运动观测论

~~~~~~

Theory for Motion Observation

周 方

tony_zf_zf_zf@126.com

电子版

（2021 年 8 月）
~~~~~~

内 容 简 介

在‘两观测者作相对运动且真空中光速为有限值”场合下，两观测者对同一运动质点进行观测时，必然在不同的时刻“见到”该运动质点处在不同的空间位置上。在两观测者各自“见到”该运动质点的时刻及质点位置之间，必然存在着确定的数据转换关系，这种数学转换关系称之为“时空变换”。“时空变换”完全是运动观测中客观形成的数据转换关系，而并非是可以人为地‘设计出’的。因此，我们只能根据客观的物理事实与观测过程去寻找、‘发现’这种唯一地客观存在的“时空变换”，而绝不可人为地去“创建、设计”甚至“拼凑、编造”出一个“时空变换”数学式子。

成功地发现唯一地客观存在于运动观测中的“时空变换”，是建立正确的运动观测理论不可逾越的关键环节。笔者以独特的视角，依据客观的物理事实与观测过程建立正确、的物理模型，进行严谨的数学推导与论证，首次发现了“两观测者作相对运动且真空中光速为有限值”场合下唯一客观存在的“时空变换”，奠定了运动观测理论的基础。笔者发现的时空变换是伽利略型的时空变换，而经典的伽利略变换 $x' = \overline{x} - ut$，$y' = \overline{y}$， $z' = \overline{z}$，$t' = t$ 则是此时空变换在“真空中光速为无穷大”假定条件下或在“两观测者相对速度与光速相比甚小”情况下的特例。

笔者运用所发现的时空变换审视了天文学中具有四百年历史的极负盛名的开普勒定律（Kepler’s Law），在理论上阐释了天文学中著名的“哈勃定律”（Hubble’s Law）并首次揭示了“哈勃定律”的理论表达式。此外，还建立了对超高速飞行物的测速原理。

作 者 简 介

周 方　男　湖南省华容县人　1932 年 9 月 28 日生于湖南省长沙市

研究员、教授、博士生导师。1950 年就读于大连工学院(现大连理工大学)应用物理系，后赴苏联留学，毕业于莫斯科航空学院飞机设计与制造系。著述所涉及的专业领域：航空工程、系统工程、数理经济学与经济计量学、理论物理学。

tony_zf_zf_zf@126.com

目 录

引 论 ………………………………………………………………………… (6)

第一章“速度、加速度及高阶加速度不变性”定律…………………(10)

第二章“相对性原理”的数学描述及实际表现 …………………… (14)

一、“相对性原理”的意义及内涵 ……………………………………… (14)

二、变换方程组满足“相对性原理”之充分必要条件………………… (15)

第三章 多普勒效应 …………………………………………………(19)

一、纵向多普勒效应 ……………………………………………………(21)

二、侧向多普勒效应 ……………………………………………………(22)

三、横向多普勒效应…………………………………………………… (22)

第四章 伽利略-周方变换的数理推导…………………………… (24)

一、伽利略变换 ………………………………………………………… (24)

二、(一般) 伽利略-周方变换 ………………………………………… (34)

三、(特殊) 伽利略-周方变换……………………………………………(53)

四、从时空变换的标准结构推导出伽利略-周方变换……………………(57)

五、通过最捷途径推导出伽利略-周方变换……………………………(62)

六、坐标系相离运动与相向运动 ………………………………………(82)

七、伽利略-周方变换与伽利略变换的时空轨迹 ……………………… (97)

八、“质量不变性”定律………………………………………………… (124)

第五章 超高速太空飞行物测速原理……………………………… (127)

一、主动式脉冲雷达测速……………………………………………… (127)

二、被动式脉冲雷达测速 ……………………………………………… (138)

第六章“哈勃定律”(Hubble's Law) 的理论表达式…………………(142)

第七章 审视开普勒定律 (Kepler's Law)…………………………(150)

一、关于“开普勒第一定律”………………………………………… (150)

二、关于“开普勒第二定律”………………………………………… (154)

参考文献…………………………………………………………………… （159）
附录 A：导出“伽利略-周方变换”之最简捷途径 …………………（159）
附录 B：“洛伦兹变换”必被“伽利略-周方变换”取代…………（171）

引 论

创立适合于**‘两观测者作相对运动及真空中光速为有限值’**场合的运动观测理论，有赖于建立正确的物理模型及相应的数学模型，进行严谨的数理推导，发现运动观测中唯一客观存在的两观测者“各自观测到”同一运动质点的时刻及空间坐标之间的数学转换关系 —“时空变换”。

两观测者在相对运动中对某一运动质点进行‘一次观测’，其物理过程是：两观测者中一个观测者被视为“静止”的观测者，此观测者在其时钟所指示的某个时刻，观测到质点的位置，于是根据所测得的这些数据（观测到质点的时刻和位置）及其他已知的数据（如：两观测者的相对速度及真空中光传播速率），‘推算出’对于他作相对运动的另一观测者观测到该同一运动质点的时刻和位置。在进行‘一次观测’中，两观测者中只可有一个观测者被视为‘静止’的，即两坐标系中只可以假设一个坐标系为**“静止系”**（简称**“静系”**），而相对于**“静系”**作平移运动的另一坐标系则为**“运动系”**（简称**“动系”**）。

为了描述运动观测的物理过程，需要建立物理模型及相应的数学模型，进行严谨的数理推导，这样才能找到运动观测中客观存在的时空数据转换关系 —“时空变换”，才能建立正确的运动观测理论。

在数学上，“时空变换”方程组可以表为一个矢量方程，也可表为一组代数方程。时空变换方程组包含‘一个’时间变换方程和‘三个’空间变换方程。应当指出，时空变换方程组必须是一个不定方程组，即变量个数多于方程个数的方程组。

根据运动观测过程建立相应的物理模型 — **物理场景：**

1. 建立两个坐标系（三维**欧氏空间**），记为：K 系和 K' 系。K 系的 x 轴、y 轴、z 轴中没有任何一个轴优越于另一个轴；K' 系的 x' 轴、y' 轴、z' 轴中也没有任何一个轴优越于另一个轴。始终保持：x' 轴// x 轴，y' 轴// y 轴，z' 轴// z 轴。

2. 两观测者分别固定在 **K 系原点**和 **K' 系原点**。两观测者持有‘时钟’及‘测距工具’。K 系观测者测得的时间（**K 系时间**）记为 t，K' 系观测者测得的时间（**K' 系时间**）记为 t'。

3. 两坐标系相对运动的起始状态为：在 $t'=t=0$ 时，K' 系与 K 系重合。

4. 在 t'，$t>0$ 时，K' 系相对于 K 系做平移运动，相对速度为 $\vec{u}$。

5. 光波或电磁波为承载质点位置讯息的‘媒介物’。

6. **定义：**

a. ‘时空’之定义：$\left[(\text{三维})\text{欧氏空间}(\vec{r}),\ \text{时间}(t)\right]^T \equiv \left[\vec{r},\ t\right]^T \equiv \left[\left[x, y, z\right]^T,\ t\right]^T$ 为可量测的“物理时空（**Physical Space-Time**）”，可命名为“伽利略时空（**Galilean Space-Time**）”。

“伽利略时空”的度规为 $\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，可命名为“伽利略度规（**Galilean Metric**）”。

b. 整个“宇宙”为伽利略时空 $\left[\vec{r},\ t\right]^T \equiv \left[\left[x, y, z\right]^T,\ t\right]^T$，其‘子时空’$\left[\vec{r},\ t\right]^T$ 内之时空点 $\left[\vec{r}(t),\ t\right]^T$ 满足光传播定律：$\left|\vec{r}(t)\right| = ct$，$c = const.$ c 为真空中光传播速率，故有：$d\ln\left|\vec{r}(t)\right| = d\ln t$，即光的“传播时空弹性”为 $\varepsilon = \dfrac{d\ln\left|\vec{r}(t)\right|}{d\ln t} = 1$，因此，有：$\lambda\left[\vec{r}(t),\ t\right]^T = \left[\lambda\vec{r}(t),\ \lambda t\right]^T = \left[\vec{r}(\lambda t),\ \lambda t\right]^T$，示于图 0-1。

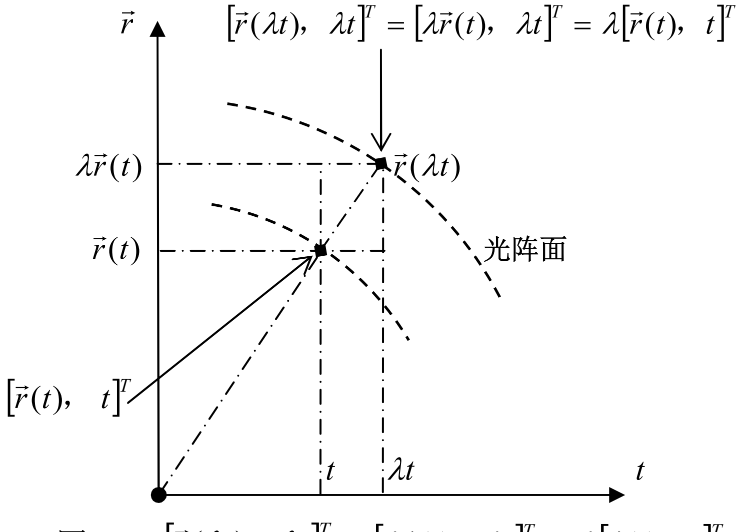


图 0-1 $\left[\vec{r}(\lambda t),\ \lambda t\right]^T = \left[\lambda\vec{r}(t),\ \lambda t\right]^T = \lambda\left[\vec{r}(t),\ t\right]^T$

因此，按物理实质，伽利略时空 $\left[\vec{r},\ t\right]^T$ 为“光照时空”（**Illuminated Space-Time**）。

c. K 系观测者在时刻 t 观测到运动质点的位置坐标记为 $\vec{r}(t) = \left[x(t), y(t), z(t)\right]^T$。$\left[\vec{r}(t)\quad t\right]^T$ 为 K 系观测者‘在时刻 t 观测到运动质点 $\vec{r}(t)$ 时’指向该质点的“**观测矢量**”（**Observation Vector**），同时也是该运动质点在时刻 t 的“**光照矢量**”（**Illuminated Vector**）。

d. K' 系观测者在时刻 t' 测得运动质点的位置坐标记为 $\vec{r}'(t') = \left[x'(t'), y'(t'), z'(t')\right]^T$。$\left[\vec{r}'(t')\quad t'\right]^T$ 为 K' 系观测者‘在时刻 t' 观测到运动质点 $\vec{r}'(t')$ 时’指向该质点的“**观测矢量**”，同时也是该运动质点在时刻 t' 的“**光照矢量**”。

e. $\left[\vec{r}(t),\ t\right]^T$ 为‘K 系观测者在时刻 t 观测到运动质点 $\vec{r}(t)$ 时’的**“时空点”**。

$\left[\vec{r}'(t'),\ t'\right]^T$ 为‘K' 系观测者‘在时刻 t' 观测到运动质点 $\vec{r}'(t')$ 时’的**“时空点”**。

*************** *************** ***************

可以将两观测者对运动质点进行观测的情况画成观测矢量图，示于图 0-2。

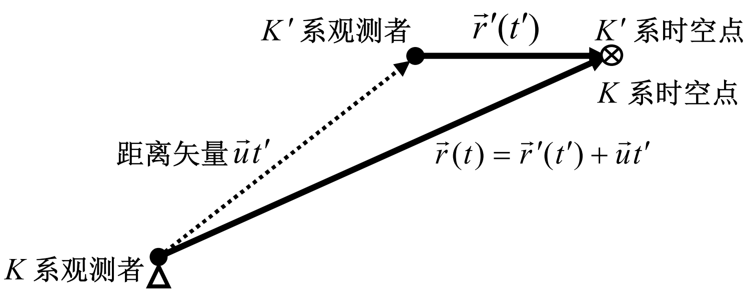


图 0-2 两观测者对运动质点进行观测的情况

图 0-2 中，“K' 系观测者在时刻 t' 的观测矢量 $\vec{r}'(t')$”，通过“K' 系观测者在时刻 t' 离 K 系观测者的距离矢量 $\vec{u}t'$”与“K 系观测者在时刻 t 的观测矢量 $\vec{r}(t)$”构成一个矢量合成三角形，此三角形称为**“观测矢量三角形”**。

于是，我们可以给出以下定义：

“若互作相对运动的两观测者在同一时刻观测到同一运动质点，则两观测者在此时刻的观测矢量通过两观测者之间在此时刻的距离矢量构成一个矢量合成三角形，此三角形称为‘观测矢量三角形’”

在实质上，**伽利略变换**所刻画的是：在真空中光速为无穷大之假定条件下，或在坐标系相对速度与光速相比较是非常小的情况下，互作匀速直线运动的两观测者在同一时刻观测到同一运动质点，使得两观测者在同一时刻的观测矢量通过两观测者之间的距离矢量构成观测矢量合成关系：

$$\begin{cases}\vec{r}(t)=\vec{r}'(t')+\vec{u}t'\\ t=t'\end{cases}$$

$\vec{r}(t)=\left[x(t),y(t),z(t)\right]^T$，$\vec{r}'(t')=\left[x'(t'),y'(t'),z'(t')\right]^T$，$\vec{u}=\left[u_x,u_y,u_z\right]^T$

上面的图 0-2 就是**伽利略变换**的观测矢量图。

笔者成功地发现了“两观测者作相对运动及真空中光速为有限值”场合下唯一客观存在的**时空变换**：

$$\begin{cases} \vec{r}(t)=\left(1+\dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)[\vec{r}'(t')+\vec{u}t'] \\ t=\left(1+\dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)t' \end{cases}$$

式中：$\vec{r}(t)=[x(t),y(t),z(t)]^T$，$\vec{r}'(t')=[x'(t'),y'(t'),z'(t')]^T$，$\vec{u}=[u_x,u_y,u_z]^T$

$|\vec{u}|=(u_x^2+u_y^2+u_z^2)^{1/2}$，$c$ 为真空中光速

此**时空变换**的观测矢量图示于图 0-3。

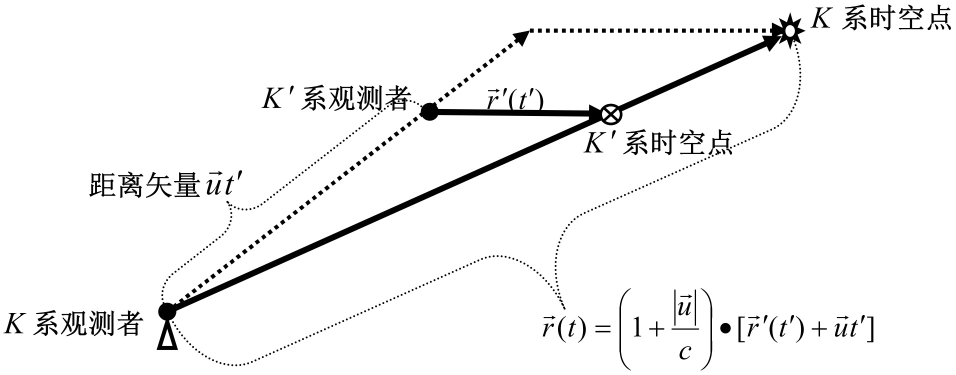


图 0-3 时空变换的观测矢量图

这就是**‘两观测者作相对运动及真空中光速为有限值’**场合下唯一客观存在的两观测者观测到同一运动质点的时间及空间坐标之间的数学转换关系 —**“时空变换”**。

此**时空变换**为笔者首次发现，故命名为**“周方变换”**。可以看到，**周方变换**是**伽利略型**时空变换，与**伽利略变换**不仅同型、同构，而且**伽利略变换**是**周方变换**的一个特例。因此，也可将**“周方变换”**称为**“伽利略-周方变换”**（**Galilean–Zhou Transformation**）。

笔者通过**伽利略-周方变换**审视了天文学中具有四百年历史的极负盛名的**开普勒定律**（**Kepler’s Law**），在理论上阐释了天文学中著名的**“哈勃定律”**（**Hubble’s Law**）并首次揭示了**哈勃定律**的理论表达式。此外，还建立了对超高速飞行物的测速原理。**伽利略-周方变换**就是那种将超高速运动摄像装置传来的摄制图象进行转换，还原为实时景象的所谓**“时空透镜”**。

伽利略-周方变换之被发现，为创立正确的适合于‘两坐标系作相对运动及真空中光速为有限值’场合的运动观测理论奠定了基础。

第一章

“速度、加速度及高阶加速度不变性”定律

定义：

a. ‘时空’之定义：$[(\text{三维})\text{欧氏空间}(\vec{r}),\ \text{时间}(t)]^T \equiv [\vec{r},\ t]^T \equiv [[x,y,z]^T,\ t]^T$ 为可量测的“物理时空（**Physical Space-Time**）”，可命名为“伽利略时空（**Galilean Space-Time**）”。

“伽利略时空”的度规为$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，可命名为“伽利略度规（**Galilean Metric**）”。

b. 整个“宇宙”为伽利略时空$[\vec{r},\ t]^T \equiv [[x,y,z]^T,\ t]^T$，其‘子时空’$[\vec{r},\ t]^T$内之时空点$[\vec{r}(t),\ t]^T$满足光传播定律：$|\vec{r}(t)| = ct$，$c = const.$ c 为真空中光传播速率，故有：$d\ln|\vec{r}(t)| = d\ln t$，即光的“传播时空弹性”为 $\varepsilon = \dfrac{d\ln|\vec{r}(t)|}{d\ln t} = 1$，因此，有：$\lambda[\vec{r}(t),\ t]^T = [\lambda\vec{r}(t),\ \lambda t]^T = [\vec{r}(\lambda t),\ \lambda t]^T$，示于图 **1**。

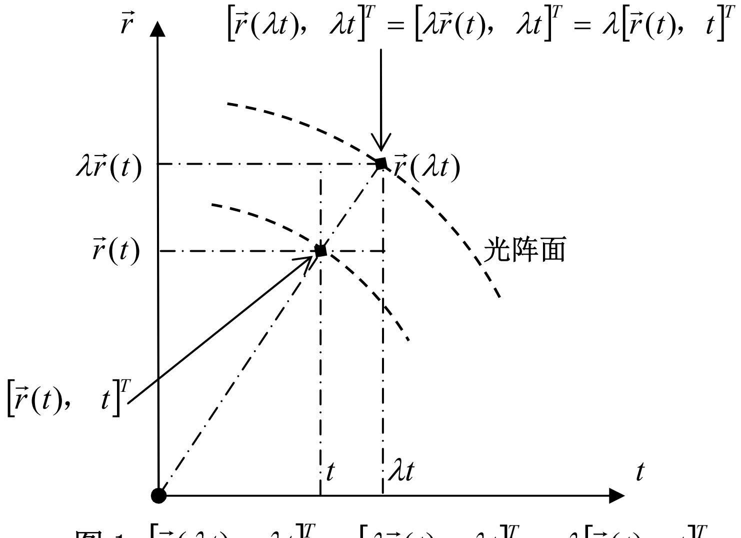


图 1 $[\vec{r}(\lambda t),\ \lambda t]^T = [\lambda\vec{r}(t),\ \lambda t]^T = \lambda[\vec{r}(t),\ t]^T$

因此，按物理实质，伽利略时空$[\vec{r},\ t]^T$为“光照时空”（**Illuminated Space-Time**）。

c. K 系观测者在时刻 t 观测到运动质点的位置坐标记为 $\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]^T$。$[\vec{r}(t)\quad t]^T$ 为 K 系观测者‘在时刻 t 观测到运动质点 $\vec{r}(t)$ 时’指向该质点的“观测矢量”（**Observation Vector**），同时也是该运动质点在时刻 t 的“光照矢量”（**Illuminated Vector**）。

d. K' 系观测者在时刻 t' 测得运动质点的位置坐标记为 $\vec{r}'(t') = [x'(t'), y'(t'), z'(t')]^T$ 。

$[\vec{r}'(t') \quad t']^T$ 为 K' 系观测者‘在时刻 t' 观测到运动质点 $\vec{r}'(t')$ 时’指向该质点的“**观测矢量**”，同时也是该运动质点在时刻 t' 的“**光照矢量**”。

e. $[\vec{r}(t)，t]^T$ 为‘K 系观测者在时刻 t 观测到运动质点 $\vec{r}(t)$ 时’的“**时空点**”。

$[\vec{r}'(t')，t']^T$ 为‘K' 系观测者‘在时刻 t' 观测到运动质点 $\vec{r}'(t')$ 时’的“**时空点**”。

物理场景：

1. 建立两个坐标系（三维**欧氏空间**），记为：K 系和 K' 系。K 系的 x 轴、y 轴、z 轴中没有任何一个轴优越于另一个轴；K' 系的 x' 轴、y' 轴、z' 轴中也没有任何一个轴优越于另一个轴。始终保持：x' 轴// x 轴，y' 轴// y 轴，z' 轴// z 轴。

2. 两观测者分别固定在 K **系原点**及 K' **系原点**。两观测者持有相同的‘时钟’及‘测距工具’。K 系观测者测得的时间（K **系时间**）记为 t，K' 系观测者测得的时间（K' **系时间**）记为 t' 。

*************** *************** ***************

设：K **系观测者**与 K' **系观测者**处在不同地点。他们之间的距离（矢量）为 $\vec{s}$ 。

两观测者在同一时刻（$t \equiv t'$）观测到运动质点 E_t 之情况示于图 2。

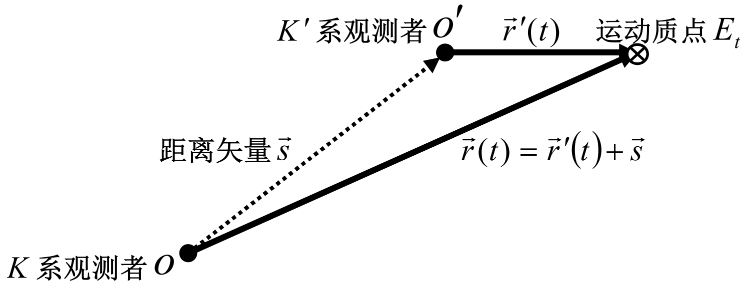


图 2 两观测者同时（$t \equiv t'$）观测到运动质点 E_t

图 2 中，K 系观测者在时刻 t 对运动质点 E_t 的**观测矢量** $\vec{r}(t)$ 与 K' 系观测者在同一时刻（$t \equiv t'$）对质点 E_t 的**观测矢量** $\overline{O'E_t} = \vec{r}'(t)$ 通过**距离矢量** $\vec{s}$ 形成（在时刻 t 的）‘**观测矢量合成三角形** $\Delta OO'E_t$’。这表示‘**两观测者在同一时刻** $t \equiv t'$ **均观测到运动质点** E_t’。

因此有： $$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{s}$$

即： $$\overline{O'E_t} = \vec{r}(t) - \vec{s} = \vec{r}'(t)$$

图 2 中，$\overline{O'E_t}$ 为运动质点 E_t 在时刻 t “相对于 K' 系观测者之位置 $[\vec{r}(t)-\vec{s}]$ ”：$\overline{O'E_t}=\vec{r}(t)-\vec{s}=\vec{r}'(t)$，$\overline{O'E_t}$ 同时又是运动质点 E_t 在时刻 t' “在 K' 系内之位置 $\vec{r}'(t')$ ”：$\overline{O'E_t}=\vec{r}'(t')$。

故有：$\overline{O'E_t}=\vec{r}(t)-\vec{s}=\vec{r}'(t)$ 及 $\overline{O'E_t}=\vec{r}'(t')$，从而得：

$$\vec{r}'(t')\equiv\vec{r}'(t)$$

表为**伽利略时空** $[\vec{r},\ t]^T$ 内的时空点：

$$\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\vec{r}'(t)\\ t\end{bmatrix}$$

从而得：

$$\frac{d^n[\vec{r}'(t')]}{dt'^n}\equiv\frac{d^n[\vec{r}'(t)]}{dt^n},\qquad n=1,2,\ldots\ldots$$

由此可得结论：不论是 K' 系观测者进行观测，还是 K 系观测者进行观测，两者得到的被观测质点的速度、加速度、⋯ 是一致的，即：$\dfrac{d^n[\vec{r}'(t')]}{dt'^n}\equiv\dfrac{d^n[\vec{r}'(t)]}{dt^n},n=1,2,\ldots$。也就是说，**伽利略时空**内被观测质点 $[\vec{r}'(t'),\ t']^T$ 的运动速度及加速度等，均不因观测者所处地点而变，简言之，被观测质点的运动速度及加速度等，**是绝对的**，不随观测者所处地点而变。

由此得到一个十分重要的结论：**质点的运动速度以及各阶加速度均是绝对的，与观测者在何处对该质点进行观测无关，也就是说，与参考系的选择无关**。此定律可称为**“速度、加速度及高阶加速度不变性”**定律。

“速度、加速度及高阶加速度不变性”定律是一条**‘自然定律’**，此定律同样也适用于‘真空中光传播速率’：**“真空中光传播速率为恒定值（约 3.0×10^5 仟米/秒），乃是光的固有属性，与观测者在何处接受此光线无关，即与参考系的选择无关”**。这就是人们经常（误）称的**“光速不变原理”**。在国外有关文献中，往往将它写成“Principle of the constancy of the velocity of light”。笔者宁愿将她称为**“光速不变性”定律**。

其实，**“速度、加速度及高阶加速度不变性”定律**与**“相对性原理”**是相通相容的。

伽利略变换以及**伽利略型的时空变换**均满足**伽利略时空** $[\vec{r},\ t]^T\equiv[[x,y,z]^T,\ t]^T$ 内之**“速度、加速度及高阶加速度不变性”定律**。

“速度、加速度及高阶加速度不变性”定律是建立**“运动观测理论”**不可或缺的基础定律之一。**“速度、加速度及高阶加速度不变性”定律**所处之地位与‘闽可夫斯基时空’的**“时空间隔不变性”准则**相当。

*************** *************** ***************

第二章

“相对性原理”的数学描述及实际表现

一、“相对性原理”的意义及内涵

建立科学理论，其目的就是为了认识客观事物的自然规律。这种理论必须使不同坐标系内的观测者都能够观测到相同的物理规律，这样的理论才有实际价值。

将“相对性原理”用文字表述为：

“物理体系的状态据以变化的定律，同描述这些状态变化时所参照的坐标系究竟是用两个在互相匀速移动着的坐标系中的哪一个并无关系。”

“表述客观定律的数学关系式在互作匀速直线平移相对运动的各个坐标系内具有相似的形式”，即通常所称的**“相对性原理”**，对于我们探索与认识客观的自然规律具有特别重要的意义。这里应当指出，**“相对性原理”**所要求的是客观定律的数学关系式在各个坐标系内保持相似的**“形式”**，而并不要求数学关系式所描述的客观定律在各个坐标系内表现为相同的**“规模大小”**。

为了推导出时空变换的数学表达式，必须在数学推导过程中实际运用**“相对性原理”**。为此，我们必须运用数学语言来表述**“相对性原理”**，找到时空变换方程组满足**“相对性原理”**的充分必要条件，并将此条件引入实际的数学推导之中，以确定时空变换方程组中的各项系数。

笔者以为，**“相对性原理”**可以更明确地表述为：

“互作匀速直线运动的两观测者 A 和 B 对同一运动质点进行观测时，观测者 A（B）‘见到’该质点的时刻及空间坐标与观测者 B(A)在观测中‘所推测的’观测者 A（B）‘见到’该质点的时刻及空间坐标完全一致。”

或表述为：

“互作匀速直线运动的两观测者对同一运动质点进行观测时，一个观测者‘观测到’该质点的时刻及空间坐标就是另一个观测者在观测中‘所推测到的’，对两个观测者皆是如此。”

下面，我们讨论时空变换方程组满足**“相对性原理”**的充分必要条件。不失一般性，我们只需讨论**一维时空**的情况。

现有时间变换式$t' = Ax + Ct$与空间变换式$x' = B(x - ut)$组成的时空变换方程组：

$$\begin{cases} x' = B(x-ut) \\ t' = Ax + Ct \end{cases}$$

式中u为坐标系相对速度。

这个联立方程组可以换写成如下形式：

$$\begin{cases} x' = Bx - But \\ t' = Ax + Ct \end{cases}$$

联立方程组的矩阵T为：

$$T = \begin{bmatrix} B & -Bu \\ A & C \end{bmatrix}$$

矩阵T为可逆矩阵，故必有$\det T = BC + ABu \neq 0$。这时，必存在方程组的逆矩阵T_{inv}：

$$T_{inv} = \frac{1}{\det T}\begin{bmatrix} C & Bu \\ -A & B \end{bmatrix}$$

容易验证，联立方程组的矩阵T与逆矩阵T_{inv}总能满足以下恒等式：

$$T_{inv}T = \frac{1}{\det T}\begin{bmatrix} C & Bu \\ -A & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & -Bu \\ A & C \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

即：

$$T_{inv}T = \frac{1}{BC + ABu}\begin{bmatrix} C & Bu \\ -A & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & -Bu \\ A & C \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在上式中，将C替换为B，上面这个恒等式仍然成立，即：

$$\frac{1}{B^2 + ABu}\begin{bmatrix} B & Bu \\ -A & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & -Bu \\ A & B \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二、变换方程组满足“相对性原理”之充分必要条件

现设：时空变换方程组为

$$\begin{cases} x' = B(x-ut) \\ t' = Ax + Bt \end{cases}$$

方程组的变换矩阵为$S = \begin{bmatrix} B & -Bu \\ A & B \end{bmatrix}$，且$\det S = B^2 + ABu = k \neq 0$。

方程组的逆变换矩阵为$S_{inv} = \dfrac{1}{\det S}\begin{bmatrix} B & Bu \\ -A & B \end{bmatrix}$。

显然，这个变换方程组具有以下两项性质：

（a）变换方程组的变换矩阵S为**可逆矩阵**；

（b）当两观测者互换“静、动地位”时**客观定律之数学关系式保持不变**，故变换方程组的变换矩阵S与逆变换矩阵S_{inv}具有**相同的张量形式**。

我们说，具有（a)、(b）两项性质的变换方程组

$$\begin{cases} x' = B(x-ut) \\ t' = Ax + Bt \end{cases}$$

满足**“相对性原理”**。

由此可得：时间变换式$t' = Ax + Ct$与空间变换式$x' = B(x-ut)$组成的变换方程组

$$\begin{cases} x' = B(x-ut) \\ t' = Ax + Ct \end{cases}$$

满足**“相对性原理”**之充分必要条件可表为如下联立方程组：

$$\boxed{\begin{array}{l} B = C \\ BC + ABu = k \neq 0 \end{array}}$$

由于k $(k \neq 0)$可以是任何实数，所以必须利用**“相对性原理”**以外的其它数理条件给出数值k $(k \neq 0)$及A（或B，或C），才能够确定时空变换方程组

$$\begin{cases} x' = B(x-ut) \\ t' = Ax + Ct \end{cases}$$

的各项系数。

对于具有如下特殊形式（时间变换式中不含‘x’项）的时空变换方程组：

$$\begin{cases} x' = B(x-ut) \\ t' = Ct \end{cases}$$

“相对性原理”的充分必要条件则很简单，就只有：

$$B = C$$

在这种情况下，只需采用在物理上正确的合理的数学模型单独推导出时间变换式

$t' = Ct$ ，就可惟一地确定时空变换方程组：

$$\begin{cases} x' = C(x - ut) \\ t' = Ct \end{cases}$$

可以看出，这是一个**“伽利略型”**的时空变换方程组。

容易验证：**“伽利略型”**的时空变换方程组

$$\begin{cases} x' = C(x - ut) \\ t' = Ct \end{cases}$$

（$C > 0$）

能够满足**“相对性原理”**。

下面对三维空间时空变换方程组进行验证。

设：K' 系相对于 K 系沿 K 系 x 轴作匀速直线平移运动，且始终保持 x' 轴平行于 x 轴、y' 轴平行于 y 轴及 z' 轴平行于 z 轴，这时三维空间时空变换方程组为：

$$\begin{cases} x' = C(x - ut)\,, \\ y' = Cy\,, \\ z' = Cz\,, \\ t' = Ct \end{cases}$$

表为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & -Cu \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

方程组的**变换矩阵** Φ 为：

$$\Phi = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & -Cu \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

逆变换矩阵 Φ^{-1} 为：

$$\Phi^{-1}=\frac{1}{C^4}\begin{bmatrix}C^3 & 0 & 0 & C^3u\\ 0 & C^3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & C^3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C^3\end{bmatrix}=\frac{1}{C}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & u\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

可见，**变换矩阵**Φ**与逆变换矩阵**Φ^{-1}具有完全相同的张量形式。而且，有：

$$\Phi\times\Phi^{-1}=C\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -u\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\frac{1}{C}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & u\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -u\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & u\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

所以，**时空变换方程组**

$$\begin{cases}x'=C(x-ut)\,,\\ y'=Cy\,,\\ z'=Cz\,,\\ t'=Ct\end{cases}$$

满足**“相对性原理”**。**验证毕**。

后面，我们将发现时空变换方程组满足**“相对性原理”**的实际表现是：

“在K'系（K系）观测者对K系（K'系）观测者的相对运动速度为$\vec{u}$（$-\vec{u}$）的情况下，K系（K'系）观测者依据在时刻t（t'）测得运动质点位置$\vec{r}$（$\vec{r}'$），推测出K'系（K系）观测者在时刻t'（t）测得运动质点位置$\vec{r}'$（$\vec{r}$）。”

第三章

多普勒效应

在两坐标系间距离不断增大的相离运动中，以及在两坐标系间距离不断减小的相向运动中，均产生**多普勒效应**，其原因是：

1．光源对观测者有相对运动（u）；

2．真空中光传播速率为恒定值（c），与光源运动无关。

（A） 相离运动中，有：

$$t' = \frac{1}{1+\frac{u}{c}}t \quad ，（0 < u < +\infty）$$

即：

$$t = \frac{c+u}{c}t'$$

在静系观测者看来，动系时间间隔变大了：

$$\Delta t = \frac{c+u}{c}\Delta t' > \Delta t'$$

（B） 相向运动中，有：

$$t' = \frac{1}{1-\frac{u_f}{c}}t \text{，}（0 < u_f < c）$$

即：

$$t = \frac{c-u_f}{c}t'$$

在静系观测者看来，动系时间间隔变小了：

$$\Delta t = \frac{c-u_f}{c}\Delta t' < \Delta t'$$

运动光源O连续发光过程示于图 3-1 及图 3-2。

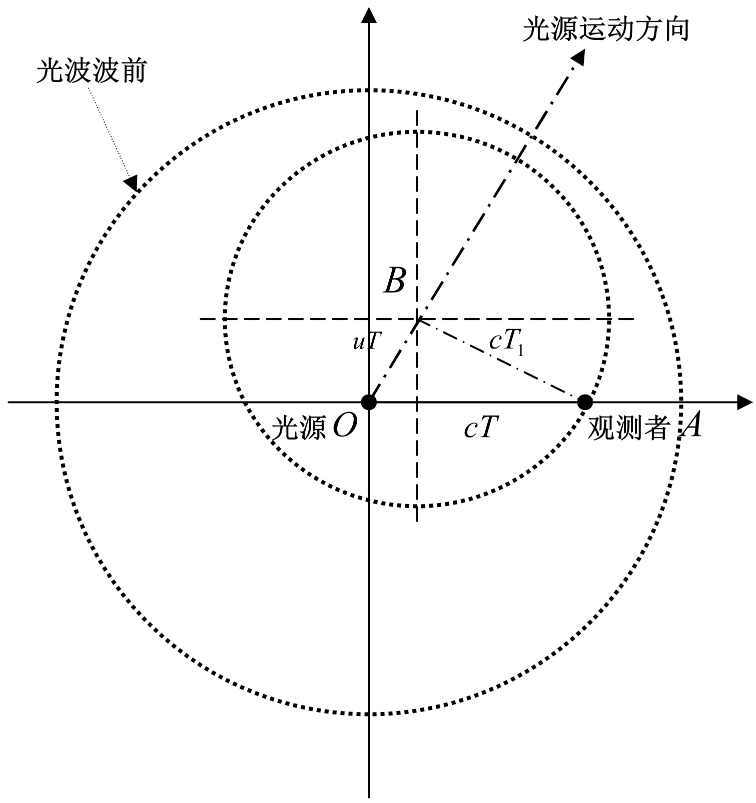


图 3-1 运动光源 O 连续发光过程

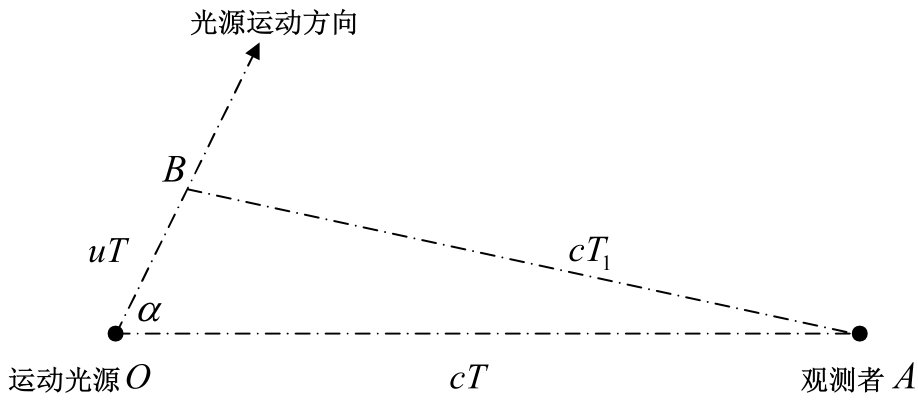


图 3-2 运动光源 O 连续发光过程

参看图 3-1 及图 3-2。c 为真空中光传播速率，T 为光波的发射周期（固有周期），T_1 为光波的接收周期（多普勒周期）。$\left|\overline{OA}\right| = cT$，$cT$ 为光波的固有周期行程。$\left|\overline{BA}\right| = cT_1$，$cT_1$ 为光波的多普勒周期行程。$\left|\overline{OB}\right| = uT$，$uT$ 为光源在光波固有周期内的运动行程。

光源运动速度 u 对‘光源 O—观测者 A’连线的夹角为 α，即 $\overline{OB}$ 对 $\overline{OA}$ 的夹角为 α，即图中 $\angle BOA = \alpha$。

参看图 3-1 及图 3-2。

$$\overline{OB}+\overline{BA}=\overline{OA}$$

得：

$$\overline{BA}=\overline{OA}-\overline{OB}$$

$$\left|\overline{OA}\right|=cT\ ;\ \left|\overline{OB}\right|=uT\ ;\ \left|\overline{BA}\right|=cT_1$$

参看图 3-2，有：

$$\left|\overline{BA}\right|=\sqrt{\left|\overline{OA}\right|^2+\left|\overline{OB}\right|^2-2\left|\overline{OA}\right|\left|\overline{OB}\right|\cos\angle BOA}$$

即：

$$cT_1=\sqrt{(cT)^2+(uT)^2-2(cT)(uT)\cos\alpha}$$

$$=cT\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}-2\frac{u}{c}\cos\alpha}$$

从而得：

$$T_1=T\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}-2\frac{u}{c}\cos\alpha}$$

考虑到（发射）光波的固有频率为$\eta=1/T$及（接收）光波的多普勒频率为$\eta_1=1/T_1$，得：

$$\boxed{\begin{gathered}\eta_1=\frac{\eta}{\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}-2\frac{u}{c}\cos\alpha}}\\ u>0\end{gathered}}$$

式中：c — 真空中光传播速率；u — 光源运动速度；α — 光源运动速度u对‘**光源O—观测者A**’连线的夹角；T—光波的发射周期（固有周期）；T_1—光波的接收周期（多普勒周期）；$\eta=1/T$ — （发射）光波的固有频率；$\eta_1=1/T_1$ — （接收）光波的多普勒频率。

一、纵向多普勒效应

A．当光源O向着观测者A运动时，$\alpha=0$；这时发生“**多普勒蓝移**”：

$$T_1=T\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}-2\frac{u}{c}}=\left(1-\frac{u}{c}\right)T$$

得：

$$\boxed{\begin{gathered}\eta_1 = \frac{\eta}{1-\frac{u}{c}} > \eta \\ 0 < u < c\end{gathered}}$$

B．当光源O背离观测者A运动时，$\alpha = \pi$；这时发生**“多普勒红移”**：

$$T_1 = T\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}+2\frac{u}{c}} = \left(1+\frac{u}{c}\right)T$$

得：

$$\boxed{\begin{gathered}\eta_1 = \frac{\eta}{1+\frac{u}{c}} < \eta \\ 0 < u < +\infty\end{gathered}}$$

“多普勒蓝移”与**“多普勒红移”**示于图 3-3、图 3-4。

二、侧向多普勒效应

若光源运动速度u对‘**光源O—观测者A**’连线的夹角α处在以下范围：$0 < \alpha < \pi/2$

及 $\pi/2 < \alpha < \pi$，则有：

$$T_1 = T\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}-2\frac{u}{c}\cos\alpha}$$

得：

$$\boxed{\eta_1 = \frac{\eta}{\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}-2\frac{u}{c}\cos\alpha}}}$$

三、横向多普勒效应

若光源运动速度u垂直于‘**光源O—观测者A**’连线，即$\alpha = \pi/2$，这时发生‘**多普勒红移**’：

$$T_1 = T\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}}$$

得：

$$\boxed{\eta_1 = \frac{\eta}{\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}}} < \eta}$$

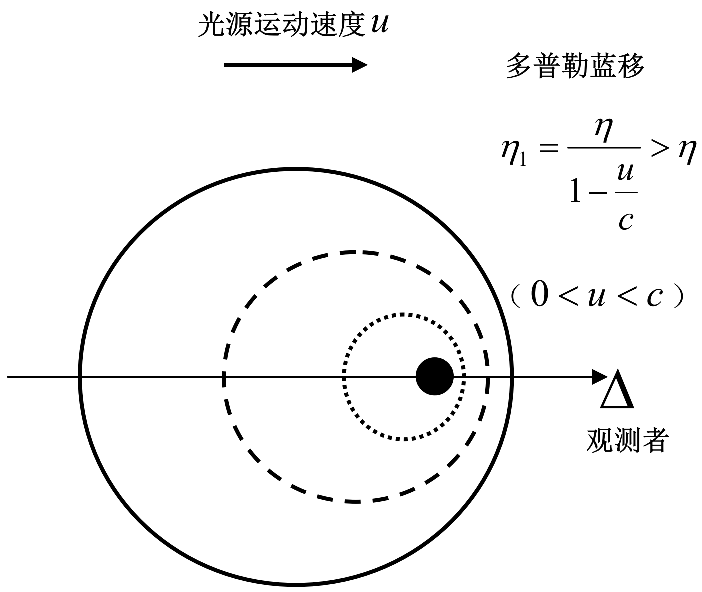


图 3-3 多普勒蓝移

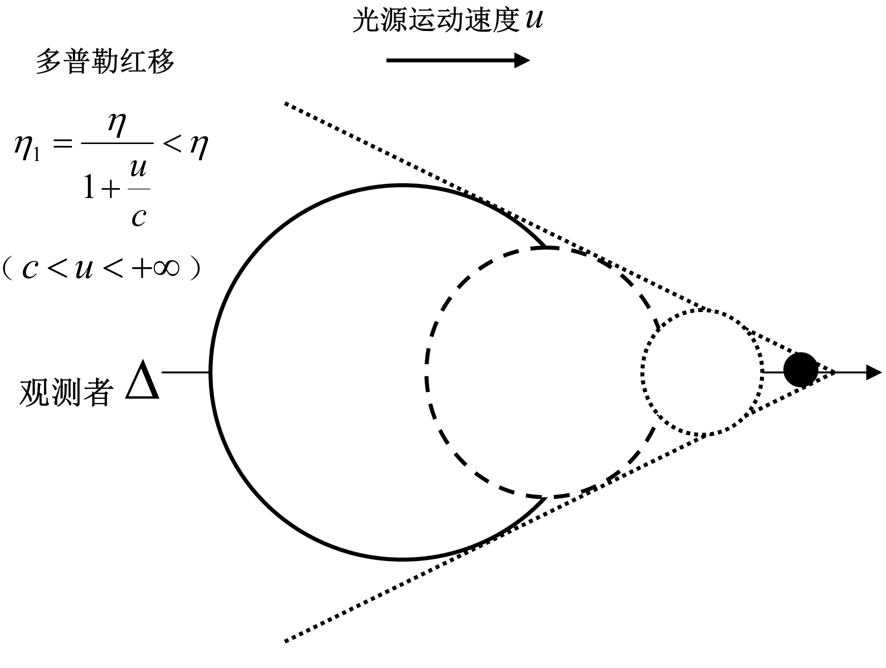


图 3-4 多普勒红移

第四章

伽利略-周方变换的数理推导

一、伽利略变换

K 系与 K' 系之间的关系示于图 4-1、图 4-2。

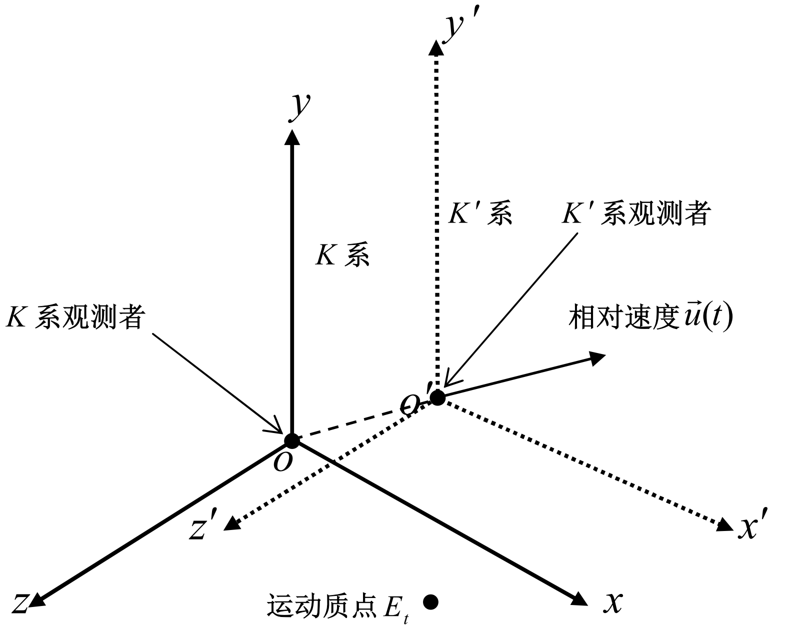


图 4-1 K 系与 K' 系之间的关系

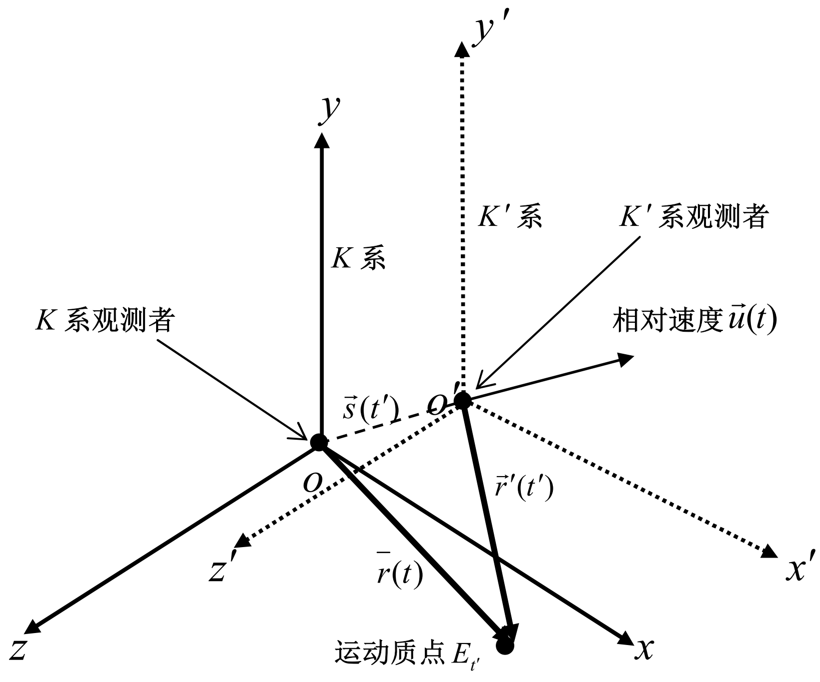


图 4-2 K 系与 K' 系之间的关系

下面我们解释图 4-2 中诸矢量的定义及诸矢量之间的关系：

1. “K 系观测者 O 在时刻 t 观测到运动质点 E_t”，用矢量 $\overline{OE_t}$ 表示，矢量 $\overline{OE_t}=\bar{r}$ ，

