónicos sea alrededor de  $M^{max} \sim 10^8$  (ver la Tabla 3) y que  $n = \sqrt[4]{\frac{2Rc}{M\nu_{CMB}}}$ . Tomando  $M^{max}\nu_{CMB} \sim 10^{19} \text{ Hz} \sim \nu_\xi^{max}$  y  $Rc = 3.29 \times 10^{15} \text{ Hz} \sim 10^{15} \text{ Hz}$ , por lo que si  $\nu_\xi^{max} \sim 10^{19} \text{ Hz}$  entonces

$$Z < \sqrt{\frac{M^{max}\nu_{CMB}}{10^{15}}} \cong 10^2. \quad (5.10)$$

La cota de la desigualdad (5.10) es aproximadamente del orden de magnitud de los elementos químicos estables conocidos. Por lo tanto el modelo predice, que para tener un número máximo de elementos químicos se necesita un número máximo de armónicos de la radiación de fondo asociado a cada elemento químico. Si este número máximo de armónicos es alrededor de  $M^{max} \sim 10^8$  entonces logramos tener alrededor de 100 elementos químicos como cota superior.

### 5.3 Matriz Jacobiana de las Ecuaciones en Diferencias

La matriz Jacobiana nos da información sobre el volumen del espacio fase en este caso sobre el área del espacio fase. Tomando las ecuaciones (3.13) para  $\Omega = 0$

$$\begin{aligned}\varphi_{(j+1)T} &= \varphi_{jT} + T\dot{\varphi}_{jT} - \frac{KT}{mr^2} \text{sen}(\xi\dot{\varphi}_{jT}) \\ \dot{\varphi}_{(j+1)T} &= \dot{\varphi}_{jT} - \frac{K}{mr^2} \text{sen}(\xi\dot{\varphi}_{jT}) ,\end{aligned}\tag{5.11}$$

y como

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{(j+1)T}}{\partial \varphi_{jT}} & \frac{\partial \varphi_{(j+1)T}}{\partial \dot{\varphi}_{jT}} \\ \frac{\partial \dot{\varphi}_{(j+1)T}}{\partial \varphi_{jT}} & \frac{\partial \dot{\varphi}_{(j+1)T}}{\partial \dot{\varphi}_{jT}} \end{pmatrix},\tag{5.12}$$

se obtiene que

$$J = \begin{pmatrix} 1 & T \left( 1 - \frac{K\xi}{mr^2} \cos(\xi\dot{\varphi}_{jT}) \right) \\ 0 & 1 - \frac{K\xi}{mr^2} \cos(\xi\dot{\varphi}_{jT}) \end{pmatrix},\tag{5.13}$$

con

$$\text{Det}(J) = 1 - \frac{K\xi}{mr^2} \cos(\xi\dot{\varphi}_{jT}),\tag{5.14}$$

donde  $\frac{K\xi}{mr^2} = \frac{\hbar\xi}{2\pi mr^2} = 1$ . Para los puntos asintóticamente estables  $\xi\dot{\varphi}_{jT} = 2n\pi$  tenemos que

$$\text{Det}(J) = 0.\tag{5.15}$$

Es decir, el sistema disipa energía. Si dejamos al tiempo evolucionar el espacio fase se contrae. Para los puntos inestables  $\xi\dot{\varphi}_{jT} = (2n + 1)\pi$  tenemos que

$$\text{Det}(\mathbf{J}) = 2. \quad (5.16)$$

En este caso el sistema absorbe energía. Si dejamos al tiempo evolucionar el espacio fase se expande. Si antes de calcular el determinante dejamos que el tiempo evolucione suficientemente, las velocidades angulares se aproximan a las velocidades de equilibrio y el último término de las recurrencias es aproximadamente cero, es decir:

$$\begin{aligned} \varphi_{(j+1)T} &= \varphi_{jT} + T\dot{\varphi}_{jT} - \frac{KT}{mr^2}\epsilon \\ \dot{\varphi}_{(j+1)T} &= \dot{\varphi}_{jT} - \frac{K}{mr^2}\epsilon, \end{aligned} \quad (5.17)$$

de donde

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

con

$$\text{Det}(\mathbf{J}) = 1. \quad (5.19)$$

Una vez que el sistema ha disipado o absorbido suficiente energía para llevarlo a la velocidad angular de equilibrio, el sistema ya no disipa ni absorbe más energía. El espacio fase ya no se contrae ni se expande.

#### 5.4 Ángulo theta constante

En coordenadas esféricas [15] la aceleración se expresa de la siguiente manera

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta)\hat{\theta} + (r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta)\hat{\varphi} , \quad (5.20)$$

donde  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Si  $\theta = \frac{\pi}{2}$  tenemos el lagrangiano de nuestro sistema.

Esto nos sugiere que si  $\theta$  es constante pero diferente de  $\frac{\pi}{2}$  podemos tener el mismo sistema pero en otros planos paralelos. Esto último permitiría al sistema estar en planos paralelos al primer sistema como muestra la figura siguiente

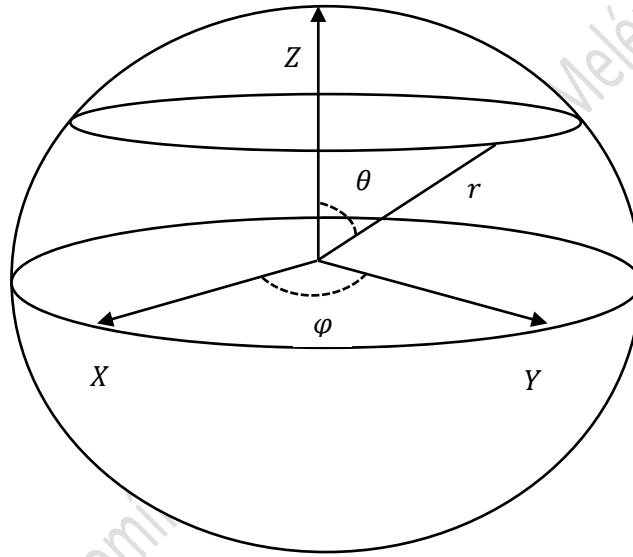


Figura 5. Coordenadas esféricas.