$\bar{r}=[\bar{x},\bar{y},\bar{z}]^T$ 称为“K 系观测者 O 在时刻 t 对质点的观测矢量”。点 E_t 称为“K 系观测者 O 在时刻 t 的 K 系时空点”。

2. “K' 系观测者 O' 在时刻 t' 观测到运动质点 $E_{t'}$”，用矢量 $\overline{O'E_{t'}}$ 表示，矢量 $\overline{O'E_{t'}}=\vec{r}'$，

$\vec{r}'=[x',y',z']^T$ 称为“K' 系观测者 O' 在时刻 t' 对质点的观测矢量”。点 $E_{t'}$ 称为“K' 系观测者 O' 在时刻 t' 的 K' 系时空点”。

3. 矢量 $\overline{OO'}=\vec{s}(t')$，式中 $\vec{s}(t')=\int_0^{t'}\vec{u}dt$，$\vec{u}=[u_x,u_y,u_z]^T$， $\vec{s}(t')$ 称为“K' 系观测者 O' 在时刻 t' 时离 K 系观测者 O 的距离矢量” 。

参看图 4-2，互作相对运动的两观测者在同一时刻 $t(=t')$ 观测到同一质点 E_t（$E_{t'}$），使两观测者对该质点 E_t（$E_{t'}$）在同一时刻 $t(=t')$ 的观测矢量 $\overline{O'E_{t'}}=\vec{r}'$ 与观测矢量 $\overline{OE_t}=\bar{r}$ 通过两观测者之间的距离矢量 $\overline{OO'}=\vec{s}(t')$ 构成观测矢量合成三角形 $\Delta OO'E_t$。由此可得：在时刻 $t=t'$，K' 系观测者 O' 的观测矢量 $\overline{O'E_{t'}}=\vec{r}'$、$K$ 系观测者 O 的观测矢量 $\overline{OE_t}=\bar{r}$ 与 K' 系观测者 O' 离 K 系观测者 O 的距离矢量 $\overline{OO'}=\vec{s}(t')$ 满足**矢量合成关系式**：

$$\overline{OE_t}=\overline{OO'}+\overline{O'E_{t'}}$$

即：在时刻 $t=t'$，“K 系观测者 O 的观测矢量 $\overline{OE_t}$”为“K' 系观测者 O' 离 K 系观测者 O 的距离矢量 $\overline{OO'}$” 与 “K' 系观测者 O' 的观测矢量 $\overline{O'E_{t'}}$” 之和。

将 $\overline{OE_t}=\bar{r}$，$\overline{O'E_{t'}}=\vec{r}'$ 及 $\overline{OO'}=\vec{s}(t')$ 代入上面的**矢量合成关系式**，得：

$$\begin{cases}\bar{r}(t)=\vec{r}'(t')+\vec{s}(t')\\ t=t'\end{cases}$$

这就是“**一般伽利略变换**”。由此得到一对互为正变换与逆变换的**伽利略变换**方程组：

$$\begin{cases}\bar{r}(t)=\vec{r}'(t')+\vec{s}(t')\\ t=t'\end{cases}\qquad\begin{cases}\vec{r}'(t')=\bar{r}(t)-\vec{s}(t)\\ t'=t\end{cases}$$

式中 $\bar{r}=\left[\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right]^T$，$\vec{r}'=\left[x',y',z'\right]^T$，$\vec{s}(t')=\int_0^{t'}\vec{u}dt$，$\vec{u}=\left[u_x,u_y,u_z\right]^T$

“一般伽利略变换”的观测矢量图示于图 4-3。

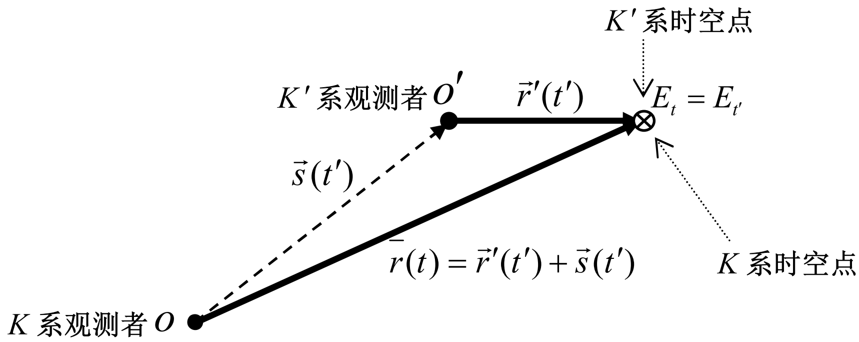


图 4-3 “一般伽利略变换”的观测矢量图

“一般伽利略变换”的数学表达式可以表为矢量方程：

$$\begin{bmatrix}\bar{r}\\ t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{r}'+\vec{s}(t')\\ t'\end{bmatrix}$$

即：

$$\begin{cases}\bar{r}=\vec{r}'+\vec{s}(t')\\ t=t'\end{cases}$$

式中：$\bar{r}=\left[\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right]^T$，$\vec{r}'=\left[x',y',z'\right]^T$，$\vec{s}(t')=\int_0^{t'}\vec{u}dt$，$\vec{u}=\left[u_x,u_y,u_z\right]^T$

“一般伽利略变换”的观测矢量图列于表 4-1。

表 4-1 “一般伽利略变换”的观测矢量图

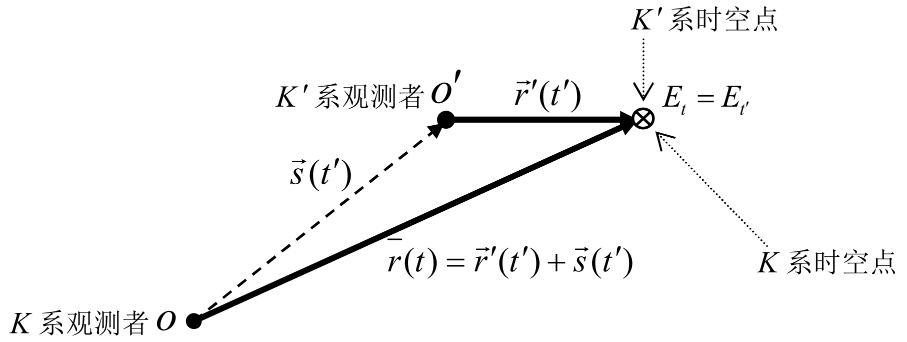
一般伽利略变换

$$\begin{bmatrix} \overline{r} \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}' + \vec{s}(t') \\ t' \end{bmatrix}$$

$$\overline{r} = \left[\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}\right]^T,\ \vec{r}' = \left[x', y', z'\right]^T,\ \vec{s}(t') = \int_0^{t'} \vec{u}\,dt,\ \vec{u} = \left[u_x, u_y, u_z\right]^T$$

伽利略变换描述以下客观的物理现象：

在光传播速度为无穷大之假定条件下，互作相对运动（$\vec{u}$）并持有相同的錶及尺的两个观测者，在任何时刻（$t = t'$）都能同时观测到同一运动质点，这时两观测者所获得观测数据之间形成如下关系：观测矢量$(\overline{r}, t)$与观测矢量$(\vec{r}', t')$通过两观测者之间的距离矢量$\vec{s}(t')$构成观测矢量合成三角形，如下图所示：



实质上，**伽利略变换**的内涵是：在‘光速为无穷大’假定条件下，互作相对运动的两观测者可以在同一时刻观测到同一运动质点：两观测者在此时刻的观测矢量通过两观测者之间的距离矢量构成‘观测矢量合成三角形’。这样，**伽利略变换**刻画了“真空中光速为无穷大假定条件下作相对运动的两观测者在同一时刻$t(=t')$的观测矢量$\vec{r}'(t')$与$\overline{r}(t)$通过两观测者之间的距离矢量$\vec{s}(t')$形成的**矢量合成关系**”：（参看**表** 4-1）

$$\begin{bmatrix} \overline{r} \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}' + \vec{s}(t') \\ t' \end{bmatrix}$$

$$\overline{r} = \left[\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}\right]^T,\ \vec{r}' = \left[x', y', z'\right]^T,\ \vec{s}(t') = \int_0^{t'} \vec{u}\,dt,\ \vec{u} = \left[u_x, u_y, u_z\right]^T$$

根据“**一般伽利略变换**”的观测矢量图（参看**表** 4-1），可以绘出“**一般伽利略变换**”的 K 系时空轨迹，示于**图** 4-4。

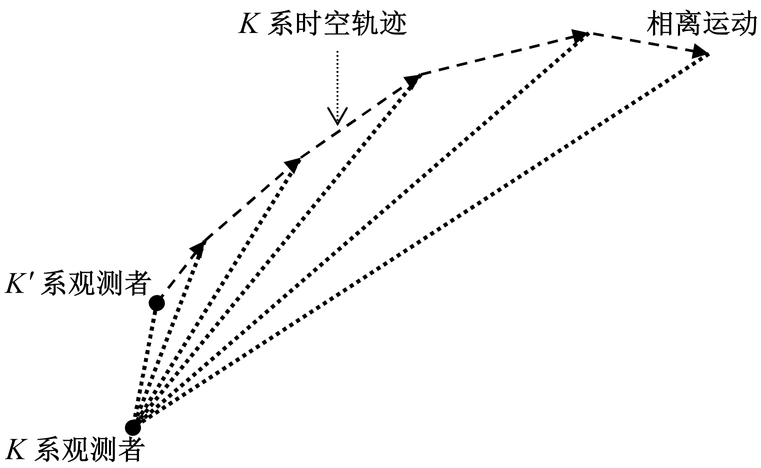


图 4-4 “一般伽利略变换”的 K 系时空轨迹

“一般伽利略变换”的 K 系时空轨迹及 K' 系时空轨迹示于图 4-5。

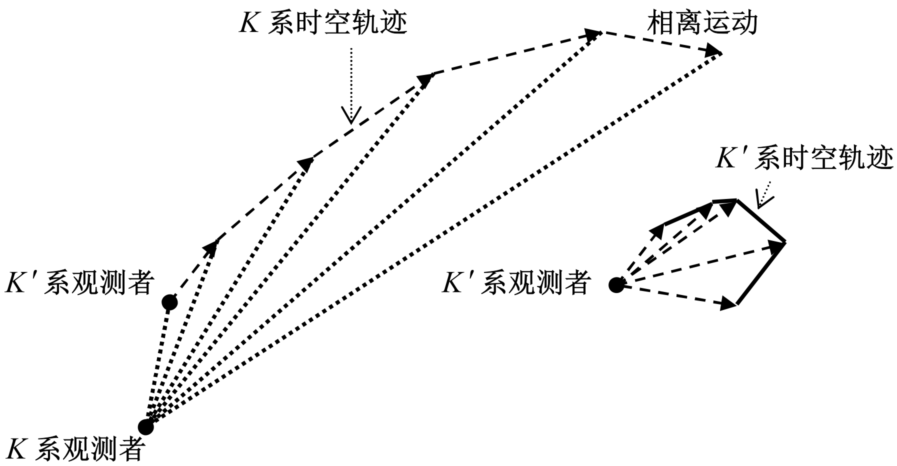


图 4-5 “一般伽利略变换”的 K 系时空轨迹及 K' 系时空轨迹

若 $\vec{u} = const.$，则 $\vec{s}(t') = \int_0^{t'} \vec{u}\,dt = \vec{u}t'$，于是“一般伽利略变换”:

$$\begin{bmatrix} \bar{r} \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}' + \vec{s}(t') \\ t' \end{bmatrix}$$

$$\bar{r} = \left[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\right]^T,\ \vec{r}' = \left[x', y', z'\right]^T,\ \vec{s}(t') = \int_0^{t'} \vec{u}\,dt,\ \vec{u} = \left[u_x, u_y, u_z\right]^T$$

变为

$$\begin{bmatrix} \bar{r} \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}' + \vec{u}t' \\ t' \end{bmatrix}$$

$$\overline{r}=\left[\overline{x},\overline{y},\overline{z}\right]^T,\ \ \vec{r}'=\left[x',y',z'\right]^T,\ \ \vec{u}=\left[u_x,u_y,u_z\right]^T$$

可以将“**一般伽利略变换**”的“正变换”及“逆变换”写成沿坐标轴的展开形式：

$$\begin{cases}\overline{x}=x'+u_xt'\\ \overline{y}=y'+u_yt'\\ \overline{z}=z'+u_zt'\\ t=t'\end{cases}\qquad\begin{cases}x'=\overline{x}-u_xt\\ y'=\overline{y}-u_yt\\ z'=\overline{z}-u_zt\\ t'=t\end{cases}$$

在“**一般伽利略变换**”中令$\vec{u}=\left[u_x,u_y,u_z\right]^T=\left[u,0,0\right]^T$，就得到所谓的“**特殊伽利略变换**”：

$$\begin{cases}\overline{x}=x'+ut'\\ \overline{y}=y'\\ \overline{z}=z'\\ t=t'\end{cases}\qquad\begin{cases}x'=\overline{x}-ut\\ y'=\overline{y}\\ z'=\overline{z}\\ t'=t\end{cases}$$

“**特殊伽利略变换**”通常简称为“**伽利略变换**”。

另一种更简捷的推导“伽利略变换”的方法

（1）在$t'=t=0$时，K'**系原点**与K**系原点**相重合，也就是说，在时刻$t'=t=0$有：

$\vec{r}(t)=\vec{r}(0)=0$及$\vec{r}'(t')=\vec{r}'(0)=0$。

（2）在t'，$t>0$时，K'**系原点**$\vec{r}'(t')=0$相对于K**系原点**$\vec{r}(t)=0$做相对运动，此时‘K'**系原点**$\vec{r}'(t')=0$对K**系原点**$\vec{r}(t)=0$’之位置为$\vec{r}(t)=\int_0^t\vec{u}(t)dt$。故在$t'$，$t>0$时有：$\vec{r}(t)=\int_0^t\vec{u}(t)dt$及$\vec{r}'(t')=0$。

时空变换的**时间变换式**必须满足条件（1），**空间变换式**必须满足条件（1）和（2）。

下面，我们推导出能满足（1）、（**2**）两项条件的$\vec{r}'(t')$与$\vec{r}(t)$之间的数学关系式 — 时空变换的**空间变换式**：

对于任意时刻t'，$t>0$，以下‘**等价式**’恒成立：

$$\left(\begin{array}{l} \text{‘}K'\text{系原点对}K'\text{系原点’之位置}\vec{r}'(t')=0 \quad \Leftrightarrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{‘}K'\text{系原点对}K\text{系原点’之位置}\vec{r}(t)=\int_0^t \vec{u}(t)dt \\ \qquad\qquad\qquad + \text{‘}K\text{系原点对}K'\text{系原点’之位置}-\int_0^t \vec{u}(t)dt \end{array} \right)$$

可以写成如下**‘等价式’**：

$$\{\vec{r}'(t')=0\} \Leftrightarrow \left\{\vec{r}(t)-\int_0^t \vec{u}(t)dt=\int_0^t \vec{u}(t)dt-\int_0^t \vec{u}(t)dt=0\right\}$$

即：
$$\{\vec{r}'(t')=0\} \Leftrightarrow \left\{\vec{r}(t)-\int_0^t \vec{u}(t)dt=0\right\}$$

这个**‘等价式’**可以写成以下**‘恒等式’**：

$$\vec{r}'(t') \equiv \vec{r}(t)-\int_0^t \vec{u}(t)dt=0$$

由此得到相应的**‘条件等式’**（方程式）：

$$\vec{r}'(t')=\frac{1}{k}\left[\vec{r}(t)-\int_0^t \vec{u}(t)dt\right] \qquad (k \neq 0)$$

这就是时空变换的**空间变换式**所具有的数学结构形式。

函数$\vec{r}'(t')=\frac{1}{k}\left[\vec{r}(t)-\int_0^t \vec{u}(t)dt\right]$的**逆函数**为：

$$\vec{r}(t)=k\vec{r}'(t')+\int_0^t \vec{u}(t)dt$$

$$=k\left[\vec{r}'(t')+\frac{1}{k}\int_0^t \vec{u}(t)dt\right]$$

即：
$$\vec{r}(t)=k\left[\vec{r}'(t')+\frac{1}{k}\int_0^t \vec{u}(t)dt\right]$$

由此方程可得出与之等价的一组方程：

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = k\left[\vec{r}'(t') + \int_0^{t'} \vec{u}(t)dt\right] \\ t = kt' \end{cases}$$

反过来，函数$\vec{r}(t) = k\left[\vec{r}'(t') + \int_0^{t'} \vec{u}(t)dt\right]$的逆函数为：

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t') &= \frac{1}{k}\vec{r}(t) - \int_0^{t'} \vec{u}(t)dt \\ &= \frac{1}{k}\left[\vec{r}(t) - k\int_0^{t'} \vec{u}(t)dt\right] \end{aligned}$$

即：
$$\vec{r}'(t') = \frac{1}{k}\left[\vec{r}(t) - k\int_0^{t'} \vec{u}(t)dt\right]$$

由此方程可得出与之等价的一组方程：

$$\begin{cases} \vec{r}'(t') = \frac{1}{k}\left[\vec{r}(t) - \int_0^{t} \vec{u}(t)dt\right] \\ t' = \frac{1}{k}t \end{cases}$$

于是，得到互相等价的两个方程组：

$$\begin{cases} \vec{r}'(t') = \frac{1}{k}\left[\vec{r}(t) - \int_0^{t} \vec{u}(t)dt\right] \\ t' = \frac{1}{k}t \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{r}(t) = k\left[\vec{r}'(t') + \int_0^{t'} \vec{u}(t)dt\right] \\ t = kt' \end{cases}$$

这就是互为正、逆变换的两组时空变换方程组。写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \vec{r}'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \frac{1}{k}\begin{bmatrix} \vec{r}(t) - \int_0^{t} \vec{u}(t)dt \\ t \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \vec{r}(t) \\ t \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} \vec{r}'(t') + \int_0^{t'} \vec{u}(t)dt \\ t' \end{bmatrix}$$

令$k = 1$，得：

$$\begin{bmatrix} \vec{r}'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}(t) - \int_0^{t} \vec{u}(t)dt \\ t \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \vec{r}(t) \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}'(t') + \int_0^{t'} \vec{u}(t)dt \\ t' \end{bmatrix}$$

这两组方程就是互为正、逆变换的“伽利略变换”。

在K'系原点相对于K系原点沿K系的 x 轴正方向以匀速$\vec{u}$做相对运动之场合下，有：

$u_x(t)=u$，$u_y(t)=0$，$u_z(t)=0$，即$\vec{u}(t)=\left[u_x(t),u_y(t),u_z(t)\right]^T=\left[u,\quad 0,\quad 0\right]^T$。

$$\int_0^t u_x(t)dt=ut\text{，}\int_0^t u_y(t)dt=0\text{，}\int_0^t u_z(t)dt=0$$

$$\int_0^{t'} u_x(t)dt=ut'\text{，}\int_0^{t'} u_y(t)dt=0\text{，}\int_0^{t'} u_z(t)dt=0$$

此时“伽利略变换”为：

$$\begin{cases} x'=\overline{x}-ut \\ y'=\overline{y} \\ z'=\overline{z} \\ t'=t \end{cases}\qquad\begin{cases} \overline{x}=x'+ut' \\ \overline{y}=y' \\ \overline{z}=z' \\ t=t' \end{cases}$$

必须指出，伽利略变换只在‘真空中光速为无穷大’假定条件下才能成立，或者是在‘真空中光速为有限值’但参考系相对速度与光速相比较是微不足道的情况下才能近似地成立。因此，在“两观测者作相对运动且真空中光速为有限值”且相对速度与光速相比并非微不足道之实际条件下，伽利略变换的K系时空点以及K系时空轨迹实际上都是不可被K系观测者观测到的。

伽利略变换沿x轴、y轴及z轴的时空图示于图 4-6、图 4-7、图 4-8。

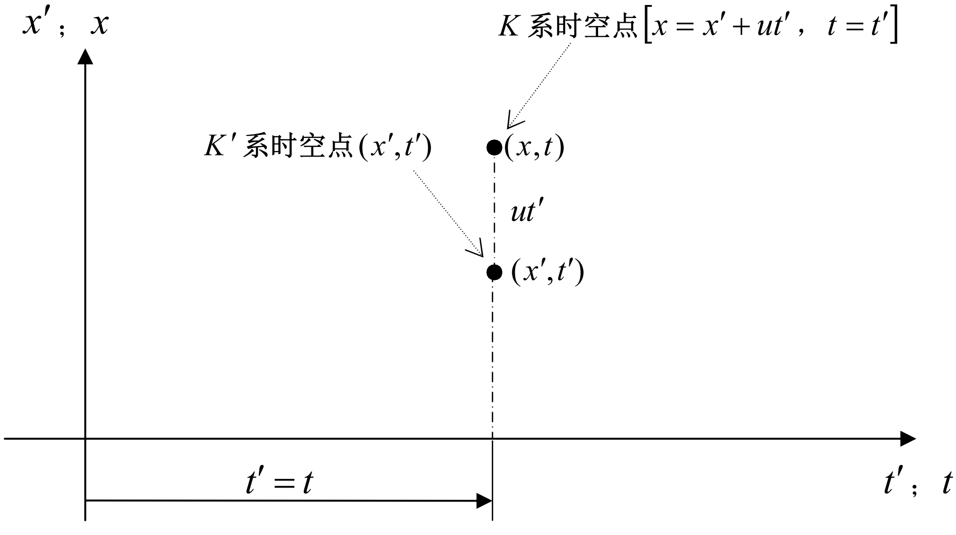


图 4-6 伽利略变换沿x轴的时空图

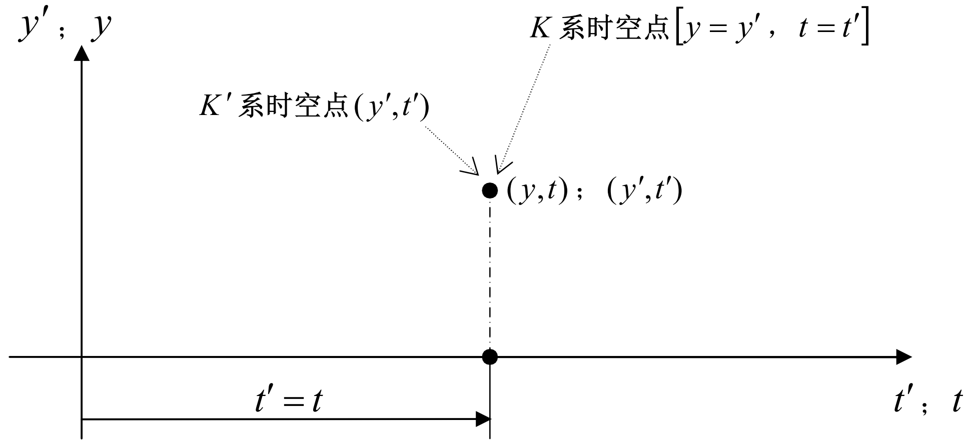


图 4-7 伽利略变换沿 y 轴的时空图

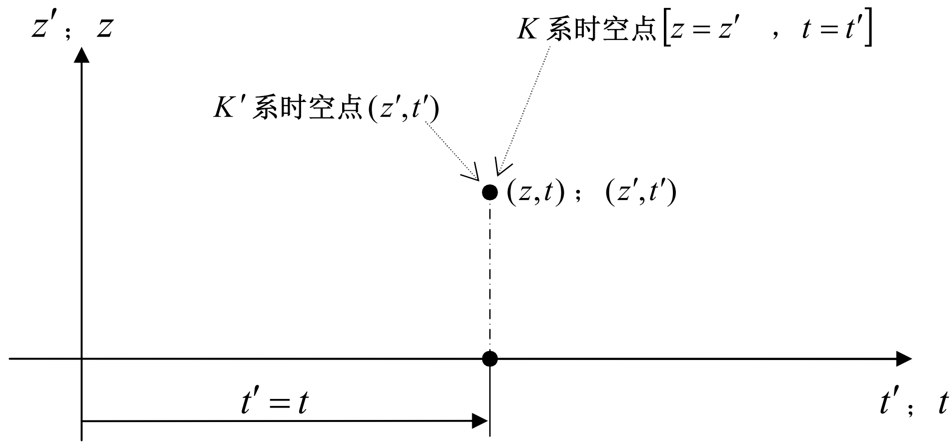


图 4-8 伽利略变换沿 z 轴的时空图

将图 4-6、图 4-7、图 4-8 三个图整合为一个图，示于图 4-9。

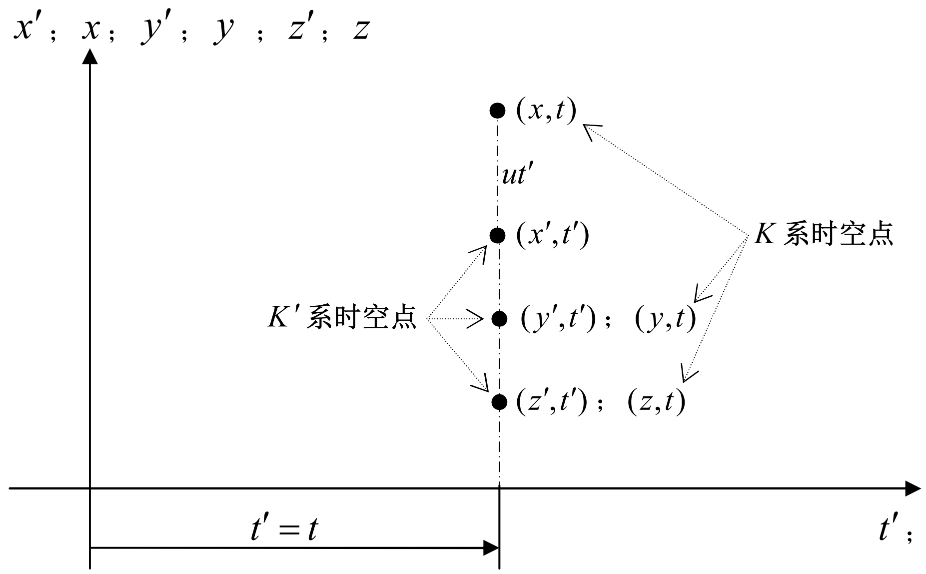


图 4-9 伽利略变换的时空图

二、（一般）伽利略-周方变换

1. 建立两个坐标系（欧氏空间），记为：K 系和 K' 系。K 系的 x 轴、y 轴、z 轴中没有任何一个轴优越于另一个轴；K' 系的 x' 轴、y' 轴、z' 轴中也没有任何一个轴优越于另一个轴。始终保持：x' 轴// x 轴，y' 轴// y 轴，z' 轴// z 轴。

2. 两个观测者分别固定在 K 系原点和 K' 系原点。两观测者持有相同的‘时钟’及相同的‘测距工具’。K 系观测者测得的时间（K 系时间）记为 t，K' 系观测者测得的时间（K' 系时间）记为 t'，

3. 两坐标系相对运动的起始状态为：在 $t'=t=0$ 时，K' 系与 K 系重合。

4. 在 t'，$t>0$ 时，K' 系相对于 K 系做平移运动，相对速度为 $\vec{u}(t)$。

5. 光波或电磁波为传送质点位置讯息的‘工具’。

K' 系与 K 系之间的关系示于图 4-1。

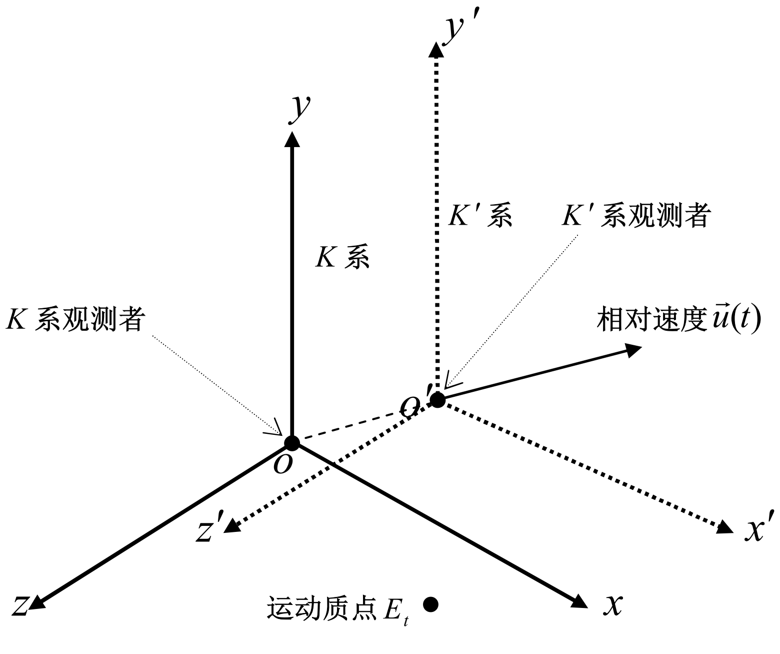


图 4-1 K' 系与 K 系之间的关系

这里，我们将通过两种推导途径，揭示**时空变换**的数学表达式。

A. **推导途径 A — 将 K 系视为‘静止系’**：

（1）在 $t'=t=0$ 时，K' **系原点**与 K **系原点**相重合，也就是说，在时刻 $t'=t=0$ 有：$\vec{r}(t)=\vec{r}(0)=0$ 及 $\vec{r}\,'(t')=\vec{r}\,'(0)=0$。

（2）在 t'，$t>0$ 时，K' **系原点** $\vec{r}\,'(t')=0$ 相对于 K **系原点** $\vec{r}(t)=0$ 做相对运动，此时‘K'

系原点$\vec{r}'(t')=0$对K系原点$\vec{r}(t)=0$’之位置为$\vec{r}(t)=\int_0^t \vec{u}(t)dt$。故在$t'$，$t>0$时有：

$\vec{r}(t)=\int_0^t \vec{u}(t)dt$及$\vec{r}'(t')=0$。

时空变换的**时间变换式**必须满足条件（**1**），**空间变换式**必须满足条件（1）和（2）。

下面，我们推导出能满足（1）、（2）两项条件的$\vec{r}'(t')$与$\vec{r}(t)$之间的数学关系式 — 时空变换的**空间变换式**：

对于任意时刻t'，$t>0$，以下**‘等价式’**恒成立：

‘K'系原点对K'系原点’之位置$\vec{r}'(t')=0$ $\Leftrightarrow$

‘K'系原点对K系原点’之位置$\vec{r}(t)=\int_0^t \vec{u}(t)dt$

＋ ‘K系原点对K'系原点’之位置$-\int_0^t \vec{u}(t)dt$

可以写成如下**‘等价式’**：

$$\{\vec{r}'(t')=0\} \Leftrightarrow \left\{\vec{r}(t)-\int_0^t \vec{u}(t)dt=\int_0^t \vec{u}(t)dt-\int_0^t \vec{u}(t)dt=0\right\}$$

即：
$$\{\vec{r}'(t')=0\} \Leftrightarrow \left\{\vec{r}(t)-\int_0^t \vec{u}(t)dt=0\right\}$$

这个**‘等价式’**可以写成以下**‘恒等式’**：

$$\vec{r}'(t')\equiv\vec{r}(t)-\int_0^t \vec{u}(t)dt=0$$

由此得到相应的**‘条件等式’**（方程式）：

$$\vec{r}'(t')=\frac{1}{k}\left[\vec{r}(t)-\int_0^t \vec{u}(t)dt\right] \qquad (k\neq 0)$$

这就是时空变换的**空间变换式**，其特点是等式右边必然出现$\left[\vec{r}(t)-\int_0^t \vec{u}(t)dt\right]$这个因子，才能刻画“在$t'$，$t>0$时，$K'$系原点$\vec{r}'(t')=0$相对于$K$系原点$\vec{r}(t)=0$做相对运动”

这一物理事实。

容易验证，方程式$\vec{r}'(t')=\frac{1}{k}\left[\vec{r}(t)-\int_0^t\vec{u}(t)dt\right]$能够满足上面（1）和（2）两项条件。

函数$\vec{r}'(t')=\frac{1}{k}\left[\vec{r}(t)-\int_0^t\vec{u}(t)dt\right]$的逆函数为：

$$\vec{r}(t)=k\vec{r}'(t')+\int_0^t\vec{u}(t)dt$$

$$=k\left[\vec{r}'(t')+\frac{1}{k}\int_0^t\vec{u}(t)dt\right]$$

即：
$$\vec{r}(t)=k\left[\vec{r}'(t')+\frac{1}{k}\int_0^t\vec{u}(t)dt\right]$$

由此方程可得出与之等价的一组方程：

$$\begin{cases}\vec{r}(t)=k\left[\vec{r}'(t')+\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right]\\ t=kt'\end{cases}$$

反过来，函数$\vec{r}(t)=k\left[\vec{r}'(t')+\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right]$的逆函数为：

$$\vec{r}'(t')=\frac{1}{k}\vec{r}(t)-\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt$$

$$=\frac{1}{k}\left[\vec{r}(t)-k\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right]$$

即：
$$\vec{r}'(t')=\frac{1}{k}\left[\vec{r}(t)-k\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right]$$

由此方程可得出与之等价的一组方程：

$$\begin{cases}\vec{r}'(t')=\frac{1}{k}\left[\vec{r}(t)-\int_0^{t}\vec{u}(t)dt\right]\\ t'=\frac{1}{k}t\end{cases}$$

于是，得到互相等价的两个方程组：

$$\begin{cases}\vec{r}\,'(t') = \dfrac{1}{k}\left[\vec{r}(t) - \int_0^t \vec{u}(t)dt\right] \\ t' = \dfrac{1}{k}t\end{cases} \qquad\qquad \begin{cases}\vec{r}(t) = k\left[\vec{r}\,'(t') + \int_0^{t'} \vec{u}(t)dt\right] \\ t = kt'\end{cases}$$

这就是互为正、逆变换的两组时空变换方程组。写成矢量形式：

$$\begin{bmatrix}\vec{r}\,'(t') \\ t'\end{bmatrix} = \frac{1}{k}\begin{bmatrix}\vec{r}(t) - \int_0^t \vec{u}(t)dt \\ t\end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix}\vec{r}(t) \\ t\end{bmatrix} = k\begin{bmatrix}\vec{r}\,'(t') + \int_0^{t'} \vec{u}(t)dt \\ t'\end{bmatrix}$$

****

B. 推导途径 B — 将 K' 系视为‘静止系’：

（1）在 $t' = t = 0$ 时，K' 系原点与 K 系原点相重合，也就是说，在时刻 $t' = t = 0$ 有：$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) = 0$ 及 $\vec{r}\,'(t') = \vec{r}\,'(0) = 0$ 。

（2）在 t'，$t > 0$ 时，K' 系原点 $\vec{r}\,'(t') = 0$ 相对于 K 系原点 $\vec{r}(t) = 0$ 做相对运动，此时‘K' 系原点 $\vec{r}\,'(t') = 0$ 对 K 系原点 $\vec{r}(t) = 0$’之位置为 $\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{u}(t)dt$ 。故在 t'，$t > 0$ 时有：$\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{u}(t)dt$ 及 $\vec{r}\,'(t') = 0$ 。

时空变换的**时间变换式**必须满足条件（1），**空间变换式**必须满足条件（1）和（2）。

下面，我们推导出能满足（1）、（2）两项条件的 $\vec{r}\,'(t')$ 与 $\vec{r}(t)$ 之间的数学关系式 — 时空变换的**空间变换式**：

对于任意时刻 t'，$t > 0$，以下‘**等价式**’恒成立：

$$\left(\begin{array}{l}\text{‘}K\text{ 系原点对 }K\text{ 系原点’之位置 }\vec{r}(t) = 0 \iff \\ \qquad\qquad\text{‘}K\text{ 系原点对 }K'\text{ 系原点’之位置 }\vec{r}\,'(t') = -\int_0^{t'} \vec{u}(t)dt \\ \qquad\qquad + \text{‘}K'\text{ 系原点对 }K\text{ 系原点’之位置 }\int_0^{t'} \vec{u}(t)dt\end{array}\right)$$

可以写成如下**‘等价式’**：

$$\{\vec{r}(t)=0\} \Leftrightarrow \left\{\vec{r}\,'(t')+\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt=-\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt+\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt=0\right\}$$

即：
$$\{\vec{r}(t)=0\} \Leftrightarrow \left\{\vec{r}\,'(t')+\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt=0\right\}$$

这个**‘等价式’**可以写成以下**‘恒等式’**：

$$\vec{r}(t)\equiv\vec{r}\,'(t')+\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt=0$$

由此得到相应的**‘条件等式’**（方程式）：

$$\vec{r}(t)=\frac{1}{k}\left[\vec{r}\,'(t')+\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right] \qquad (k\neq 0)$$

这就是时空变换的**空间变换式**，其特点是等式右边必然出现$\left[\vec{r}\,'(t')+\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right]$这个因子，才能刻画“在$t'$，$t>0$时，$K'$系原点$\vec{r}\,'(t')=0$相对于$K$系原点$\vec{r}(t)=0$做相对运动”这一物理事实。

容易验证，方程式$\vec{r}(t)=\frac{1}{k}\left[\vec{r}\,'(t')+\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right]$能够满足上面（1）和（2）两项条件。

函数$\vec{r}(t)=\frac{1}{k}\left[\vec{r}\,'(t')+\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right]$的**逆函数**为：

$$\vec{r}\,'(t')=k\vec{r}(t)-\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt$$

$$=k\left[\vec{r}(t)-\frac{1}{k}\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right]$$

即：
$$\vec{r}\,'(t')=k\left[\vec{r}(t)-\frac{1}{k}\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right]$$

与此方程等价的一组方程为：

$$\begin{cases}\vec{r}\,'(t')=k\left[\vec{r}(t)-\int_0^{t}\vec{u}(t)dt\right]\\ t'=kt\end{cases}$$

反过来，函数$\vec{r}'(t')=k\left[\vec{r}(t)-\int_0^t\vec{u}(t)dt\right]$的逆函数为：

$$\vec{r}(t)=\frac{1}{k}\vec{r}'(t')+\int_0^t\vec{u}(t)dt$$

$$=\frac{1}{k}\left[\vec{r}'(t')+k\int_0^t\vec{u}(t)dt\right]$$

即：
$$\vec{r}(t)=\frac{1}{k}\left[\vec{r}'(t')+k\int_0^t\vec{u}(t)dt\right]$$

与此方程等价的一组方程为：

$$\begin{cases}\vec{r}(t)=\frac{1}{k}\left[\vec{r}'(t')+\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right]\\ t=\frac{1}{k}t'\end{cases}$$

于是，得到互相等价的两个方程组：

$$\begin{cases}\vec{r}'(t')=k\left[\vec{r}(t)-\int_0^t\vec{u}(t)dt\right]\\ t'=kt\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\vec{r}(t)=\frac{1}{k}\left[\vec{r}'(t')+\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right]\\ t=\frac{1}{k}t'\end{cases}$$

这就是互为正、逆变换的两组时空变换表达式。写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}\vec{r}(t)-\int_0^t\vec{u}(t)dt\\ t\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\vec{r}(t)\\ t\end{bmatrix}=\frac{1}{k}\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')+\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\\ t'\end{bmatrix}$$

式中系数k称为K系对K'系的“**时空度规比**”。下面，我们确定方程组中的k值。

在‘真空中光速为有限值c（$c=3.0\times10^5$千米/秒）’条件下，在时刻t'，K'系观测者观测到运动质点并瞬刻即发出光波（电磁波）讯号。由于真空中光波（电磁波）速率为有

限值（c），故在时刻t'，离K'**系观测者**之距离为$\left|\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right| = \int_0^{t'}\left|\vec{u}(t)\right|dt > 0$的$K$**系观测者**不能与$K'$**系观测者**同时观测到运动质点。直到时间延迟到时刻t：

$$t = t' + \frac{\left|\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right|}{c} = \left(1 + \frac{\left|\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right)t'$$

K**系观测者**才观测到运动质点。这就是t与t'之间的关系式 — 时空变换的**时间变换式**。

将此式同公式$t = \frac{1}{k}t'$相对照，即得到k值：

$$k = \left(1 + \frac{\left|\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right)^{-1}$$

由于真空中光波（电磁波）传播速率为一个常值（c），不随光源（电磁波源）及其接收者的运动而有任何变化，故在光源（电磁波源）与其接收者之间有相对运动的情况下，对接收者必然产生**“多普勒效应”：周期与波长产生相同程度的变动**。因此，K**系空间**对K'**系空间**的**“空间度规比”**相应地也为$k = \left(1 + \frac{\left|\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right)^{-1}$。这样，时空变换的**空间变换式**为：

$$\vec{r}\,'(t') = k\left[\vec{r}(t) - \int_0^{t}\vec{u}(t)dt\right]$$

于是，时空变换方程组为：

$$\begin{bmatrix}\vec{r}\,'(t') \\ t'\end{bmatrix} = k\begin{bmatrix}\vec{r}(t) - \int_0^{t}\vec{u}(t)dt \\ t\end{bmatrix}$$

或写成：

$$\begin{bmatrix} \vec{r}'(t') \\ t' \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \vec{r}(t) - \int_0^t \vec{u}(t)dt \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \vec{r}'(t') \\ t' \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \vec{r}(t) - \int_0^t \vec{u}(t)dt \\ t \end{bmatrix} \\ k = \left(1 + \dfrac{\left| \int_0^{t'} \vec{u}(t)dt \right|}{ct'} \right)^{-1} \end{cases}$$

逆变换式为：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \vec{r}(t) \\ t \end{bmatrix} = \dfrac{1}{k} \begin{bmatrix} \vec{r}'(t') + \int_0^{t'} \vec{u}(t)dt \\ t' \end{bmatrix} \\ \dfrac{1}{k} = \left(1 + \dfrac{\left| \int_0^{t'} \vec{u}(t)dt \right|}{ct'} \right) \end{cases}$$

这就是**‘两参考系做相对平移运动且真空中光速为有限值’**场合下**唯一客观存在的**两观测者观测到同一运动质点的时刻及空间坐标之间的（数据）转换关系—**“时空变换”**。可以看到，此**时空变换**是**伽利略型**时空变换。

在“两观测者作相对运动且真空中光速为有限值c（$c = 3.0 \times 10^5$ 千米/秒）”而且参考系相对速度与光速相比并非微不足道之条件下，两观测者对同一运动质点进行观测所得时空数据（两观测者对该运动质点的观测矢量）之间客观存在的数学转换关系必为**伽利略-周方变换**。

两参考系之间相对速度保持不变[$\vec{u}(t) = \vec{u} = const.$]**之情况：**

取**伽利略-周方变换**

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \vec{r}(t) \\ t \end{bmatrix} = \dfrac{1}{k} \begin{bmatrix} \vec{r}'(t') + \int_0^{t'} \vec{u}(t) dt \\ t' \end{bmatrix} \\ k = \left(1 + \dfrac{\left| \int_0^{t'} \vec{u}(t) dt \right|}{ct'} \right)^{-1} \end{cases}$$