La simetría del sistema sugiere un Lagrangiano con planos paralelos al plano que contiene el origen, es decir planos tal que  $\theta$  sea constante.

El nuevo Lagrangiano entonces quedaría de la siguiente manera

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - U(r) - K\varphi \sum_{j=0}^{\infty} \sin(\Omega + \xi\dot{\varphi}(jT)) \delta(t - jT). \quad (5.21)$$

Y las ecuaciones de Euler-Lagrange  $\frac{\partial}{\partial r} U(r) = \frac{kZe^2}{r^2}$  como:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - m r \dot{\phi}^2 \text{sen}^2 \theta + \frac{kZe^2}{r^2} = 0, \quad (5.22)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2 \dot{\phi} \text{sen}^2 \theta) + K \sum_{j=0}^{\infty} \text{sen}(\Omega + \xi \dot{\phi}(jT)) \delta(t - jT) = 0, \quad (5.23)$$

donde  $\theta \neq 0$ , pero constante. A partir de la ecuación (5.22) podemos encontrar el punto fijo.

Este proceso, como podemos observar, es el caso matemáticamente equivalente al empleado por Bohr

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\text{sen}\theta} \sqrt{\frac{kZe^2}{mr^3}}. \quad (5.24)$$

De la ecuación (5.23) obtenemos los puntos fijos del sistema si  $\xi \dot{\phi} = 2n\pi - \Omega$ :

$$\frac{2n\pi - \Omega}{\xi} = \frac{1}{\text{sen}\theta} \sqrt{\frac{kZe^2}{mr^3}}. \quad (5.25)$$

Despejando  $r$  de ecuación (5.25) tenemos:

$$r = \sqrt[3]{\frac{kZe^2 \xi^2}{(2n\pi - \Omega)^2 m \text{sen}^2 \theta}}. \quad (5.26)$$



Si  $v_\xi = \frac{1}{\xi}$ , entonces

$$v_\xi = \left( \frac{\lambda}{2\pi\varrho} \right)^3 \frac{2RcZ^2 \text{sen}^2\theta}{\left( n - \frac{\Omega}{2\pi} \right)^4}. \quad (5.27)$$

Podemos ahora simplificar  $r$  de la siguiente manera

$$r = \left( \frac{2\pi\varrho}{\lambda} \right)^2 \frac{\left( n - \frac{\Omega}{2\pi} \right)^2 \hbar^2}{mkZe^2 \text{sen}^2\theta}, \quad (5.28)$$

y la energía  $E$ :

$$E = \frac{kZe^2}{2r} = \left( \frac{\lambda}{2\pi\varrho} \right)^2 \frac{E_0 Z^2 \text{sen}^2\theta}{\left( n - \frac{\Omega}{2\pi} \right)^2}, \quad (5.29)$$

donde  $E_0 = \frac{mk^2e^4}{2\hbar^2}$  es la energía del estado base del hidrógeno.

## 5.5 Puntos fijos de orden mayor

En la sección 5.2 (pág. 50) vimos que si el número máximo de armónicos es alrededor de  $M^{max} \sim 10^8$  entonces se pueden tener alrededor de 100 elementos químicos como cota superior. Sin embargo, de la tabla 3 (pág. 38) sabemos que el número máximo de armónicos es de  $41472 \sim 10^4$  para  $n = 1$  o bien  $663552 \sim 10^5$  para  $n = \frac{1}{2}$  es decir no hay suficientes armónicos para mantener los alrededor de 100 elementos químicos estables conocidos, ¿entonces dónde quedan los otros elementos químicos? Una respuesta plausible es que estos ocupan puntos de estabilidad mas allá de los puntos periódicos de orden uno; es decir, estarían en los otros puntos fijos.

Estos corresponderían a los niveles  $s, p, d, f$ , es decir, podrían asociarse a los puntos fijos  $\phi^k$  de otros períodos. Para ello enunciemos el Teorema de Sarkovski [2,3,8] de manera informal. Los puntos fijos de orden  $k$  tales que  $x^* = f^k(x^*)$  en un sistema, cumplen con el siguiente orden:

$$1 \triangleleft 2 \triangleleft 4 \triangleleft 8 \triangleleft \dots \triangleleft 7 \cdot 2^n \triangleleft 5 \cdot 2^n \triangleleft 3 \cdot 2^n \triangleleft \dots \triangleleft 7 \triangleleft 5 \triangleleft 3$$

Como podemos observar el orden de Sarkovski para un subconjunto guarda correlación con el número máximo de electrones posibles en los subniveles de energía, es decir,  $s, p, d, f \rightarrow 2, 6, 10, 14$  podemos asociar entonces a los punto fijos de estos ordenes, los subniveles de energía. El término  $\zeta^{spdf}$  representaría un desplazamiento del punto fijo de periodo uno. Ahora podemos dar una fórmula empírica con base en las expresiones obtenidas previamente, ya que las matemáticas son muy complejas. La fórmula sugerida es:

$$E = - \left( \frac{\lambda}{2\pi\varphi} \right)^2 \frac{E_0 Z^2 \text{sen}^2 \theta}{\left( n - \frac{\Omega \pm \zeta^{spdf}}{2\pi} \right)^2} + kick , \quad (5.30)$$

donde

$$kick = \varphi \hbar \varphi \sum_{j=0}^{\infty} \text{sen}(2\pi n \pm \zeta^{spdf}) \delta(t - jT) . \quad (5.31)$$

En los periodos mayor o igual a 2 el termino *kick* no necesariamente es pequeño. Este término *kick* corresponde a la suma de un conjunto de impulsos entre los estados asociados a los puntos fijos, y es el responsable de los saltos entre los estados asociados a los puntos fijos, es decir, el sistema está brincando entre cada rama de puntos fijos debido a la disipación o absorción de energía asociada al término *kick*.

Sin embargo, en promedio este término *kick* es aproximadamente cero, ya que la partícula regresa a la misma velocidad angular de partida. Debido a que el valor  $\varphi$  fluctúa de manera compleja hay pequeñas fluctuaciones en la energía asociada al *kick*, es decir, el sistema absorbe y disipa aproximadamente la misma energía cuando está oscilando entre puntos

fijos. Calcular analíticamente  $\zeta^{spdf}$  y  $\lambda$  es muy complicado pero pueden obtenerse numéricamente, también pueden observarse en la siguiente gráfica.

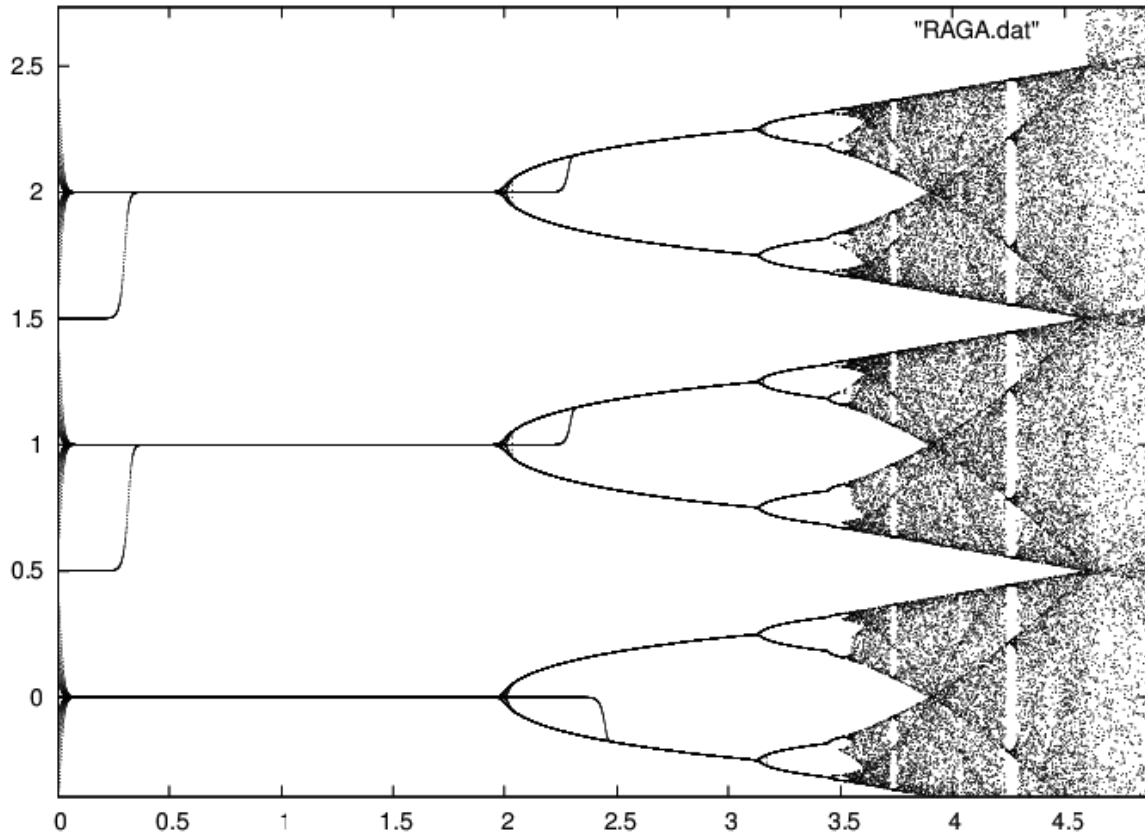


Figura 6. Conjunto de bifurcaciones de puntos fijos.

En el eje horizontal el parámetro de pateo  $\frac{K}{2\pi}$ . En el eje vertical la velocidad angular estable  $\dot{\varphi}^*$  y sus puntos fijos  $\dot{\varphi}^k$  de ordenes mas altos, estos puntos podrían corresponder a subniveles de energía, en este modelo.

## 5.6 Estabilidad, radiación de Hawking y densidad del vacío

Una aplicación interesante de este modelo es la siguiente: apartir de la condición de estabilidad podemos deducir la temperatura de la radiación de Hawking<sup>13</sup> para agujeros negros, para ello sustuiremos el radio de Schwarzschild<sup>14</sup> en la expresión de estabilidad,

<sup>13</sup> Recuperado de: [https://en.wikipedia.org/wiki/Hawking\\_radiation](https://en.wikipedia.org/wiki/Hawking_radiation) Consultado: 10/12/2018

<sup>14</sup> Recuperado de: [https://en.wikipedia.org/wiki/Schwarzschild\\_radius](https://en.wikipedia.org/wiki/Schwarzschild_radius) Consultado:10/12/2018

este proceso es matemáticamente equivalente a usar el principio de De Broglie y aunque se trata de un cálculo ingenuo es notable por su simplicidad. Recordemos primero que la condición de estabilidad es:

$$0 < \frac{\varrho \hbar \xi}{mr^2} < 2, \quad (5.32)$$

y sea  $\frac{\varrho \hbar \xi}{mr^2} = \lambda$  con  $0 < \lambda < 2$  el radio de Schwarzschild para agujeros negros,  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$  y recordando que el sistema debe cumplir que  $2\pi\varrho = \lambda$ , tenemos a partir de (5.32)

$$\frac{\hbar \xi}{mr^2} = 2\pi \quad (5.33)$$

Ahora si introducimos el radio de Schwarzschild al cuadrado  $r_s^2 = \frac{4G^2M^2}{c^4}$  en (5.33) se tiene

$$\frac{\hbar c^4 \xi}{8\pi G^2 M^2 m} = 1. \quad (5.34)$$

Podemos observar que aparece de forma natural el término  $8\pi$  de la radiación de Hawking.