式中：$\vec{r}'(t') = [x', y', z']^T$ 为 K' 系观测者在时刻 t' 对运动质点的观测矢量；

$\vec{r}(t) = [x, y, z]^T$ 为 K 系观测者在时刻 t 对运动质点的观测矢量；

$\int_0^{t'} \vec{u}(t) dt = \vec{s}(t')$ 为 K' 系观测者在时刻 t' 离 K 系观测者的距离（矢量）；

c 为真空中光速。$|\vec{u}(t)| = [u_x^2(t) + u_y^2(t) + u_z^2(t)]^{1/2}$

设：$\vec{u}(t) = \vec{u} = const.$ 且 $u_x(t) = const.$，$u_y(t) = const.$，$u_z(t) = const.$，则有 $\int_0^{t'} \vec{u}(t) dt = \vec{u}t'$ 及 $\left| \int_0^{t'} \vec{u}(t) dt \right| = |\vec{u}| t'$ 。于是有：

$$k = \left(1 + \frac{\left| \int_0^{t'} \vec{u}(t) dt \right|}{ct'} \right)^{-1} = \left(1 + \frac{|\vec{u}| t'}{ct'} \right)^{-1} = \left(1 + \frac{|\vec{u}|}{c} \right)^{-1}$$

此情况下，**伽利略-周方变换**为：

$$\begin{bmatrix} \vec{r}(t) \\ t \end{bmatrix} = \left(1 + \frac{|\vec{u}|}{c} \right) \begin{bmatrix} \vec{r}'(t') + \vec{u}t' \\ t' \end{bmatrix}$$

或写成方程组：

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \left(1 + \dfrac{|\vec{u}|}{c} \right) [\vec{r}'(t') + \vec{u}t'] \\ t = \left(1 + \dfrac{|\vec{u}|}{c} \right) t' \end{cases}$$

运动观测图示于**图 4-10**。

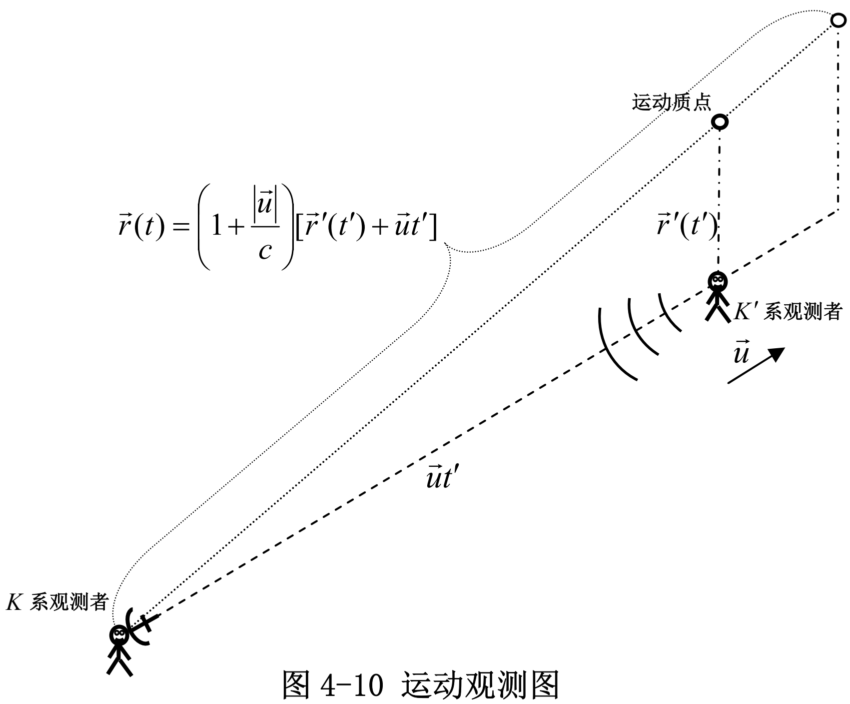


图 4-10 运动观测图

现给出**伽利略-周方变换**的观测矢量图，示于图 4-11。

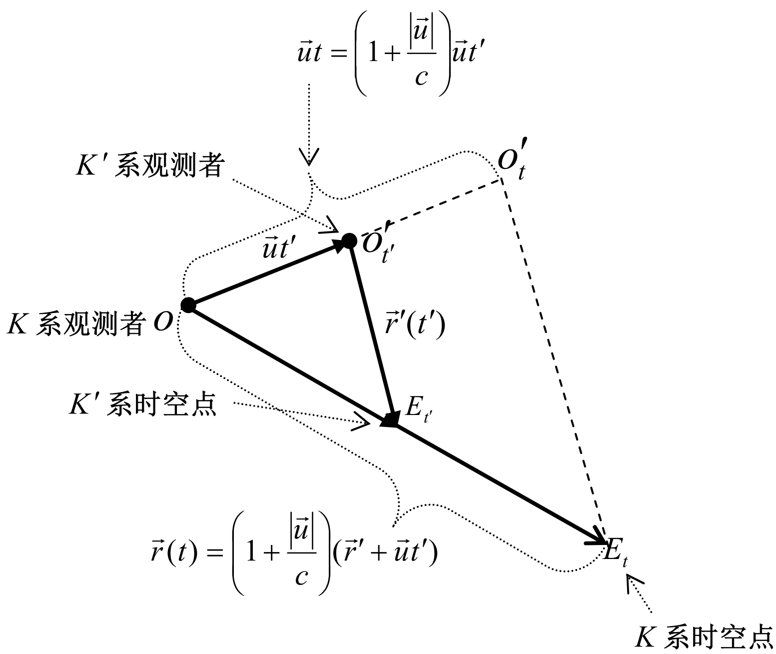


图 4-11 观测矢量图

图 4-11 中诸矢量的定义为：

1. K 系观测者 O 在时刻 t 观测到运动质点 E_t，用矢量 $\overline{OE_t}$ 表示，此矢量 $\overline{OE_t}=\vec{r}$ ：

$\vec{r}=[x,y,z]^T$ 称为“K 系观测者 O 在时刻 t 的观测矢量”，或称为“K 系观测者 O 在时刻 t 的 K 系时空点（矢量）”。点 $E_t(t,\vec{r})$ 称为“K 系观测者 O 在时刻 t 的 K 系时空点”。

2. K' 系观测者 $O'_{t'}$ 在时刻 t' 观测到运动质点 $E_{t'}$，用矢量 $\overline{O'_{t'}E_{t'}}$ 表示，此矢量 $\overline{O'_{t'}E_{t'}}=\vec{r}'$：

$\vec{r}'=[x',y',z']^T$ 称为“K' 系观测者 $O'_{t'}$ 在时刻 t' 的观测矢量”，或称为“K' 系观测者 $O'_{t'}$ 在时刻 t' 的 K' 系时空点（矢量）”。点 $E_{t'}(t',\vec{r}')$ 称为“K' 系观测者 $O'_{t'}$ 在时刻 t' 的 K' 系时空点”。

3. 矢量 $\overline{OO'_{t'}}=\vec{u}t'$ 称为“K' 系观测者 $O'_{t'}$ 在时刻 t' 离 K 系观测者 O 的距离矢量”。

与时刻 t' 及时刻 t 关联的观测矢量图示于图 4-12。

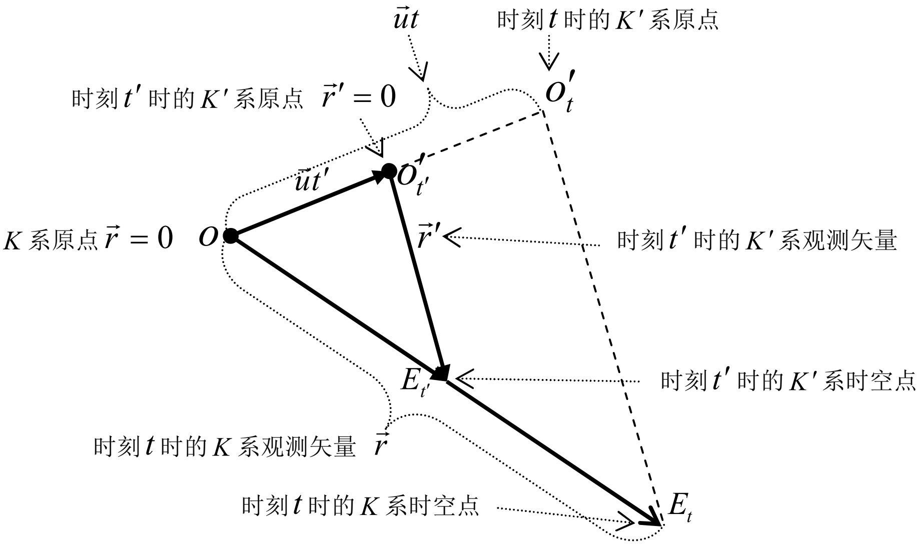


图 4-12 时刻 t' 及时刻 t 时的观测矢量图

伽利略-周方变换与伽利略变换之间的关系示于图 4-13。

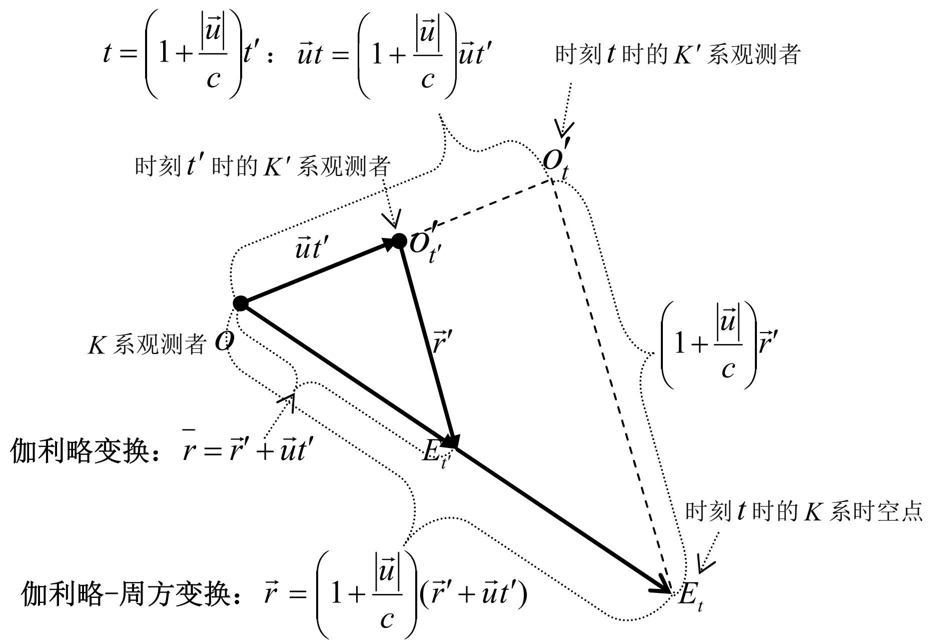


图 4-13 伽利略-周方变换与伽利略变换之间的关系

对图 4-13 的解读如下：

（1）在时刻t'，K'系观测者$O'_{t'}$离K系观测者O的距离为$\overline{OO'_{t'}}=\vec{u}t'$，此时$K'$系观测者$O'_{t'}$观测到运动质点$E_{t'}$。如果真空中光速为无穷大，则$K$系观测者$O$与$K'$系观测者$O'_{t'}$同时（也即在时刻$t'$）观测到运动质点$E_{t'}$，形成观测矢量合成关系：$\bar{r}=\vec{r}'+\vec{u}t'$。但是，真空中光速实际上为有限值（$c$），而并非无穷大，故在时刻$t'$，$K$系观测者$O$不能与$K'$系观测者$O'_{t'}$同时观测到运动质点$E_{t'}$。

（2）直到时间延迟到时刻$t=t'+\frac{|\vec{u}|t'}{c}=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)t'>t'$ [式中$|\vec{u}|=(u_x^2+u_y^2+u_z^2)^{1/2}$]，$K'$系观测者$O'_t$离$K$系观测者$O$的距离矢量为$\overline{OO'_t}=\vec{u}t$，即$\vec{u}t=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)\vec{u}t'$；在此时刻$t=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)t'$，$K$系观测者$O$才观测到点$E_t$。图 4-13 中的点$E_t$为$K$系观测者$O$在时刻$t=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)t'$观测到的质点之“**视像点**”，它就是“$K$系观测者$O$在时刻$t=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)t'$的$K$系时空点”。在$K$系观测者$O$看来，$K'$系观测者$O'_t$在时刻$t=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)t'$也将观测到点

E_t。这就是说，在 K 系观测者 O 看来，在时刻 $t=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)t'$，$K$ 系观测者 O 与 K' 系观测者 O'_t 将同时观测到质点 $E_{t'}$ 之"**视像点**"— 点 E_t。

参看图 4-13，在时刻 $t=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)t'$，$K'$ 系观测者 O'_t 的观测矢量 $\overline{O'_tE_t}$ 通过 K' 系观测者 O'_t 离 K 系观测者 O 的距离矢量 $\overline{OO'_t}$，与 K 系观测者 O 的观测矢量 $\overline{OE_t}$ 构成观测矢量三角形 $\Delta OO'_tE_t$。这个三角形 $\Delta OO'_tE_t$ 与**伽利略变换**的观测矢量三角形 $\Delta OO'_{t'}E_{t'}$ 成为两个'相似三角形'：$\Delta OO'_tE_t \cong \Delta OO'_{t'}E_{t'}$。

于是，可以得出时刻 t 时的观测矢量三角形 $\Delta OO'_tE_t$ 的三个矢量：

（1）K' 系观测者 O'_t 离 K 系观测者 O 的距离矢量 $\overline{OO'_t}$：$\overline{OO'_t}=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)\vec{u}t'=\vec{u}t$；

（2）K' 系观测者 O'_t 的 K' 系时空点矢量（观测矢量）$\overline{O'_tE_t}$：$\overline{O'_tE_t}=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)\vec{r}'$；

（3）K 系观测者 O 的 K 系时空点矢量（观测矢量）$\overline{OE_t}$：$\overline{OE_t}=\vec{r}=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)(\vec{r}'+\vec{u}t')$。

这样，我们从（1）、（3）便可得到**伽利略-周方变换**：

$$\begin{bmatrix}\vec{r}(t)\\ t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right) & 0\\ 0 & \left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')+\vec{u}t'\\ t'\end{bmatrix}$$

即：

$$\begin{cases}\vec{r}=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)(\vec{r}'+\vec{u}t')\\ t=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)t'\end{cases}$$

式中：$\vec{r}=[x,y,z]^T$，$\vec{r}'=[x',y',z']^T$，$\vec{u}=[u_x,u_y,u_z]^T$，$|\vec{u}|=(u_x^2+u_y^2+u_z^2)^{1/2}$

c 为真空中光速。

伽利略-周方变换的观测矢量图示于表 4-2。

表 4-2 伽利略-周方变换的观测矢量图

伽利略-周方变换

$$\begin{cases} \vec{r} = \left(1+\dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)(\vec{r}\,'+\vec{u}t') \\ t = \left(1+\dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)t' \end{cases}$$

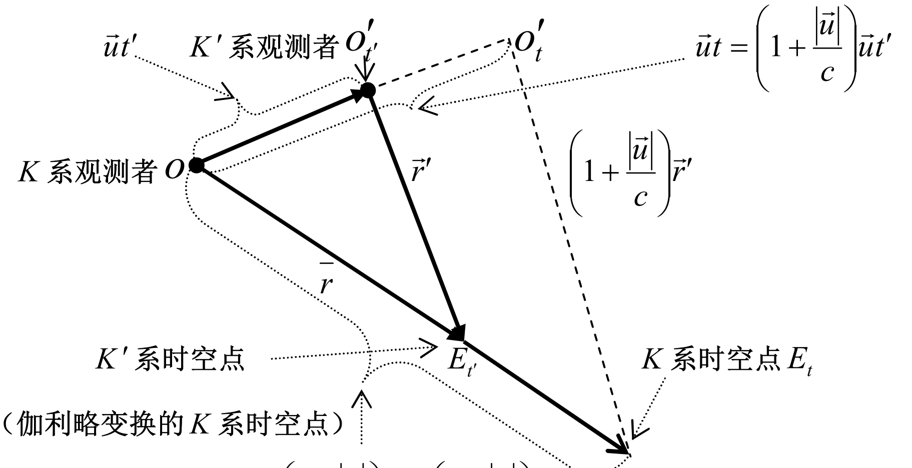
$\vec{r} = [x, y, z]^T$， $\vec{r}\,' = [x', y', z']^T$， $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]^T$， $|\vec{u}| = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$

c 为真空中光速

伽利略-周方变换描述以下客观存在的物理事实：

在光传播速度为**有限值**之条件下，互作匀速相对运动（$\vec{u}$）并持有相同的鍒及尺的两个观测者，因**多普勒效应**而只能分别在不同的时刻 t' 与 $t = \left(1+\dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)t'$ 观测到同一运动质点所处的不同位置 $\vec{r}\,'$ 与 $\vec{r} = \left(1+\dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)(\vec{r}\,'+\vec{u}t')$，这时两观测者所获得观测数据之间形成如下关系：

在时刻 $t = \left(1+\dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)t'$，**观测矢量** $\vec{r}(t)$ 与**观测矢量** $\left(1+\dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)\vec{r}\,'(t')$ 通过两观测者之间的**距离矢量** $\vec{u}t = \left(1+\dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)\vec{u}t'$ 构成**矢量合成三角形**（下图中的**大三角形**），如下图所示：



$$\vec{r} = \left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)\bar{r} = \left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)(\vec{r}\,'+\vec{u}t')$$

伽利略-周方变换为：

$$\begin{bmatrix} \vec{r}(t) \\ t \end{bmatrix} = \left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)\begin{bmatrix} \vec{r}'(t')+\vec{u}t' \\ t' \end{bmatrix}$$

式中：$\vec{r}=[x,y,z]^T$，$\vec{r}'=[x',y',z']^T$，$\vec{u}=[u_x,u_y,u_z]^T$，$|\vec{u}|=(u_x^2+u_y^2+u_z^2)^{1/2}$

c 为真空中光速

此方程清楚地揭示：在 K' 系对 K 系作平移运动的情况下，由于‘两坐标系有相对运动（$\vec{u}$）且真空中光传播速率为有限值（c）’，必然产生**多普勒效应**。**多普勒效应**叠加在**伽利略变换**之上，因而使得在 K 系观测者看来，K' 系对 K 系的**“时空度规比”**增大了，由**伽利略变换**的**“1”**增大为 $\left(1+\frac{u}{c}\right)$。**伽利略-周方变换**的这种自然结构十分清楚地表明，她是**伽利略变换**有机地嵌入了**多普勒效应**而形成。**伽利略-周方变换**似乎是一面使远古时发生的实际情况（运动质点的实时轨迹）穿越遥远时空，纯真地呈现在 K 系观测者眼前的所谓“**时空透镜（Space-Time Lens）**”。如果说，**伽利略变换**是一种“**平面时空透镜**”（即‘真空中光传播速率为无穷大’假定条件下 K' 系对 K 系的**“时空度规比”** 为**“1”**的“时空变换”），那么**周方变换**则是“**多普勒时空透镜**”（即‘真空中光传播速率为有限值 $\vec{u}$’ 条件下 K' 系对 K 系的**“时空度规比”** 为 $\left(1+\frac{u}{c}\right)$ 的“时空变换”）。

伽利略-周方变换的观测矢量图示于图 4-14。

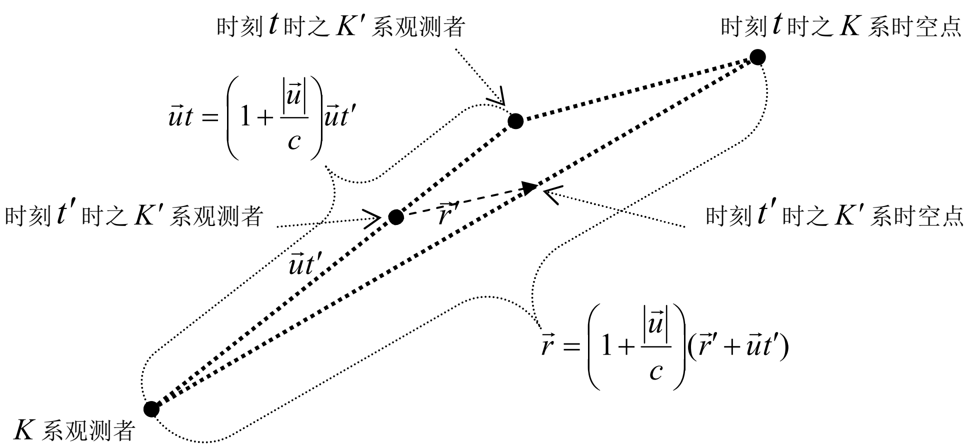


图 4-14 伽利略-周方变换的观测矢量图

根据**伽利略-周方变换**的观测矢量图（图 4-14），可以画出**伽利略-周方变换**的 K 系时空轨迹，示于图 4-15。

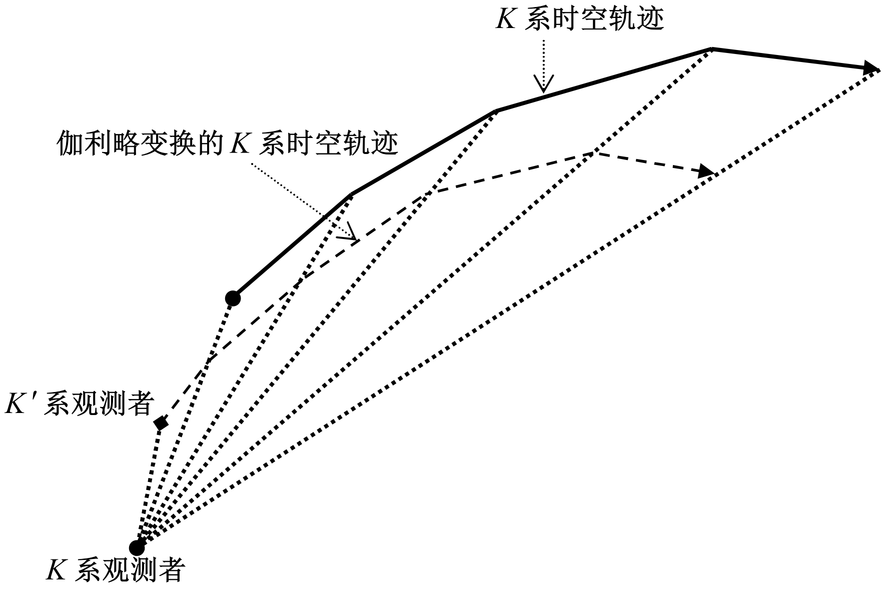


图 4-15 伽利略-周方变换的 K 系时空轨迹

伽利略-周方变换的 K 系时空轨迹及 K' 系时空轨迹示于图 4-16。

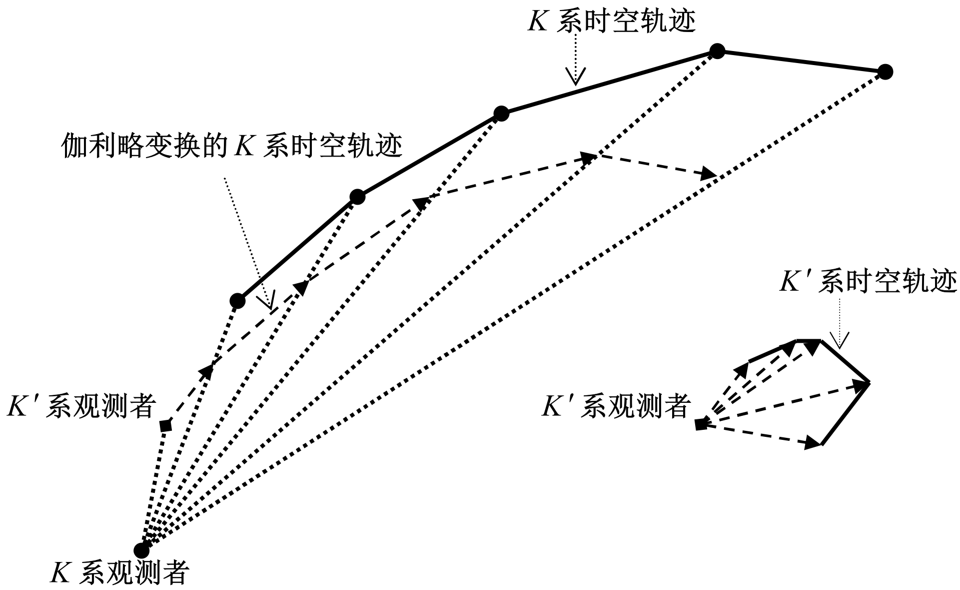


图 4-16 伽利略-周方变换的 K 系时空轨迹及 K' 系时空轨迹

伽利略-周方变换的 K 系时空点与 K' 系时空点示于图 4-17。

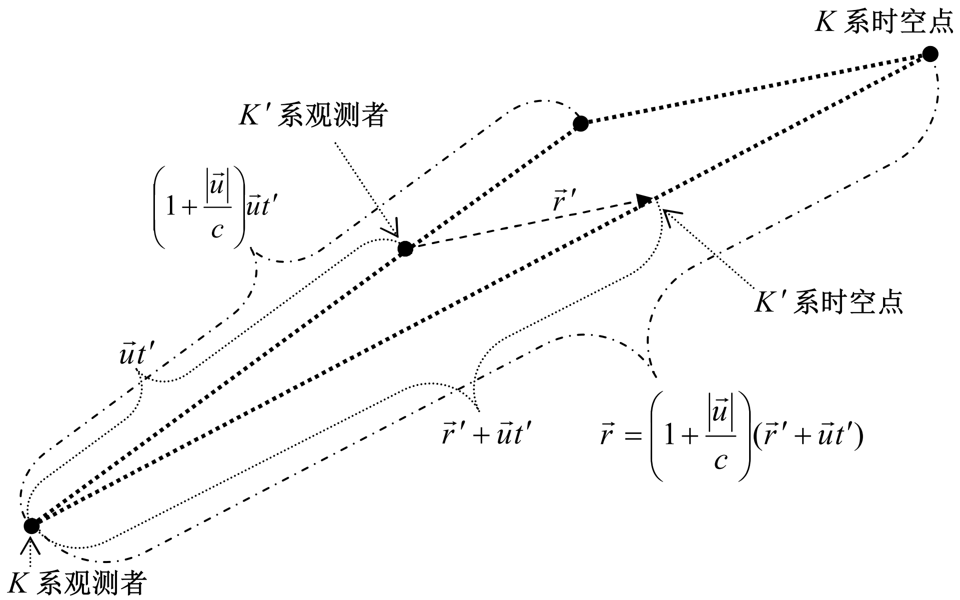


图 4-17 伽利略-周方变换的 K 系时空点与 K' 系时空点

坐标系相离运动下伽利略-周方变换的 K' 系时空轨迹与 K 系时空轨迹示于图 4-18。

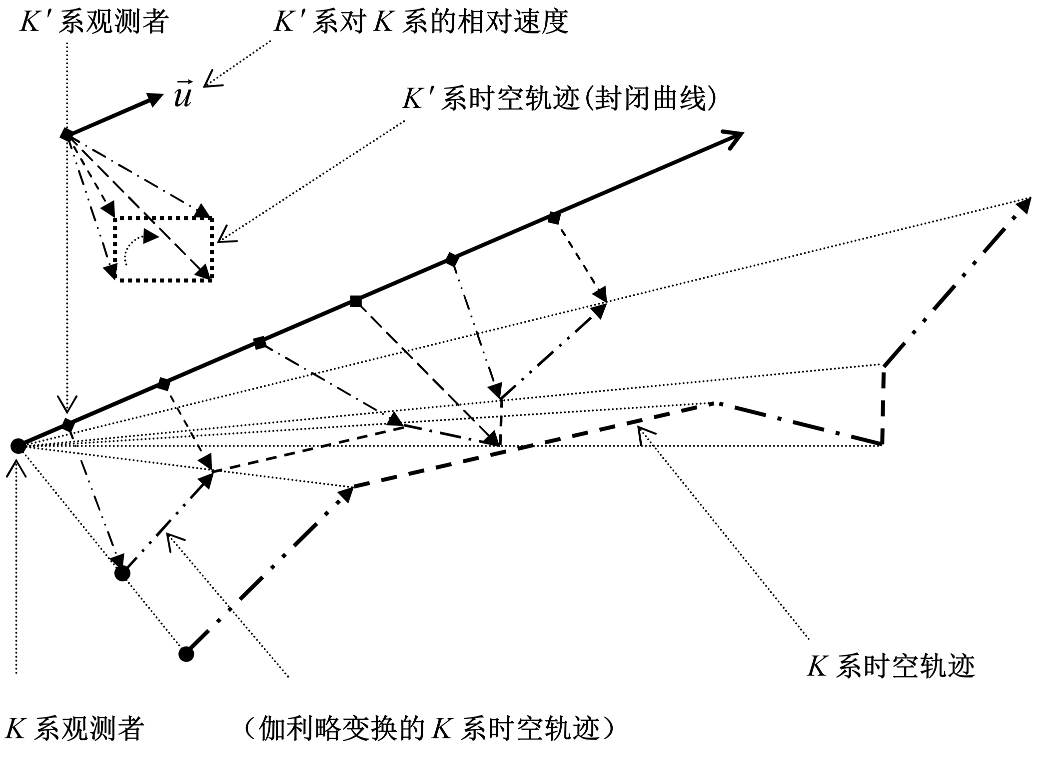


图 4-18 相离运动下伽利略-周方变换的 K 系时空轨迹与 K' 系时空轨迹

变换方程组：

$$\begin{cases} \vec{r} = \left(1 + \dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)(\vec{r}' + \vec{u}t') \\ t = \left(1 + \dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)t' \end{cases}$$

与变换方程组：

$$\begin{cases} \vec{r}' = \dfrac{1}{1 + \dfrac{|\vec{u}|}{c}}(\vec{r} - \vec{u}t) \\ t' = \dfrac{1}{1 + \dfrac{|\vec{u}|}{c}}t \end{cases}$$

是一对互为正变换与逆变换的**伽利略-周方变换**。

伽利略-周方变换的正变换与逆变换方程组沿坐标轴的分解式为：

$$\begin{cases} x = \left(1 + \dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)(x' + u_x t') \\ y = \left(1 + \dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)(y' + u_y t') \\ z = \left(1 + \dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)(z' + u_z t') \\ t = \left(1 + \dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)t' \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{1 + \dfrac{|\vec{u}|}{c}}(x - u_x t) \\ y' = \dfrac{1}{1 + \dfrac{|\vec{u}|}{c}}(y - u_y t) \\ z' = \dfrac{1}{1 + \dfrac{|\vec{u}|}{c}}(z - u_z t) \\ t' = \dfrac{1}{1 + \dfrac{|\vec{u}|}{c}}t \end{cases}$$

式中：$|\vec{u}| = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$，$c$ 为真空中光速。

从**伽利略-周方变换**的变换方程组可以看到，倘若真空中光速为无穷大（$c \to \infty$），或真空中光速为有限值 c 而比值 $|\vec{u}|/c$ 与 1 相比较是微不足道时，**伽利略-周方变换**就近似为**伽利略变换**。所以，**伽利略变换**不过是**伽利略-周方变换**的一个特例。

伽利略-周方变换沿 x 轴、y 轴及 z 轴的时空图示于**图 4-19、图 4-20、图 4-21**。

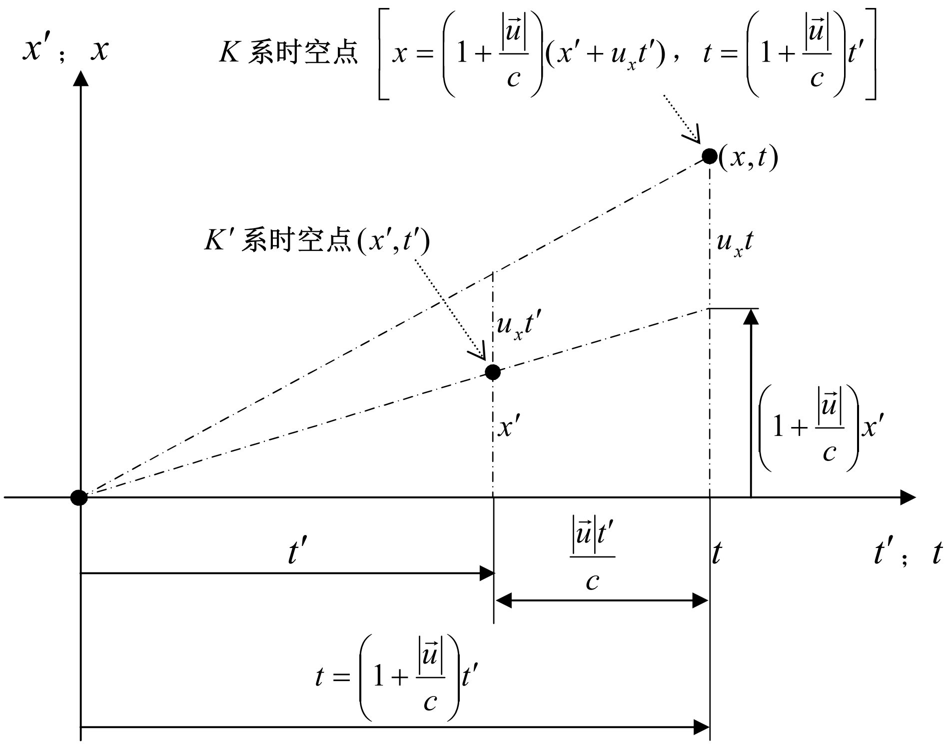


图 4-19 伽利略-周方变换沿 x 轴的时空图

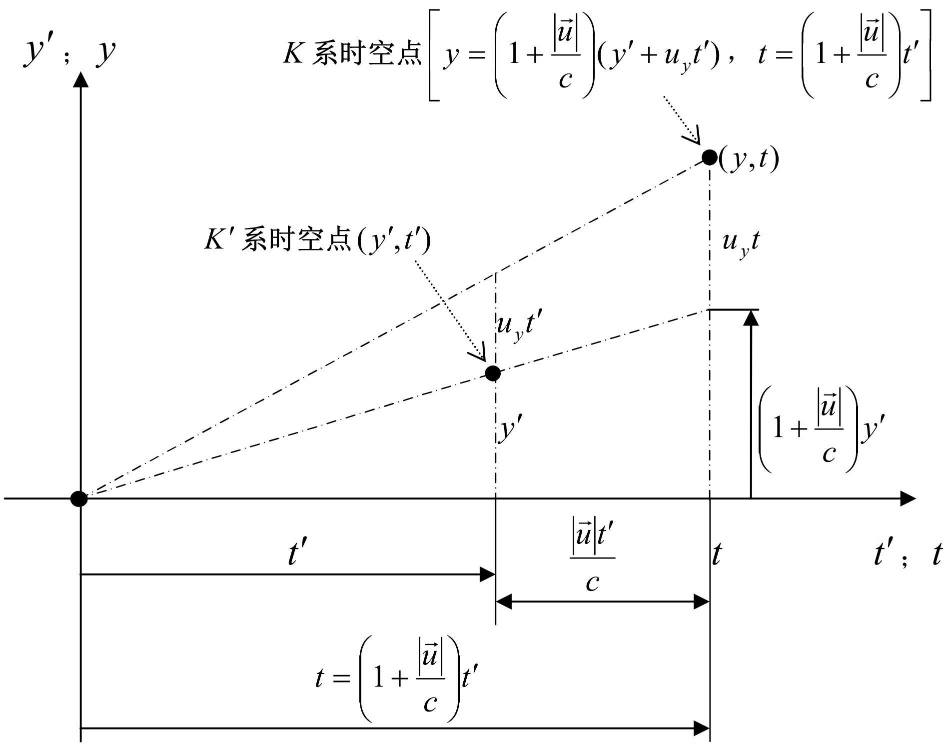


图 4-20 伽利略-周方变换沿 y 轴的时空图

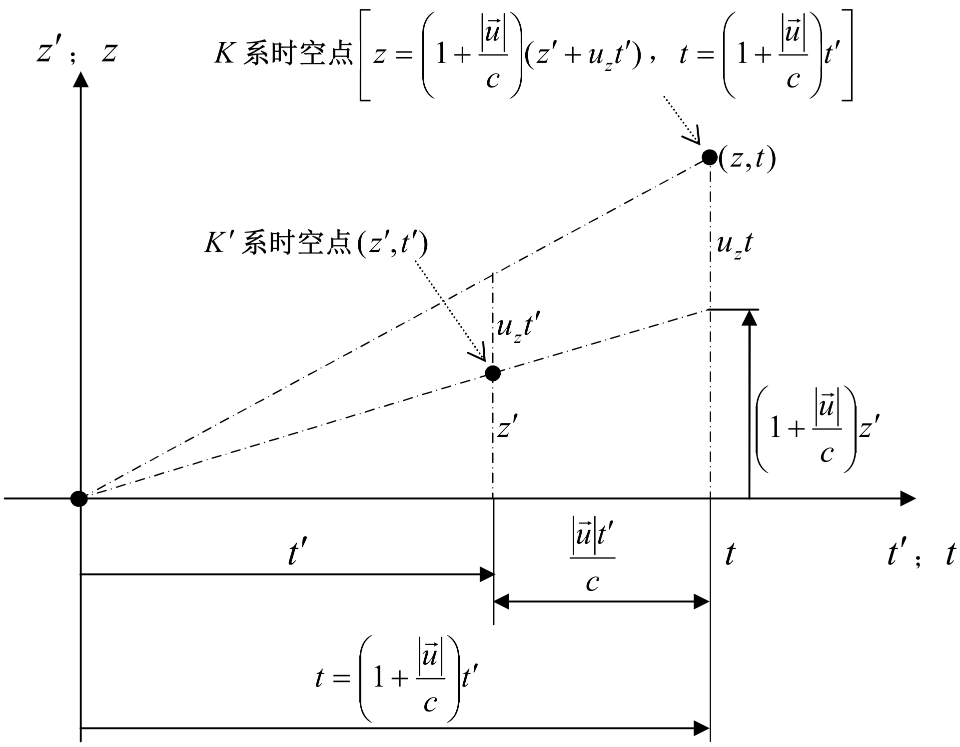


图 4-21 伽利略-周方变换沿 Z 轴的时空图

三、（特殊）伽利略-周方变换

在 K' 系原点相对于 K 系原点沿 K 系的 x 轴正方向以匀速 $\vec{u}(t)=\vec{u}=const.$ 做相对运动之场合下，有：

$u_x(t)=u$，$u_y(t)=0$，$u_z(t)=0$，即 $\vec{u}(t)=\left[u_x(t),u_y(t),u_z(t)\right]^T=\left[u,\ 0,\ 0\right]^T$。

K' 系与 K 系之间的关系示于图 4-22。

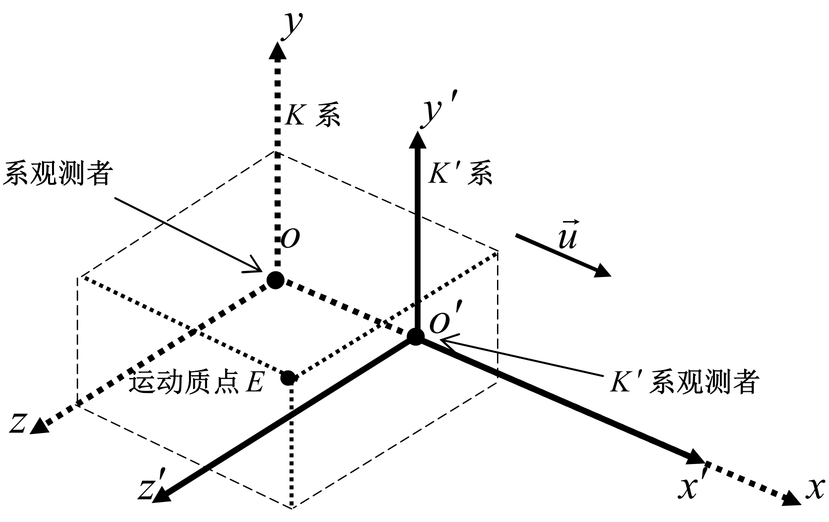


图 4-22 K' 系与 K 系之间的关系

在此场合下（参看图 4-22），有：

$$\left|\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right| = \int_0^{t'}|\vec{u}(t)|dt = \int_0^{t'}[u_x^2(t)+u_y^2(t)+u_z^2(t)]^{\frac{1}{2}}dt = \int_0^{t'}[u^2+0+0]^{\frac{1}{2}}dt = ut'$$ 。

故有：$$k=\left(1+\frac{\left|\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right)=\left(1+\frac{ut'}{ct'}\right)=\left(1+\frac{u}{c}\right)$$

$$\int_0^{t'}u_x(t)dt = ut'\ ,\quad \int_0^{t'}u_y(t)dt = 0\ ,\quad \int_0^{t'}u_z(t)dt = 0$$

在此种场合下，得（特殊）伽利略-周方变换：

$$\begin{cases} x=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)(x'+ut') \\ y=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)y' \\ z=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)z' \\ t=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)t' \end{cases}$$ 逆变换： $$\begin{cases} x'=\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}(x-ut) \\ y'=\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}y \\ z'=\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}z \\ t'=\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}t \end{cases}$$