Ahora, podemos reordenar los términos de la siguiente forma si  $\nu_\xi = \frac{1}{\xi}$ , entonces

$$E = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM} = \frac{GMm\nu_\xi}{c}. \quad (5.35)$$

Estos dos términos tienen unidades de energía, podemos igualar esta expresión a  $k_B T_B$  donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann y  $T_B$  la temperatura por lo tanto

$$k_B T_B = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M} = \frac{G M m v_\xi}{c}. \quad (5.36)$$

De la ecuación (5.36), obtenemos:

$$T_B = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B} = \frac{G M m v_\xi}{c k_B}. \quad (5.37)$$

Esta expresión es la temperatura de radiación de Hawking, el último término contiene la frecuencia de estabilidad y es interesante que sea relativamente simple al contener solo la velocidad de la luz, la constante de gravitación universal de Newton y la constante de Boltzmann así como también las masas del sistema.

Si sustituimos  $v_\xi = \frac{2Z^2 R c}{n^4}$  con  $R = \frac{m k^2 e^4}{4\pi c \hbar^3}$  podemos resolver la ecuación (5.37) para el producto  $Mm$  de la siguiente forma:

$$Mm = \frac{\hbar^2 c^2 n^2}{2GkZe^2} = \frac{M_p^2 n^2}{2\alpha Z}, \quad (5.38)$$

donde  $M_p^2 = \frac{\hbar c}{G}$  es la masa de Planck al cuadrado, sustituyendo este último resultado en la ecuación (5.38) encontramos

$$E = \frac{\alpha Z m c^2}{4\pi n^2}, \quad (5.39)$$

donde  $\alpha = \frac{ke^2}{\hbar c}$  es la constante de estructura fina, esta constante como sabemos no tiene unidades. De la ecuación (5.36) y definiendo  $v_\xi = \frac{c}{\lambda_\xi}$  podemos separar los términos de la siguiente manera:

$$\frac{\hbar}{Mc} = \left(\frac{8\pi G}{c^4}\right) \frac{G M m}{\lambda_\xi}. \quad (5.40)$$

De manera equivalente podemos reescribir (5.40) como

$$\lambda_{\xi} = \left( \frac{8\pi G}{c^4} \right) \frac{GMm}{\frac{\hbar}{Mc}}. \quad (5.41)$$

Usando en la ecuación (5.41) la masa de Planck, obtenemos

$$\lambda_{\xi} = \left( \frac{4\pi G}{c^2} \right) \frac{Mn^2}{\alpha Z}. \quad (5.42)$$

La constante  $\frac{8\pi G}{c^4}$  se conoce como constante de gravitación de Einstein<sup>15</sup>. Esta última cantidad nos permite escribir la densidad del vacío<sup>16</sup> en términos de la frecuencia de estabilidad de la siguiente manera:

$$\rho_{vac} = \Lambda \frac{c^2}{8\pi G} = \Lambda \frac{GM^2 m v_{\xi}}{\hbar c^2}. \quad (5.43)$$

Podemos reescribir (5.43) en términos de la masa, la carga y la longitud de onda de estabilidad, como:

$$\rho_{vac} = \Lambda \frac{Mn^2}{2\alpha Z \lambda_{\xi}} \quad (5.44)$$

## 5.7 Gravitación

En esta sección estudiaremos las consecuencias de aplicar este modelo de cuantización al campo gravitatorio, para ello sustituimos el potencial de Coulomb por el potencial Gravitacional de Newton en el modelo de Bohr e incorporamos las ecuaciones de estabilidad.

<sup>15</sup> Recuperado de: [https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein\\_field\\_equations](https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein_field_equations) Consultado: 10/12/2018

<sup>16</sup> Recuperado de: [https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein\\_field\\_equations](https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein_field_equations) Consultado: 10/12/2018

Sí la fuerza centrípeta es igual a la fuerza Gravitacional, entonces:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}, \quad (5.45)$$

despejando  $v$ , obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (5.46)$$

Postularemos que hay cuantización, aunque en la naturaleza no se tenga evidencia de ello, aquí supondremos que de existir dicha cuantización estaría descrita por las siguientes ecuaciones. Por analogía al modelo de Bohr, para el momento angular tenemos

$$L = mvr = nH, \quad (5.47)$$

donde  $H$  tiene unidades de momento angular. Despejando  $r$  de (5.47) se encuentra que

$$r = \frac{nH}{mv}. \quad (5.48)$$

Luego, sustituyendo  $v$  de la ecuación (5.46) en (5.48) y simplificando, obtenemos

$$r = \frac{n^2 H^2}{GMm^2}, \quad (5.49)$$

La energía total es la suma de la energía potencial y la energía cinética, por lo tanto

$$E_T = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}. \quad (5.50)$$

Como la partícula gira alrededor de un punto, toda la energía cinética se debe a la rotación, luego:

$$E_T = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2 - \frac{GMm}{r}, \quad (5.51)$$

y además

$$E_T = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2 + U(r). \quad (5.52)$$

La expresión (5.52) es la energía gravitacional. Además, de la de fuerza centrípeta se deduce que  $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{GMm}{2r}$ , esto implica que:

$$E_T = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}. \quad (5.53)$$

Sustituyendo el valor de  $r$  en (5.53):

$$E_T = -\frac{G^2 M^2 m^3}{2H^2 n^2} = -E_0 \frac{1}{n^2}. \quad (5.54)$$

Donde  $E_0$  es:

$$E_0 = \frac{G^2 M^2 m^3}{2H^2}. \quad (5.55)$$

Postulamos que la energía entre saltos viene dada de manera análoga a la de Bohr por:

$$2\pi H \nu = E_i - E_f. \quad (5.56)$$

De (5.54) tenemos que

$$\nu = \frac{E_0}{2\pi H} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right). \quad (5.57)$$