（特殊）伽利略-周方变换沿 x 轴、y 轴及 z 轴的时空图示于图 4-23、图 4-24、图 4-25。

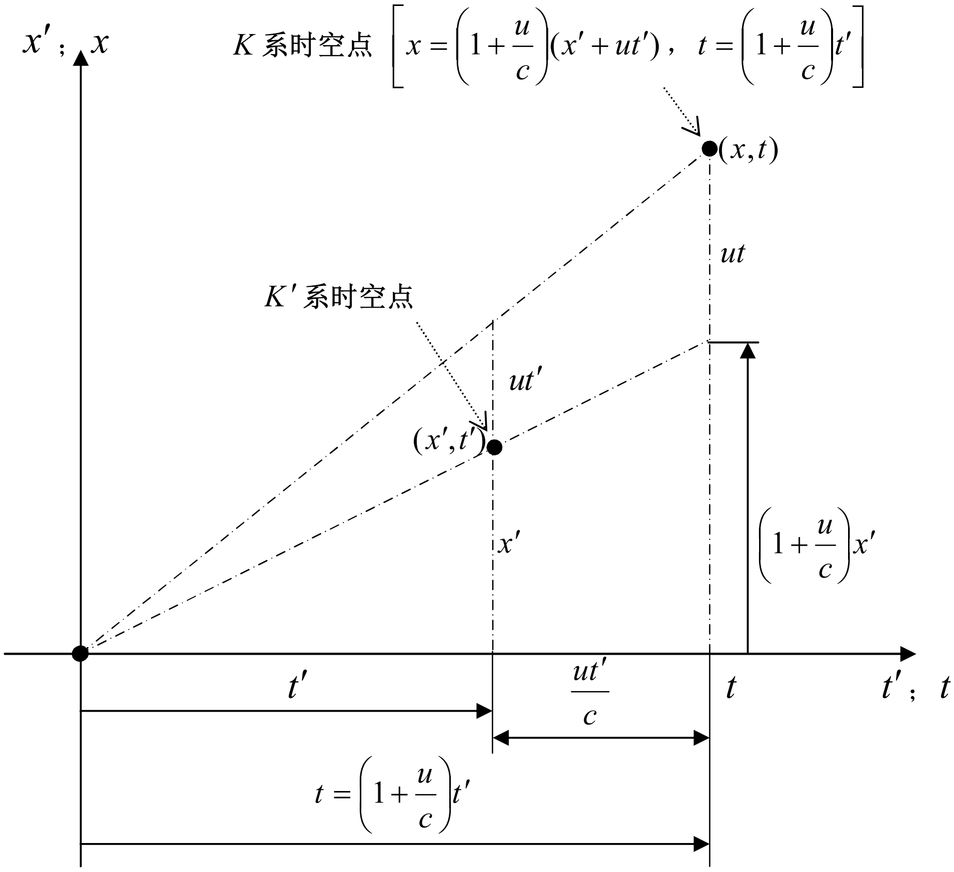


图 4-23 （特殊）伽利略-周方变换沿 x 轴的时空图

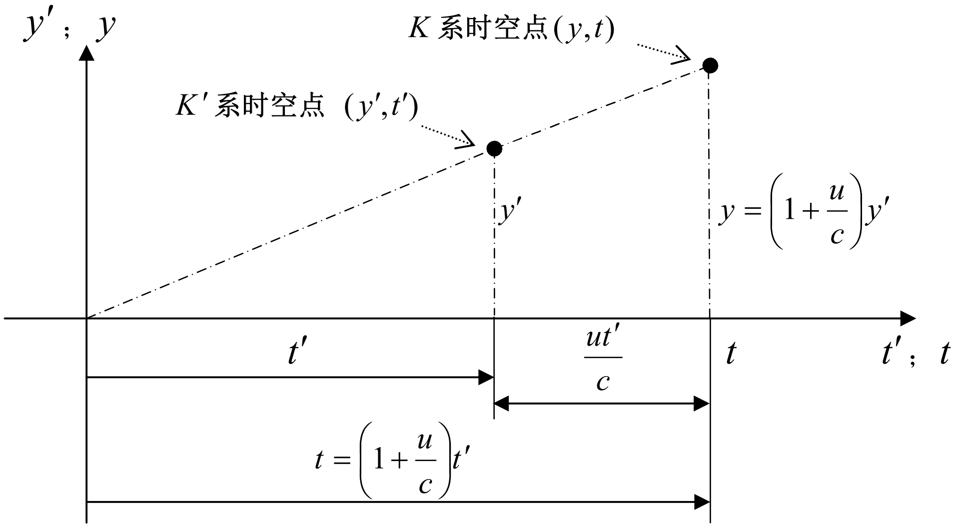


图 4-24 （特殊）伽利略-周方变换沿 y 轴的时空图

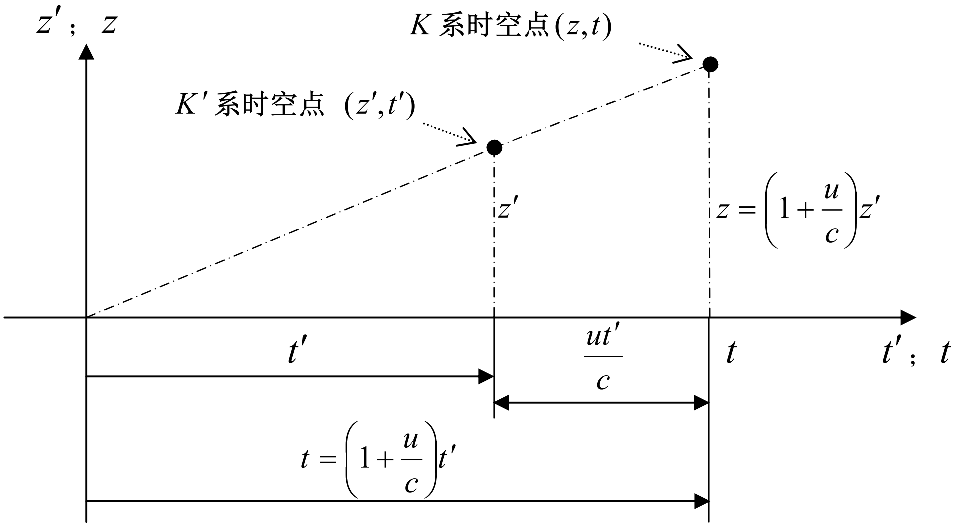


图 4-25 （特殊）伽利略-周方变换沿 z 轴的时空图

将图 4-23、图 4-24、图 4-25 三个图整合为一个图，示于图 4-26。

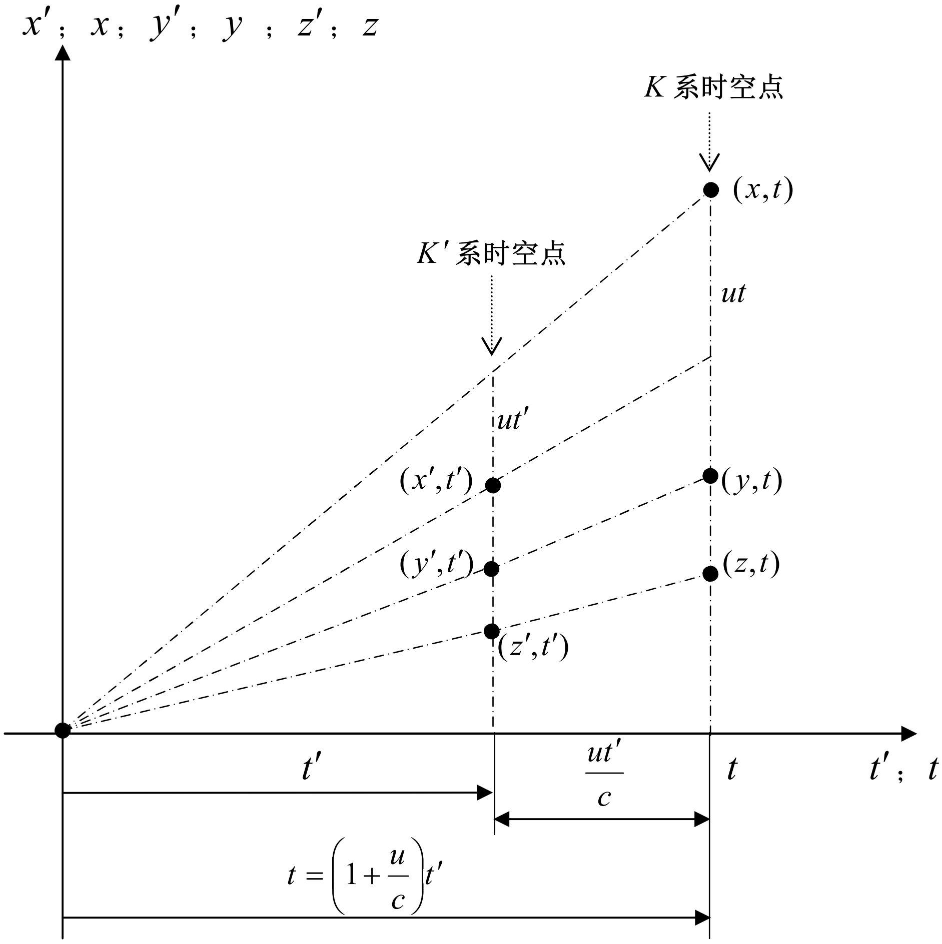


图 4-26 （特殊）伽利略-周方变换的时空图

在 K' 系原点相对于 K 系原点沿 K 系的 x 轴正方向以匀速 $\vec{u}(t)=\vec{u}=const$.做相对

运动且$\vec{r}=\left[x,\ y\equiv 0,\ z\equiv 0\right]^{T}$、$\vec{r}'=\left[x',\ y'\equiv 0,\ z'\equiv 0\right]^{T}$之场合下，即可得（一维）伽利略-周方变换：

$$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix}=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix} x(t)-ut \\ t \end{bmatrix}$$

逆变换式为：

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ t \end{bmatrix}=\left(1+\frac{u}{c}\right)\begin{bmatrix} x'(t')+ut' \\ t' \end{bmatrix}$$

四、从时空变换的标准结构推导出伽利略-周方变换

K'系与K系之间的关系示于图 4-1。

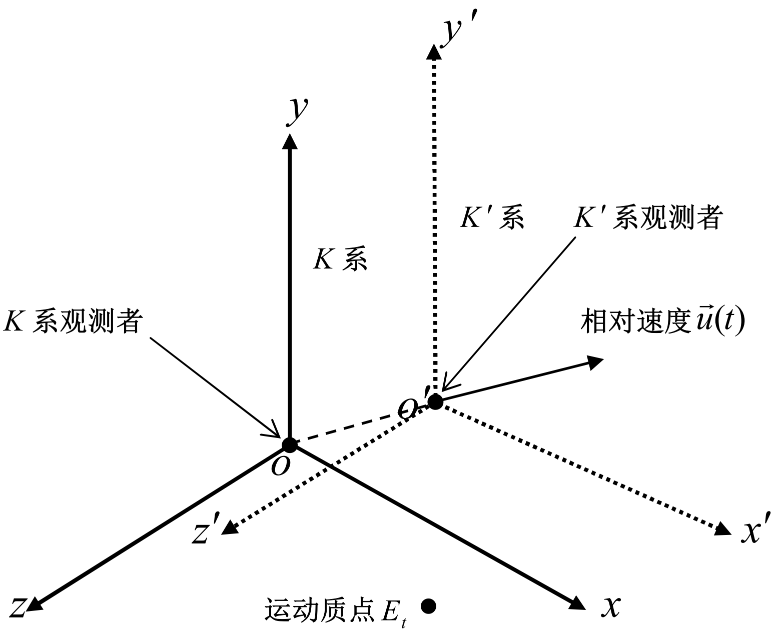


图 4-1 K'系与K系之间的关系

时空变换的数学表达式必须满足以下三项条件：

（1）在$t'=t=0$时，K'系原点与K系原点相重合。也就是说，在时刻$t'=t=0$，必须有：$\vec{r}=0$及$\vec{r}'=0$。

（2）在t'，$t>0$时，K'系原点$\vec{r}'=0$相对于K系原点$\vec{r}=0$以速度$\vec{u}$做相对运动，此时在‘K系坐标$\vec{r}$为$\int_0^t \vec{u}(t)dt$’$\left[\vec{r}=\int_0^t \vec{u}(t)dt\right]$之处，必须是‘$K'$系坐标$x'$为**0**’之点（$K'$系原点$x'=0$）。也就是说，在$t'$，$t>0$时，必须有：$\vec{r}=\int_0^t \vec{u}(t)dt$及$\vec{r}'=0$。

（3）在 K' 系对 K 系作平移**相离运动**的情况下，由于'两坐标系有相对运动且真空中光传播速率为有限值（c）'，光波（电磁波）在两观测者之间传播时必产生**多普勒效应**：光波（电磁波）的**周期**与**波长**产生同等程度的变动。

"时空变换"的**时间变换式**必须满足条件（1）；**空间变换式**必须满足条件（1）和条件（2），而**"时空变换"**则应满足（1）、（2）、（3）**全部三项条件**（**"充要条件"**）。

A. **'时间变换'的标准数学式**

下面，我们推导出能满足条件（1）的 t' 与 t 之间的数学关系式 — 时空变换的**时间变换式**。

上面条件（1）中的时间条件 $t'=t=0$ 提示以下（逻辑）**'等价式'**成立：

$$\{t'=0\} \Leftrightarrow \{t=0\}$$

此**'等价式'**可以写成以下（数学）**'恒等式'**：

$$t' \equiv t = 0$$

由此**'恒等式'**可得到相应的**'条件等式'**（方程式）：

$$t' = k_1 t \qquad (k_1 > 0)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} t' = k_1 t \\ (k_1 > 0) \end{array}}$$

$t'=k_1 t$ 就是**时间变换**的**标准数学式**。

B. **'空间变换'的标准数学式**

下面，我们推导出能满足（1）、（**2**）两项条件的 $\vec{r}\,'$ 与 $\vec{r}$ 之间的数学关系式 — 时空变换的**空间变换式**。

对任意时刻 t'，$t>0$，以下（逻辑）**'等价式'**恒成立：

$$\left(\begin{array}{l} \text{'}K'\text{系原点对}K'\text{系原点' 之位置 } \vec{r}\,'=0 \quad \Leftrightarrow \\ \qquad\qquad \text{'}K'\text{系原点对}K\text{系原点' 之位置 } \vec{r} = \int_0^t \vec{u}(t)dt \\ \qquad + \text{ '}K\text{系原点对}K'\text{系原点' 之位置 } -\int_0^t \vec{u}(t)dt \end{array} \right)$$

可以写成：

$$\{\vec{r}'=0\} \Leftrightarrow \left\{\vec{r}-\int_0^t \vec{u}(t)dt=\int_0^t \vec{u}(t)dt-\int_0^t \vec{u}(t)dt=0\right\}$$

即：
$$\{\vec{r}'=0\} \Leftrightarrow \left\{\vec{r}-\int_0^t \vec{u}(t)dt=0\right\}$$

这个**‘等价式’**可以写成（数学）**‘恒等式’**：

$$\vec{r}'\equiv\vec{r}-\int_0^t \vec{u}(t)dt=0$$

由此**‘恒等式’**得到满足条件（**2**）：**“**$\vec{r}'=0$ 及 $\vec{r}=\int_0^t \vec{u}(t)dt$**”**的**‘条件等式’**（方程式）：

$$\vec{r}'=k_2\left[\vec{r}-\int_0^t \vec{u}(t)dt\right] \qquad (k_2>0)$$

这个式子的特点是式中有 $\left[\vec{r}-\int_0^t \vec{u}(t)dt\right]$ 这个因子，藉以刻画出**“在 t'，$t>0$ 时，K' 系原点 $\vec{r}'=0$ 对 K 系原点 $\vec{r}=0$ 以速度 $\vec{u}$ 做相对运动”**这一物理过程。

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{r}'=\frac{1}{k_2}\left[\vec{r}-\int_0^t \vec{u}(t)dt\right]\\ (k_2\neq 0)\end{gathered}}$$

$\vec{r}'=k_2\left[\vec{r}-\int_0^t \vec{u}(t)dt\right]$ 就是**空间变换**的**标准数学式**。

容易验证，**空间变换**的**标准数学式** $\vec{r}'=k_2\left[\vec{r}-\int_0^t \vec{u}(t)dt\right]$ 能满足条件（1）和条件（2）。

C. **‘时空变换式’：“伽利略-周方变换”的数学表达式**

下面，我们推导出满足（1）、（2）、（3）**全部三项条件**的 “时空变换”数学表达式。

我们确定**时间变换式** $t'=k_1 t$ 中的 k_1 和**空间变换式** $\vec{r}'=k_2\left[\vec{r}-\int_0^t \vec{u}(t)dt\right]$ 中的 k_2。

在‘真空中光速为有限值 c（$c=3.0\times10^5$ 千米/秒）’条件下，在某个时刻 t'，K' 系**观测者**观测到运动质点并即刻发出电磁波讯号。由于真空中光速为有限值（c），故在时刻 t'，

离 K' 系观测者之距离为 $\left|\int_0^{t'} \vec{u}(t)dt\right| = \int_0^{t'} |\vec{u}(t)|dt > 0$ 的 K 系观测者不能与 K' 系观测者同时观测到运动质点。直到时间延迟至时刻 t：

$$t = t' + \frac{\left|\int_0^{t'} \vec{u}(t)dt\right|}{c} = \left(1 + \frac{\left|\int_0^{t'} \vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right)t'$$

K 系观测者才观测到运动质点。将此 t 与 t' 之间的关系式与公式 $t' = k_1 t$ 相对照，可得 k_1：

$$k_1 = \left(1 + \frac{\left|\int_0^{t'} \vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right)^{-1}$$

式中系数 k_1 称为 K 系时间对 K' 系时间的“时间度规比”。

空间变换式 $\vec{r}' = k_2\left[\vec{r} - \int_0^t \vec{u}(t)dt\right]$ 中的系数 k_2 称为 K 系空间对 K' 系空间的“空间度规比”。

由于真空中光波（电磁波）传播速率为一个常值（c），不随光源（电磁波源）及其接收者的运动而有任何变化，故在光源（电磁波源）与其接收者之间有相对运动的情况下，光波（电磁波）对接收者必产生“多普勒效应”：周期与波长产生相同程度的变动。

因此，K 系空间对于 K' 系空间的“空间度规比”（k_2）与 K 系时间对于 K' 系时间的“时间度规比”（k_1）是相同的：

$$k_2 = k_1 = \left(1 + \frac{\left|\int_0^{t'} \vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right)^{-1}$$

将系数 k_1 代入时间变换式 $t' = k_1 t$，并将系数 k_2 代入空间变换式 $\vec{r}' = k_2\left[\vec{r} - \int_0^t \vec{u}(t)dt\right]$，就得到“伽利略-周方变换”的数学表达式：

$$\begin{cases} \vec{r}\,' = k_2\left[\vec{r} - \int\limits_0^t \vec{u}(t)dt\right] \\ t' = k_1 t \\ k_1 = k_2 = \left(1 + \dfrac{\left|\int\limits_0^{t'} \vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right)^{-1} \end{cases}$$

在 K' 系原点对于 K 系原点沿 K 系的 x 轴正方向以匀速 $\vec{u}(t) = \vec{u} = const$.做相对运动之场合下，有：$\vec{u}(t) = \vec{u} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$，

$$\left|\int\limits_0^{t'} \vec{u}(t)dt\right| = \int\limits_0^{t'} |\vec{u}(t)|dt = \int\limits_0^{t'} [u_x^2(t) + u_y^2(t) + u_z^2(t)]^{\frac{1}{2}} dt = \int\limits_0^{t'} [u^2 + 0 + 0]^{\frac{1}{2}} dt = ut'$$

$$k_1 = k_2 = \left(1 + \frac{\left|\int\limits_0^{t'} \vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{ut'}{ct'}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1}$$

K' 系与 K 系之间的关系示于图 4-22。

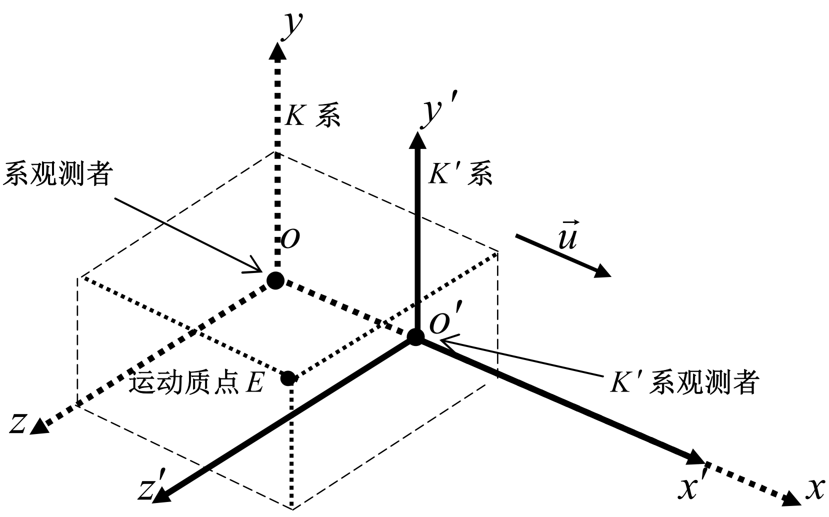


图 4-22 K' 系与 K 系之间的关系

在此种场合下，得（特殊）伽利略-周方变换”：

$$
\begin{cases}
x' = \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}(x-ut) \\
y' = \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}y \\
z' = \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}z \\
t' = \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}t
\end{cases}
$$

五、通过最捷途径推导出伽利略-周方变换

（一）（一般）伽利略-周方变换

“时空变换”的数学表达式必须满足下列条件：

（1）两坐标系相对运动的起始状态为：K' 系与 K 系重合。此时，两观测者将‘时钟’对准到‘零点’，故以下**“等价式”（Equivalence）**成立：

$$\{\quad t'=0 \quad\} \Leftrightarrow \{\quad t=0 \quad\}$$

由此**“等价式”**可得相应的**“恒等式”（Identity）**：

$$t' \equiv t = 0$$

满足此**“恒等式”**的**“方程式”（Equation）**为：

$$t' = k_1 t \qquad\qquad k_1 > 0$$

（2）在时刻 $t>0$，**K' 系原点**（**K' 系观测者**）相对于 **K 系原点**（**K 系观测者**）以**速度** $\vec{u}(t)$ 做相对运动。在时刻 t，**K' 系原点**离 **K 系原点**的距离（矢量）为 $\vec{s}(t) = \int_0^t \vec{u}(t)dt$ 。这就是说，在时刻 $t>0$ 时，对应于 $\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{u}(t)dt$ [$\vec{r}(t) - \int_0^t \vec{u}(t)dt = 0$]之点，必为 **K' 系原点** $\vec{r}'(t') = 0$ 。因此，以下**“等价式”**成立：

$$\{\vec{r}'(t')=0\} \Leftrightarrow \left\{\vec{r}(t) - \int_0^t \vec{u}(t)dt = 0\right\}$$

由此**“等价式”**可得相应的**“恒等式”**：

$$\vec{r}'(t') \equiv \vec{r}(t) - \int_0^t \vec{u}(t)dt = 0$$

满足此“恒等式”的“方程式”为：

$$\vec{r}'(t') = k_2[\vec{r}(t) - \int_0^t \vec{u}(t)dt] \qquad k_2 > 0$$

（3）时空变换的数学表达式应满足“速度、加速度、… 不变性”定律。

时空变换的数学表达式应满足以上（1）、（2）、（3）全部三项条件（“充要条件”）。

下面，我们推导出满足上述充要条件的“K'系观测者在时刻t'对某运动质点的观测矢量$\vec{r}'(t')$”与“K系观测者在时刻t对该运动质点的观测矢量$\vec{r}(t)$”之间的数学关系式，即“时空变换”数学表达式。

从上述条件（1）及（2）可得以下“时空变换”方程：

$$t' = k_1 t \qquad k_1 > 0$$

$$\vec{r}'(t') = k_2[\vec{r}(t) - \int_0^t \vec{u}(t)dt] \qquad k_2 > 0$$

令$k_1 = k_2 = k > 0$，得：

$$\begin{cases} \vec{r}'(t') = k[\vec{r}(t) - \int_0^t \vec{u}(t)dt] \qquad (k > 0) \\ t' = kt \end{cases}$$

式中的系数k称为K系对K'系的“时空度规比”。

这就是时空变换的标准数学式。

对时空变换标准数学式求导：

$$\frac{d\vec{r}'(t')}{dt'} = k\frac{d[\vec{r}(t) - \int_0^t \vec{u}(t)dt]}{dt}\frac{dt}{dt'} = k\left[\frac{d\vec{r}(t)}{dt} - \vec{u}(t)\right]\frac{1}{k} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} - \vec{u}(t)$$

$\because$ $\vec{r}(t) - \int_0^t \vec{u}(t)dt \equiv \vec{r}'(t)$ $\quad\therefore$ $\frac{d\vec{r}(t)}{dt} - \vec{u}(t) \equiv \frac{d\vec{r}'(t)}{dt}$

得：
$$\frac{d\vec{r}'(t')}{dt'} \equiv \frac{d\vec{r}'(t)}{dt}$$

从而有：

$$\frac{d^n\left[\vec{r}'(t')\right]}{dt'^n} \equiv \frac{d^n\left[\vec{r}'(t)\right]}{dt^n}, \qquad n=1,2,......$$

由此可知，上述**时空变换标准数学式**能满足**“速度、加速度、… 不变性”定律**，即能满足上述条件（3）。

下面，我们来确定**时空变换标准数学式**中的**系数** k 。

在**“真空中光传播速率为有限值** c（$c \approx 3.0\times10^5$ 千米/秒）**”**条件下，在某时刻 t'，K' **系观测者**观测到某运动质点并瞬刻发出该质点的电磁波讯号。由于真空中光传播速率为有限值（c），故在时刻 t'，离 K' **系观测者**之距离为 $\left|\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right| = \int_0^{t'}\left|\vec{u}(t)\right|dt > 0$ 的 K **系观测者**尚不能与 K' **系观测者**同时观测到该运动质点。直到时间延迟至时刻 t：

$$t = t' + \frac{\left|\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right|}{c} = \left(1 + \frac{\left|\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right)t' > t'$$

K **系观测者**才观测到该运动质点。由此可得 t 与 t' 之间的关系式：

$$t = \left(1 + \frac{\left|\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right)t'$$

$$t' = \left(1 + \frac{\left|\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right)^{-1} t$$

将此关系式与**“时空变换”**的**时间变换式** $t' = kt$ 相对照，即可得出系数 k ：

$$k = \left(1 + \frac{\left|\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right)^{-1}$$

k 称为 K **系时间**（t）对 K' **系时间**（t'）的**“时间度规比”**。**时空变换标准数学式：**

$$\begin{cases} \vec{r}'(t') = k[\vec{r}(t) - \int_0^{t}\vec{u}(t)dt] \qquad (k>0) \\ t' = kt \end{cases}$$

中的**系数** k 称为 K 系对 K' 系的“**时空度规比**”。

最后，我们得到（**一般**）**周方变换**：

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\vec{r}\,'(t') \\ t'\end{bmatrix} = k\begin{bmatrix}\vec{r}(t) - \int_0^t \vec{u}(t)dt \\ t\end{bmatrix} \\ k = \left(1 + \dfrac{\left|\int_0^{t'} \vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right)^{-1}\end{cases}$$

逆变换式为：

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\vec{r}(t) \\ t\end{bmatrix} = \dfrac{1}{k}\begin{bmatrix}\vec{r}\,'(t') + \int_0^{t'} \vec{u}(t)dt \\ t'\end{bmatrix} \\ \dfrac{1}{k} = \left(1 + \dfrac{\left|\int_0^{t'} \vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right)\end{cases}$$

这就是‘**两观测者作相对运动** $\vec{u}(t)$ **且真空中光速为有限值** c’场合下唯一客观存在的两观测者观测到同一运动质点的时刻及空间坐标之间的数学转换关系 — **时空变换**。可以看到，此**时空变换**是**伽利略型**时空变换。

记 $\vec{r}(t) - \int_0^t \vec{u}(t)dt = \vec{r}\,'(t)$。于是，**伽利略–周方变换**可以换写为：

$$\begin{bmatrix}\vec{r}\,'(t') \\ t'\end{bmatrix} = \left(1 + \frac{\left|\int_0^{t'} \vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right)^{-1} \bullet \begin{bmatrix}\vec{r}(t) - \int_0^t \vec{u}(t)dt \\ t\end{bmatrix} = \left(1 + \frac{\left|\int_0^{t'} \vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right)^{-1} \bullet \begin{bmatrix}\vec{r}\,'(t) \\ t\end{bmatrix}$$

若 $\vec{u}(t) = \vec{u} = const.$，则（**一般**）**伽利略–周方变换**为：

$$\begin{bmatrix}\vec{r}\,'(t') \\ t'\end{bmatrix} = \left(1 + \frac{|\vec{u}|}{c}\right)^{-1} \bullet \begin{bmatrix}\vec{r}(t) - \vec{u}t \\ t\end{bmatrix} = \left(1 + \frac{|\vec{u}|}{c}\right)^{-1} \bullet \begin{bmatrix}\vec{r}\,'(t) \\ t\end{bmatrix}$$

伽利略变换的观测矢量图示于**图 4-27**。

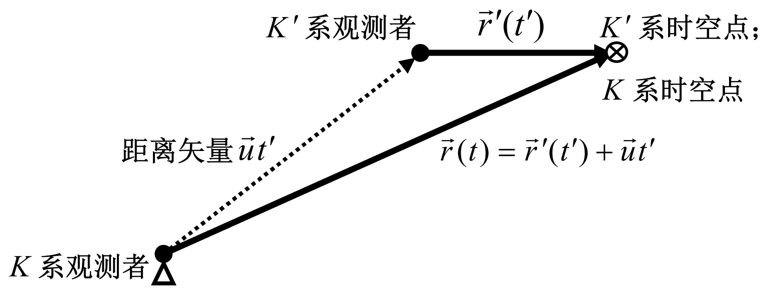


图 4-27 伽利略变换的观测矢量图

（一般）伽利略–周方变换的观测矢量图示于图 4-28。

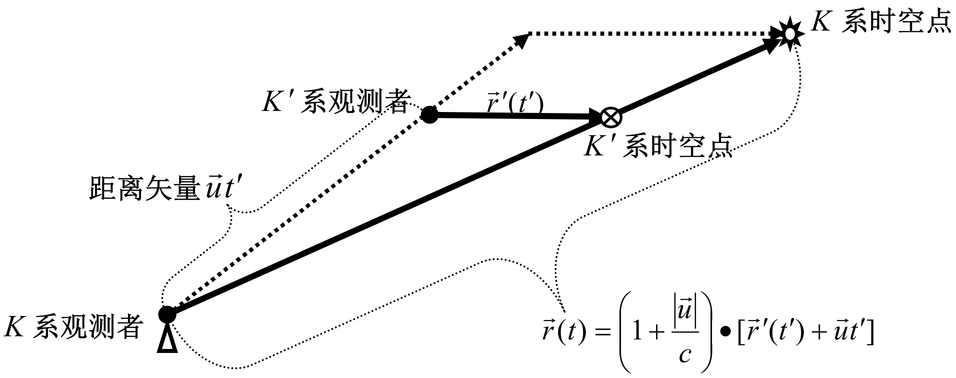


图 4-28 伽利略–周方变换的观测矢量图

（一般）伽利略–周方变换的 K 系时空点及 K' 系时空点示于图 4-29。

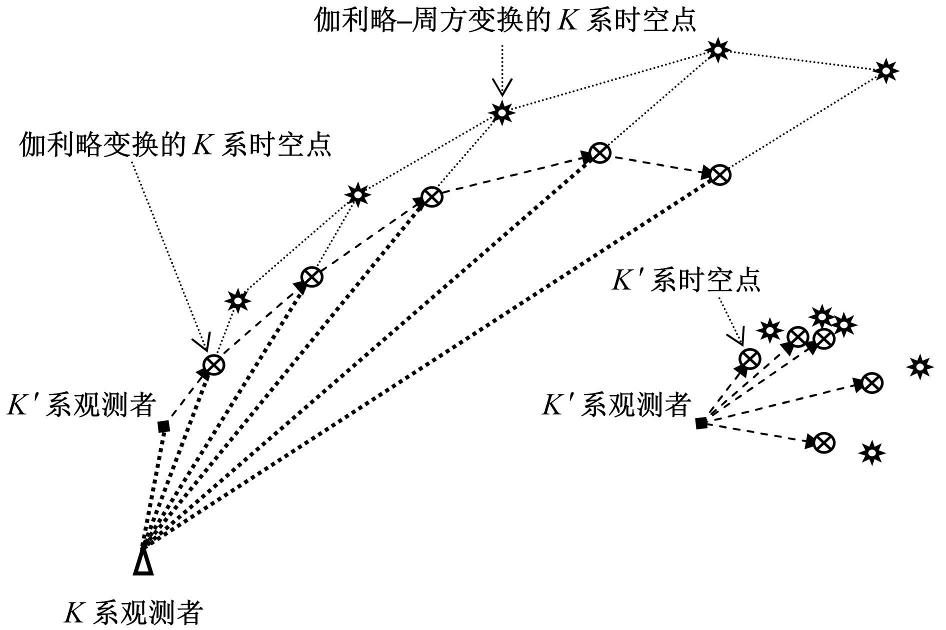


图 4-29 （一般）伽利略–周方变换的 K 系时空点及 K' 系时空点

在坐标系相对速度为时间函数 $\vec{u}(t)=\begin{bmatrix}u(t) & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ 且 $\vec{r}=[x \quad 0 \quad 0]^T$ 及

$\vec{r}' = [x' \quad 0 \quad 0]^T$ 的‘一维时空’场合下，伽利略–周方变换为：

$$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \left(1 + \frac{\int_0^{t'} u(t)dt}{ct'} \right)^{-1} \bullet \begin{bmatrix} x(t) - \int_0^t u(t)dt \\ t \end{bmatrix}$$

逆变换式为

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ t \end{bmatrix} = \left(1 + \frac{\int_0^{t'} u(t)dt}{ct'} \right) \bullet \begin{bmatrix} x'(t') + \int_0^{t'} u(t)dt \\ t' \end{bmatrix}$$

（二）（特殊）伽利略-周方变换

在 K' 系原点相对于 K 系原点沿 K 系的 x 轴正方向以匀速 $\vec{u}(t) = \vec{u} = const$.做相对运动之场合下，$K'$ 系与 K 系之间的关系示于图 4-22。

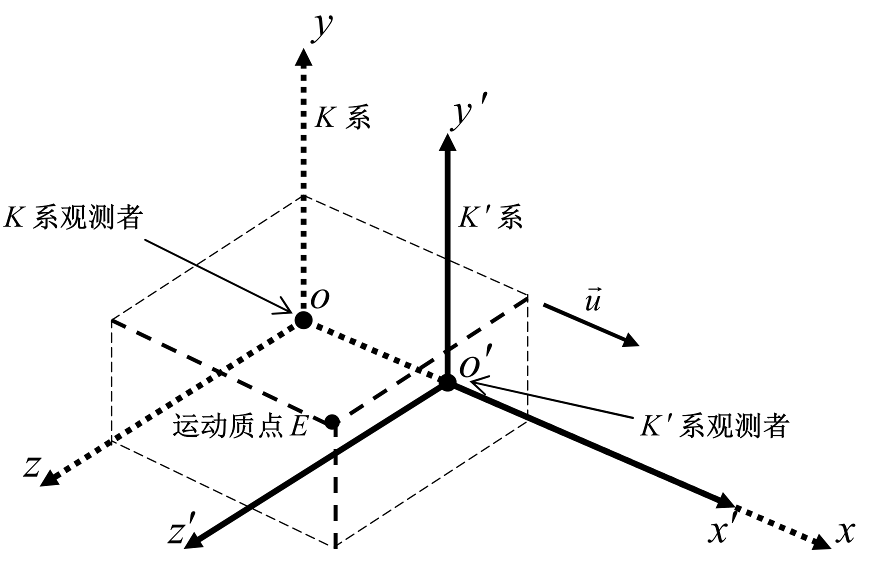


图 4-22 K' 系与 K 系之间的关系

在这种场合下，有：$\vec{u}(t) = \vec{u} = [u_x \quad u_y \quad u_z]^T = [u \quad 0 \quad 0]^T = const.$，故有：

$$\left| \int_0^{t'} \vec{u}(t)dt \right| = \int_0^{t'} |\vec{u}| dt = \int_0^{t'} [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2]^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^{t'} [u^2 + 0 + 0]^{\frac{1}{2}} dt = ut'$$

$$k=\left(1+\frac{\left|\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right)^{-1}=\left(1+\frac{ut'}{ct'}\right)^{-1}=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}$$

于是，可得（特殊）**伽利略–周方变换**：

$$\begin{cases} x'=\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}(x-ut) \\ y'=\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}y \\ z'=\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}z \\ t'=\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}t \end{cases}$$

在坐标系相对速度为 $\vec{u}=\begin{bmatrix}u & 0 & 0\end{bmatrix}^T=const$. 且 $\vec{r}=[x \quad 0 \quad 0]^T$ 及 $\vec{r}'=[x' \quad 0 \quad 0]^T$ 的**‘一维时空’**场合下，**伽利略–周方变换**的变换方程为：

$$\boxed{\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix}=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix} x(t)-ut \\ t \end{bmatrix}}$$

或写成：

$$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix}=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix} x(t)-ut \\ t \end{bmatrix}=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix} x'(t) \\ t \end{bmatrix}$$

逆变换式为：

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ t \end{bmatrix}=\left(1+\frac{u}{c}\right)\begin{bmatrix} x'(t')+ut' \\ t' \end{bmatrix}=\left(1+\frac{u}{c}\right)\begin{bmatrix} x(t') \\ t' \end{bmatrix}$$

‘一维时空’场合下，**伽利略–周方变换**的时间变换式为：

$$t'=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t<t$$

此式说明，在 K' **系观测者**对 K **系观测者**远离而去之场合下，K' **系观测者**先于 K **系观测者**观测到运动质点。

对于**‘一维时空’**场合，即**图 4-22** 中删去 y 轴、y' 轴、z 轴、z' 轴之场合，K' 系与 K 系之间的关系示于**图 4-30**。

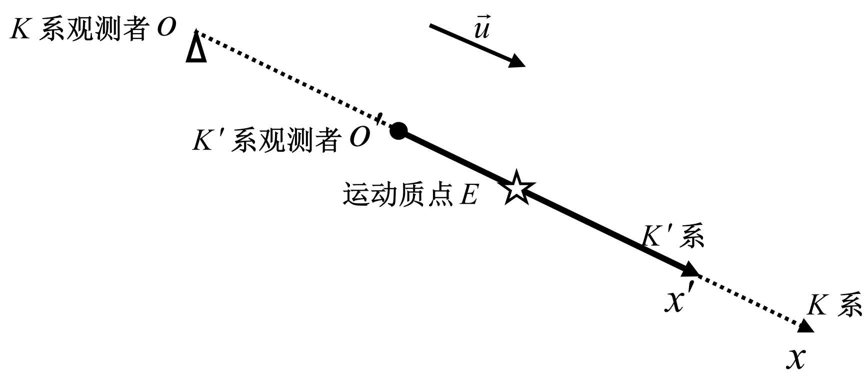


图 4-30 K' 系与 K 系之间的关系

伽利略-周方变换 $\begin{bmatrix} x(t) \\ t \end{bmatrix} = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)\begin{bmatrix} x'(t')+ut' \\ t' \end{bmatrix}$ 的 K' 系时空点与 K 系时空点示于图 4-31。

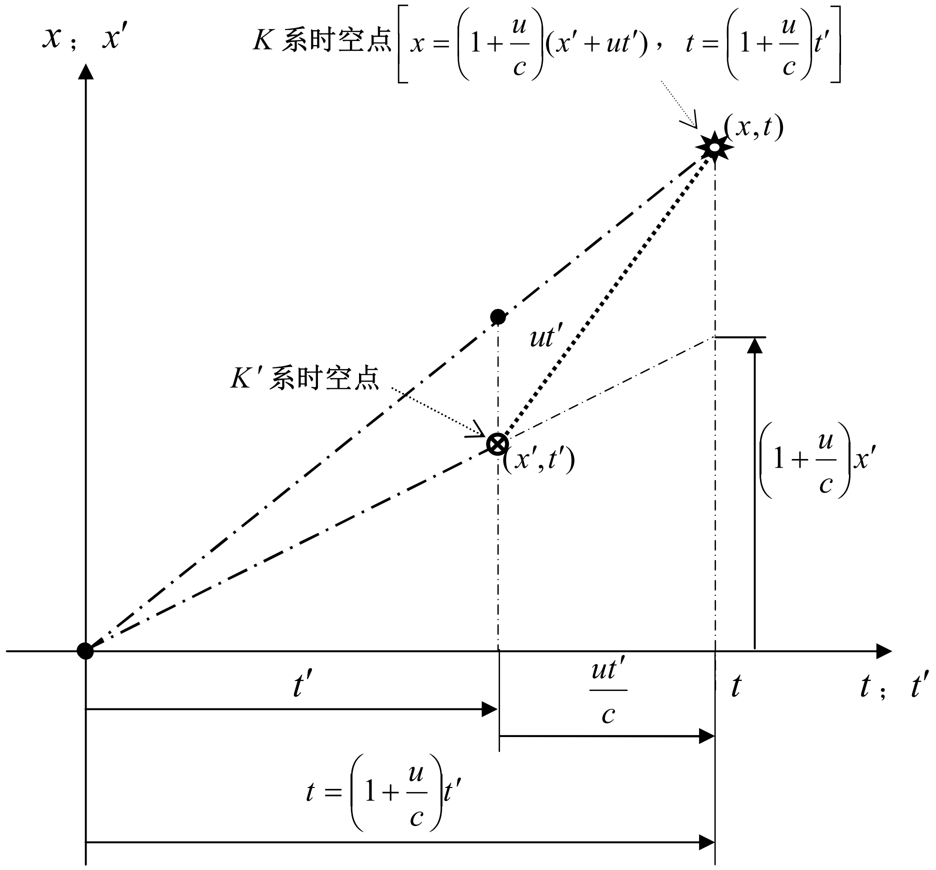


图 4-31 伽利略-周方变换的 K' 系时空点与 K 系时空点

计算示例示于图 4-32。

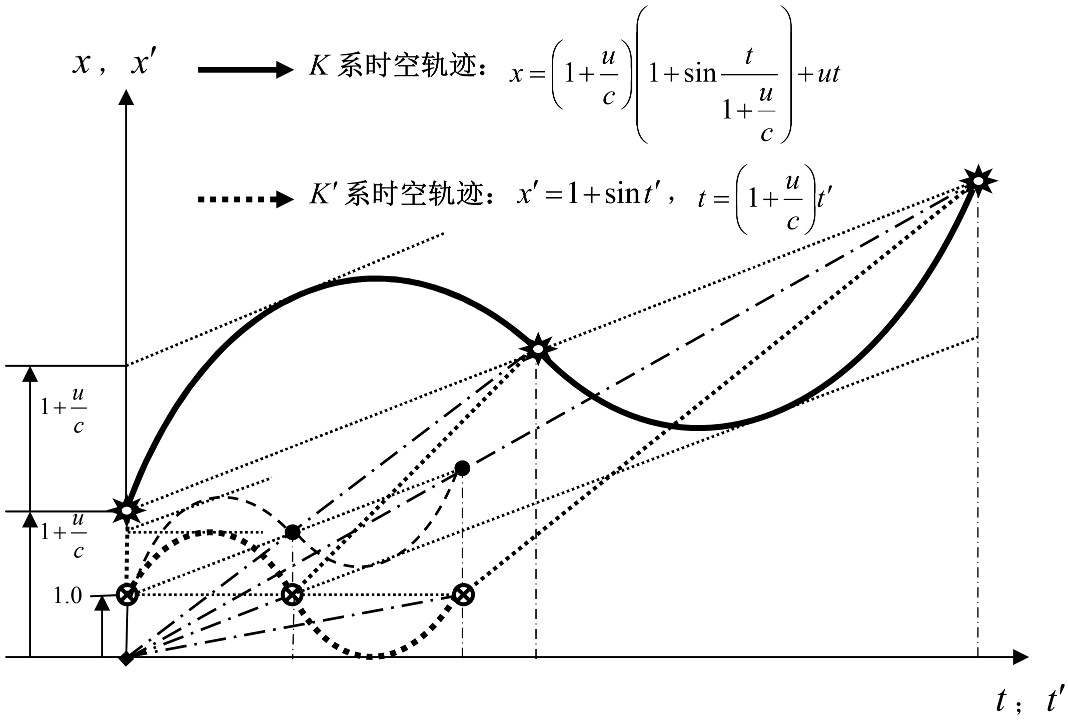


图 4-32 伽利略-周方变换的 K' 系时空轨迹与 K 系时空轨迹

伽利略变换为：$\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{r}(t)-\vec{u}t\\ t\end{bmatrix}$，即：

$$\boxed{\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{r}(t)-\vec{u}t\\ t\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\vec{r}'(t)\\ t\end{bmatrix}}$$

解读“伽利略变换”：

在伽利略时空$\begin{bmatrix}\text{（三维）欧式空间}\\ \text{时间}\end{bmatrix}$内：$K'$ 系时空点$\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}$表示“$K'$ 系**观测者**在时刻 t' 观测到 K' 系内之点 $\vec{r}'(t')$”；K 系时空点$\begin{bmatrix}\vec{r}(t)-\vec{u}t\\ t\end{bmatrix}$表示“$K$ 系**观测者**在时刻 t 观测到 K 系内之点 $[\vec{r}(t)-\vec{u}t]$”。因为 K 系内之点 $[\vec{r}(t)-\vec{u}t]$ 同时也是 K' 系内之点 $\vec{r}'(t)$，故有：

$\begin{bmatrix}\vec{r}(t)-\vec{u}t\\ t\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\vec{r}'(t)\\ t\end{bmatrix}$。

等式$\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{r}'(t)\\ t\end{bmatrix}$表示“$K'$系观测者与$K$系观测者同时（在时刻$t=t'$）观测到同一质点”。

综上，伽利略变换$\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{r}(t)-\vec{u}t\\ t\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\vec{r}'(t)\\ t\end{bmatrix}$的物理涵义是：“两异地观测者（$\vec{u}t\neq 0$）同时（在时刻$t=t'$）观测到同一质点”，其数学表述为：“两异地观测者的观测矢量$\vec{r}(t)$与$\vec{r}'(t')$通过两观测者之间的距离矢量$\vec{u}t=\vec{u}t'$形成（在时刻$t=t'$的）观测矢量合成三角形”。

伽利略变换的特点是两参考系之间的‘时空度规比’为“1”。

‘一维时空’场合下伽利略变换的K'系时空点与K系时空点示于图 4-33。

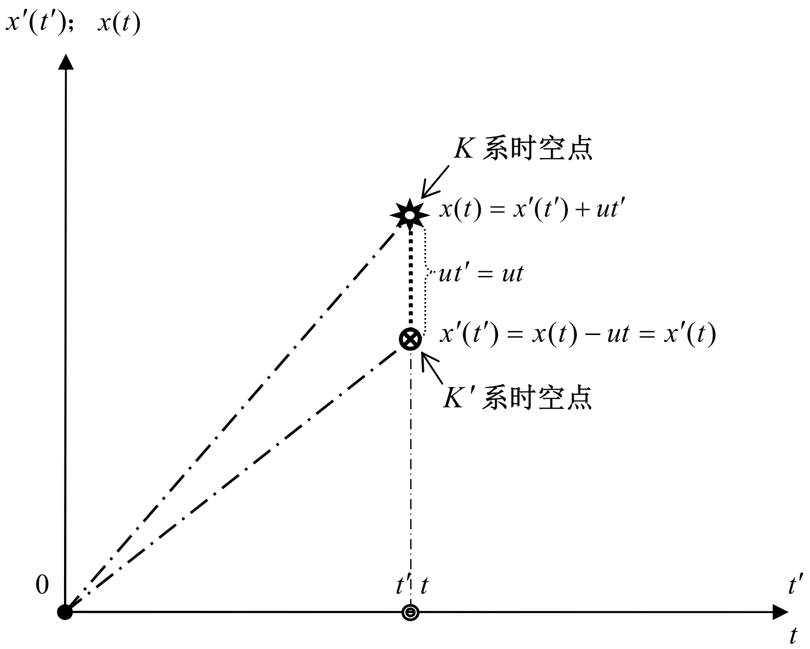


图 4-33 伽利略变换的K'系时空点与K系时空点

解读“伽利略-周方变换”：

‘一维时空’场合下伽利略–周方变换$\begin{bmatrix}x'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix}x(t)-ut\\ t\end{bmatrix}$可以换写为：

$$\begin{bmatrix}x'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x(\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t)-u\bullet\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t\\ \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}x'(\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t)\\ \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t\end{bmatrix}$$

记$T=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t$，可得：$\begin{bmatrix}x'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x(T)-uT\\ T\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}x'(T)\\ T\end{bmatrix}$，$T=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t$

从而可得：

$$\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} x(t)-ut \\ t \end{bmatrix}}^{\text{伽利略–周方变换}}\right\} \Leftrightarrow \left\{\overbrace{\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(T)-uT \\ T \end{bmatrix}}^{\text{伽利略变换}},\ T = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} t\right\}$$

即：

$$\boxed{\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} x(t)-ut \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(T)-uT \\ T \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x'(T) \\ T \end{bmatrix};\ T = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} t}$$

在伽利略时空$\begin{bmatrix} \text{（一维）欧式空间} \\ \text{时间} \end{bmatrix}$内：$K'$系时空点$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix}$表示“$K'$**系观测者**在时刻$t'$观测到$K'$系内之点$x'(t')$”；$K$系时空点$\begin{bmatrix} x(T)-uT \\ T \end{bmatrix}$表示“$K$**系观测者**在时刻$T = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} t$观测到$K$系内之点$[x(T)-uT]$”。因为$K$系内之点$[x(T)-uT]$同时也是$K'$系内之点$x'(T)$，故有：$\begin{bmatrix} x(T)-uT \\ T \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x'(T) \\ T \end{bmatrix}$;。

等式$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'(T) \\ T \end{bmatrix}$表示“$K'$系观测者与$K$系观测者同时（在时刻$T = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} t = t'$）观测到同一质点”。

综上，“**伽利略–周方变换**”

$$\boxed{\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} x(t)-ut \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(T)-uT \\ T \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x'(T) \\ T \end{bmatrix};\ T = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} t}$$