Si  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ , entonces

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_0}{2\pi c H} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right), \quad (5.58)$$



o bien

$$\frac{1}{\lambda} = R^G \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right). \quad (5.59)$$

Definimos  $R^G$  de manera análoga a la constante de Rydberg, aunque esta cantidad no es constante sino variable. Tendría que existir el “gravitón” para crear ecuaciones totalmente análogas a las del modelo de Bohr, sin embargo podemos simplificar nuestras ecuaciones definiendo la cantidad  $R^G$  de la siguiente manera

$$R^G = \frac{E_o}{2\pi cH} = \frac{G^2 M^2 m^3}{4\pi cH^3}. \quad (5.60)$$

Ahora, introduciremos las ecuaciones de estabilidad para el campo gravitacional. Estas ecuaciones no cambian de forma ya que tenemos un potencial central, entonces

$$0 < \frac{K\xi}{mr^2} < 2. \quad (5.61)$$

Si  $K = \varrho H$  y  $\frac{K\xi}{mr^2} = \lambda$  con  $0 < \lambda < 2$  y definiendo la frecuencia de estabilidad como  $\nu_\xi^G = \frac{1}{\xi}$ , obtenemos

$$\nu_\xi^G = \frac{\varrho H}{\lambda m r^2}. \quad (5.62)$$

Recordando que se debe cumplir  $2\pi\varrho = \lambda$  para que el sistema tenga equilibrio estable se tiene que

$$\nu_\xi^G = \frac{H}{2\pi m r^2}, \quad (5.63)$$

sustituyendo  $r$  de la ecuación (5.49) y simplificando

$$v_{\xi}^G = \frac{G^2 M^2 m^3}{2\pi n^4 H^3} = \frac{2R^G c}{n^4}. \quad (5.64)$$

Vemos que toma la misma forma que la frecuencia de estabilidad para el caso del potencial de Coulomb en términos de  $R^G$ .

Como una última aplicación de este modelo, podemos también obtener un análogo al radio de Schwarzschild pero para el caso eléctrico y analizar sus consecuencias. Esto podría aplicarse en objetos que posean grandes cantidades de carga, tales que se comporten como “agujeros negros” eléctricos. Para ello la energía cinética debe ser igual a la energía potencial y pediríamos que la velocidad de escape sea igual a la velocidad de la luz, de la siguiente manera

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{kZe^2}{r}. \quad (5.65)$$

Despejando el radio de escape en (5.65) y dando el valor de  $c$  a  $v$ , ya que es la velocidad máxima permitida en un sistema físico, tenemos

$$r_e = \frac{2kZe^2}{mc^2}, \quad (5.66)$$

Sustituyendo el resultado de (5.66) en la condición de estabilidad (5.62), haciendo  $r_e = r$ , obtenemos

$$E = \frac{Hc^3 m}{8\pi kZe^2} = \frac{kZe^2 v_{\xi}^G}{c}. \quad (5.67)$$

Esta última ecuación es análoga a la expresión de la radiación de Hawking. Resolviendo para  $kZe^2$ , encontramos que

$$Ze^2 = \frac{H^2 c^2 n^2}{2GkMm}. \quad (5.68)$$

Sustituyendo este último resultado en la ecuación de la energía y definiendo  $\alpha^G$  como  $\alpha^G = \frac{GMm}{Hc}$  que es similar a la constante de estructura fina. Aunque  $\alpha^G$  no es constante sino variable nos ayuda a simplificar la energía, para ser totalmente análoga deberíamos introducir la masa de un hipotético “gravitón”, finalmente tenemos que

$$E = \frac{\alpha^G mc^2}{4\pi n^2}. \quad (5.69)$$

Repetiendo el formalismo anterior para el radio de Schwarzschild al cuadrado  $r_s^2 = \frac{4G^2 M^2}{c^4}$ , obtenemos:

$$E = \frac{\sqrt{2} mc^2}{8\pi n}. \quad (5.70)$$

Copyright Moisés Domínguez Espinosa & Jaime Meléndez Martínez

## CAPÍTULO 6

### Conclusiones y Perspectiva

Este modelo de *cuantización dinámica* o *cuantización emergente* muestra características muy interesantes, no obstante es relativamente simple. Sin embargo, no hay justificación suficiente para que este modelo sea plausible más allá de la cuantización.

Los niveles de energía fraccionarios estarían asociados en este modelo ya sea a los puntos de equilibrio estables o bien a los inestables. Esto difiere del actual modelo y no parece ser plausible.

Es necesario crear predicciones para las energías de ionización y para los espectros de diferentes elementos, es decir, hay que comparar las predicciones del modelo con los resultados experimentales.

También es necesaria una explicación del porqué este modelo emergería desde la dinámica de las partículas cargadas, es decir, este modelo de cuantización podría ser el resultado, de la emergencia o convergencia de un complejo **comportamiento estadístico** de las partículas cargadas.

Es posible que exista otro modelo con cierta semejanza al modelo aquí presentado que pueda describir mejor la realidad física.

En el desarrollo de este modelo se han tomado varias hipótesis que aunque son plausibles, deben ser contrastadas con la realidad experimental. Por otro lado, no hay un cálculo claro del tiempo de pateo o tiempo entre *kicks*.

La hipótesis de un sistema no conservativo y las matemáticas que describen la energía de este sistema deben ser discutidas con más cuidado. Aunque se ha intentado ser lo más riguroso posible, estas matemáticas son muy complejas y la documentación al respecto no es tan abundante como lo es para los sistemas conservativos.