其实就是[在时刻$T = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} t = t'$]的**伽利略变换**，其物理涵义是：$K$系观测者与$K'$系观测者同时（在时刻$T = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} t = t'$）观测到同一质点”。数学表述为：“两观测者的观测矢量$x(T = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} t = t')$与$x'(t')$通过两观测者之间的距离矢量$uT = ut'$形成（在时刻$T = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} t = t'$的）观测矢量合成三角形”。

伽利略–周方变换的特点是 K 系对 K' 系的‘时空度规比’为 $\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}<1$。

$$\overbrace{\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix}=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix} x(t)-ut \\ t \end{bmatrix}}^{\text{伽利略–周方变换}}=\underbrace{\begin{bmatrix} x(T)-uT \\ T \end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix} x'(T) \\ T \end{bmatrix}}_{\text{观测矢量合成三角形}};\ T=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t$$

‘一维时空’场合下伽利略–周方变换的 K' 系时空点与 K 系时空点示于图 4-34。

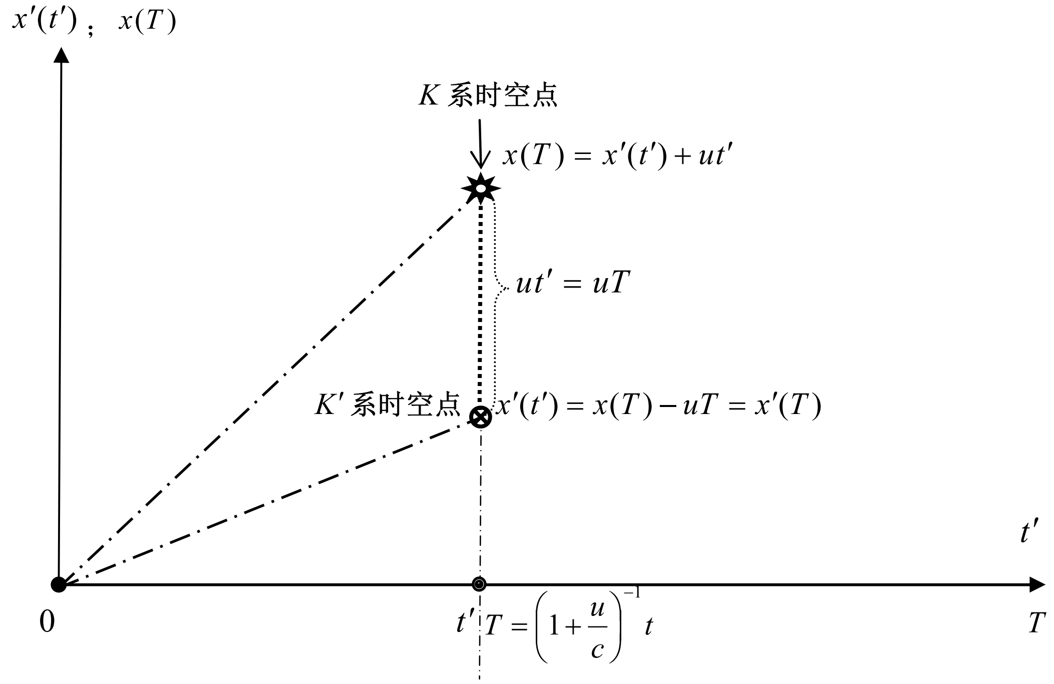


图 4-34 伽利略–周方变换的 K' 系时空点与 K 系时空点

图 4-34 以及伽利略–周方变换的变换式：

$$\boxed{\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix}=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix} x(t)-ut \\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x(T)-uT \\ T \end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix} x'(T) \\ T \end{bmatrix};\ T=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t}$$

说明：在每个时刻 $T=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}t=t'$，$K$ 系观测者与 K' 系观测者同时观测到同一质点。这就等同于下述情况：由于光波（电磁波）在互作相对运动（u）的两观测者之间传播时保持恒定的速率（c）（$c\approx 3.0\times 10^5$ 千米/秒）而必产生“多普勒效应”（**Doppler’s Effect**），致

使 K 系对 K' 系的‘时空度规比’为 $\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}<1$，也就是 K' 系对 K 系的‘时空度规比’为 $\left(1+\dfrac{u}{c}\right)>1$，因而使 K 系观测者只能在滞后于（K' 系观测者观测到质点的）时刻 t' 的时刻 $t=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)t'$ 才观测到质点。

伽利略–周方变换可以写成：

$$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(T)-uT \\ T \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x'(T) \\ T \end{bmatrix}; \quad T=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} t$$

得：

$$\forall (t'=T)\text{：}\ x'(t') \equiv x'(T)$$

从而得：

$$\frac{d^n\left[x'(t')\right]}{dt'^n} \equiv \frac{d^n\left[x'(T)\right]}{dT^n}, \qquad n=1,2,\ldots\ldots$$

故伽利略–周方变换满足“速度、加速度、… 不变性”定律，即满足“相对性原理”。

伽利略–周方变换 $\begin{bmatrix} x(t) \\ t \end{bmatrix} = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)\begin{bmatrix} x'(t')+ut' \\ t' \end{bmatrix}$ 可以写成：

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1+\dfrac{u}{c}\right)x'(t')+\left(1+\dfrac{u}{c}\right)ut' \\ \left(1+\dfrac{u}{c}\right)t' \end{bmatrix}$$

伽利略–周方变换 $\begin{bmatrix} x(t) \\ t \end{bmatrix} = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)\begin{bmatrix} x'(t')+ut' \\ t' \end{bmatrix}$ 的 K' 系时空点与 K 系时空点示于图 4-35。

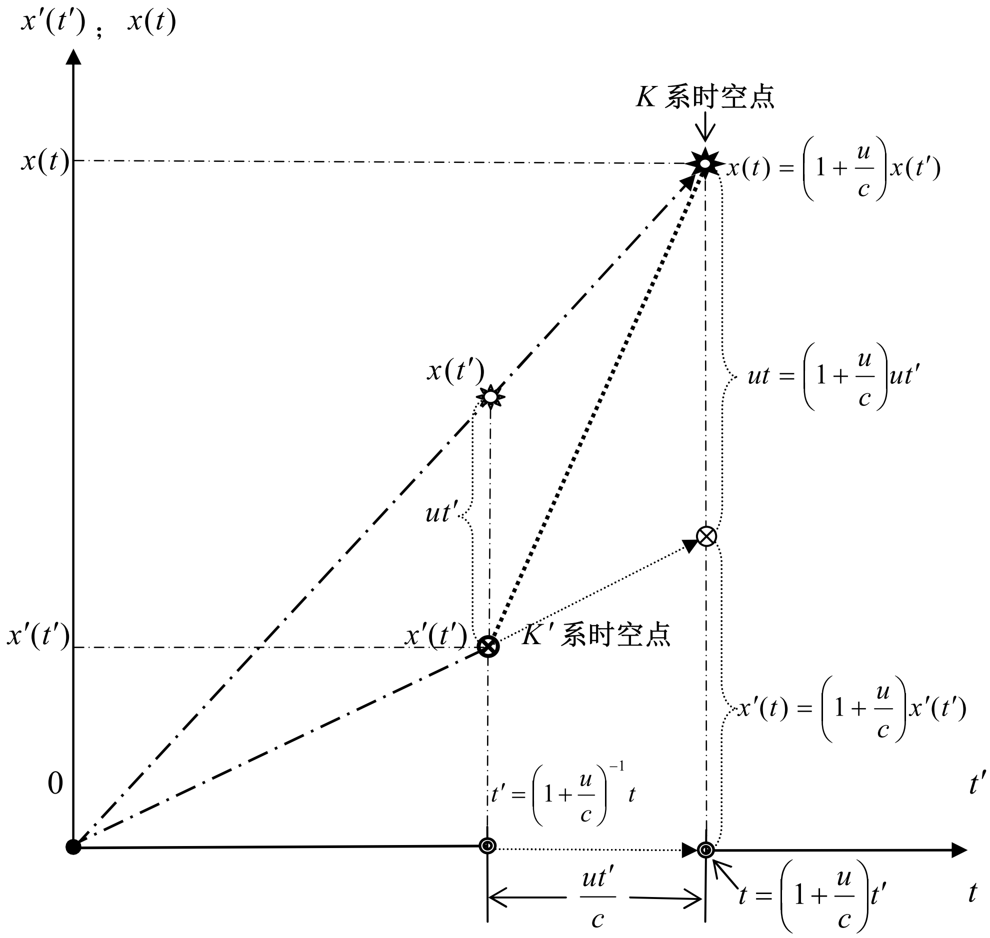


图 4-35 伽利略-周方变换的 K' 系时空点与 K 系时空点

伽利略变换与伽利略-周方变换的 K 系时空点示于图 4-36、图 4-37、图 4-38。

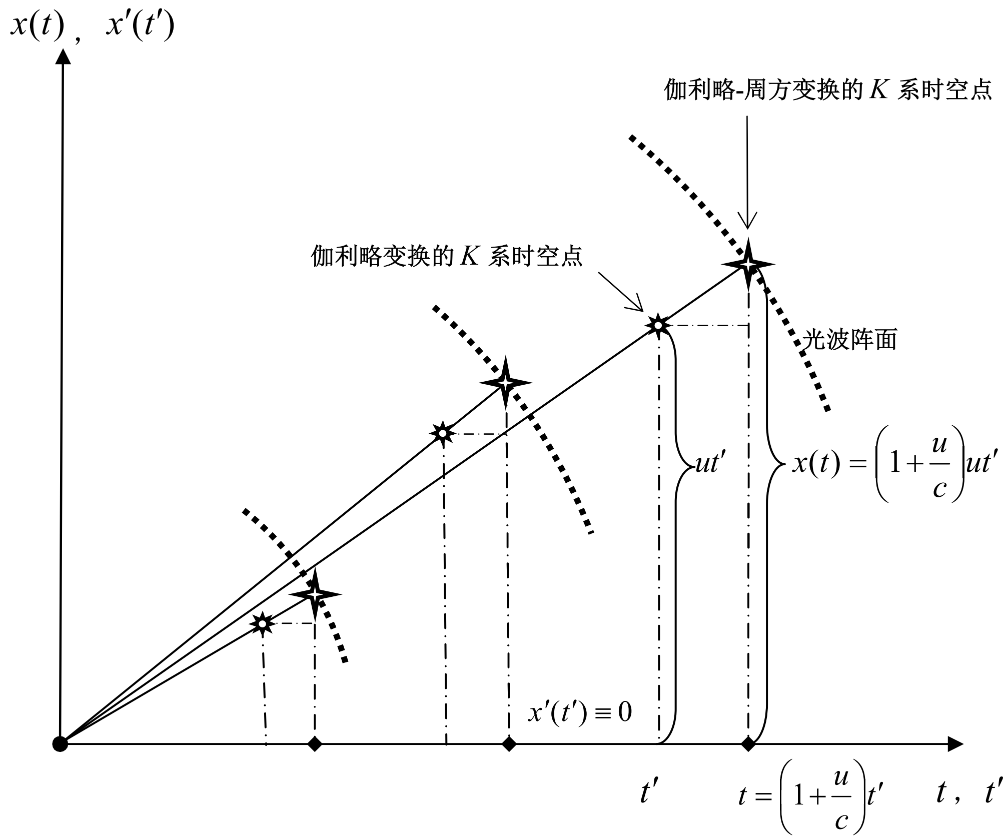


图 4-36 伽利略变换与伽利略-周方变换的 K 系时空点

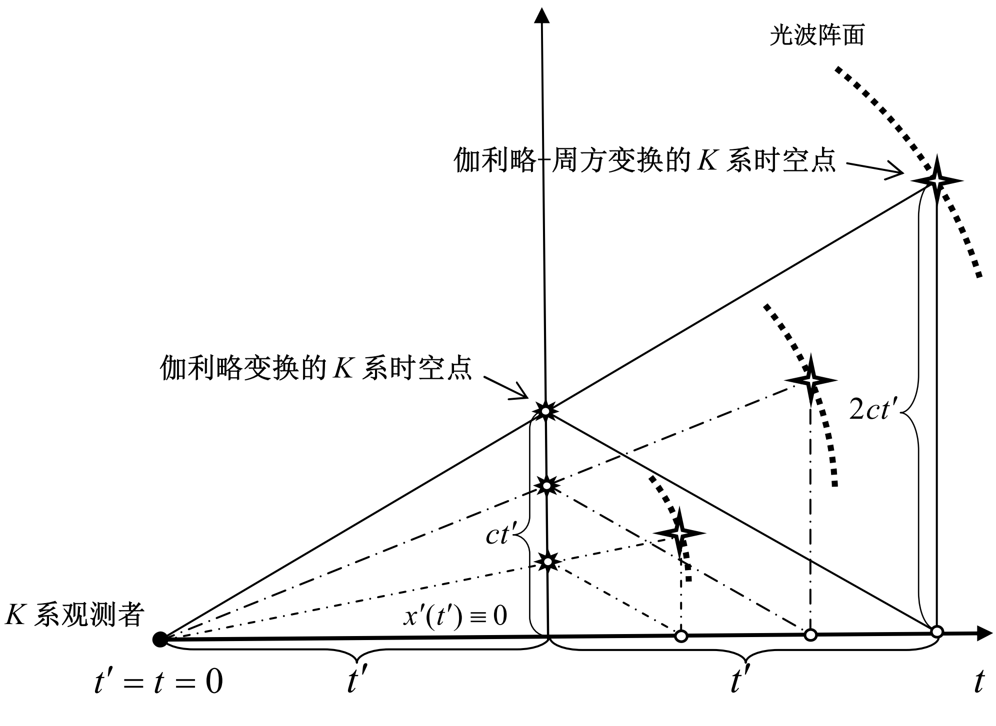


图 4-37 伽利略变换与伽利略-周方变换的 K 系时空点

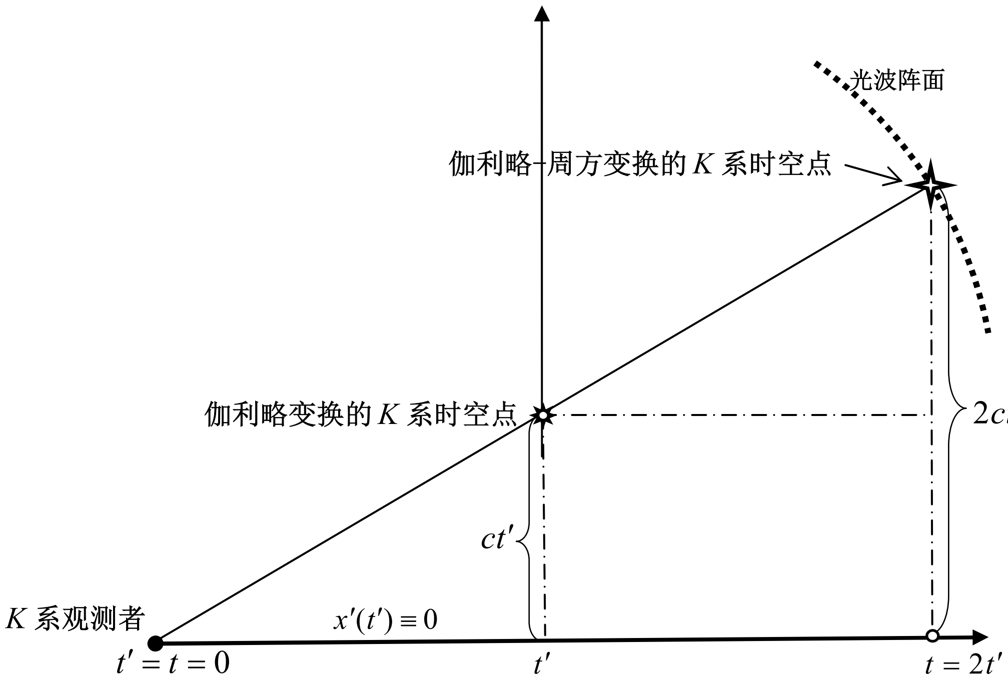


图 4-38 伽利略变换与伽利略-周方变换的 K 系时空点

伽利略-周方变换的 K 系时空点与多普勒效应的形成示于图 4-39、图 4-40。

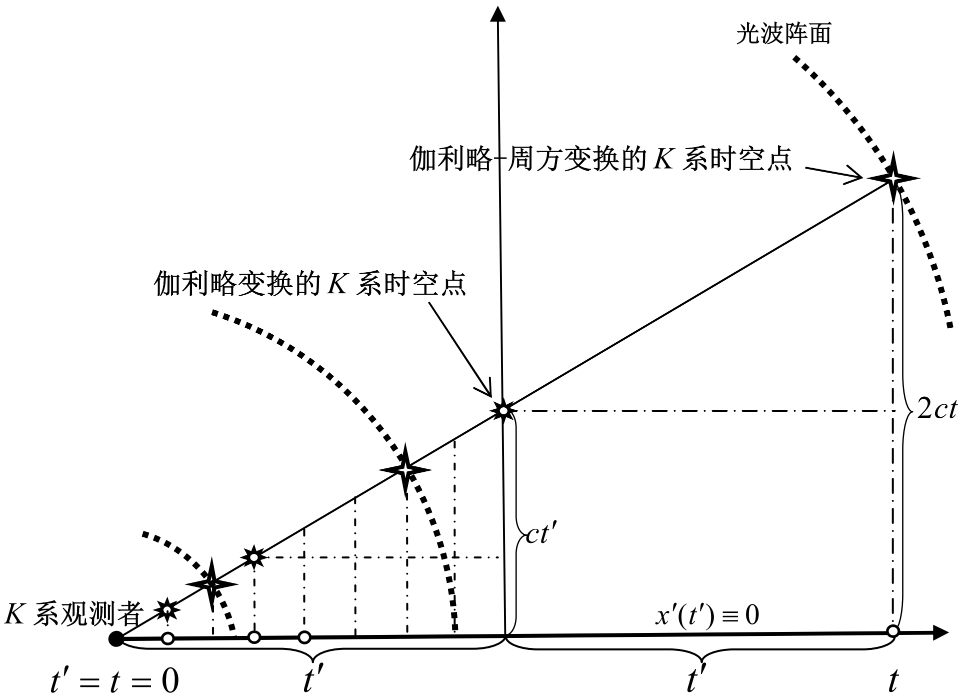


图 4-39 伽利略-周方变换的 K 系时空点与多普勒效应的形成

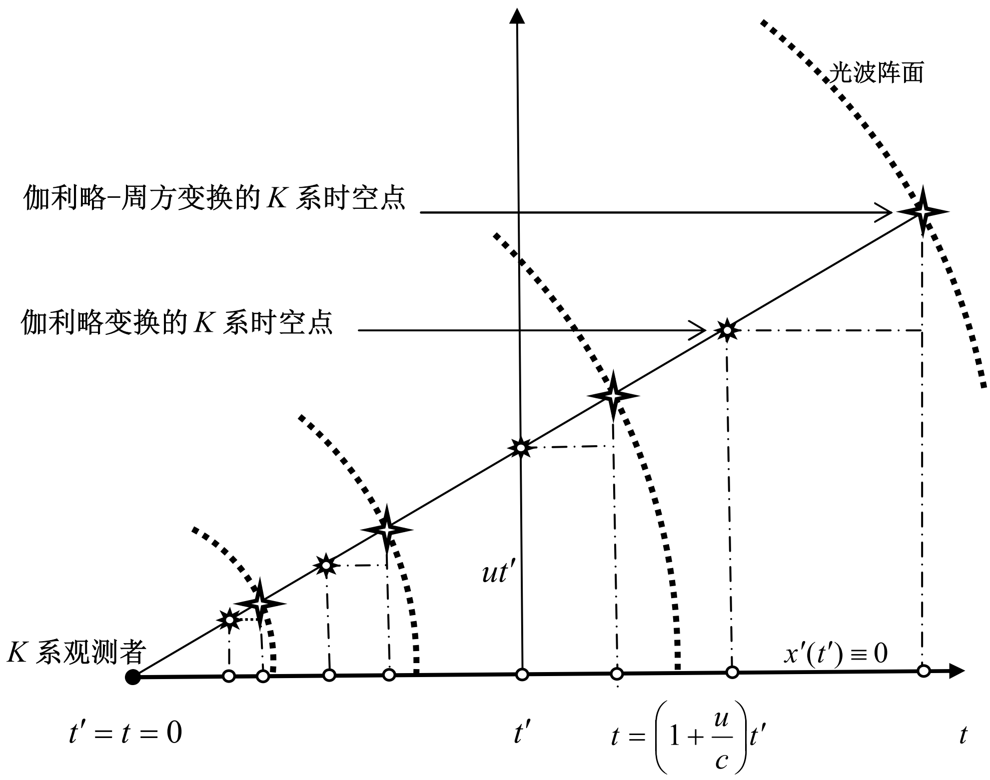


图 4-40 伽利略-周方变换的 K 系时空点与多普勒效应的形成

伽利略变换与伽利略-周方变换之比较列于表 4-3。

表 4-3 伽利略变换与伽利略-周方变换之比较

	伽 利 略 变 换	伽利略-周方变换
“一维时空”下的变换方程：	$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}$	$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{1+\dfrac{v}{c}} \\ t' = \dfrac{t}{1+\dfrac{v}{c}} \end{cases}$
所属“时空”	“伽利略时空（**Galilean Space-Time**）”： 欧式空间 $\left[\vec{r},\quad t\right]^T \equiv \left[\left[x,y,z\right]^T,\quad t\right]^T$	
变换“不变量”（**Invariance**）	被观测质点的速度：$\dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{dx'}{dt}$	
$x = vt$ ；	$\begin{cases} x' = 0 \\ t' = t \end{cases}$ —“动系时钟(较静系时钟)既不变慢，也不变快	$\begin{cases} x' = 0 \\ t' = \dfrac{t}{1+\dfrac{v}{c}} \end{cases}$ —“动系时钟(较静系时钟)变慢”效应

$x = ct$：	$\begin{cases} x' = ct - vt = (c-v)t' \\ t' = t \end{cases}$ —“动系时钟(较静系时钟)既不变慢，也不变快	$\begin{cases} x' = \dfrac{ct - vt}{1+\dfrac{v}{c}} = (c-v)t' \\ t' = \dfrac{t}{1+\dfrac{v}{c}} \end{cases}$ —“动系时钟(较静系时钟)变慢”效应
$\Delta t = 0$：	$\Delta x' = \Delta x$ — 动系尺度(较静系尺度)既不变大，也不变小	$\Delta x' = \dfrac{\Delta x}{1+\dfrac{v}{c}}$ —“动系尺度(较静系尺度)变大”效应

（三）哈勃定律(**Hubble's Law**)的理论表达式

对于坐标系相对速度为 $\vec{u} = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = const$．且 $\vec{r} = [x \quad 0 \quad 0]^T$ 及 $\vec{r}' = [0 \quad 0 \quad 0]^T$ 的**‘一维时空’，伽利略-周方变换**的变换方程为：

$$x = \left(1 + \frac{u}{c}\right) ut' \text{；} \; t = \left(1 + \frac{u}{c}\right) t'$$

（一维）**伽利略-周方变换**的观测矢量图示于图 4-41。

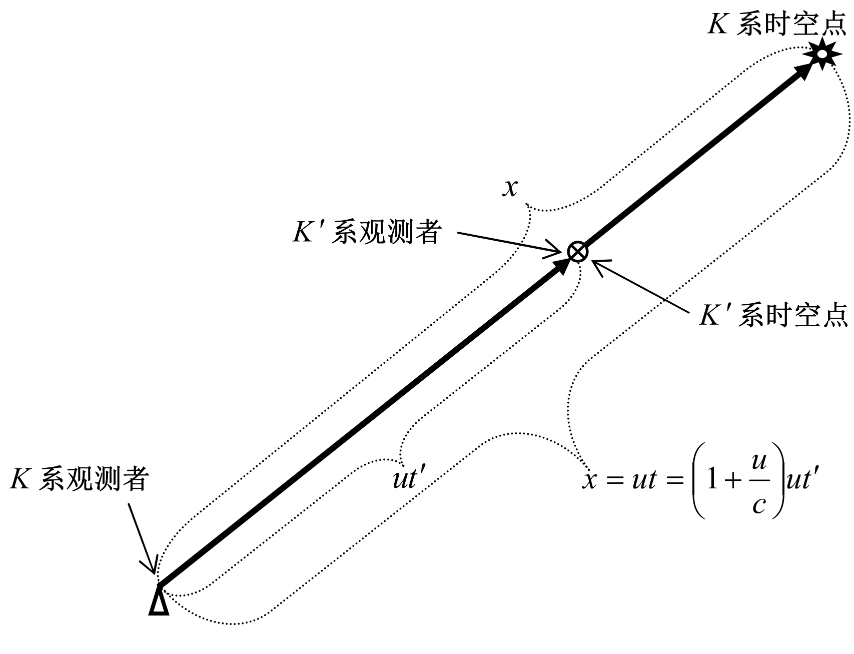


图 4-41 （一维）伽利略-周方变换的观测矢量图（哈勃定律）

从图 4-41 即可得出哈勃定律(**Hubble's Law**)的理论表达式：

$$\begin{cases} x = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)ut' \propto u^2 \\ \\ t = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)t' \propto u \end{cases}$$

式中：x为星系离地（视向）距离；

t为观测到星系的时间；

u为星系退行速度。

（四）结 论

(A)在‘不考虑光波（电磁波）的传播速率’或者‘假定光波（电磁波）传播速率为无穷大’的条件下，作相对运动的两观测者能同时观测到同一运动质点。换言之，观测者能同步观测到质点的实时运动过程。此情况下，唯一客观存在的时空变换为“伽利略变换”：

$$\boxed{\begin{bmatrix} \vec{r}'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}(t) - \vec{u}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}'(t) \\ t \end{bmatrix}}$$

即：K 系观测者在时刻t对质点的观测矢量$\vec{r}(t)$与K'系观测者在时刻t'对同一质点的观测矢量$\vec{r}'(t')$通过两观测者之间的距离矢量$\vec{u}t' = \vec{u}t$构成（在时刻$t = t'$的）观测矢量合成三角形，示于图 4-42。

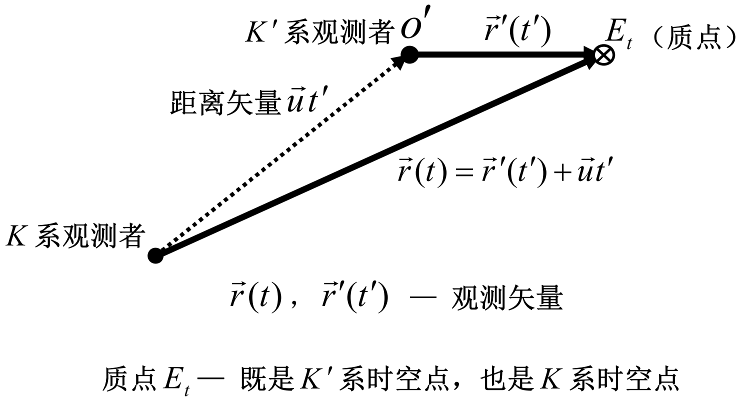


图 4-42 两观测者同时在时刻$t = t'$观测到同一运动质点E_t

(B)在‘两观测者作相对运动$\vec{u}(t)$且真空中光速为有限值c（$c = 3.0\times10^5$千米/秒）’的

场合下，唯一客观存在的**“时空变换”**为**“伽利略–周方变换”**:

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}\vec{r}(t)-\int_0^t\vec{u}(t)dt\\ t\end{bmatrix}\\ k=\left(1+\dfrac{\left|\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right)^{-1}\end{cases}$$

逆变换式为：

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\vec{r}(t)\\ t\end{bmatrix}=\dfrac{1}{k}\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')+\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\\ t'\end{bmatrix}\\ \dfrac{1}{k}=\left(1+\dfrac{\left|\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right)\end{cases}$$

“伽利略–周方变换”乃是因‘**两观测者有相对运动** $\vec{u}(t)$ **且光速为有限值** c（$c\approx3.0\times10^5$ 千米/秒）’而产生“**多普勒效应**”（**Doppler’s Effect**），因而导致两参考系之间的‘**时空度规比**’不为‘1’所形成的一种‘**时空数据之间的转换关系**’（即俗称的“**时空变换**”）。**“伽利略–周方变换”**之被发现，揭示了一个重要结论：在“**两观测者作相对运动及光速为有限值**”且**两观测者使用相同的测时测距量具**之场合下，两观测者不可能同时观测到同一运动质点。也就是说，观测者在对质点运动的遥测中不可能**同步**观测到质点的实时运动过程。事实上，观测者在对质点运动的遥测中所观测到的只能是受**多普勒效应**影响的‘**现时**’影像，而并非质点运动的‘**实时**’景象。**“伽利略–周方变换”**之被发现，为创立物理学史上至今尚未有的一门新的理论 —**“运动观测理论”**奠定了基础。

六、坐标系相离运动与相向运动

（一）坐标系相离运动

坐标系相对速度为$\vec{u}=\left[u_x,u_y,u_z\right]^T=const.$时，**伽利略-周方变换**的变换方程组为：

$$\begin{cases} \vec{r} = \left(1 + \dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)(\vec{r}' + \vec{u}t') \\ t = \left(1 + \dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)t' \end{cases}$$

式中：$\vec{r} = [x, y, z]^T$，$\vec{r}' = [x', y', z']^T$，$\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]^T = const.$，$|\vec{u}| = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$

变换方程组的展开式为：

$$\begin{cases} x(t) = \left\{1 + \dfrac{|\vec{u}|}{c}\right\} [x'(t') + u_x t'] \\ y(t) = \left\{1 + \dfrac{|\vec{u}|}{c}\right\} [y'(t') + u_y t'] \\ z(t) = \left\{1 + \dfrac{|\vec{u}|}{c}\right\} [z'(t') + u_z t'] \\ t = \left\{1 + \dfrac{|\vec{u}|}{c}\right\} t' \end{cases}$$

若 K' 系沿 K 系 x 轴正方向做平移相离运动，则坐标系相离速度为 $\vec{u}(t) = [u(t) \quad 0 \quad 0]^T$，在这种情况下：

1. 在时刻 t'，K' 系观测者（K' 系原点）沿 K 系 x 轴正方向离 K 系观测者（K 系原点）的距离为 $s(t') = \int_0^{t'} u(t)dt > 0$。

2. 在时刻 t'，坐标系相离速度为 $\dfrac{ds(t')}{dt'} = u(t') > 0$。

设坐标系相离速度为 $\vec{u} = [u \quad 0 \quad 0]^T = const.$，则**伽利略-周方变换**的变换方程组为：

$$\begin{cases} x=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)(x'+ut') \\ y=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)y' \\ z=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)z' \\ t=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)t' \end{cases}$$

坐标系相离运动下**伽利略-周方变换**的 K 系时空点示于图 4-43、图 4-44、图 4-45。

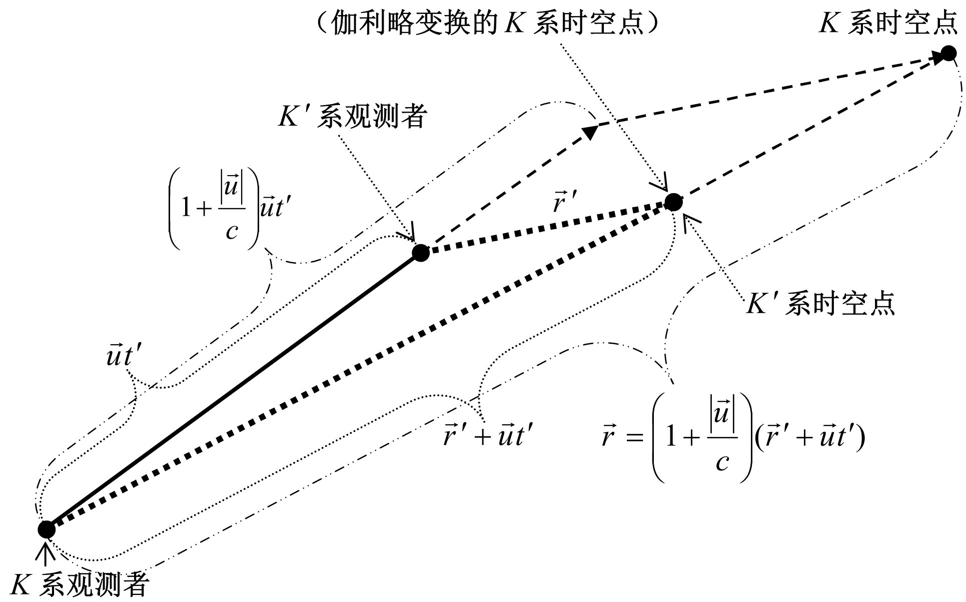


图 4-43 坐标系相离运动下伽利略-周方变换的 K 系时空点

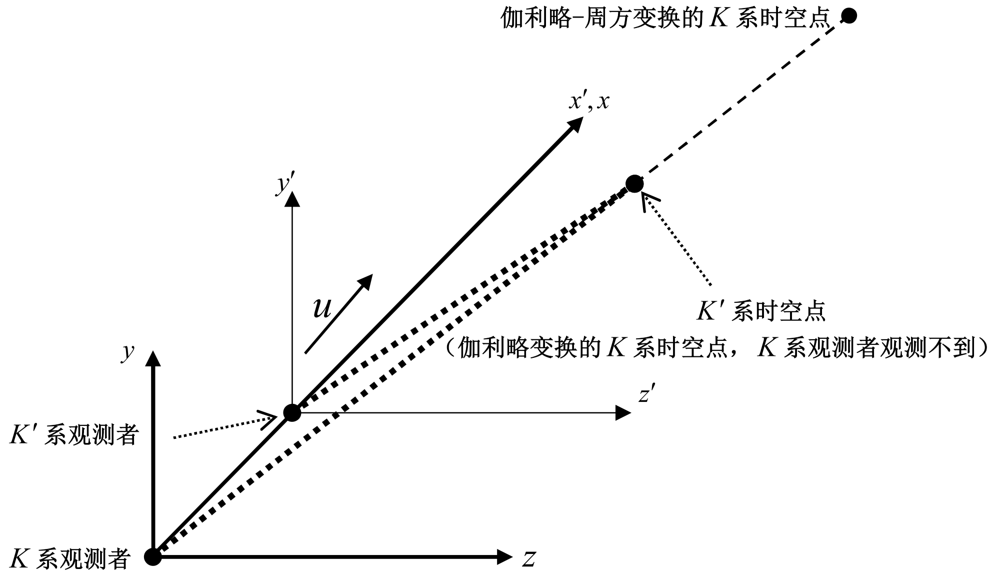


图 4-44 坐标系相离运动下伽利略-周方变换的 K 系时空点

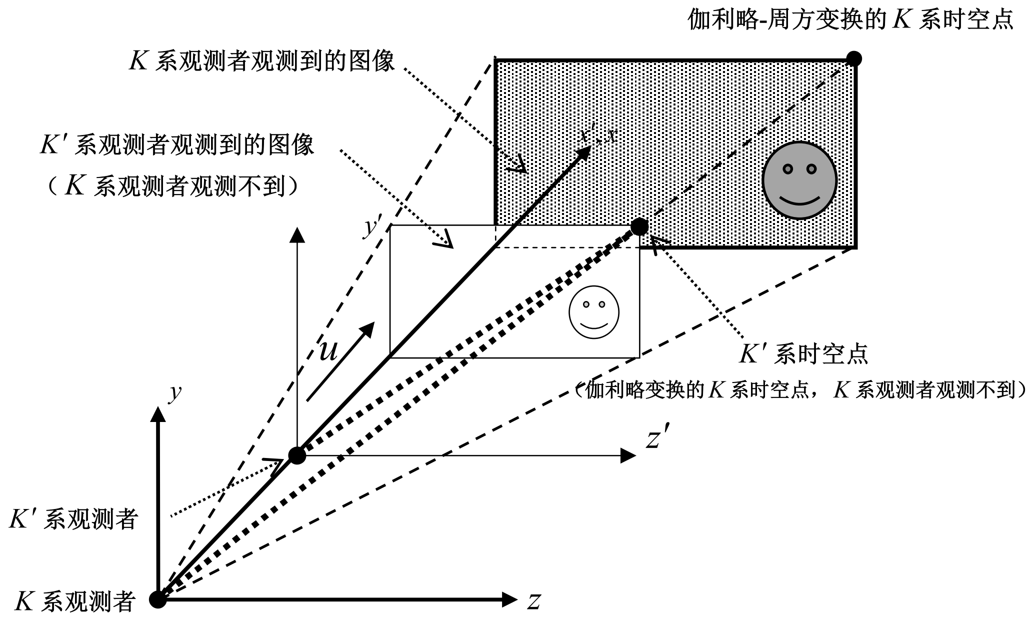


图 4-45 坐标系相离运动下伽利略-周方变换的 K 系时空点

计算示例：设：某质点的 K' 系时空轨迹为 $x'(t') = 1 + \sin t'$，$y'(t') = at'^2$，$z'(t') = bt'$。

将 $x'(t') = 1 + \sin t'$，$y'(t') = at'^2$，$z'(t') = bt'$ 代入坐标系相离运动下的**伽利略-周方变换**方程组：

$$\begin{cases} x = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)(x' + ut') \\ y = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)y' \\ z = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)z' \\ t = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)t' \end{cases}$$

得出该质点的 K 系时空轨迹：

$$\begin{cases} x(t) = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)\left[x'(t') + ut'\right] = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)(1+\sin t' + ut') \\ \quad = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)\left(1+\sin\dfrac{t}{1+\dfrac{u}{c}} + u\dfrac{t}{1+\dfrac{u}{c}}\right) = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)\left(1+\sin\dfrac{t}{1+\dfrac{u}{c}}\right) + ut \\ y(t) = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)at'^2 = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)at^2\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-2} = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}at^2 \\ z(t) = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)bt' = bt \\ t = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)t' \end{cases}$$

反之，将 $x(t) = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)(1+\sin t' + ut')$， $y(t) = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)at'^2$， $z(t) = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)bt'$ 代入“逆变换”，则得出该质点的 K' 系时空轨迹：

$$
\begin{cases}
x'(t') = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} x(t) - ut' = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}\left(1+\dfrac{u}{c}\right)(1+\sin t' + ut') - ut' = 1+\sin t' \\[2ex]
y'(t') = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} y(t) = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}\left(1+\dfrac{u}{c}\right) a t'^2 = a t'^2 \\[2ex]
z'(t') = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} z(t) = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}\left(1+\dfrac{u}{c}\right) b t' = b t' \\[2ex]
t' = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} t
\end{cases}
$$

将计算结果 —K' 系时空轨迹［$x'(t')$，$y'(t')$，$z'(t')$］与相应的 K 系时空轨迹［$x(t)$，$y(t)$，$z(t)$］— 示于图 4-46、图 4-47、图 4-48。

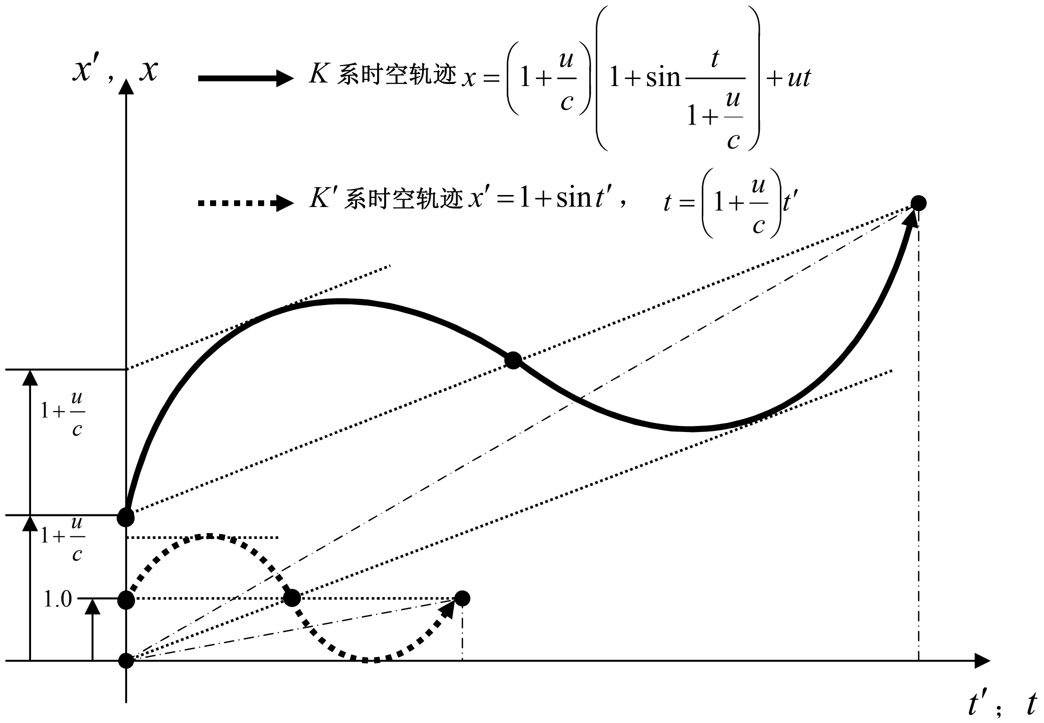


图 4-46 伽利略-周方变换在 x 轴方向的 K' 系时空轨迹与 K 系时空轨迹

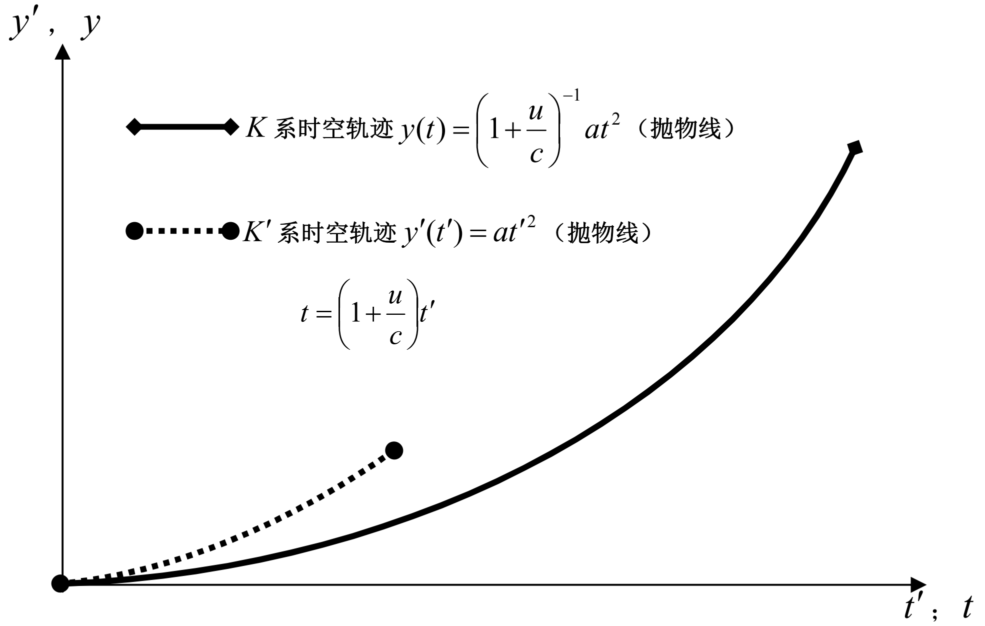


图 4-47 伽利略-周方变换在 y 轴方向的 K' 系时空轨迹与 K 系时空轨迹

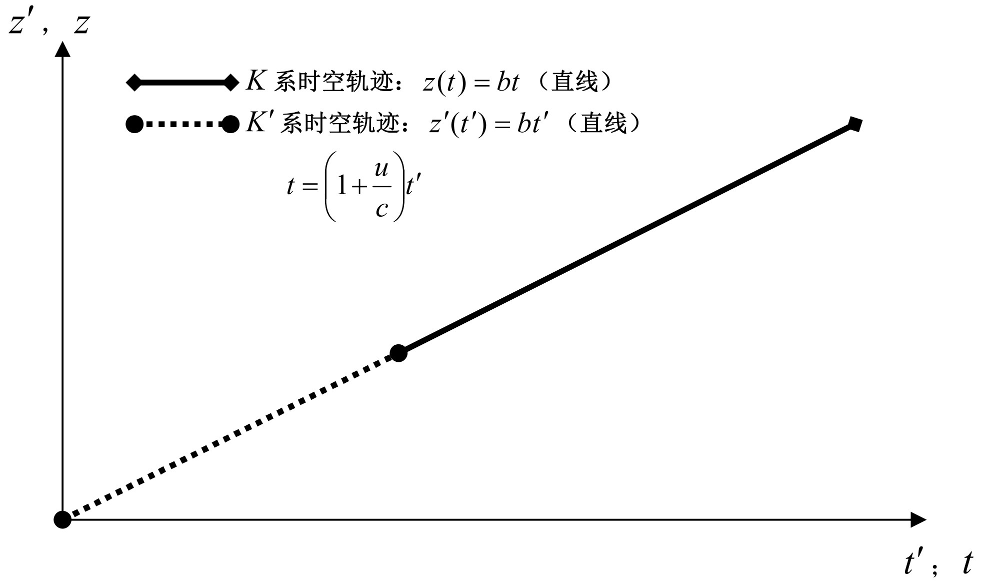


图 4-48 伽利略-周方变换在 z 轴方向的 K' 系时空轨迹与 K 系时空轨迹

（二）坐标系相向运动

1. 在时刻 t'，K' 系观测者（K' 系原点）在 K 系 x 轴正方向上离 K 系观测者（K 系原点）的距离为 $s(t')=\int_0^{t'}u(t)dt>0$。

2. 在时刻 t'，K' 系沿 K 系 x 轴负方向，向着 K 系原点做平移运动，K' 系对 K 系的相对速

度为“**相向速度**” $\vec{u}_f = \begin{bmatrix} \dfrac{ds(t')}{dt'} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u(t') & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$，$\dfrac{ds(t')}{dt'} = u(t') < 0$。

于是，**伽利略-周方变换**的变换方程组为：

$$\begin{cases} x = \left[1 + \dfrac{1}{c}\dfrac{ds(t')}{dt'}\right][x'(t') + s(t')] \\ y = \left[1 + \dfrac{1}{c}\dfrac{ds(t')}{dt'}\right]y'(t') \\ z = \left[1 + \dfrac{1}{c}\dfrac{ds(t')}{dt'}\right]z'(t') \\ t = \left[1 + \dfrac{s(t')}{ct'}\right]t' \end{cases}$$

逆变换式为：

$$\begin{cases} x'(t') = \left[1 + \dfrac{1}{c}\dfrac{ds(t')}{dt'}\right]^{-1} x(t) - s(t') \\ y'(t') = \left[1 + \dfrac{1}{c}\dfrac{ds(t')}{dt'}\right]^{-1} y(t) \\ z'(t') = \left[1 + \dfrac{1}{c}\dfrac{ds(t')}{dt'}\right]^{-1} z(t) \\ t' = \left[1 + \dfrac{s(t')}{ct'}\right]^{-1} t \end{cases}$$

坐标系相向运动下**伽利略-周方变换**的 K 系时空点示于图 4-49、图 4-50、图 4-51。

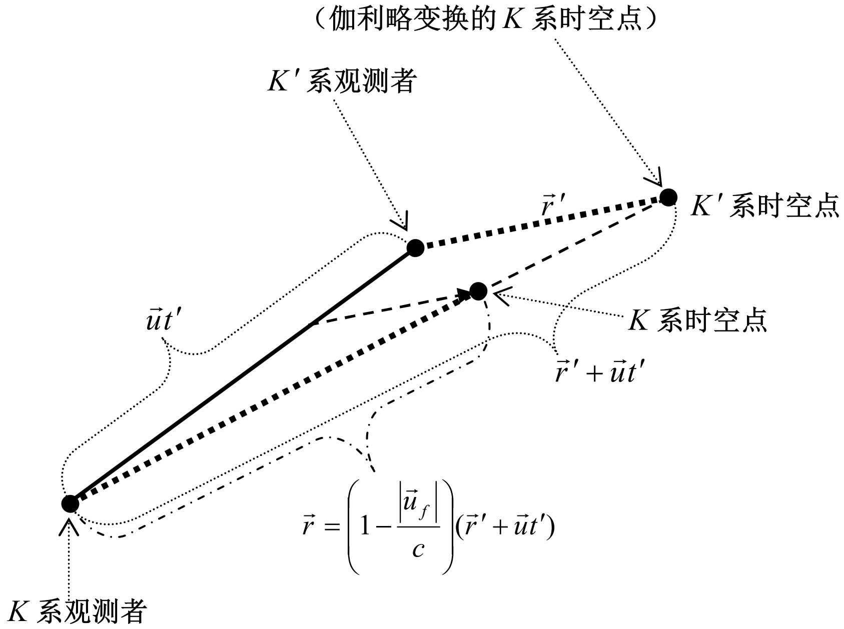


图 4-49 坐标系相向运动下伽利略-周方变换的 K 系时空点

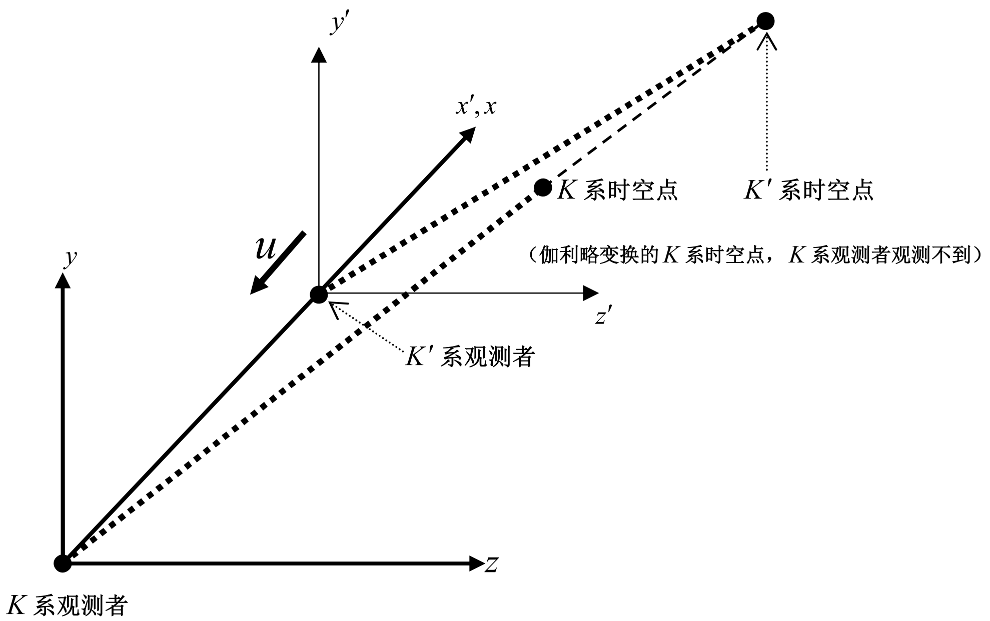


图 4-50 坐标系相向运动下伽利略-周方变换的 K 系时空点

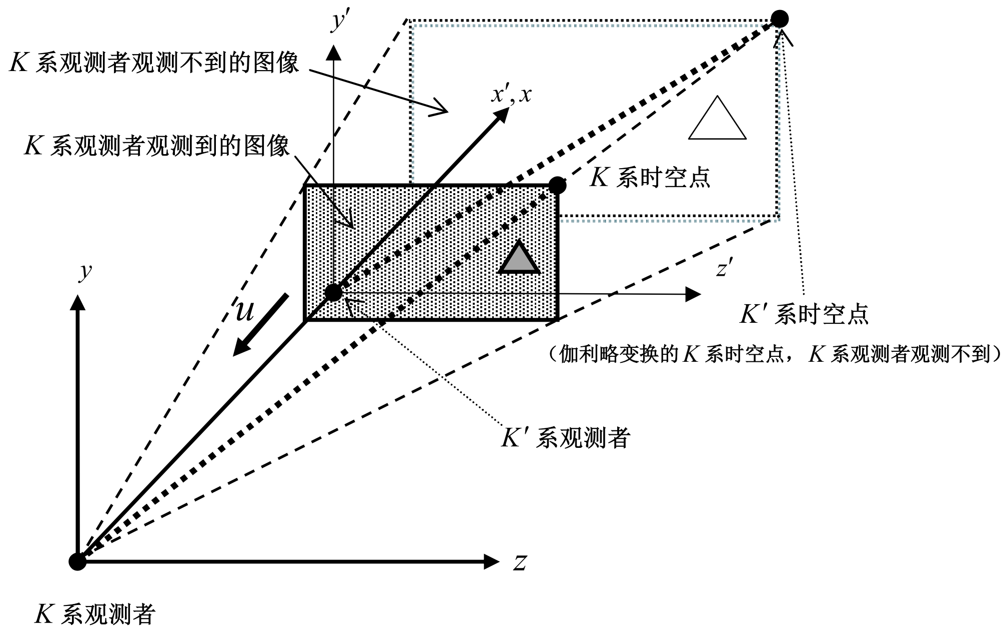


图 4-51 坐标系相向运动下伽利略-周方变换的 K 系时空点

坐标系相离运动下**伽利略-周方变换**在 x 轴方向的 K 系时空点示于**图 4-52**。

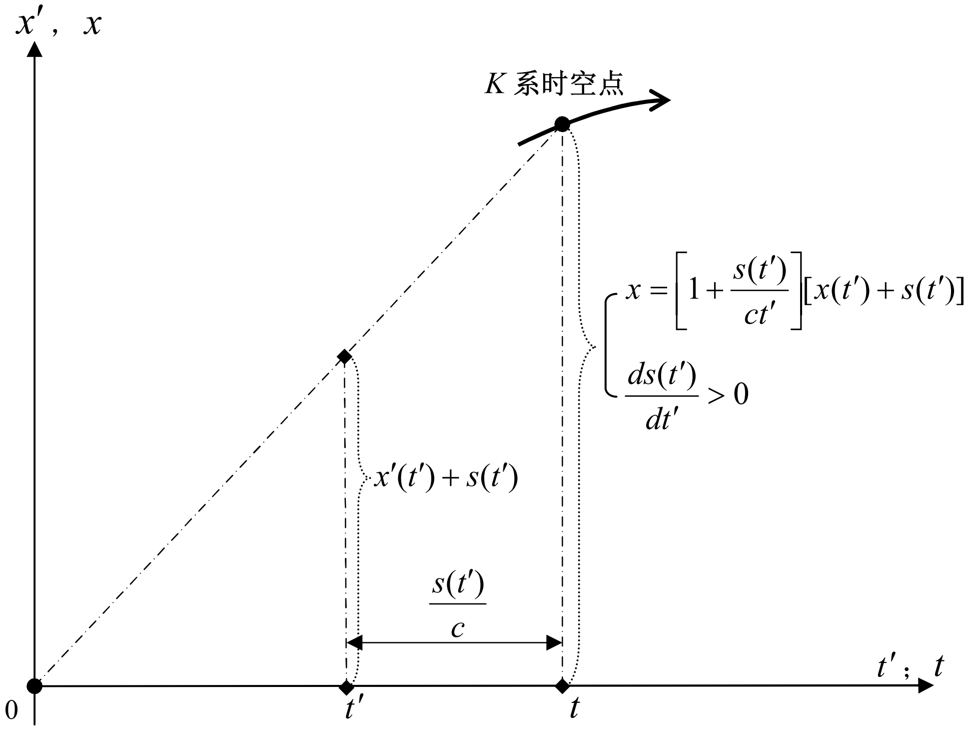


图 4-52 坐标系相离运动下伽利略-周方变换在 x 轴方向的 K 系时空点

坐标系相向运动下**伽利略-周方变换**在 x 轴方向的 K 系时空点示于**图 4-53**。

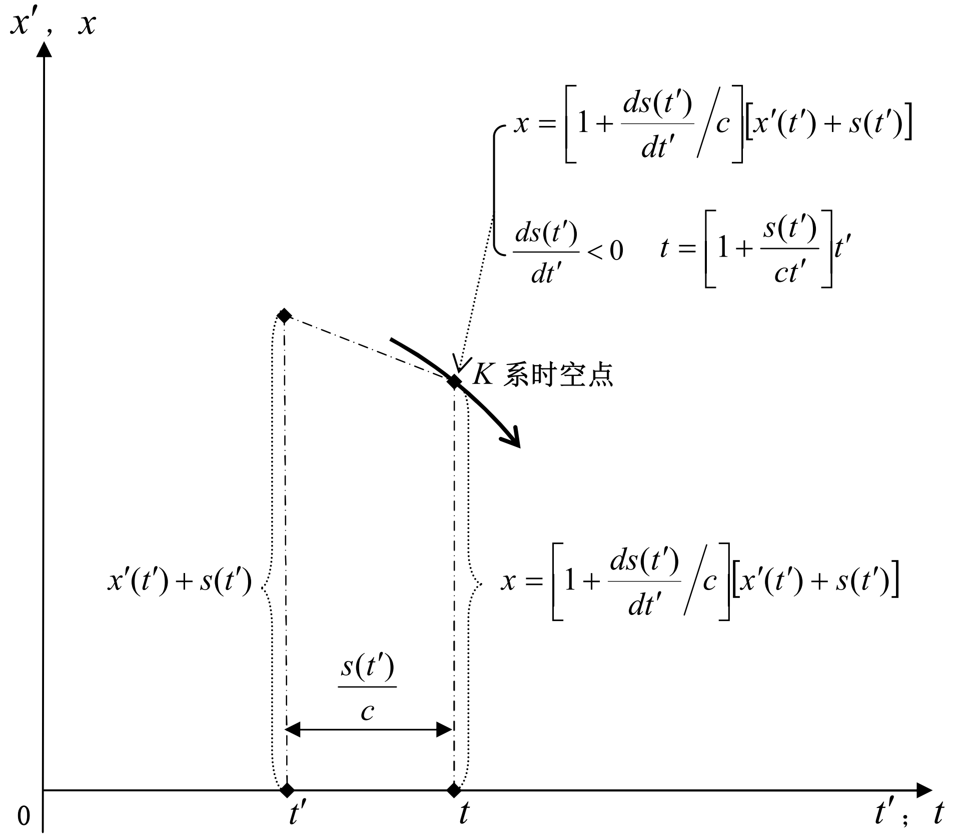


图 4-53 坐标系相向运动下伽利略-周方变换在 x 轴方向的 K 系时空点

伽利略-周方变换与伽利略变换在 x 轴方向的 K 系时空轨迹示于图 4-54。

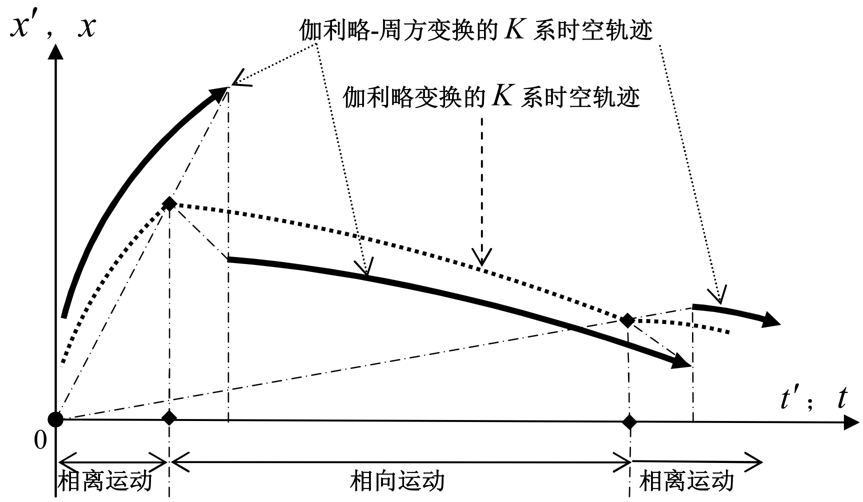
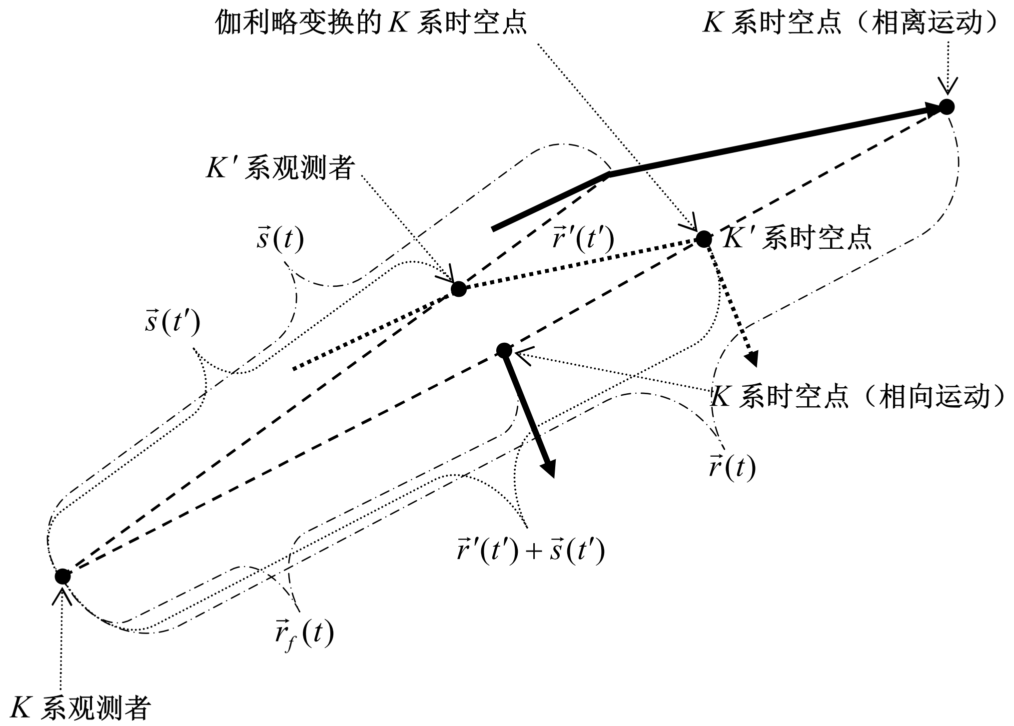


图 4-54 伽利略-周方变换与伽利略变换在 x 轴方向的 K 系时空轨迹

坐标系相对速度方向突变时伽利略-周方变换的 K 系时空点示于图 4-55。



$t=\left(1+\dfrac{|\vec{s}(t')|}{ct'}\right)t'$；$\vec{s}(t')=\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt$；$\vec{s}(t)=\int_0^{t}\vec{u}(t)dt$；

$\vec{r}(t)=\left(1+\dfrac{|\vec{s}(t')|}{ct'}\right)[\vec{r}'(t')+\vec{s}(t')]$ $\vec{r}_f(t)=\left(1-\dfrac{d|\vec{s}(t')|/dt'}{c}\right)[\vec{r}'(t')+\vec{s}(t')]$

图 4-55 坐标系相对速度方向突变时伽利略-周方变换的 K 系时空点

伽利略-周方变换的 K 系时空轨迹示于图 4-56。

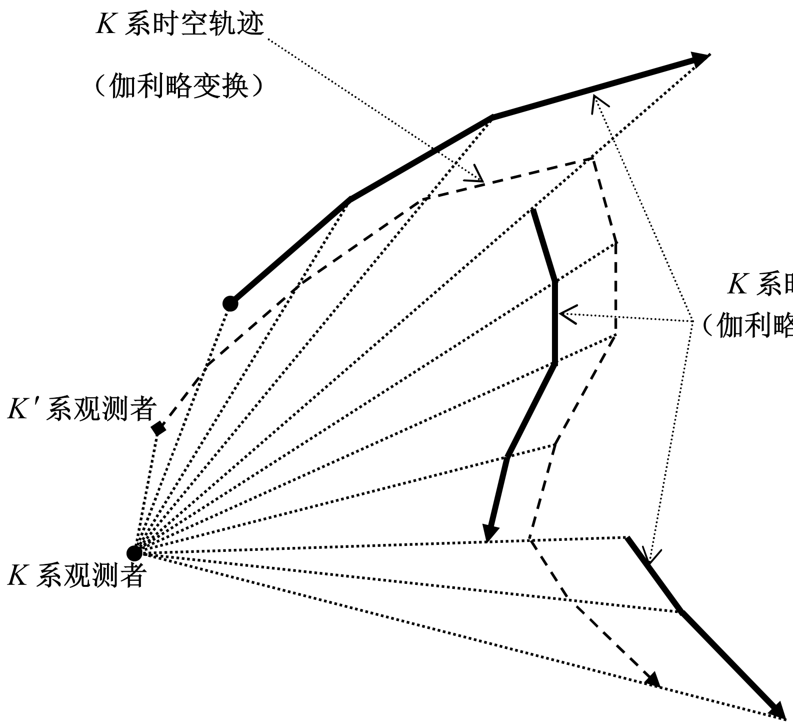


图 4-56 伽利略-周方变换的 K 系时空轨迹

“萤火虫飞行时空轨迹”示于图 4-57。

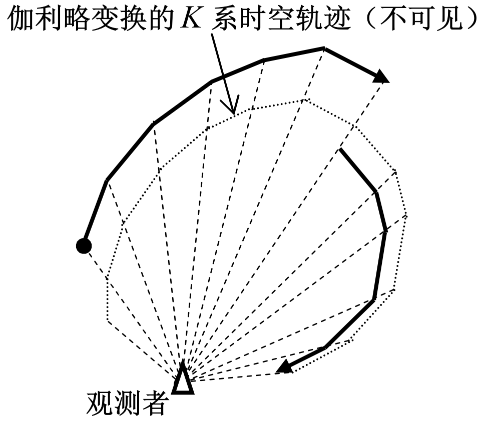


图 4-57 萤火虫飞行时空轨迹

相离运动在时刻 t' 突然转变为相向运动时伽利略-周方变换在 x 轴方向的时空图示于图 4-58。

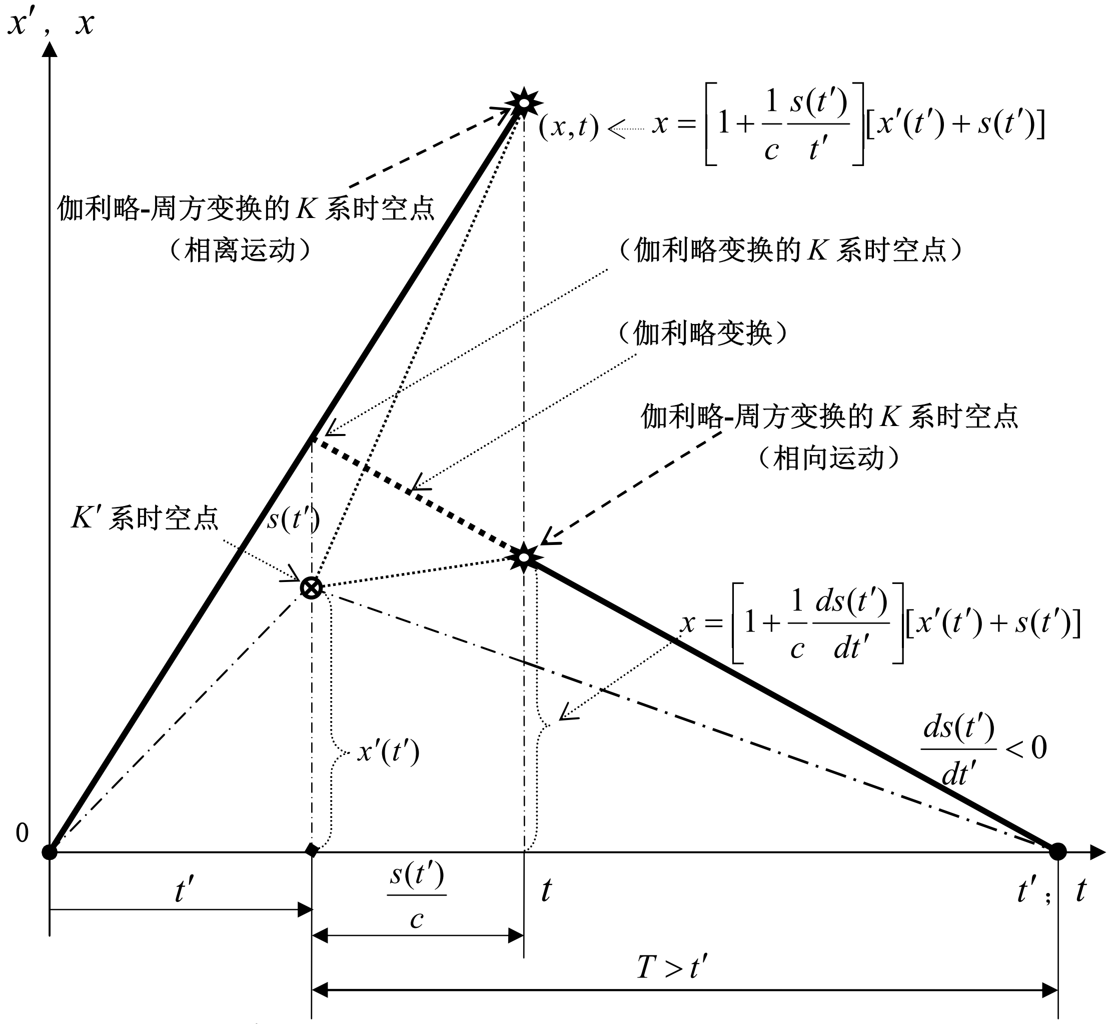


图 4-58 在时刻t'相对速度突然变向时伽利略-周方变换在x轴方向的时空图

设：坐标系相对运动速度为$\vec{u}(t)=\begin{bmatrix}u(t) & 0 & 0\end{bmatrix}^T$，则在时刻$t'$，$K'$系观测者（$K'$系原点）在$K$系$x$轴正方向上离$K$系观测者（$K$系原点）的距离为$s(t')=\int_0^{t'}u(t)dt>0$。

设：被观测运动质点一直停止在K'系原点上，即$x'(t')\equiv 0$。

在此场合下，坐标系相离运动在时刻t'突然变为相向运动时伽利略-周方变换在x轴方向的时空轨迹示于图 4-59。

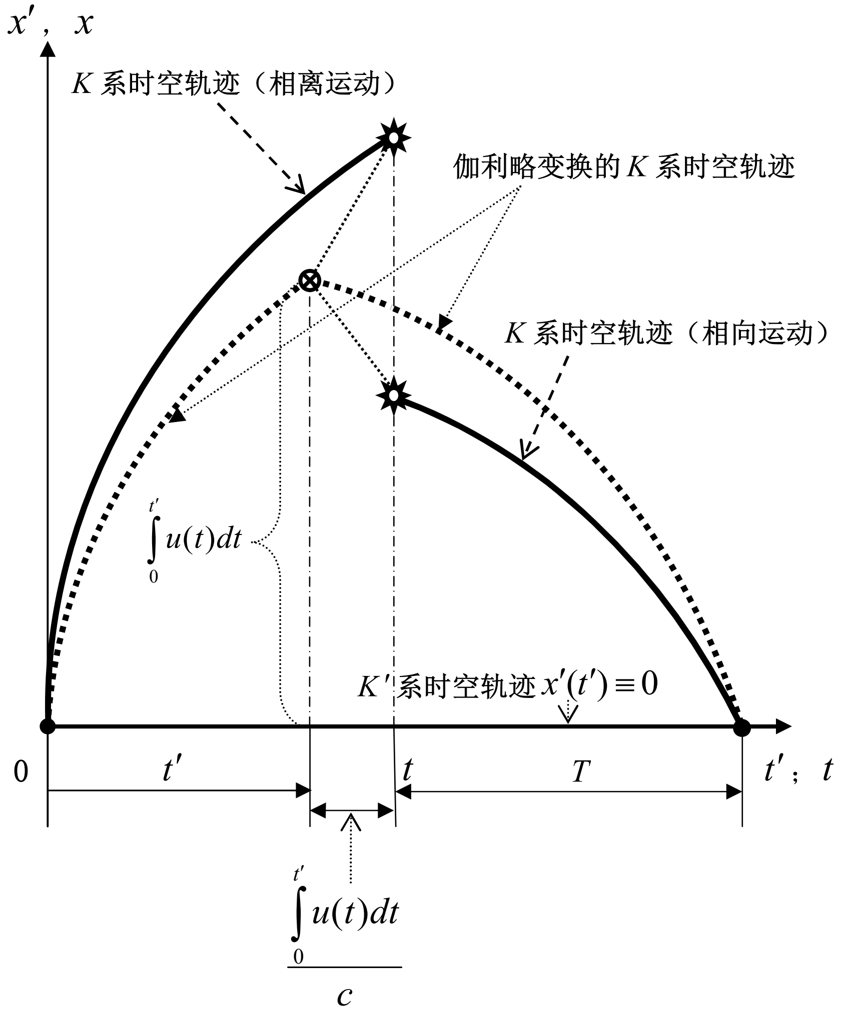


图 4-59 相离运动在时刻 t' 突然变为相向运动时伽利略-周方变换的时空轨迹

若将坐标系相对运动速度设为：

$$\vec{u} = [u \quad 0 \quad 0]^T = const. \text{ 及 } \vec{u}_f = [-u_f \quad 0 \quad 0]^T = const.$$

则图 4-59 就变为图 4-60。

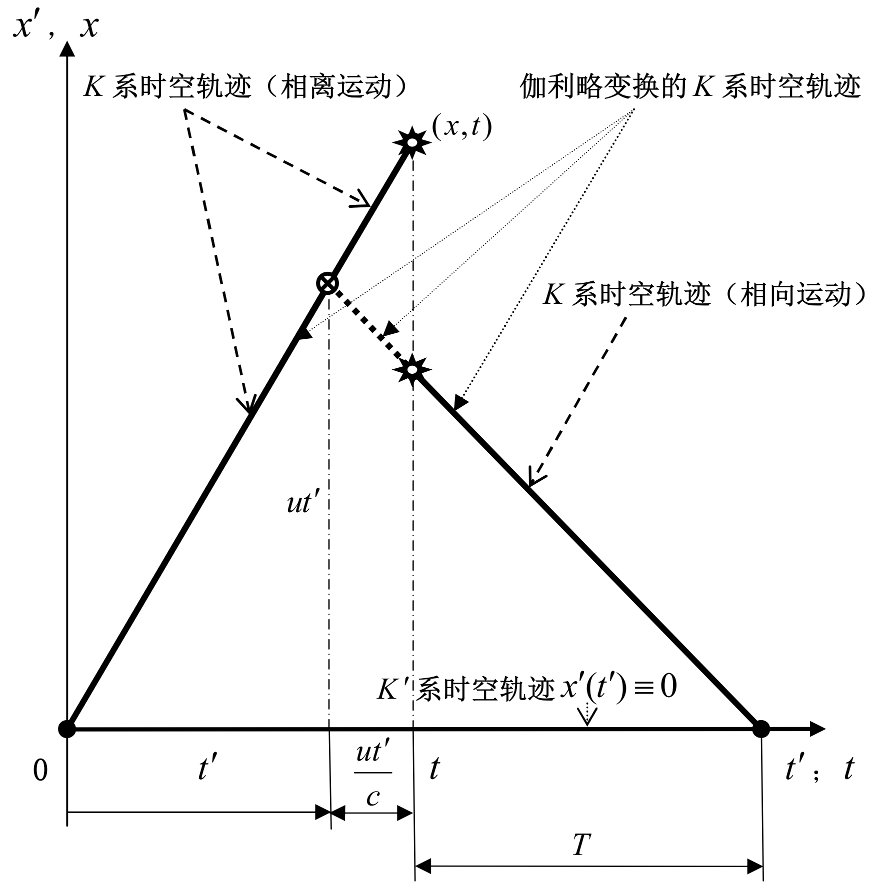


图 4-60 相离运动在时刻t'突然变为相向运动时伽利略-周方变换的时空轨迹

七、伽利略-周方变换与伽利略变换的时空轨迹

在这里，有必要再一次指出，**伽利略变换**只在‘不考虑光波（电磁波）的传播速率’或‘假定光波（电磁波）传播速率为无穷大’的假定条件下才能成立，或者是在‘真空中光速为有限值’但参考系相对速度与光速相比是微不足道的情况下才能近似地成立。因此，在“两观测者作相对运动（$\vec{u}$）且真空中光速为有限值（c）”之真实条件下进行观测时“**伽利略变换的 K 系时空点**”以及“**伽利略变换的 K 系时空轨迹**”实际上都是观测不到的。

在坐标系相对速度为时间函数$\vec{u}(t)=\left[u_x(t),u_y(t),u_z(t)\right]^T$的一般情况下，**伽利略-周方变换**的变换方程组为：

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \left[1 + \dfrac{\left|\int_0^{t'} \vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right]\left[\vec{r}'(t') + \int_0^{t'} \vec{u}(t)dt\right] \\ t = \left[1 + \dfrac{\left|\int_0^{t'} \vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right] t' \end{cases}$$

式中：$\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]^T$，$\vec{r}'(t') = [x'(t'), y'(t'), z'(t')]^T$，

$\vec{u}(t) = [u_x(t), u_y(t), u_z(t)]^T$，$c$ 为真空中光速。

变换方程组展开为：

$$\begin{cases} x(t) = \left\{1 + \dfrac{S(t')}{ct'}\right\}[x'(t') + \int_0^{t'} u_x(t)dt] \\ y(t) = \left\{1 + \dfrac{S(t')}{ct'}\right\}[y'(t') + \int_0^{t'} u_y(t)dt] \\ z(t) = \left\{1 + \dfrac{S(t')}{ct'}\right\}[z'(t') + \int_0^{t'} u_z(t)dt] \\ t = \left\{1 + \dfrac{S(t')}{ct'}\right\} t' \end{cases}$$

式中：$S(t') = \left|\int_0^{t'} \vec{u}(t)dt\right|$，$S(t')$ 为 K' 系观测者在时刻 t' 离 K 系观测者的直线距离；

$\vec{u}(t) = [u_x(t), u_y(t), u_z(t)]^T$；$c$ 为真空中光速。

伽利略-周方变换：

$$\begin{cases} \vec{r}(t)=\left[1+\dfrac{\left|\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right]\left[\vec{r}'(t')+\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right] \\ t=\left[1+\dfrac{\left|\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right]t' \end{cases}$$

的逆变换式为：

$$\begin{cases} \vec{r}'(t')=\left[1+\dfrac{\left|\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right]^{-1}\vec{r}(t)-\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt \\ t'=\left[1+\dfrac{\left|\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right|}{ct'}\right]^{-1}t \end{cases}$$

式中：$\vec{r}(t)=\left[x(t),y(t),z(t)\right]^T$，$\vec{r}'(t')=\left[x'(t'),y'(t'),z'(t')\right]^T$，

$\vec{u}(t)=\left[u_x(t),u_y(t),u_z(t)\right]^T$；$c$ 为真空中光速。

可以将变换方程组表为标准形式：

记：$\dfrac{\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt}{t'}=\overrightarrow{U}(t')$ — 闭区间 $[0,t']$ 上的 Lagrange 平均速度。

于是，有 $\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt=\overrightarrow{U}(t')\bullet t'$，即：$\left|\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right|=\left|\overrightarrow{U}(t')\right|\bullet t'$。

将 $\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt=\overrightarrow{U}(t')\bullet t'$ 及 $\left|\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right|=\left|\overrightarrow{U}(t')\right|\bullet t'$ 代入上面的变换方程组，得变换方程组的标准形式：

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \left[1 + \dfrac{\left|\vec{U}(t')\right|}{c}\right]\left[\vec{r}'(t') + \vec{U}(t') \bullet t'\right] \\ t = \left[1 + \dfrac{\left|\vec{U}(t')\right|}{c}\right] t' \end{cases}$$

及其逆变换式：

$$\begin{cases} \vec{r}'(t') = \left[1 + \dfrac{\left|\vec{U}(t')\right|}{c}\right]^{-1} \vec{r}(t) - \vec{U}(t') \bullet t' \\ t' = \left[1 + \dfrac{\left|\vec{U}(t')\right|}{c}\right]^{-1} t \end{cases}$$

式中：$\vec{r}(t) = \left[x(t), y(t), z(t)\right]^T$，$\vec{r}'(t') = \left[x'(t'), y'(t'), z'(t')\right]^T$，

$\vec{U}(t') = \dfrac{\int_0^{t'} \vec{u}(t)dt}{t'}$，$\vec{u}(t) = \left[u_x(t), u_y(t), u_z(t)\right]^T$；$c$ 为真空中光速。

下面我们讨论**坐标系相对速度为时间函数** $\vec{u}(t) = \left[u(t) \quad 0 \quad 0\right]^T$ 且 $\vec{r} = [x \quad 0 \quad 0]^T$ 及 $\vec{r}' = [x' \quad 0 \quad 0]^T$ **的情况 —‘一维时空’情况**。

在坐标系相离运动下，**‘一维时空’**的**伽利略-周方变换**方程组之标准形式为：

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \left[1 + \dfrac{\left|\vec{U}(t')\right|}{c}\right]\left[\vec{r}'(t') + \vec{U}(t') \bullet t'\right] \\ t = \left[1 + \dfrac{\left|\vec{U}(t')\right|}{c}\right] t' \end{cases}$$

式中：$\vec{r}(t) = \left[x(t), y(t), z(t)\right]^T$，$\vec{r}'(t') = \left[x'(t'), y'(t'), z'(t')\right]^T$，

$\vec{U}(t') = \dfrac{\int_0^{t'} \vec{u}(t)dt}{t'}$，$\vec{u}(t) = \left[u_x(t), u_y(t), u_z(t)\right]^T$；$c$ 为真空中光速。

在方程组中令：

$$\vec{r}(t)=[x(t),0,0]^T，\ \vec{r}'(t')=[x'(t'),0,0]^T，\ \vec{u}(t)=[u(t),0,0]^T$$

则有：

$$\left|\vec{U}(t')\right|=\frac{\left|\int_0^{t'}\vec{u}(t)dt\right|}{t'}=\frac{\int_0^{t'}u(t)dt}{t'}$$

代入方程组标准形式，得**伽利略-周方变换**：

$$\begin{cases} x(t)=\left[1+\dfrac{\int_0^{t'}u(t)dt}{ct'}\right]\left[x'(t')+\int_0^{t'}u(t)dt\right] \\ t=\left[1+\dfrac{\int_0^{t'}u(t)dt}{ct'}\right]t' \end{cases}$$

逆变换式为：

$$\begin{cases} x'(t')=\left[1+\dfrac{\int_0^{t'}u(t)dt}{ct'}\right]^{-1}x(t)-\int_0^{t'}u(t)dt \\ t'=\left[1+\dfrac{\int_0^{t'}u(t)dt}{ct'}\right]^{-1}t \end{cases}$$

式中 $s(t')=\int_0^{t'}u(t)dt$，故坐标系相离运动下‘一维时空’的**伽利略-周方变换**可表为：

$$\begin{cases} x=\left[1+\dfrac{s(t')}{ct'}\right][x'+s(t')] \\ t=\left[1+\dfrac{s(t')}{ct'}\right]t' \end{cases}$$

及其逆变换式：

$$\begin{cases} x' = \left[1 + \dfrac{s(t')}{ct'}\right]^{-1} x - s(t') \\ t' = \left[1 + \dfrac{s(t')}{ct'}\right]^{-1} t \end{cases}$$

式中：$s(t') = \int_0^{t'} u(t)dt$

‘一维时空’情况下**伽利略-周方变换**的观测矢量图示于图 4-61。

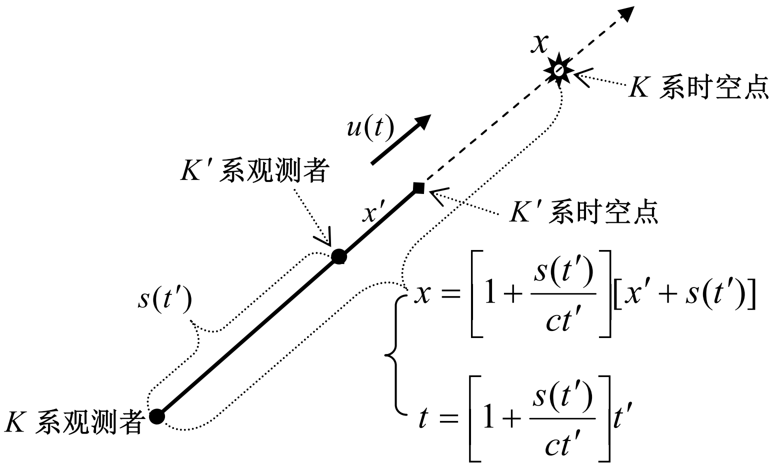


图 4-61 “一维时空”场合下伽利略-周方变换的观测矢量图

我们将整个运动过程划分为许多个**短小的匀速运动时段** $\left[t'_{i-1},\ t'_i\right]$，$i = 1,2,...,n$。取第 i 个匀速运动时段 $\left[t'_{i-1},\ t'_i\right]$，在此匀速运动时段末端时刻 t'_i 处的**伽利略-周方变换**时空图示于图 4-62。

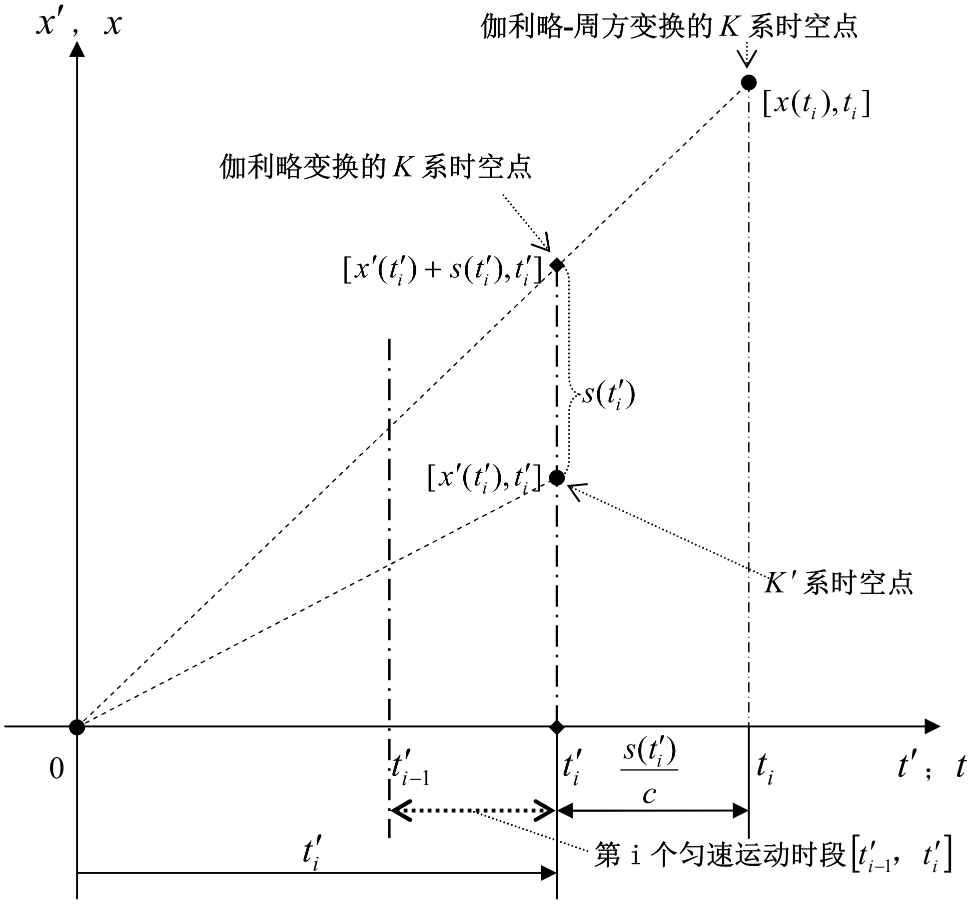


图 4-62 第 i 个匀速运动时段$\left[t_{i-1}',\ t_i'\right]$末端时刻$t_i'$处的伽利略-周方变换时空图

图 4-62 中，K' 系观测者在时刻 t_i' 离 K 系观测者的距离为 $s(t_i')$：$s(t_i')=\int_0^{t_i'}u(t)dt$

（a）在第 i 个匀速运动时段$\left[t_{i-1}',\ t_i'\right]$末端时刻 t_i'，若 K' 系观测者对 K 系观测者作**相离运动**：$\frac{ds(t_i')}{dt_i'}>0$，则第 i 个匀速运动时段$\left[t_{i-1}',\ t_i'\right]$末端时刻 t_i' 上的**伽利略-周方变换**为：

$$\begin{cases} x(t_i)=\left\{1+\dfrac{s(t_i')}{ct_i'}\right\}[x'(t_i')+s(t_i')] \\ t_i=\left\{1+\dfrac{s(t_i')}{ct_i'}\right\}t_i' \end{cases}$$

逆变换式为：

$$
\begin{cases}
x'(t_i') = \left\{1+\dfrac{s(t_i')}{ct_i'}\right\}^{-1} x(t_i) - s(t_i') \\
t_i' = \left\{1+\dfrac{s(t_i')}{ct_i'}\right\}^{-1} t_i
\end{cases}
$$

可以按下面框图之运算程序，解出第 i 个匀速运动时段$[t_{i-1}', \ t_i']$末端时刻t_i'上的**伽利略-周方变换**，示于图 4-63。

在时刻t_i'，K'系观测者对K系观测者作相离运动：$\dfrac{ds(t_i')}{dt_i'} > 0$

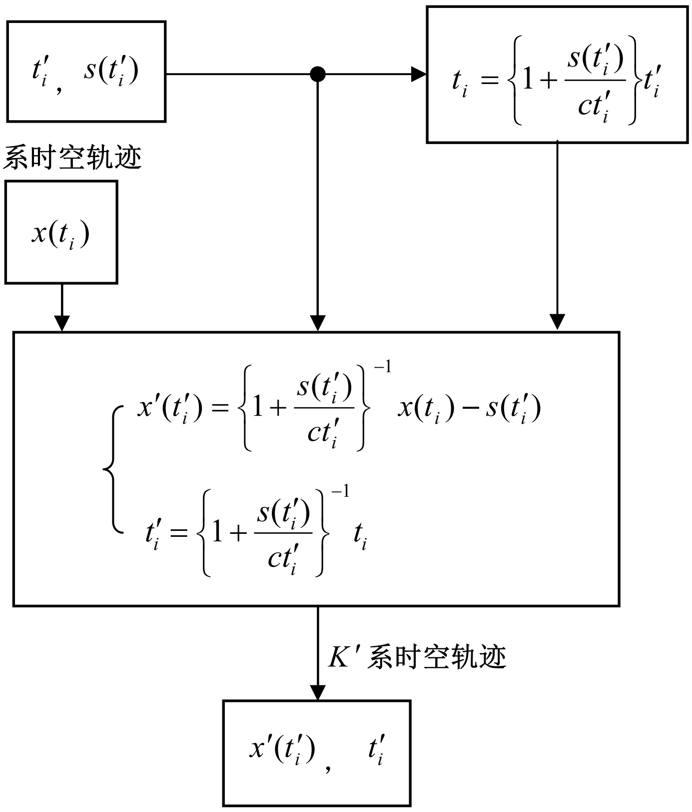


图 4-63 匀速运动时段$[t_{i-1}', \ t_i']$末端时刻t_i'上的伽利略-周方变换

（b）在第 i 个匀速运动时段$[t_{i-1}', \ t_i']$末端时刻t_i'，若K'系观测者对K系观测者作**相向运动**：$\dfrac{ds(t_i')}{dt_i'} \le 0$，则第 i 个匀速运动时段$[t_{i-1}', \ t_i']$末端时刻$t_i'$处的**伽利略-周方变换**为：

$$
\begin{cases}
x(t_i) = \left[1+\dfrac{1}{c}\dfrac{ds(t_i')}{dt_i'}\right][x'(t_i') + s(t_i')], \quad \dfrac{ds(t_i')}{dt_i'} \le 0 \\
t_i = \left[1+\dfrac{s(t_i')}{ct_i'}\right] t_i', \quad s(t_i') > 0
\end{cases}
$$