La hipótesis sobre el papel de la frecuencia de radiación de fondo retroalimentado al sistema debe tener una base más sólida. Por ejemplo, un análisis estadístico y/o un respaldo experimental y/o teórico. La radiación de fondo presenta una distribución de cuerpo negro por lo tanto, no esta compuesta de una sola frecuencia sino de un conjunto de ellas. Esto también tendría consecuencias en este modelo. Resulta notable que el pico o máximo de frecuencia de la radiación de fondo aparezca con gran precisión para  $n = 34.5$  en la frecuencia de rotación de la partícula.

Por último, no queda claro que tan plausible es tener puntos fijos de orden mayor o igual a 2 como subniveles de energía.

Dentro de la perspectiva, tenemos:

- 1.- Estudiar la posible **emergencia** de este modelo a partir de la electrodinámica estocástica.
- 2.- Comparar la energía de ionización de los elementos químicos y las predicciones del modelo.
- 3.- Estudiar la relación de este modelo con las líneas espectrales de otros elementos.
- 4.- Estudiar la posible relación de la frecuencia de radiación de fondo cósmico con la estabilidad de los átomos.

Aunque este modelo muy posiblemente no logré superar a otros existentes, es posible que pueda tener aplicaciones en otros ámbitos.

La mecánica cuántica ondulatoria y matricial es un modelo muy robusto debido a su capacidad de predicción, esto implica que es muy consistente con la experimentación en diversas áreas de la ciencia.

Copyright Moisés Domínguez Espinosa & Jaime Meléndez Martínez

Copyright Moisés Domínguez Espinosa & Jaime Meléndez Martínez

## APÉNDICES

### Apéndice A1. Funciones generalizadas Delta de Dirac y Heaviside

La función delta de Dirac o distribución de densidad delta de Dirac [15,16], también conocida como impulso unitario, se utiliza en aquellos sistemas que están sometidos a una fuerza exterior muy intensa y de duración muy corta. El ejemplo clásico es el de una pelota de beisbol que es golpeada por un bate. Esta función se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{a) } \delta(t - a) &= \begin{cases} \infty & \text{si } t = a \\ 0 & \text{si } t \neq a \end{cases} \\ \text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) dt &= 1 \end{aligned} \tag{A1.1}$$

Algunas de sus propiedades son:

$$\delta(t) = \delta(-t) \tag{A1.2}$$

$$f(t)\delta'(t) = -f'(t)\delta(t) \tag{A1.3}$$

$$\delta(at - b) = |a|^{-1} \delta\left(t - \frac{b}{a}\right) \tag{A1.4}$$

$$f(t)\delta(t - a) = f(a)\delta(t - a) \tag{A1.5}$$

$$f(t)\delta'(t - a) = f(a)\delta'(t - a) - f'(a)\delta(t - a) \tag{A1.6}$$

$$L(\delta(t - a)) = \exp^{-sa} . \tag{A1.7}$$

La función Heaviside [15,16] o función escalón unitario se utiliza a menudo para modelar una fuerza exterior que comienza actuar desde cierto tiempo. Por ejemplo, un elevador que



es encendido y sobre el cual actúa una fuerza. La función Heaviside se define de la siguiente manera

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} . \quad (\text{A1.8})$$

Algunas propiedades son:

$$H'(t - a) = \delta(t - a) , \quad (\text{A1.9})$$

$$L(H(t - a)) = \frac{\exp^{-sa}}{s} . \quad (\text{A1.10})$$

Copyright Moisés Domínguez Espinosa & Jaime Meléndez Martínez

## Apéndice A2. Solución por transformada de Laplace [15,16]

El objetivo de esta sección es resolver la siguiente ecuación

$$\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}) = -\frac{K}{mr^2} \sum_{j=0}^{\infty} \text{sen}(\Omega + \xi \dot{\varphi}(jT)) \delta(t - jT). \quad (\text{A2.1})$$

Para ello utilizaremos la técnica de la Transformada de Laplace, que consiste en efectuar una transformación integral sobre la ecuación diferencial y después obtener la transformada inversa, la cual nos dará la solución.

Haciendo el cambio de variable  $t' = \frac{t}{T}$ , y además  $\frac{dt}{dt'} = T$ ,  $\varphi(t) = \varphi(Tt') = \tilde{\varphi}(t')$ :

$$\frac{d}{dt} \varphi(t) = \frac{1}{T} \frac{d}{dt'} \tilde{\varphi}(t'), \quad (\text{A2.2})$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \varphi(t) = \frac{1}{T^2} \frac{d^2}{dt'^2} \tilde{\varphi}(t'). \quad (\text{A2.3})$$

Ahora, de las propiedades de la función delta de Dirac  $\delta(t - jT) = \frac{1}{T} \delta(t' - j)$  y  $\dot{\varphi}(jT) = \dot{\varphi}(Tt') = \frac{1}{T} \tilde{\varphi}'(t') = \frac{1}{T} \tilde{\varphi}'(j)$ , podemos reescribir la ecuación (A2.1) de la siguiente manera

$$\frac{d^2}{dt'^2} \tilde{\varphi}(t') = -\frac{KT}{mr^2} \sum_{j=0}^{\infty} \text{sen}\left(\Omega + \frac{\xi}{T} \tilde{\varphi}'(j)\right) \delta(t' - j) \quad (\text{A2.4})$$

Aplicaremos la transformada de Laplace de ambos lados desde  $j = 0$  hasta  $j = i$ , usaremos para ello la letra  $L$ , que no debe confundirse con el símbolo de Lagrangiano  $\mathcal{L}$ :

$$L\left(\frac{d^2}{dt'^2}\tilde{\varphi}(t')\right) = L\left(-\frac{KT}{mr^2}\sum_{j=0}^i \text{sen}\left(\Omega + \frac{\xi}{T}\tilde{\varphi}(j)\right)\delta(t' - j)\right), \quad (\text{A2.5})$$

de donde

$$s^2Y(s) - s\tilde{\varphi}(0) - \tilde{\varphi}'(0) = -\frac{KT}{mr^2}\sum_{j=0}^i \text{sen}\left(\Omega + \frac{\xi}{T}\tilde{\varphi}(j)\right)\exp^{-js}. \quad (\text{A2.6})$$