逆变换式为：

$$
\begin{cases}
x'(t_i') = \left[1 + \dfrac{1}{c}\dfrac{ds(t_i')}{dt_i'}\right]^{-1} x(t_i) - s(t_i') \\
t_i' = \left\{1 + \dfrac{s(t_i')}{ct_i'}\right\}^{-1} t_i
\end{cases}
$$

式中：$s(t_i') = \int_0^{t_i'} u(t)dt$

可以按下面框图之运算程序，解出第 i 个匀速运动时段$[t_{i-1}', \ t_i']$末端时刻t_i'处的周方变换，示于图 4-64。

在时刻t_i'，K'系观测者对K系观测者作相向运动：$\dfrac{ds(t_i')}{dt_i'} \le 0$

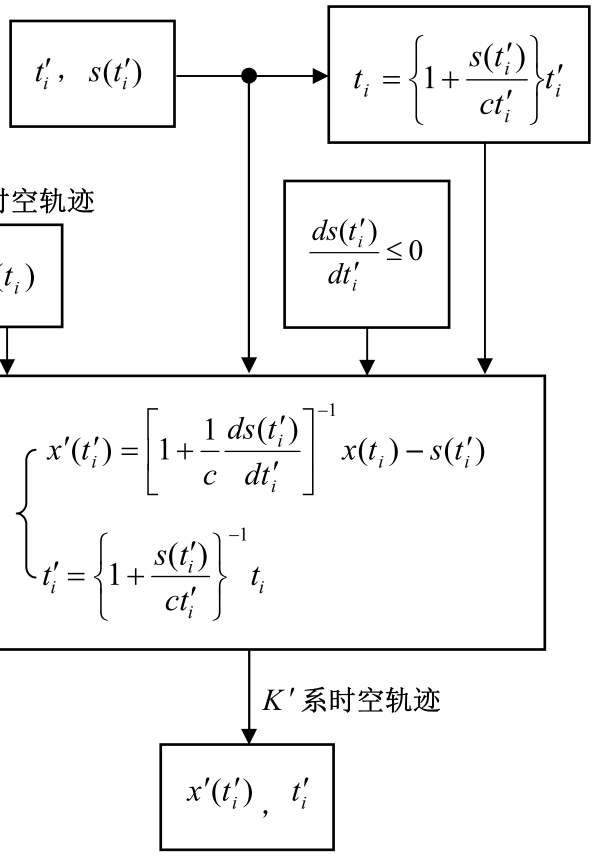


图 4-64 匀速运动时段$[t_{i-1}', \ t_i']$末端时刻t_i'处的伽利略-周方变换

伽利略-周方变换的K系时空轨迹示于图 4-65、图 4-66。

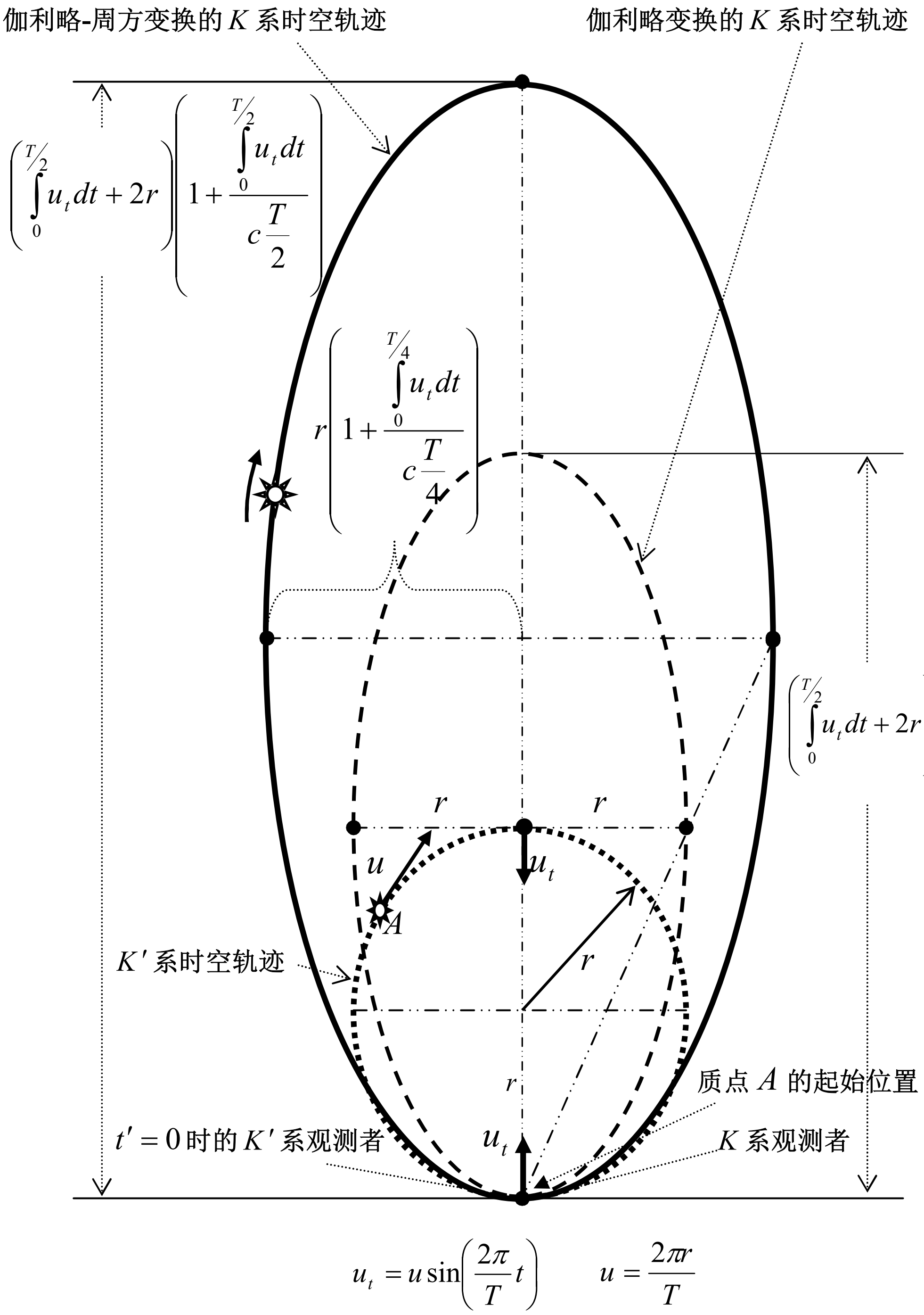


图 4-65 伽利略-周方变换的 K 系时空轨迹

图 4-65 中，质点 A 沿着与 K' 系观测者固联的硬质圆环，以速度 $u=\frac{2\pi r}{T}$ 作等速圆周运动，周期为 T 。K' 系观测者相对于 K 系观测者作直线往返周期运动，周期为 T ，瞬时相对速度为 $u_t = u\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$。

对于图 4-65，伽利略-周方变换为：

$$\begin{cases} x(t) = \left\{1 + \dfrac{s(t')}{ct'}\right\}[x'(t') + s(t')] \\ y(t) = \left\{1 + \dfrac{s(t')}{ct'}\right\}y'(t') \\ z(t) = \left\{1 + \dfrac{s(t')}{ct'}\right\}z'(t') \\ t = \left\{1 + \dfrac{s(t')}{ct'}\right\}t' \end{cases}$$

式中：

$$s(t') = \int_0^{t'} u_t dt = \int_0^{t'} u \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt = -\frac{uT}{2\pi}\left(\cos\frac{2\pi t'}{T} - 1\right)$$

$$x'(t') = -r\cos\frac{2\pi}{T}t' \qquad y'(t') = -r\sin\frac{2\pi}{T}t' \qquad z'(t') \equiv 0$$

于是，得伽利略-周方变换：

$$\begin{cases} x(t) = \left[1 + \dfrac{\int_0^{t'} u \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt}{ct'}\right] \times \left[-r\cos\dfrac{2\pi}{T}t' + \int_0^{t'} u\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)dt\right] \\ y(t) = \left[1 + \dfrac{\int_0^{t'} u \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt}{ct'}\right] \times \left(-r\sin\dfrac{2\pi}{T}t'\right) \\ z(t) \equiv 0 \\ t = \left[1 + \dfrac{\int_0^{t'} u \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt}{ct'}\right]t' \end{cases}$$

逆变换方程组为：

$$
\begin{cases}
x'(t') = \left[1 + \dfrac{\int_0^{t'} u \sin\left(\dfrac{2\pi}{T} t\right) dt}{ct'}\right]^{-1} \times \left[-r\cos\dfrac{2\pi}{T} t - \int_0^{t} u \sin\left(\dfrac{2\pi}{T} t\right) dt\right] \\
y'(t') = \left[1 + \dfrac{\int_0^{t'} u \sin\left(\dfrac{2\pi}{T} t\right) dt}{ct'}\right]^{-1} \times \left(-r\sin\dfrac{2\pi}{T} t\right) \\
z'(t') \equiv 0 \\
t = \left[1 + \dfrac{\int_0^{t'} u \sin\left(\dfrac{2\pi}{T} t\right) dt}{ct'}\right] t'
\end{cases}
$$

即:

$$
\begin{cases}
x'(t') = \left[1 - \dfrac{1}{ct'} \dfrac{uT}{2\pi}\left(\cos\dfrac{2\pi t'}{T} - 1\right)\right]^{-1} \times \left[-r\cos\dfrac{2\pi t}{T} + \dfrac{uT}{2\pi}\left(\cos\dfrac{2\pi t}{T} - 1\right)\right] \\
y'(t') = \left[1 - \dfrac{1}{ct'} \dfrac{uT}{2\pi}\left(\cos\dfrac{2\pi t'}{T} - 1\right)\right]^{-1} \times \left(-r\sin\dfrac{2\pi t}{T}\right) \\
z'(t') \equiv 0 \\
t = \left[1 - \dfrac{1}{ct'} \dfrac{uT}{2\pi}\left(\cos\dfrac{2\pi t'}{T} - 1\right)\right] t'
\end{cases}
$$

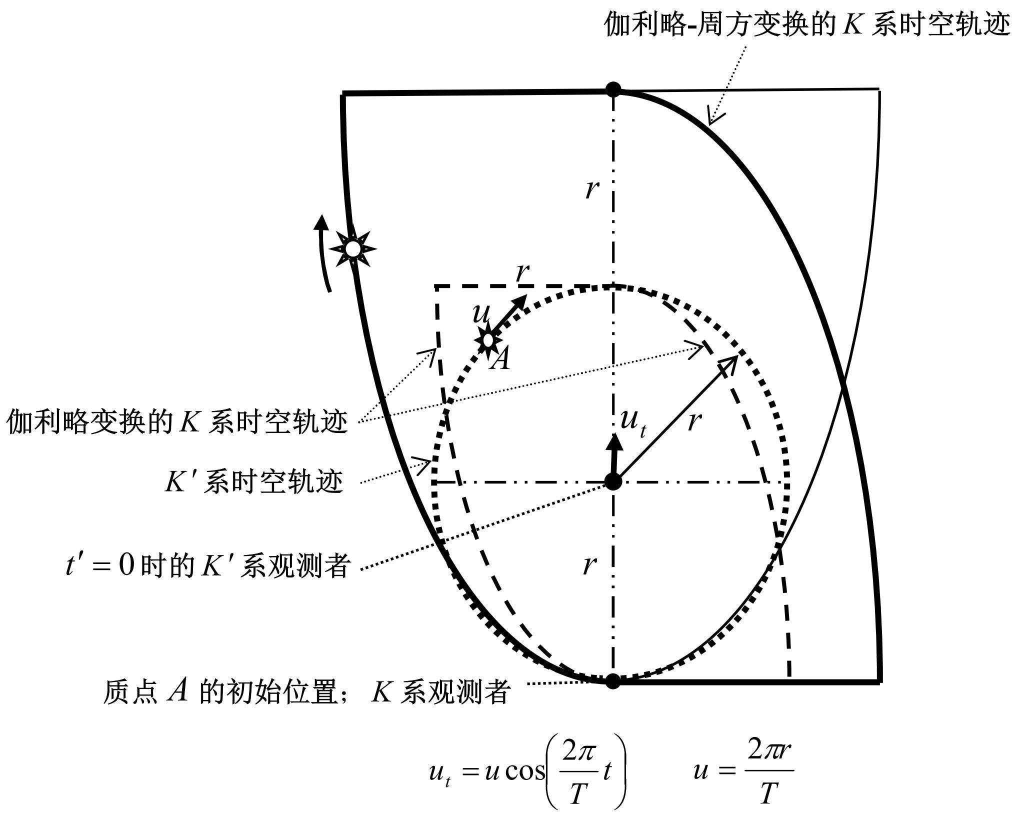


图 4-66 伽利略-周方变换的 K 系时空轨迹

图 4-66 中，质点 A 在 K' 系观测者为中心的圆环上作等速圆周运动，周期为 T，速度为 $u=\dfrac{2\pi r}{T}$。K' 系观测者相对于 K 系观测者作直线往返周期运动，周期为 T，瞬时相对速度为 $u_t = u\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$。

对于图 4-66，伽利略-周方变换为：

$$
\begin{cases}
x(t) = \left\{1+\dfrac{s(t')}{ct'}\right\}[x'(t')+s(t')] \\[2ex]
y(t) = \left\{1+\dfrac{s(t')}{ct'}\right\}y'(t') \\[2ex]
z(t) = \left\{1+\dfrac{s(t')}{ct'}\right\}z'(t') \\[2ex]
t = \left\{1+\dfrac{s(t')}{ct'}\right\}t'
\end{cases}
$$

式中：

$$s(t')=r+\int_0^{t'}u_t dt=r+\int_0^{t'}u\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt=r+\frac{uT}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{T}t'$$

$$x'(t')=-r\cos\frac{2\pi}{T}t' \qquad y'(t')=-r\sin\frac{2\pi}{T}t' \qquad z'(t')\equiv 0$$

于是，得伽利略-周方变换：

$$\begin{cases} x(t)=\left[1+\dfrac{r+\int_0^{t'}u\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt}{ct'}\right]\times\left\{-r\cos\dfrac{2\pi}{T}t'+\left[r+\int_0^{t'}u\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)dt\right]\right\} \\ y(t)=\left[1+\dfrac{r+\int_0^{t'}u\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt}{ct'}\right]\times\left(-r\sin\dfrac{2\pi}{T}t'\right) \\ z(t)\equiv 0 \\ t=\left[1+\dfrac{r+\int_0^{t'}u\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt}{ct'}\right]t' \end{cases}$$

逆变换方程组为：

$$
\begin{cases}
x'(t')=\left[1+\dfrac{r+\int_0^{t'}u\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)dt}{ct'}\right]^{-1}\times\left\{-r\cos\dfrac{2\pi}{T}t-\left[r+\int_0^{t}u\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)dt\right]\right\} \\
y'(t')=\left[1+\dfrac{r+\int_0^{t'}u\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)dt}{ct'}\right]^{-1}\times\left(-r\sin\dfrac{2\pi}{T}t\right) \\
z'(t')\equiv 0 \\
t=\left[1+\dfrac{r+\int_0^{t'}u\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)dt}{ct'}\right]t'
\end{cases}
$$

即：

$$
\begin{cases}
x'(t')=\left(1+\dfrac{r+\dfrac{uT}{2\pi}\sin\dfrac{2\pi t'}{T}}{ct'}\right)^{-1}\times\left[-r\cos\dfrac{2\pi t}{T}-\left(r+\dfrac{uT}{2\pi}\sin\dfrac{2\pi t}{T}\right)\right] \\
y'(t')=\left(1+\dfrac{r+\dfrac{uT}{2\pi}\sin\dfrac{2\pi t'}{T}}{ct'}\right)^{-1}\times\left(-r\sin\dfrac{2\pi t}{T}\right) \\
z'(t')\equiv 0 \\
t=\left(1+\dfrac{r+\dfrac{uT}{2\pi}\sin\dfrac{2\pi t'}{T}}{ct'}\right)t'
\end{cases}
$$

对 K **系观测者**作相对运动的摄像装置（K' **系观测者**）在时刻 t' 所摄得之时空轨迹（我们称之为**“真实时空轨迹”**）与 K **系观测者**在时刻 $\dfrac{t'}{k}$ 接收到的从摄像装置传来的时空轨迹（我们称之为 **“现显时空轨迹”**）之比较示于图 4-67、图 4-68。

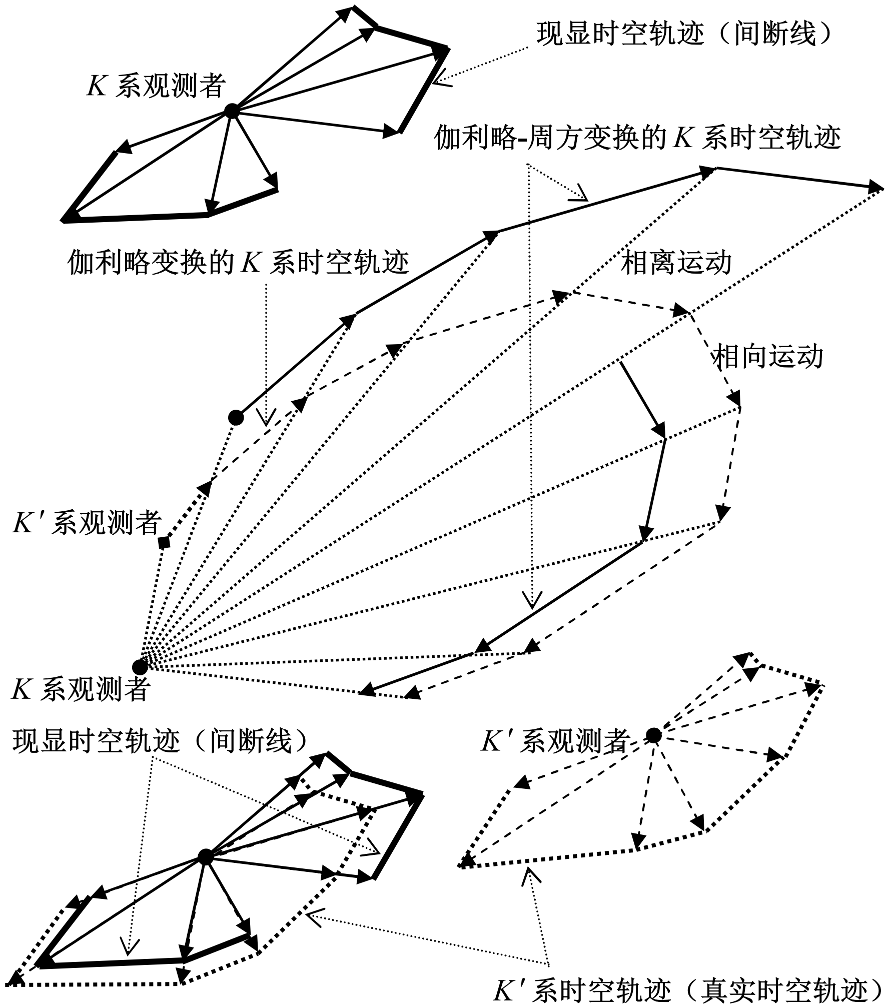


图 4-67 “现显时空轨迹”与“真实时空轨迹”之比较

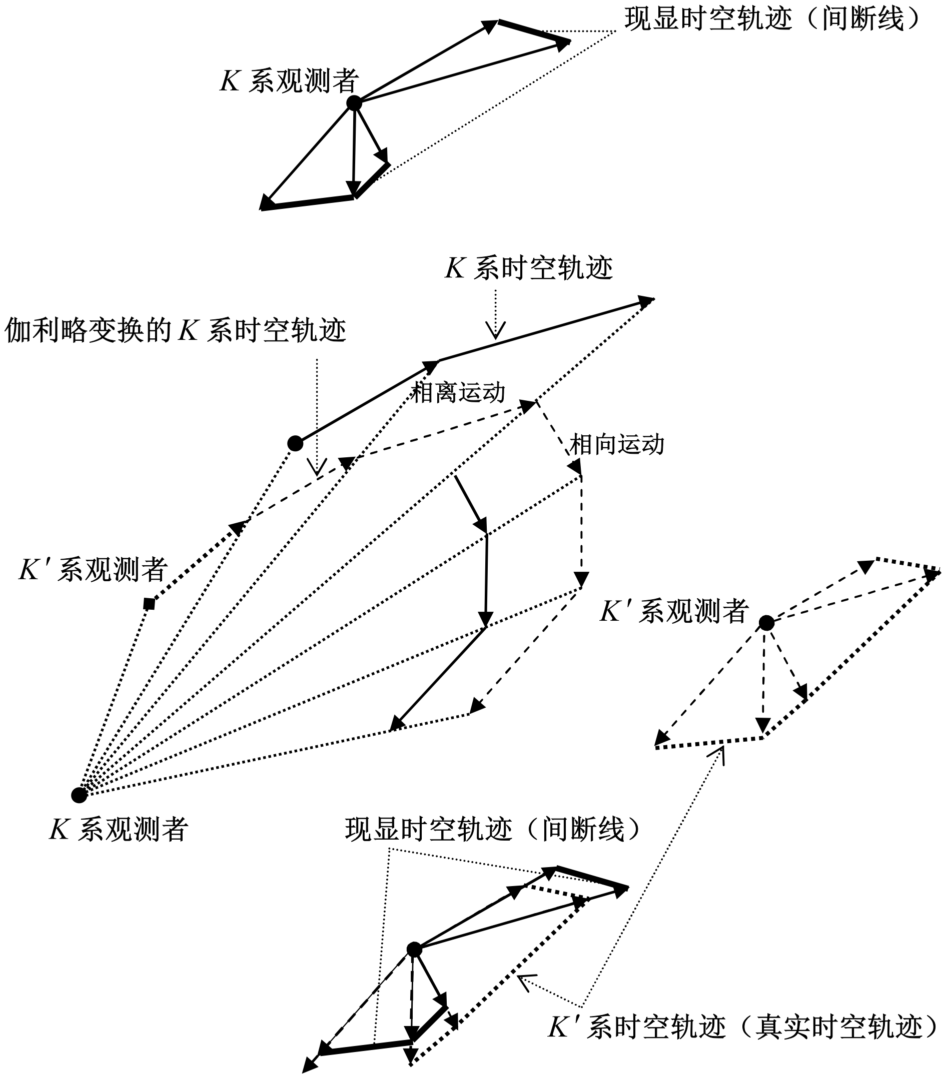


图 4-68 “现显时空轨迹”与“真实时空轨迹”之比较

从图 4-67、图 4-68 可以绘出从“现显时空轨迹”至“真实时空轨迹”之路径：

“现显时空轨迹”

（K 系观测者‘在时刻$\dfrac{t'}{k}$’接收到从摄像装置传来的时空轨迹 ）

↓ （在时刻$\dfrac{t'}{k}$的）“伽利略变换”

K 系观测者‘在时刻$t\left(=\dfrac{t'}{k}\right)$’的 K 系时空轨迹（$k>0$，$k\neq 1$）

↓ （在时刻t'的）“伽利略-周方变换”

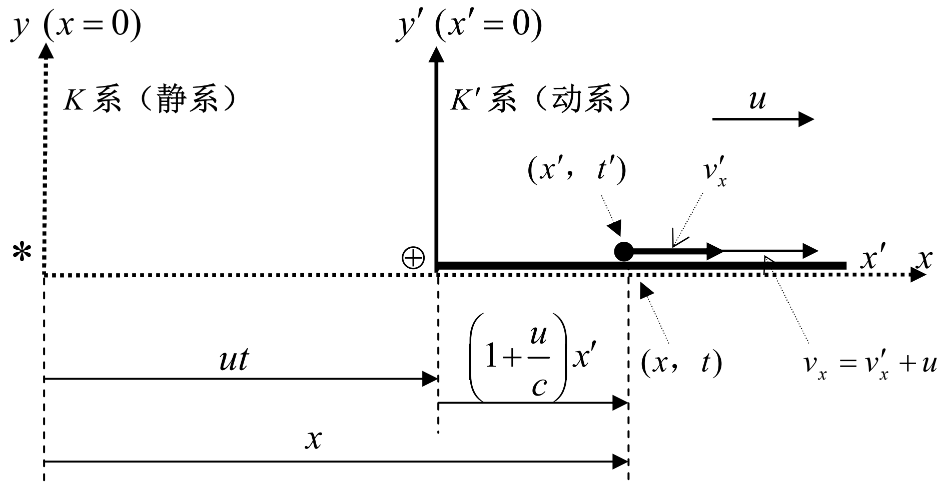
“真实时空轨迹”

（K'系观测者‘在时刻t'’的 K'系时空轨迹 ）

由此可知，K 系观测者从对他作相对运动的摄像装置（K' 系观测者）接收到的图像乃是“现显时空轨迹”，而并非“真实时空轨迹”。

计算示例（一维空间）

（以 K 系作为静系）的相对运动物理模型示于图 4-69。



* —K 系观测者，⊕—K' 系观测者；u —K' 系对 K 系的相对速度

图 4-69 相对运动的物理模型（以 K 系作为静系）

图 4-69 中：

a. $\frac{dx'}{dt'}=v'_x$ 为运动质点的 K' 系速度；$\frac{dx}{dt}=v_x=v'_x+u$ 为运动质点的 K 系速度；

b. $\left(1+\frac{u}{c}\right)x'$ 为 K 系观测者所推测的运动质点在时刻 t 的 K' 系坐标，而“ x' ”则是 K' 系观测者在时刻 t' 所测得运动质点的 K' 系坐标。

c. K 系观测者与 K' 系观测者持有相同的时钟及量尺。在 K' 系观测者掠过 K 系观测者的时刻，两者的时钟对准零点（$t'=t=0$）。

设：运动质点的 K' 系时空轨迹为 $x'=at'^2$（抛物线），将 $x'=at'^2$ 代入伽利略-周方变换：

$$\begin{cases} x=\left(1+\frac{u}{c}\right)(x'+ut') \\ t=\left(1+\frac{u}{c}\right)t' \end{cases}$$

得：

$$x=\left(1+\frac{u}{c}\right)(x'+ut')=\left(1+\frac{u}{c}\right)(at'^2+ut')=\frac{1}{1+\frac{u}{c}}at^2+ut=\frac{c}{c+u}at^2+ut$$

即：$$x=\frac{c}{c+u}at^2+ut$$

这就是K系观测者关于K'系时空轨迹$x'=at'^2$所观测到的K系时空轨迹。

可以看出，K'系时空轨迹$x'=at'^2$是抛物线，K系观测者观测到的K系时空轨迹$x=\frac{c}{c+u}at^2+ut$也是抛物线，这说明**伽利略-周方变换**满足“**相对性原理**”。

可以将K系时空轨迹$x=\frac{c}{c+u}at^2+ut$写成抛物线的标准形式：

$$x=\frac{c}{c+u}at^2+ut=\frac{ac}{c+u}t^2+ut=\frac{ac}{c+u}\left[t^2+\frac{(c+u)u}{ac}t\right]$$

$$=\frac{ac}{c+u}\left[t^2+\frac{(c+u)u}{ac}t+\left[\frac{(c+u)u}{2ac}\right]^2-\left[\frac{(c+u)u}{2ac}\right]^2\right]$$

$$=\frac{ac}{c+u}\left[t^2+\frac{(c+u)u}{ac}t+\left[\frac{(c+u)u}{2ac}\right]^2\right]-\frac{ac}{c+u}\left[\frac{(c+u)u}{2ac}\right]^2$$

$$=\frac{ac}{c+u}\left[t^2+\frac{(c+u)u}{ac}t+\left[\frac{(c+u)u}{2ac}\right]^2\right]-\frac{(c+u)u^2}{4ac}$$

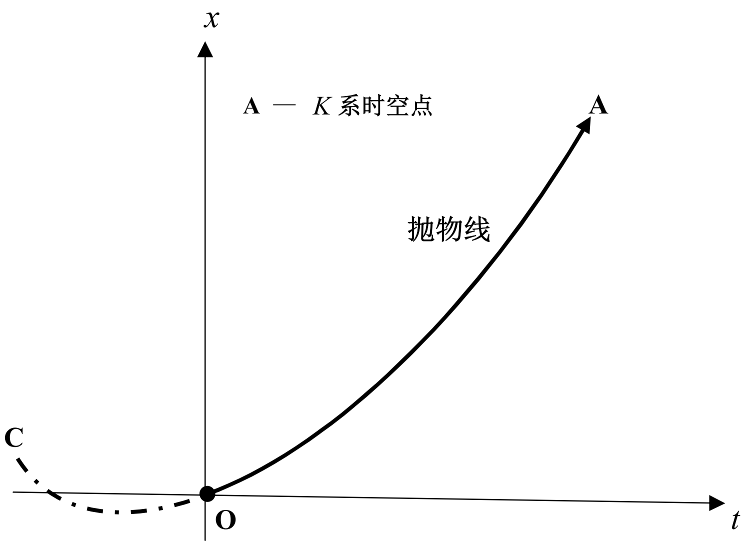
$$=\frac{ac}{c+u}\left[t+\frac{(c+u)u}{2ac}\right]^2-\frac{(c+u)u^2}{4ac}$$

由此得K系时空轨迹$x=\frac{c}{c+u}at^2+ut$的抛物线标准形式：

$$\left[x+\frac{(c+u)u^2}{4ac}\right]=\frac{c}{c+u}a\left[t+\frac{(c+u)u}{2ac}\right]^2$$

下面，我们绘出K系观测者所观测到的K系时空轨迹$x=\frac{c}{c+u}at^2+ut$。

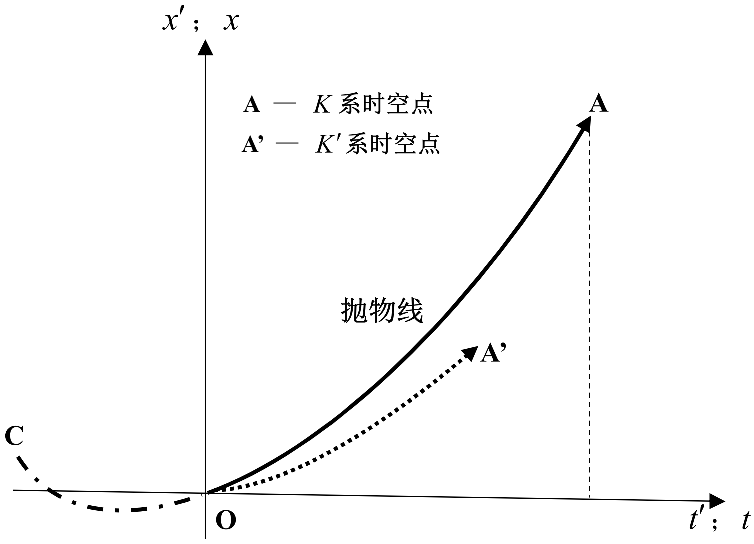
令$x=\frac{c}{c+u}at^2+ut=0$，即可得到此方程的两个根：$t=0$及$t=-\frac{(c+u)u}{ac}$，此即K系时空轨迹$x=\frac{c}{c+u}at^2+ut$与x轴的两个交点。K系时空轨迹$x=\frac{c}{c+u}at^2+ut$示于图4-70。



曲线 COA 为 K 系时空轨迹 $x=\dfrac{c}{c+u}at^2+ut$

图 4-70 K 系时空轨迹

伽利略-周方变换下的时空图示于图 4-71。



曲线 COA 为 K 系时空轨迹 $x=\dfrac{c}{c+u}at^2+ut$

曲线 OA’为 K' 系时空轨迹 $x'=at'^2$

图 4-71 伽利略-周方变换的时空图

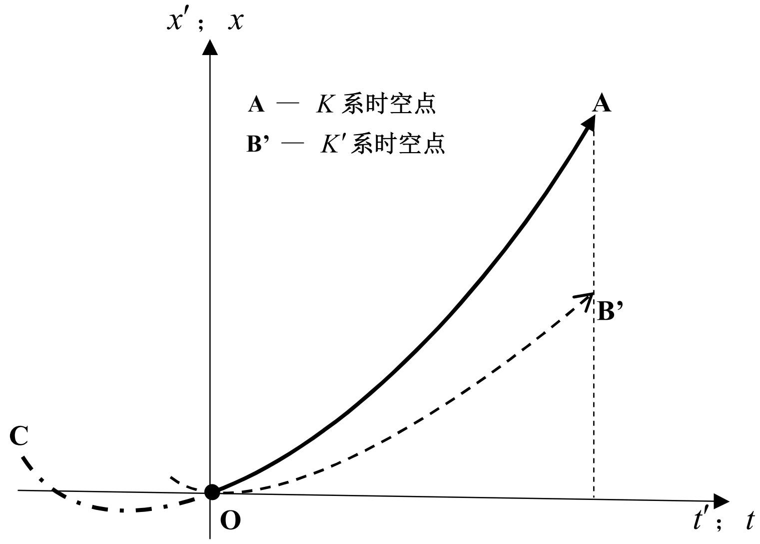
如果我们将 K 系观测者所观测到的 K 系时空轨迹 $x=\dfrac{c}{c+u}at^2+ut$ 代入伽利略变换：

$x'=x-ut$， $t'=t$，则推断出的 K' 系时空轨迹将是：

$$x'=x-ut=\left(\frac{c}{c+u}at^2+ut\right)-ut=\frac{c}{c+u}at^2=\frac{c}{c+u}at'^2$$

而不是 $x'=at'^2$。

按伽利略变换推测出的时空图示于图 4-72。

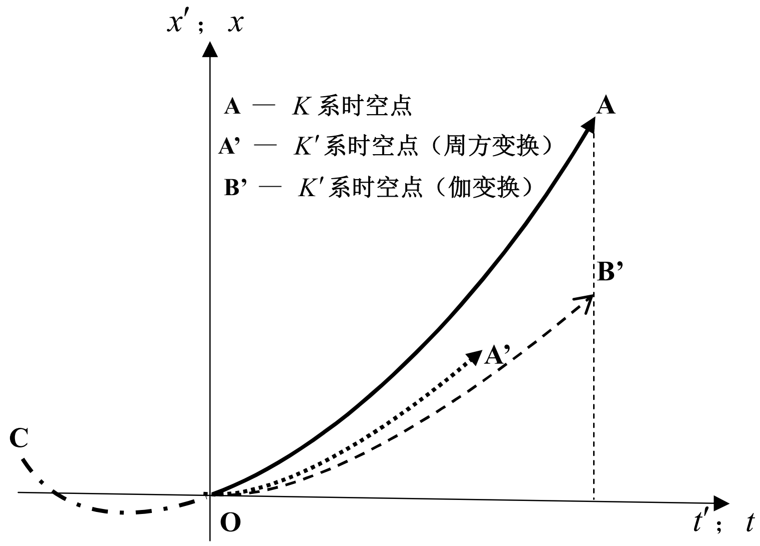


曲线 **COA** 为 K 系时空轨迹 $x=\dfrac{c}{c+u}at^2+ut$

曲线 **OB'** 为按伽利略变换推测出的 K' 系时空轨迹 $x'=\dfrac{c}{c+u}at'^2$

图 4-72 按伽利略变换的时空图

将图 4-71 与图 4-72 合并，示于图 4-73。



曲线 **COA** 为 K 系时空轨迹 $x=\dfrac{c}{c+u}at^2+ut$

曲线 **OA'** 为按伽利略-周方变换推测出的 K' 系时空轨迹 $x'=at'^2$

曲线 **OB'** 为按伽利略变换推测出的 K' 系时空轨迹 $x'=\dfrac{c}{c+u}at'^2$

图 4-73 伽利略-周方变换及伽利略变换的时空图

从图 4-73 可以看到，K 系观测者依据他所测得的 K 系时空点 **A**，按伽利略-周方变换推断出的 K' 系时空点为点 **A'**，而错误地按伽利略变换推断出的 K' 系时空点为点 **B'**。我们

还可以清楚地看到，K' 系时空点 **A'**与 K' 系时空点 **B'** 之间以及**伽利略-周方变换**下的 K' 系时空轨迹（图中曲线 **OA'**）与**伽利略变换**下的 K' 系时空轨迹（图中曲线 **OB'**）之间均存在着相当大的差异。

下面我们再看另一个例子。

假设运动质点的 K' 系时空轨迹为 $x' = 1 + \sin t'$，将 $x' = 1 + \sin t'$ 代入**伽利略-周方变换**：

$$\begin{cases} x = \left(1 + \dfrac{u}{c}\right)(x' + ut') \\ t = \left(1 + \dfrac{u}{c}\right)t' \end{cases}$$

得到相应的 K 系时空轨迹：

$$x = \left(1 + \frac{u}{c}\right)(x' + ut') = \left(1 + \frac{u}{c}\right)(1 + \sin t' + ut')$$

$$= \left(1 + \frac{u}{c}\right)\left(1 + \frac{ut}{1 + \frac{u}{c}} + \sin \frac{t}{1 + \frac{u}{c}}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{u}{c}\right) + ut + \left(1 + \frac{u}{c}\right)\sin \frac{t}{1 + \frac{u}{c}}$$

即：
$$x = \left(1 + \frac{u}{c}\right)\left(1 + \sin \frac{t}{1 + \frac{u}{c}}\right) + ut$$

这就是 K 系观测者关于 K' 系时空轨迹 $x' = 1 + \sin t'$ 所观测到的 K 系时空轨迹。可以看出，K 系时空轨迹 $x = \left(1 + \frac{u}{c}\right)\left(1 + \sin \frac{t}{1 + \frac{u}{c}}\right) + ut$ 与 K' 系时空轨迹 $x' = 1 + \sin t'$ 互有相似的形状，这证明**伽利略-周方变换**满足**“相对性原理”**。

下面是 K 系观测者根据所测得的 K 系时空轨迹 $x = \left(1 + \frac{u}{c}\right)\left(1 + \sin \frac{t}{1 + \frac{u}{c}}\right) + ut$ 通过

伽利略-周方变换推断出 K' **系时空轨迹** $x'=1+\sin t'$ 的过程。

第一步：对**伽利略-周方变换** $x'=\frac{1}{1+\frac{u}{c}}(x-ut)$，$t'=\frac{t}{1+\frac{u}{c}}$ 进行"变量替换"：即在式中令 $\frac{t}{1+\frac{u}{c}}=t_j$ [在物理上，就是在观测中将静系时钟的走时节率**下调**至 $\frac{1}{1+\frac{u}{c}}$ 倍，使得静系时钟所示时刻恰好与动系时钟所示时刻同步。这就是所谓**"对钟"**]，同时令 $\frac{x}{1+\frac{u}{c}}=x_j$ [在物理上，就是在观测中将静系量尺的单位长度**上调**至 $\left(1+\frac{u}{c}\right)$ 倍，使得静系量尺的单位长度恰好与动系量尺的单位长度相同。这就是所谓**"对尺"**]。所谓**"对钟、对尺"**，其实就是静系观测者调整两参考系之间的**"时空度规比"**，使原先的 $\frac{1}{1+\frac{u}{c}}$ 调整至**'1'**，从而使**伽利略-周方变换** $x'=\frac{1}{1+\frac{u}{c}}(x-ut)$，$t'=\frac{t}{1+\frac{u}{c}}$ 变为参考系(x'、t')与参考系(x_j、t_j)之间的**伽利略变换**：

$$\begin{cases} x'=x_j-ut_j \\ t'=t_j \\ x_j=\dfrac{x}{1+\frac{u}{c}} \\ t_j=\dfrac{t}{1+\frac{u}{c}} \end{cases}$$

于是，我们在 K **系时空轨迹** $x=\left(1+\frac{u}{c}\right)\left(1+\sin\frac{t}{1+\frac{u}{c}}\right)+ut$ 中代入 $\frac{t}{1+\frac{u}{c}}=t_j$，得：

$$x=\left(1+\frac{u}{c}\right)\left(1+\sin t_j\right)+ut_j\left(1+\frac{u}{c}\right)=\left(1+\frac{u}{c}\right)(1+\sin t_j+ut_j)$$

再将 $\frac{x}{1+\frac{u}{c}}=x_j$ 代入此式，我们就得到用变量 x_j 及 t_j 表示的 K **系时空轨迹**：

$$x_j = 1 + \sin t_j + ut_j$$

这样，在 K 系观测者 “对钟、对尺”之后，K 系时空轨迹为 $x_j = 1 + \sin t_j + ut_j$，示于图 4-74。

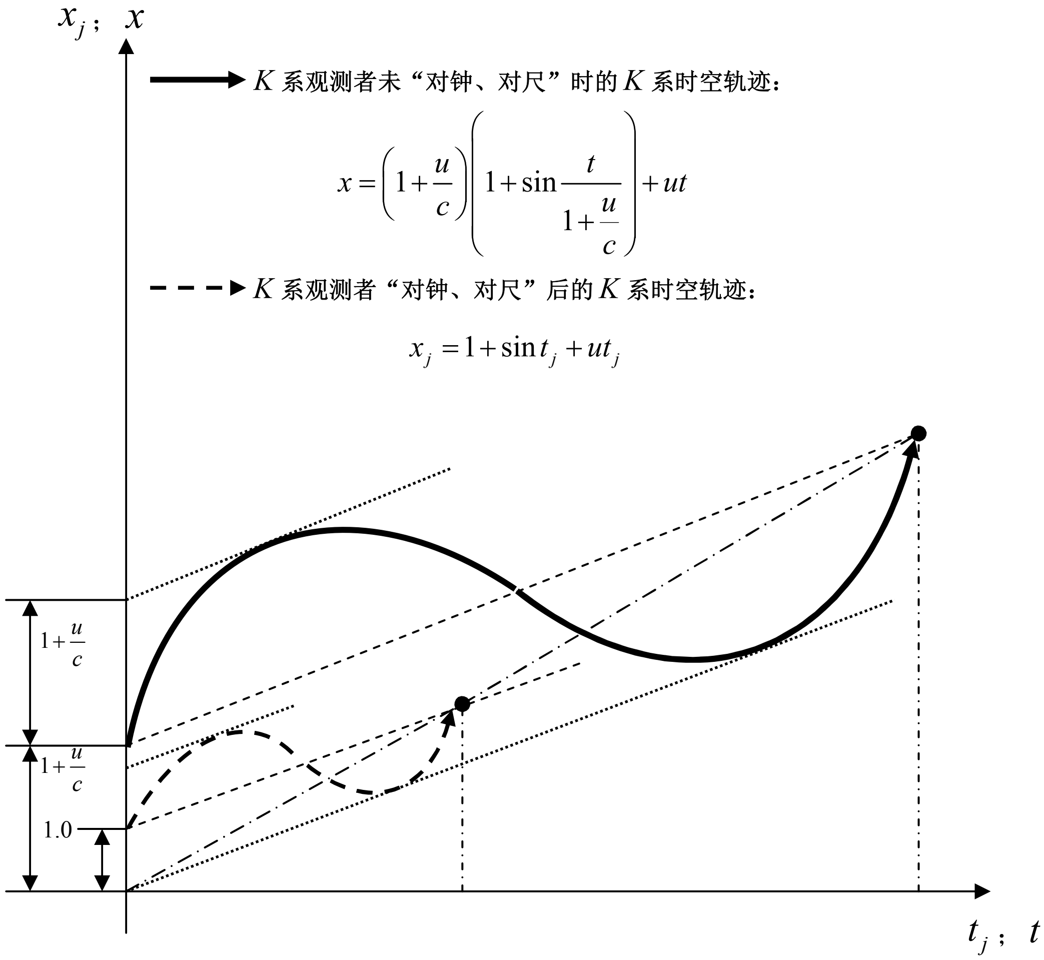


图 4-74 K 系观测者“对钟、对尺”前后的 K 系时空轨迹

第二步：将以变量 x_j 及 t_j 表示的 K 系时空轨迹 $x_j = 1 + \sin t_j + ut_j$ 代入伽利略变换：

$$\begin{cases} x' = x_j - ut_j \\ t' = t_j \end{cases}$$

最终得到 K' 系时空轨迹 $x' = 1 + \sin t'$，示于图 4-75。

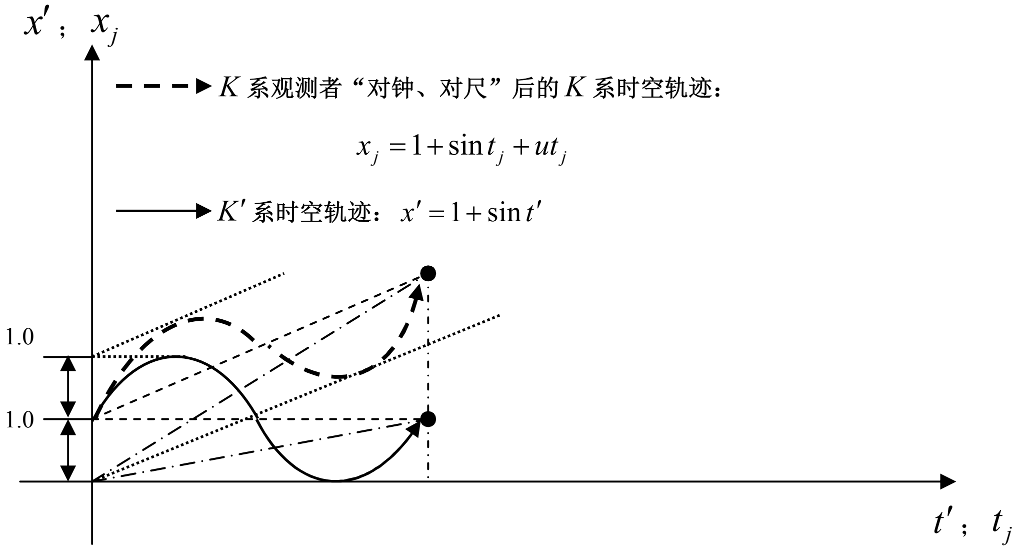


图 4-75 K' 系时空轨迹

将图 4-74 与图 4-75 合并为一个图，并删除中间过渡性的 K 系观测者"对钟、对尺"后的 K 系时空轨迹 $x_j = 1 + \sin t_j + ut_j$，我们就得到参考系相对速度 $u > 0$ 且光速为有限值 c 场合下的 K' 系时空轨迹与相应的 K 系时空轨迹，示于图 4-76。