Ahora despejamos  $Y(s)$  para luego aplicar la transformada inversa:

$$L^{-1}(Y(s)) = L^{-1}\left(\frac{s\tilde{\varphi}(0) + \tilde{\varphi}'(0) - \frac{KT}{mr^2}\sum_{j=0}^i \text{sen}\left(\Omega + \frac{\xi}{T}\tilde{\varphi}(j)\right)\exp^{-js}}{s^2}\right). \quad (\text{A2.7})$$

Usando una tabla de transformadas inversas encontramos la solución y su derivada

$$\tilde{\varphi}(t') = \tilde{\varphi}(0) + \tilde{\varphi}'(0)t' - \frac{KT}{mr^2}\sum_{j=0}^i \text{sen}\left(\Omega + \frac{\xi}{T}\tilde{\varphi}(j)\right)(t' - j)H(t' - j), \quad (\text{A2.8})$$

y

$$\tilde{\varphi}'(t') = \tilde{\varphi}'(0) - \frac{KT}{mr^2}\sum_{j=0}^i \text{sen}\left(\Omega + \frac{\xi}{T}\tilde{\varphi}(j)\right)H(t' - j), \quad (\text{A2.9})$$

donde  $H(t' - j)$  es la función Heaviside.

Evaluando en  $t' = i + 1$  y tomando en consideración que  $\sum_{j=0}^i f(j)$  se detiene en  $j = i$  tenemos que  $H(i + 1 - i) = H(1) = 1$ , de donde

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(i + 1) &= \tilde{\varphi}(0) + \tilde{\varphi}(0)(i + 1) \\ &\quad - \frac{KT}{mr^2} \sum_{j=0}^i \text{sen} \left( \Omega + \frac{\xi}{T} \tilde{\varphi}(j) \right) (i + 1 - j), \end{aligned} \quad (\text{A2.10})$$

y

$$\tilde{\varphi}(i + 1) = \tilde{\varphi}(0) - \frac{KT}{mr^2} \sum_{j=0}^i \text{sen} \left( \Omega + \frac{\xi}{T} \tilde{\varphi}(j) \right). \quad (\text{A2.11})$$

Podemos considerar estas expresiones como un sistema de recurrencias no lineales haciendo  $\tilde{\varphi}(i + 1) = \tilde{\varphi}_{(i+1)}$  y  $\tilde{\varphi}(i + 1) = \tilde{\varphi}_{i+1}$ :

$$i = 0 \begin{cases} \tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_0 + \tilde{\varphi}_0 - \frac{KT}{mr^2} \text{sen} \left( \Omega + \frac{\xi}{T} \tilde{\varphi}_0 \right) \\ \tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_0 - \frac{KT}{mr^2} \text{sen} \left( \Omega + \frac{\xi}{T} \tilde{\varphi}_0 \right), \end{cases} \quad (\text{A2.12})$$

$$i = 1 \begin{cases} \tilde{\varphi}_2 = \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_1 - \frac{KT}{mr^2} \text{sen} \left( \Omega + \frac{\xi}{T} \tilde{\varphi}_1 \right) \\ \tilde{\varphi}_2 = \tilde{\varphi}_1 - \frac{KT}{mr^2} \text{sen} \left( \Omega + \frac{\xi}{T} \tilde{\varphi}_1 \right), \end{cases}$$

⋮

$$i = i \begin{cases} \tilde{\varphi}_{i+1} = \tilde{\varphi}_i + \tilde{\varphi}_i - \frac{KT}{mr^2} \text{sen} \left( \Omega + \frac{\xi}{T} \tilde{\varphi}_i \right) \\ \tilde{\dot{\varphi}}_{i+1} = \tilde{\dot{\varphi}}_i - \frac{KT}{mr^2} \text{sen} \left( \Omega + \frac{\xi}{T} \tilde{\varphi}_i \right) . \end{cases}$$

Sin pérdida de generalidad, y para evitar confusiones usaremos  $i$ , para la recurrencia. Esta última expresión es más práctica para ser programada en algún lenguaje, en este caso usaremos Python. Haciendo el cambio de variable inverso, es decir, a las variables originales, tenemos que

$$i = i \begin{cases} \varphi_{(i+1)T} = \varphi_{iT} + T\dot{\varphi}_{iT} - \frac{KT}{mr^2} \text{sen}(\Omega + \xi\dot{\varphi}_{iT}) \\ \dot{\varphi}_{(i+1)T} = \dot{\varphi}_{iT} - \frac{K}{mr^2} \text{sen}(\Omega + \xi\dot{\varphi}_{iT}) . \end{cases} \quad (\text{A2.13})$$

Copyright Moisés Domínguez Espinosa & Jairo Meléndez Martínez

## Apéndice A3. Programa Python

El objetivo de esta sección es graficar la siguiente recurrencia no lineal, variando  $\frac{K}{mr^2}$

$$\dot{\phi}_{(i+1)T} = \dot{\phi}_{iT} - \frac{K}{mr^2} \text{sen}(\Omega + \xi \dot{\phi}_{iT}). \quad (\text{A3.1})$$

Para ello haremos  $T = 1$ ,  $\frac{K}{mr^2} = \frac{K}{2\pi}$ ,  $\xi = 2\pi$

$$\dot{\phi}_{(i+1)} = \dot{\phi}_i - \frac{K}{2\pi} \text{sen}(\Omega + 2\pi \dot{\phi}_i). \quad (\text{A3.2})$$

### Programa en Python: RAGA.py

```
from numpy import *
from math import *
import functools
import weakref
```

```
class memoized(object):
```

```
    """Decorator that caches a function's return value each time it is called.
    If called later with the same arguments, the cached value is returned, and
    not re-evaluated.
    """
```

```
    caches = weakref.WeakSet()
    def __init__(self, func):
        self.func = func
        self.cache = {}
    def __call__(self, *args):
        try:
            return self.cache[args]
        except KeyError:
            value = self.func(*args)
```

```

        self.cache[args] = value
    return value
except TypeError:
    # uncacheable -- for instance, passing a list as an argument.
    # Better to not cache than to blow up entirely.
    return self.func(*args)
# def __repr__(self):
#     """Return the function's docstring."""
#     return self.func.__doc__
def __get__(self, obj, objtype):
    """Support instance methods."""
    return functools.partial(self.__call__, obj)

@staticmethod
def reset():
    for memo in memoized.caches:
        memo.cache = {}

PI=3.1415926536

ro=2*PI

Omega=0.0

@memoized
def FiPunto(t,FPo,K):

    if t == 0:
        return FPo

    elif t == 1:
        return FPo-(K/(2*PI))*sin(Omega+ro*FPo)

    else:
        return (FiPunto(t-1,FPo,K) -(K/(2*PI))*sin(Omega+ro*(FiPunto(t-1,FPo,K))))

#este programa sirve para graficar el espacio de bifurcaciones
#desde el directorio Linux que tiene este archivo ejecutar el comando:
#python RAGA.py>RAGA.dat
#desde el mismo directorio, iniciar gnuplot y ejecutar el comando:
#gnuplot> plot "RAGA.dat" pointsize 0.1

```

```
for FPo in arange(0.1,2,0.07):  
    for K in arange(0.01,5,0.003):  
        for t in range(90,150):  
  
            FP=FiPunto(t,FPo,K)  
            memoized.reset()  
        print K,FP
```

#Realizado por Moisés Domínguez Espinosa. Facultad de Ciencias, UNAM 2018.

Copyright Moisés Domínguez Espinosa & Jaime Meléndez Martínez



Copyright Moisés Domínguez Espinosa & Jaime Meléndez Martínez

## REFERENCIAS

- [1] Lourdes Esteva Peralta, Manuel Falconi Magaña. *Biología Matemática Un enfoque desde los sistemas dinámicos*. Las prensas de ciencias UNAM, CDMX México, (2012).
- [2] Stephen L. Campbell, Richard Haberman. *Introducción a las ecuaciones diferenciales con problemas de valor de frontera*. Mc Graw Hill, (1999).
- [3] Miguel Ángel Martín, Manuel Morán, Miguel Reyes. *Iniciación al caos. Sistemas dinámicos*. Editorial Síntesis, Madrid España, (1995).
- [4] Hesíodo. *Obras y Fragmentos*. Editorial Gredos, Introducción Traducción y notas de Aurelio Pérez Jiménez y Alfonso Martínez Díez, Madrid, (1990).
- [5] Steven H. Strogatz *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Perseus Books. USA, (1994).
- [6] David Ruelle. *Casualidad y Caos*. UNAM, México, (2003).
- [7] H.G. Schuster & W. Just. *Deterministic Chaos An Introduction*. Wiley-VCH, Weinheim, (2004).
- [8] Ricard V. Solé & Susanna C. Manrubia. *Orden y Caos en sistemas complejos. Fundamentos*. Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, (2001).
- [9] Paul A. Tipler. *Modern Physics*. W.H. Freeman. USA, (2008).
- [10] Herbert Goldstein. *Classical Mechanics*. Pearson Education. California, (2002).
- [11] Mohsen Razavy. *Classical and Dissipative Quantum Systems*. Imperial College Press, UK, (2005).
- [12] James D. Olsen and Kirk T. McDonald. *Classical Lifetime of a Bohr Atom*. Joseph Henry Laboratories, Princeton University, NJ, (2005).
- [13] Douglas R. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*. Basic Books, UK, (1994).
- [14] F. Rohrlich. *The dynamics of a charged sphere and the electron*. Department of Physics, Syracuse, New York. Am. J. Phys., Vol. 65, No. 11, November, (1997).
- [15] Arfken, Weber, and Harris. *Mathematical Methods for Physicists*. Seventh edition, Elsevier, (2013).
- [16] Joel L. Schiff. *The Laplace Transform Theory and Applications*. Springer, New York, et al., (1991).

[17] Leo P. Kadanoff. *From Periodic Motion to Unbounded Chaos: Investigations of the Simple Pendulum*. Physica Scripta. University of Chicago, (1984).

[18] Luis de la Peña, Ana María Cetto, Andrea Valdés Hernández. *The Emerging Quantum*. Springer, (2015).

[19] Moisés Domínguez Espinosa and Jaime Meléndez Martínez. *A simple Model of Quantization: An approach from Chaos*. Preprint vixra.org/abs/1603.0377, (2016-03-30).

[20] Mickens, E. Ronald. *Difference Equations Theory, Applications and Advanced Topics*. Third Edition, CRC Press, Atlanta, Georgia, USA, (2015)

[21] Moisés Domínguez Espinosa y Víctor Manuel Velázquez Aguilar. *Modelo simple de cuantización: un enfoque desde el caos*. Congreso Nacional de Física, Monterrey N.L. (Octubre 2017), M1E058.

[22] Moisés Domínguez Espinosa y Víctor Manuel Velázquez Aguilar. *Modelo simple de cuantización: un enfoque desde el caos*. Congreso Nacional de Matemáticas, CU. Ciudad de México, (Octubre 2017)

[23] Ilya Prigogine. *¿Tan sólo una ilusión? Una exploración del orden al caos*. Tusquets. Barcelona, (2009).