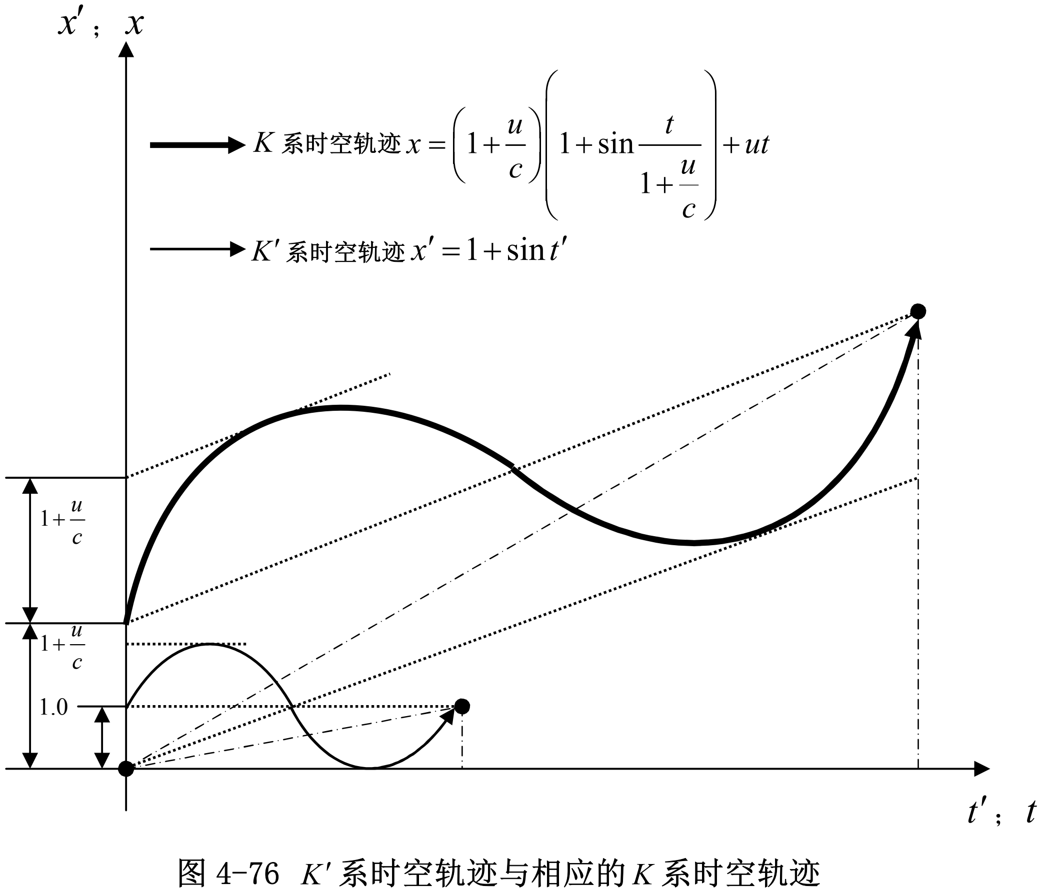


图 4-76 K' 系时空轨迹与相应的 K 系时空轨迹

我们将 K **系时空轨迹** $x=\left(1+\frac{u}{c}\right)\left(1+\sin\frac{t}{1+\frac{u}{c}}\right)+ut$ 直接代入**伽利略-周方变换**：

$$\begin{cases} x'=\dfrac{1}{1+\frac{u}{c}}(x-ut) \\ t'=\dfrac{t}{1+\frac{u}{c}} \end{cases}$$

就可直接得到相应的 K' **系时空轨迹**：

$$x'=\frac{x-ut}{1+\frac{u}{c}}=1+\sin\frac{t}{1+\frac{u}{c}}=1+\sin t'$$

即：
$$x'=1+\sin t'$$

这样，K **系观测者**根据所测得的 K **系时空轨迹** $x=\left(1+\frac{u}{c}\right)\left(1+\sin\frac{t}{1+\frac{u}{c}}\right)+ut$，通过**伽利略-周方变换**即可推断出 K' **系时空轨迹** $x'=1+\sin t'$。（参看图 4-76）

但是，如果 K **系观测者**将所观测到的 K **系时空轨迹** $x=\left(1+\frac{u}{c}\right)\left(1+\sin\frac{t}{1+\frac{u}{c}}\right)+ut$ 代入**伽利略变换**：$x'=x-ut$，$t'=t$，即对 K **系时空轨迹**进行**伽利略变换**，则将得出如下的"K' **系时空轨迹**"：

$$x'=x-ut=\left[\left(1+\frac{u}{c}\right)\left(1+\sin\frac{t}{1+\frac{u}{c}}\right)+ut\right]-ut$$

$$=\left(1+\frac{u}{c}\right)\left(1+\sin\frac{t}{1+\frac{u}{c}}\right)$$

$$=\left(1+\frac{u}{c}\right)\left(1+\sin\frac{t'}{1+\frac{u}{c}}\right)$$

这就是说，K 系观测者根据观测到的 K 系时空轨迹 $x=\left(1+\frac{u}{c}\right)\left(1+\sin\frac{t}{1+\frac{u}{c}}\right)+ut$ 错误地按伽利略变换推得“K' 系时空轨迹”为 $x'=\left(1+\frac{u}{c}\right)\left(1+\sin\frac{t'}{1+\frac{u}{c}}\right)$，后者却不是真正的 K' 系时空轨迹 $x'=1+\sin t'$。

由此我们看到，K 系观测者根据他所测得的 K 系时空轨迹 $x=\left(1+\frac{u}{c}\right)\left(1+\sin\frac{t}{1+\frac{u}{c}}\right)+ut$，按伽利略-周方变换能够推断出真正的 K' 系时空轨迹 $x'=1+\sin t'$，而按伽利略变换则错误地推断出“K' 系时空轨迹”为 $x'=\left(1+\frac{u}{c}\right)\left(1+\sin\frac{t'}{1+\frac{u}{c}}\right)$。

K 系时空轨迹 $x=\left(1+\frac{u}{c}\right)\left(1+\sin\frac{t}{1+\frac{u}{c}}\right)+ut$ 分别按伽利略-周方变换与按伽利略变换推断出的 K' 系时空轨迹示于图 4-77。

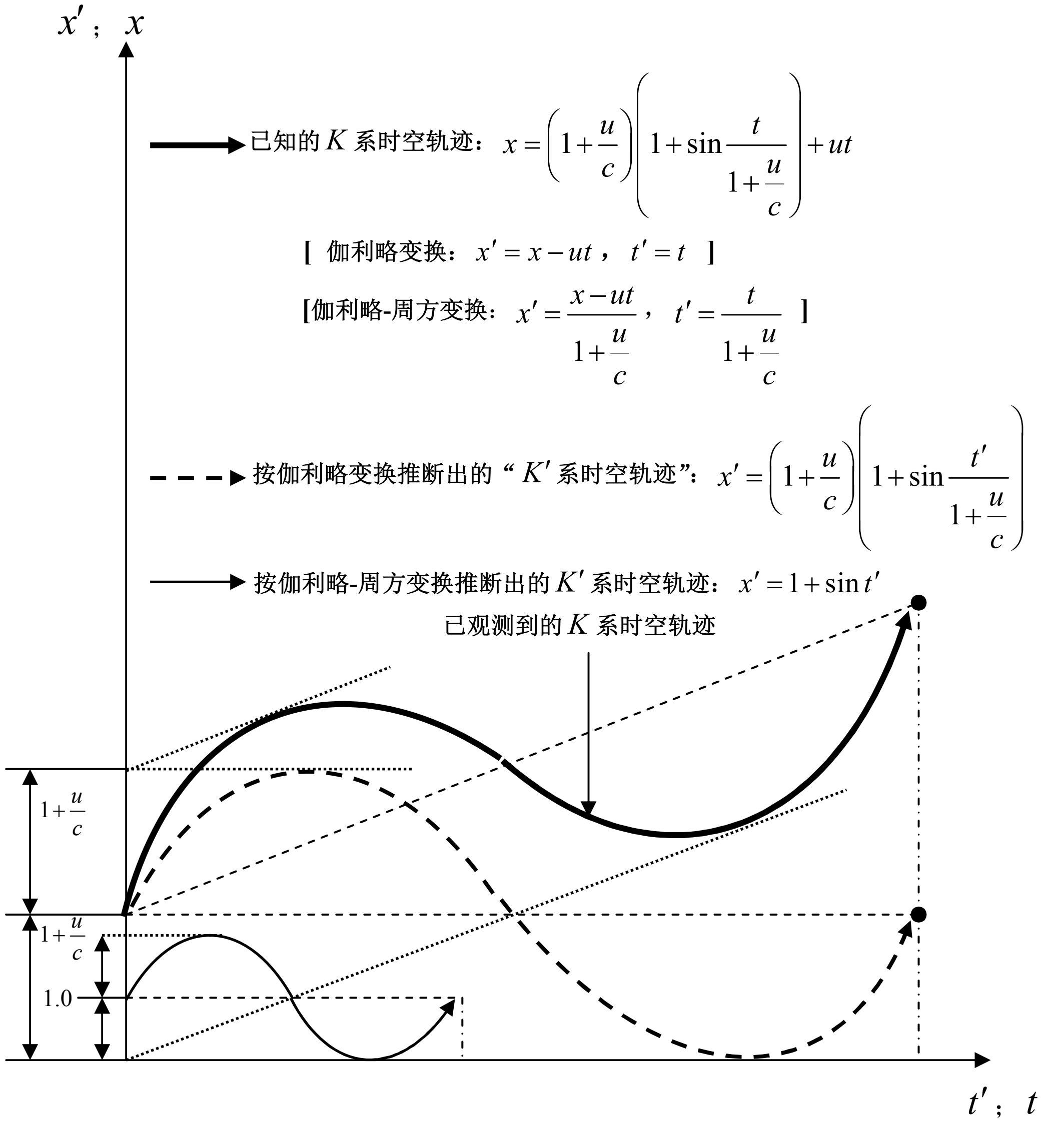


图 4-77 按伽利略-周方变换与按伽利略变换推断的 K' 系时空轨迹

可以清楚地看到，按**伽利略-周方变换**推断出的真正的 K' **系时空轨迹** $x'=1+\sin t'$ 与按**伽利略变换**推断出的那个“K' **系时空轨迹**” $x'=\left(1+\frac{u}{c}\right)\left(1+\sin\frac{t'}{1+\frac{u}{c}}\right)$ 之间在本质上存在着相当大的差异。

八、“质量不变性”定律

设有两个球：A 球 ○ 和 B 球 ●，（静止）质量均为 m_0；两球始终位于一条与 x 轴

平行的直线上。又设：在K系内，B 球静止（$v_B=0$），A 球向右运动，以速度$v_A=u$（速度v_A的方向沿x轴正方向）与 B 球碰撞。在两球碰撞过程中：**从K系度量**，B 球静止（$v_B=0$），其质量为m_0；A 球作速度为v_A（$v_A=u$）的匀速运动，其质量为m；**从K'系度量**，A 球静止（$v'_A=0$），其质量为m_0；B 球作速度为v'_B（$v'_B=-u$）的匀速运动，其质量为m。又设两球发生的碰撞是完全非弹性碰撞，在碰撞后合为一体，以同一速度运动。

K'系相对于K系的匀速直线平移运动示于图 4-78。

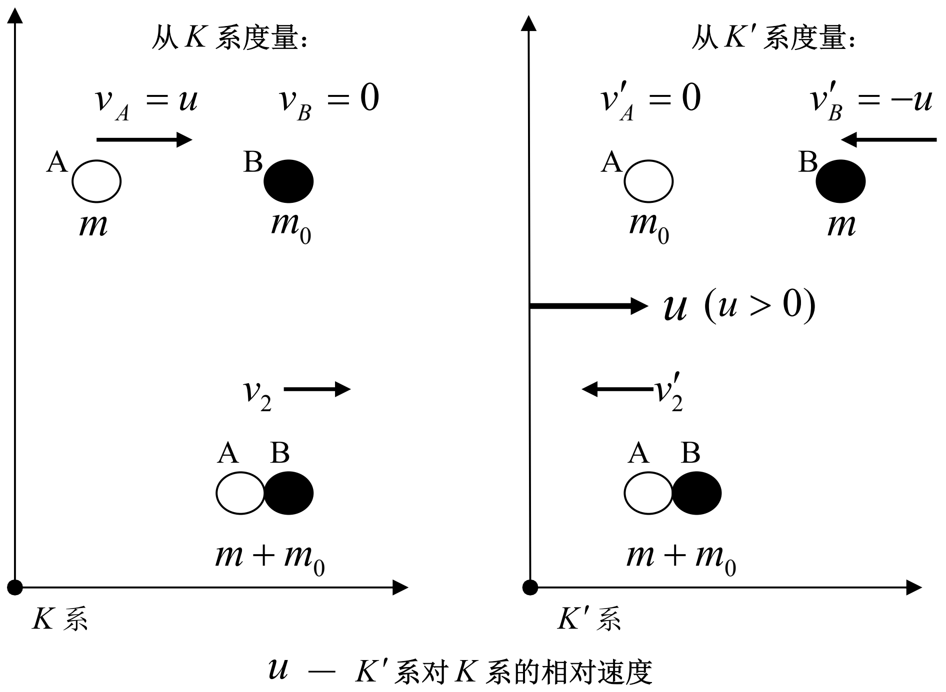


图 4-78 K'系相对于K系作匀速直线平移运动

A．从K系度量

B 球静止（$v_B=0$），A 球向右运动，以速度$v_A=u$与 B 球碰撞。在两球碰撞合一之后，结合体的运动速度为v_2。

根据动量守恒定律及质量守恒定律，有：

$$m_0 v_B + m v_A = (m+m_0)v_2$$

$$m_0 \times 0 + mu = (m+m_0)v_2$$

$$mu = (m+m_0)v_2$$

$$v_2 = \frac{m}{m+m_0}u \qquad \text{(A)}$$

B．从 K' 系度量

A 球静止（$v'_A = 0$），B 球向左运动，以速度 $v'_B = -u$ 与 A 球碰撞。

在碰撞之前，两球的运动速度分别为 v'_A 和 v'_B：

$$v'_A = v_A - u = u - u = 0$$

$$v'_B = v_B - u = 0 - u = -u$$

在两球碰撞合一之后，结合体的运动速度为 v'_2。

根据**动量守恒定律**及**质量守恒定律**，有：

$$m_0 v'_A + m v'_B = (m+m_0)v'_2$$

$$m_0 \times 0 - mu = (m+m_0)v'_2$$

$$-mu = (m+m_0)v'_2$$

$$v'_2 = -\frac{m}{m+m_0}u \qquad \text{(B)}$$

1．**伽利略-周方变换**：

在**伽利略-周方变换**下，两球结合体之（K 系）速度 v_2 与（K' 系）速度 v'_2 服从“**矢量叠加法则**”，即满足以下关系式：

$$v'_2 = v_2 - u \qquad \text{(C)}$$

将（A）式 $v_2 = \frac{m}{m+m_0}u$ 及（B）式 $v'_2 = -\frac{m}{m+m_0}u$ 代入（C）式，得：

$$-\frac{m}{m+m_0}u = \frac{m}{m+m_0}u - u$$

$$\frac{2m}{m+m_0}u = u$$

$$m + m_0 = 2m$$

得：

$$m = m_0$$

$$\boxed{m = m_0}$$

由此可得，物体的质量不随坐标系及物体的运动状态而变；物体的质量**是绝对的**，符合牛顿对‘质量’的定义。不存在所谓的**“质速关系”**。

“物体的质量是一个绝对量，不随参考系及物体运动状态而变化”（即“不存在质速关系”）。

由此可得，**“速度合成服从矢量叠加法则”**是**“不存在质速关系”**（即**“物体的质量不随参考系及物体运动状态而变化”**）的充分必要条件。由于“速度合成服从矢量叠加法则”是一条普适的自然定律，故“不存在质速关系”（即“物体的质量不随参考系及物体运动状态而变化”）随之也是一条普适的自然定律。

第五章

超高速太空飞行物测速原理

我们利用相离运动中产生的**“动系时间间隔显大”** $\Delta t = \left(1 + \frac{u}{c}\right)\Delta t' > \Delta t'$，（$0 < u < +\infty$），以及相向运动中产生的**“动系时间间隔显小”** $\Delta t = \left(1 - \frac{u_f}{c}\right)\Delta t' < \Delta t'$，（$0 < u_f < c$），来建立高速运动物体的测速原理，藉以测量超高速太空飞船的径向相对速度。

一、主动式脉冲雷达测速

主动式脉冲雷达测速，就是将雷达站置于地面观测点（如太空飞船出发地点），向运动物体（如太空飞船）发射一定重复周期Δt_0（或重复频率$1/\Delta t_0$）的电磁脉冲信号，根据回波脉冲重复周期Δt_2（或重复频率$1/\Delta t_2$）与发射脉冲重复周期Δt_0（或重复频率$1/\Delta t_0$）之比值$\Delta t_2/\Delta t_0$，计算出运动物体（如太空飞船）相对于地面观测点（如飞船出发地点）的径向相对速度u。

（1）相离运动

设：在时刻$t = 0$，飞船起飞（$x = 0$，x为 飞船至飞船出发地点雷达站的距离）。在某个时刻t_0，飞船与地面雷达站之间的距离为$x_0 = u(t_0 - 0) = ut_0$，在此时刻地面雷达向飞船发出第一个电磁脉冲信号。在此后的某时刻t_1，脉冲信号到达飞船，立刻向地面雷达反射回去。由于电磁脉冲信号与飞船同向运动，故电磁脉冲信号从发出时刻t_0至抵达飞船时刻t_1之间的时间间隔$\delta t = t_1 - t_0$满足以下关系：

$$\delta t = t_1 - t_0 = \frac{x_0}{c - u}$$

即：

$$\delta t = t_1 - t_0 = \frac{ut_0}{c - u}$$

因此，脉冲信号到达飞船的时刻t_1为：

$$t_1 = t_0 + \frac{ut_0}{c-u}$$

即：
$$t_1 = \frac{c}{c-u} t_0$$

在时刻t_1，脉冲信号从飞船向地面雷达站反射。此时飞船与地面雷达站之间的距离为$x_1 = u(t_1 - 0) = ut_1$。根据**“真空中光传播速率为恒定值假设”**：

“物体发射出来的光线总是以确定的速度c运动着，不管这道光线是由静止的还是运动的物体发射出来的。”

地面雷达站接收到脉冲信号的时刻t_2为：

$$t_2 = t_1 + \frac{ut_1}{c}$$

即：
$$t_2 = \frac{c+u}{c} t_1$$

从$t_1 = \frac{c}{c-u} t_0$和$t_2 = \frac{c+u}{c} t_1$得：

$$t_2 = \frac{c+u}{c} \frac{c}{c-u} t_0 = \frac{c+u}{c-u} t_0$$

等式两边取增量，得：

$$\Delta t_2 = \frac{c+u}{c-u} \Delta t_0 \ge \Delta t_0$$

式中：Δt_0—雷达发射脉冲重复周期（秒）；

Δt_2—雷达接收脉冲重复周期（秒）。

记：$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_0} = \lambda \ge 1$，上式可以写成：

$$\lambda = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_0} = \frac{c+u}{c-u} = \frac{1 + \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c}} \ge 1$$

由此式得：

$$\lambda\left(1 - \frac{u}{c}\right) = 1 + \frac{u}{c}$$

$$(\lambda + 1)\frac{u}{c} - (\lambda - 1) = 0$$

解出：

$$\frac{u}{c}=\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \qquad (\lambda \geq 1)$$

这样，在相离运动中：$\lambda \geq 1$，主动式脉冲雷达测速公式为：

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{u}{c}=\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \\ (\lambda \geq 1)\end{gathered}}$$

****

（2）另一种推导方法

模型：

设：在 **A** 与 **B** 重合时 $t=0$，**B** 相对于 **A** 以直线匀速远离而去。在 t_I^A 时刻，**A** 与 **B** 之间的距离为 x_{01}： $x_{01}=v(t_I^A-0)=vt_I^A$。这时，**A** 向 **B** 发出信号 **1**。对于 **A**（**静系观测者**）**而言**：信号 **1** 自 **A** 以速度 c 传播，**B** 相对于 **A** 以速度 v 远离而去。信号 **1** 从 **A** 发出后接近（追赶）**B** 的速度为 $(c-v)$。因此，信号 **1** 耗时 $\Delta t_1=\dfrac{x_{01}}{c-v}$ 到达 **B**。信号 **1** 到达 **B** 的时刻是 $t_I^B=t_I^A+\Delta t_1$。

信号 1 在时刻 $t_I^B=t_I^A+\Delta t_1$ 被 B 向 A 反射。根据**“光速不变假设”**（即**“真空中光传播速率为恒定值假设”**）— **《任何光线在‘静止的’坐标系中都是以确定的速度 c 运动着，不管这道光线是由静止的还是运动的物体发射出来的。》**（爱因斯坦，2006 年版），尽管光源 B 相对于 A 是处在运动之中，然而，**对于** A（**静系观测者**）**而言**：从光源 B 向 A（**静系观测者**）反射的光线在空间内的传播速度与光源 B 的运动无关，仍为真空中光传播速率 c，因此，信号 1 从光源 B 返回到 A 耗时 $\Delta t_1'=\dfrac{x_{01}+v\Delta t_1}{c}$。信号 1 返回到 A 的时刻是 $t_{II}^A=t_I^A+\Delta t_1+\Delta t_1'$。

推导：

将 $\Delta t_1=\dfrac{x_{01}}{c-v}$ 代入 $\Delta t_1'=\dfrac{x_{01}+v\Delta t_1}{c}$，得：

$$\Delta t_1' = \frac{x_{01}}{c} + \frac{v}{c}\Delta t_1 = \frac{x_{01}}{c} + \frac{v}{c}\frac{x_{01}}{c-v} = \frac{x_{01}}{c}\left(1+\frac{v}{c-v}\right) = \frac{x_{01}}{c}\frac{c}{c-v} = \frac{x_{01}}{c-v} = \Delta t_1$$

信号 1 回到 A 的时刻是：

$$t_{II}^A = t_I^B + \Delta t_1' = (t_I^A + \Delta t_1) + \Delta t_1' = t_I^A + 2\Delta t_1$$

得：

$$\Delta t_1 = \Delta t_1' = \frac{1}{2}(t_{II}^A - t_I^A)$$

由此式可得增量方程：

$$\delta(\Delta t_1) = \delta(\Delta t_1') = \frac{1}{2}[\delta(t_{II}^A) - \delta(t_I^A)]$$

因 $x_{01} = vt_I^A$，故增量方程为 $\delta(x_{01}) = v\delta(t_I^A)$。从 $\Delta t_1' = \Delta t_1 = \dfrac{x_{01}}{c-v}$ 可得：

$$\delta(\Delta t_1') = \delta(\Delta t_1) = \frac{\delta(x_{01})}{c-v} = \frac{v\delta(t_I^A)}{c-v} = \frac{v}{c-v}\delta(t_I^A)$$

式中 $\delta(t_I^A)$ 为 A 发出信号 1 与发出信号 2 之间的时间间隔。

将 $\delta(\Delta t_1) = \dfrac{v}{c-v}\delta(t_I^A)$ 代入增量方程 $\delta(\Delta t_1) = \dfrac{1}{2}[\delta(t_{II}^A) - \delta(t_I^A)]$，得：

$$\frac{v}{c-v}\delta(t_I^A) = \frac{1}{2}[\delta(t_{II}^A) - \delta(t_I^A)]$$

$$\frac{2v}{c-v}\delta(t_I^A) = \delta(t_{II}^A) - \delta(t_I^A)$$

由此式得：

$$\delta(t_{II}^A) = \frac{c+v}{c-v}\delta(t_I^A) = \frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\delta(t_I^A)$$

$$\delta(t_{II}^A) = \frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\delta(t_I^A)$$

即：

$$\frac{\delta(t_{II}^A)}{\delta(t_I^A)} = \frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}$$

式中：$\delta(t_I^A)$ 为 A 发出信号 1 与发出信号 2 之间的时间间隔；

$\delta(t_{II}^A)$ 为 A 接收信号 1 与接收信号 2 之间的时间间隔。

这就是**主动式脉冲雷达测速原理**的计算公式。

下面我们证明$\dfrac{\delta(t_I^B)}{\delta(t_I^A)} \neq \dfrac{\delta(t_{II}^A)}{\delta(t_I^B)}$，式中$\delta(t_I^B)$为B接收（并反射）信号1与接收（并反射）信号2之间的时间间隔。

证：

$$t_{II}^A = t_I^A + \Delta t_1 + \Delta t_1'$$

式中$(t_I^A + \Delta t_1) = t_I^B$，故有：

$$t_I^B = t_I^A + \Delta t_1 \quad 及 \quad t_{II}^A = t_I^B + \Delta t_1'$$

取增量，得：

$$\delta(t_I^B) = \delta(t_I^A) + \delta(\Delta t_1)$$

考虑到$\delta(\Delta t_1) = \dfrac{v}{c-v}\delta(t_I^A)$，故得：

$$\delta(t_I^B) = \delta(t_I^A) + \frac{v}{c-v}\delta(t_I^A) = \frac{c}{c-v}\delta(t_I^A)$$

从而得：

$$\boxed{\frac{\delta(t_I^B)}{\delta(t_I^A)} = \frac{c}{c-v}}$$

另外，取增量，得： $\delta(t_{II}^A) = \delta(t_I^B) + \delta(\Delta t_1')$

考虑到$\delta(\Delta t_1') = \dfrac{v}{c-v}\delta(t_I^A)$及$\dfrac{\delta(t_I^B)}{\delta(t_I^A)} = \dfrac{c}{c-v}$，故得：

$$\delta(t_{II}^A) = \delta(t_I^B) + \frac{v}{c-v}\delta(t_I^A) = \delta(t_I^B) + \frac{v}{c-v}\frac{c-v}{c}\delta(t_I^B) = \frac{c+v}{c}\delta(t_I^B)$$

从而得：

$$\boxed{\frac{\delta(t_{II}^A)}{\delta(t_I^B)} = \frac{c+v}{c}}$$

显然，
$$\frac{\delta(t_I^B)}{\delta(t_I^A)} \neq \frac{\delta(t_{II}^A)}{\delta(t_I^B)}$$

证毕。

将$\dfrac{\delta(t_I^B)}{\delta(t_I^A)} = \dfrac{c}{c-v}$与$\dfrac{\delta(t_{II}^A)}{\delta(t_I^B)} = \dfrac{c+v}{c}$综合起来，即可得：

$$\frac{\delta(t_{II}^A)}{\delta(t_I^A)}=\frac{\delta(t_I^B)}{\delta(t_I^A)}\frac{\delta(t_{II}^A)}{\delta(t_I^B)}=\frac{c}{c-v}\;\frac{c+v}{c}$$

$$\frac{\delta(t_{II}^A)}{\delta(t_I^A)}=\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}$$

这里的物理模型是：

“有相对运动的 A 和 B 中的 A（静系观测者）发出光信号 $\rightarrow$ 光信号到达 B 并向 A 反射回去 $\rightarrow$ 光信号被 A（静系观测者）接收”。

这是一个描述空间内光信号传播过程的物理模型，是由“光信号自 A 传到相对运动中的 B”及“由 B 反射回 A”两阶段有机地构成的一个不可分割的完整过程。因此，这个完整过程必须在整体上满足“相对性原理”。可以证明，这个完整过程满足“相对性原理”显然是没有问题的。现证明如下：

完整模型的文字叙述

在 **A** 与 **B** 重合时，$t=0$；**B** 相对于 **A** 以直线匀速远离而去。

阶段（I）：“光信号自 A 传到 B”— A 为静系观测者，**B** 相对于 **A** 以直线匀速 v 远离而去。对于 **A**（静系观测者）而言，在 t_I^A 时刻，**A** 与 **B** 之间的距离为：

$x_{01}=v(t_I^A-0)=vt_I^A$，这时 **A** 向 **B** 发出光信号 **1**，光信号 **1** 相对于 **A** 以速度 c 传播，同时 **B** 相对于 **A** 以速度 v 远离而去，故光信号 **1** 接近（追赶）**B** 之速度为 $(c-v)$。因此，光信号 **1** 耗时 $\Delta t_1=\dfrac{x_{01}}{c-v}$ 到达 **B**。光信号 **1** 在时刻 $t_I^B=t_I^A+\Delta t_1$ 到达 **B**。

阶段（II）：“光信号由 B 反射回 A”— 光信号 **1** 在时刻 $t_I^B=t_I^A+\Delta t_1$ 被 **B** 向 **A** 反射。根据“光速不变假设”（即“真空中光传播速率为恒定值假设”）—《任何光线在‘静止的’坐标系中都是以确定的速度 c 运动着，不管这道光线是由静止的还是运动的物体发射出来的。》（爱因斯坦，2006 年版），尽管光源 B 相对于 A（静系观测者）是处在运动之中，然而，对于 A（静系观测者）而言，从光源 B 向 A（静系观测者）反射的光线在空间内的传播速度与光源 **B** 的运动无关，仍为真空中光传播速率 c，因此，光信号 1 耗时 $\Delta t_1'=\dfrac{x_{01}+v\Delta t_1}{c}$ 从光源 B 反射回到 A。光信号 1 在时刻：

$t_{II}^{A} = t_{I}^{A} + \Delta t_1 + \Delta t_1'$返回到 A。

可以证明，A 与 B 是平权的。现证明如下：

在上面的模型中，我们将“A”换为“B”，“B”换为“A”，并将 B 设为**静系观测者**，而其余皆保持不变。在此情况下，如法炮制，进行与上述完全相同的数学推导：

将$\Delta t_1 = \dfrac{x_{01}}{c-v}$代入$\Delta t_1' = \dfrac{x_{01} + v\Delta t_1}{c}$，得：

$$\Delta t_1' = \frac{x_{01}}{c} + \frac{v}{c}\Delta t_1 = \frac{x_{01}}{c} + \frac{v}{c}\frac{x_{01}}{c-v} = \frac{x_{01}}{c}\left(1 + \frac{v}{c-v}\right) = \frac{x_{01}}{c}\frac{c}{c-v} = \frac{x_{01}}{c-v} = \Delta t_1$$

信号 1 回到 B（**静系观测者**）的时刻是：

$$t_{II}^{B} = t_{I}^{A} + \Delta t_1' = (t_{I}^{B} + \Delta t_1) + \Delta t_1' = t_{I}^{B} + 2\Delta t_1$$

得：
$$\Delta t_1 = \Delta t_1' = \frac{1}{2}(t_{II}^{B} - t_{I}^{B})$$

由此式可得增量方程：

$$\delta(\Delta t_1) = \delta(\Delta t_1') = \frac{1}{2}[\delta(t_{II}^{B}) - \delta(t_{I}^{B})]$$

考虑到$x_{01} = vt_{I}^{B}$，从$\Delta t_1' = \Delta t_1 = \dfrac{x_{01}}{c-v}$可得：

$$\delta(\Delta t_1') = \delta(\Delta t_1) = \frac{\delta(x_{01})}{c-v} = \frac{v\delta(t_{I}^{B})}{c-v} = \frac{v}{c-v}\delta(t_{I}^{B})$$

式中$\delta(t_{I}^{B})$为 B（**静系观测者**）发出信号 1 与发出信号 2 之间的时间间隔。

将$\delta(\Delta t_1) = \dfrac{v}{c-v}\delta(t_{I}^{B})$代入增量方程$\delta(\Delta t_1) = \dfrac{1}{2}[\delta(t_{II}^{B}) - \delta(t_{I}^{B})]$，得：

$$\frac{v}{c-v}\delta(t_{I}^{B}) = \frac{1}{2}[\delta(t_{II}^{B}) - \delta(t_{I}^{B})]$$

$$\frac{2v}{c-v}\delta(t_{I}^{B}) = \delta(t_{II}^{B}) - \delta(t_{I}^{B})$$

由此式得：
$$\delta(t_{II}^{B}) = \frac{c+v}{c-v}\delta(t_{I}^{B}) = \frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\delta(t_{I}^{B})$$

$$\delta(t_{II}^{B}) = \frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\delta(t_{I}^{B})$$

即：
$$\frac{\delta(t_{II}^{B})}{\delta(t_{I}^{B})}=\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}$$

式中：$\delta(t_I^B)$为 B 发出信号 1 与发出信号 2 之间的时间间隔；

$\delta(t_{II}^B)$为 B 接收信号 1 与接收信号 2 之间的时间间隔。

在**‘原’模型**中有$\dfrac{\delta(t_{II}^{A})}{\delta(t_{I}^{A})}=\dfrac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}$，将**‘原’模型**中的 A 与 B 互相**‘对换’**及 B 设为**静系观测者**之后得出$\dfrac{\delta(t_{II}^{B})}{\delta(t_{I}^{B})}=\dfrac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}$，这说明 A 与 B 是平权的。

另外，还可证明：
$$\frac{\delta(t_{I}^{A})}{\delta(t_{I}^{B})}\neq\frac{\delta(t_{II}^{B})}{\delta(t_{I}^{A})}$$

式中的增量$\delta(t_I^A)$为 A 接收（并反射）信号 1 与接收（并反射）信号 2 之间的时间间隔。

证：

$$t_{II}^{B}=t_{I}^{B}+\Delta t_{1}+\Delta t_{1}'$$

式中$(t_I^B+\Delta t_1)=t_I^A$，故有：

$$t_{I}^{A}=t_{I}^{B}+\Delta t_{1}\quad 及\quad t_{II}^{B}=t_{I}^{A}+\Delta t_{1}'$$

从$t_I^A=t_I^B+\Delta t_1$取增量： $\delta(t_I^A)=\delta(t_I^B)+\delta(\Delta t_1)$

考虑到$\delta(\Delta t_1)=\dfrac{v}{c-v}\delta(t_I^B)$，故得：

$$\delta(t_{I}^{A})=\delta(t_{I}^{B})+\frac{v}{c-v}\delta(t_{I}^{B})=\frac{c}{c-v}\delta(t_{I}^{B})$$

从而得：
$$\frac{\delta(t_{I}^{A})}{\delta(t_{I}^{B})}=\frac{c}{c-v}$$

从$t_{II}^B=t_I^A+\Delta t_1'$取增量：$\delta(t_{II}^B)=\delta(t_I^A)+\delta(\Delta t_1')$

考虑到$\delta(\Delta t_1')=\dfrac{v}{c-v}\delta(t_I^B)$及$\dfrac{\delta(t_I^A)}{\delta(t_I^B)}=\dfrac{c}{c-v}$，故得：

$$\delta(t_{II}^{B})=\delta(t_{I}^{A})+\frac{v}{c-v}\delta(t_{I}^{B})=\delta(t_{I}^{A})+\frac{v}{c-v}\frac{c-v}{c}\delta(t_{I}^{A})=\frac{c+v}{c}\delta(t_{I}^{A})$$

从而得：
$$\frac{\delta(t_{II}^{B})}{\delta(t_{I}^{A})}=\frac{c+v}{c}$$

显然，
$$\frac{\delta(t_{I}^{A})}{\delta(t_{I}^{B})}\neq\frac{\delta(t_{II}^{B})}{\delta(t_{I}^{A})}$$

证毕。

此外，下面我们还给出相离运动下主动式脉冲雷达测速原理计算公式的另一种推导方法：

物理模型是：“有相对运动的 A 和 B 中的 A（静系观测者）发出信号 $\rightarrow$信号到达 B 并向 A 反射回去 $\rightarrow$信号被 A（静系观测者）接收”。这是一个描述空间内光信号传播过程的物理模型，是由“信号自 A 传到相对运动中的 B”及“由 B 反射回 A”两阶段有机地构成的一个不可分割的完整过程。

设：B 相对于 A（雷达站）以直线匀速u远离而去。在某个时刻t_1，B 离 A 的距离为x_1，在此时刻 A 向 B 发出信号 1，信号 1 相对于 A（静系观测者）以光速c传播，同时 B 相对于 A 以速度u远离而去，故信号 1 接近（追赶）B 之（相对）速度为$(c-u)$。因此，信号 1 耗时$\frac{x_1}{c-u}$到达 B。这样，信号 1 在时刻$\left(t_1+\frac{x_1}{c-u}\right)$到达 B。在信号 1 到达 B 之时刻，B 离 A 的距离为$\left(x_1+u\bullet\frac{x_1}{c-u}\right)$，此时信号 1 即刻从 B 向 A 反射回去，经过一段时间$\frac{\left(x_1+u\bullet\frac{x_1}{c-u}\right)}{c}$到达 A（静系观测者）。这样，信号 1 回到 A（即雷达站 A 接收到信号 1）的时刻t_2为：

$$t_2=\left(t_1+\frac{x_1}{c-u}\right)+\frac{\left(x_1+u\bullet\frac{x_1}{c-u}\right)}{c}=\left(t_1+\frac{x_1}{c-u}\right)+\frac{x_1\left(1+\frac{u}{c-u}\right)}{c}$$

$$=\left(t_1+\frac{x_1}{c-u}\right)+\frac{x_1\frac{c}{c-u}}{c}=t_1+\frac{x_1}{c-u}+\frac{x_1}{c-u}=t_1+\frac{2x_1}{c-u}$$

等式两边取增量：

$$\delta(t_2)=\delta(t_1)+\frac{2}{c-u}\delta(x_1)$$

式中$\delta(t_1)$为 A（雷达站）发出信号 1 与发出信号 2 之间的时间间隔；

$\delta(t_2)$为 A（雷达站）接收信号 1 与接收信号 2 之间的时间间隔。

将时间间隔$\delta(t_1)$内发生的 B 离 A 之距离变化$\delta(x_1)=u\bullet\delta(t_1)$代入此式，得：

$$\delta(t_2)=\delta(t_1)+\frac{2u}{c-u}\delta(t_1)$$

即：

$$\delta(t_2)=\frac{c+u}{c-u}\delta(t_1)$$

****

（3）相向运动

只需在相离运动下的公式$\lambda=\frac{\Delta t_2}{\Delta t_0}=\frac{c+u}{c-u}$中，将$u$代之以$-u_f$（$0<u_f<c$），即可得到相向运动下的相应公式：

$$\lambda=\frac{\Delta t_2}{\Delta t_0}=\frac{c-u_f}{c+u_f}=\frac{1-\frac{u_f}{c}}{1+\frac{u_f}{c}}\le 1$$

由此式得：

$$\lambda\left(1+\frac{u_f}{c}\right)=1-\frac{u_f}{c}$$

$$(\lambda+1)\frac{u_f}{c}+(\lambda-1)=0$$

解出：
$$\frac{u_f}{c}=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\qquad (0\le\lambda\le 1)$$

这样，在相向运动中：$0\le\lambda\le 1$，主动式脉冲雷达测速公式为：

$$\boxed{\frac{u_f}{c}=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\quad (0\le\lambda\le 1)}$$

主动式脉冲雷达测速曲线示于图 5-1。

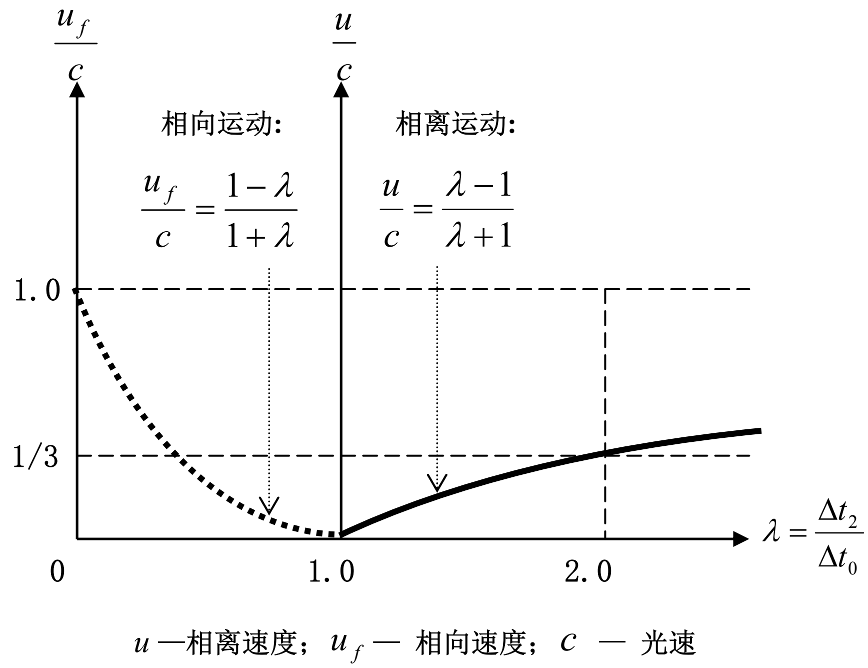


图 5-1 主动式脉冲雷达测速曲线

主动式脉冲雷达测速曲线同样也可表为图 5-2。

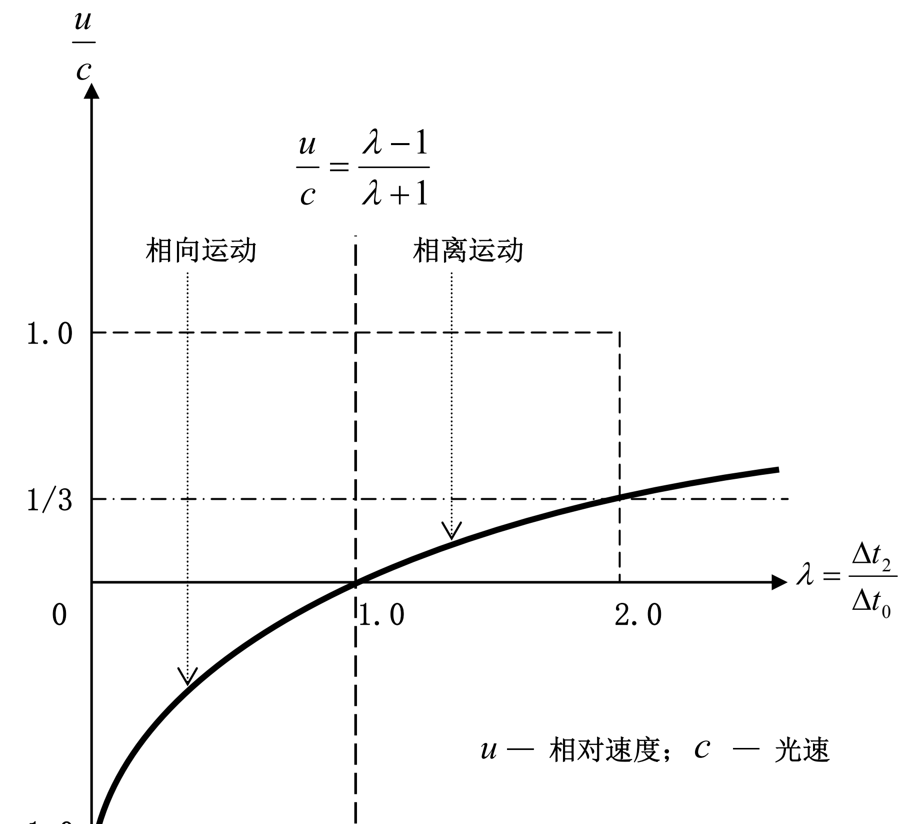


图 5-2 主动式脉冲雷达测速曲线

由以上分析可以看到，主动式脉冲雷达测速只适用于低于光速的相对运动。

二、被动式脉冲雷达测速

被动式脉冲雷达测速，就是将雷达发射装置安置在运动物体（如太空飞船）上，向观测者（飞船出发地点的雷达接收装置）发射一定重复周期（重复频率）的电磁脉冲信号，根据接收脉冲重复周期Δt_2与发射脉冲重复周期Δt_1之比值$\Delta t_2/\Delta t_1$，计算出运动物体（如太空飞船）相对于飞船出发地点的径向相对速度u。

（1）相离运动

设：在时刻$t=0$，飞船起飞（$x=0$，x为 飞船至飞船出发地点雷达站之距离）。在某个时刻t_1，飞船与地面雷达站之间的距离为$x_1 = ut_1$。在此时刻飞船上的雷达发射装置向地面雷达接收装置发射一个电磁脉冲信号。根据**“真空中光传播速率为恒定值假设”**：

“物体发射出来的光线总是以确定的速度c运动着，不管这道光线是由静止的还是运动的物体发射出来的。”

地面雷达接收装置接收到脉冲信号的时刻为t_2：

$$t_2 = t_1 + \frac{ut_1}{c}$$

$$t_2 = \left(1+\frac{u}{c}\right)t_1$$

等式两边取增量，得：

$$\Delta t_2 = \left(1+\frac{u}{c}\right)\Delta t_1$$

式中：Δt_1—飞船雷达发射脉冲重复周期（秒）；

Δt_2—地面雷达接收脉冲重复周期（秒）。

记$\dfrac{\Delta t_2}{\Delta t_1}=\mu$，上式可以写成： $\mu = \dfrac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = 1+\dfrac{u}{c} \geq 1$

这样，在相离运动中：$\mu = 1+\dfrac{u}{c} \geq 1$，被动式脉冲雷达测速公式为：

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{u}{c}=\mu-1\\[2ex](\mu\geq 1)\end{array}}$$

（2）相向运动

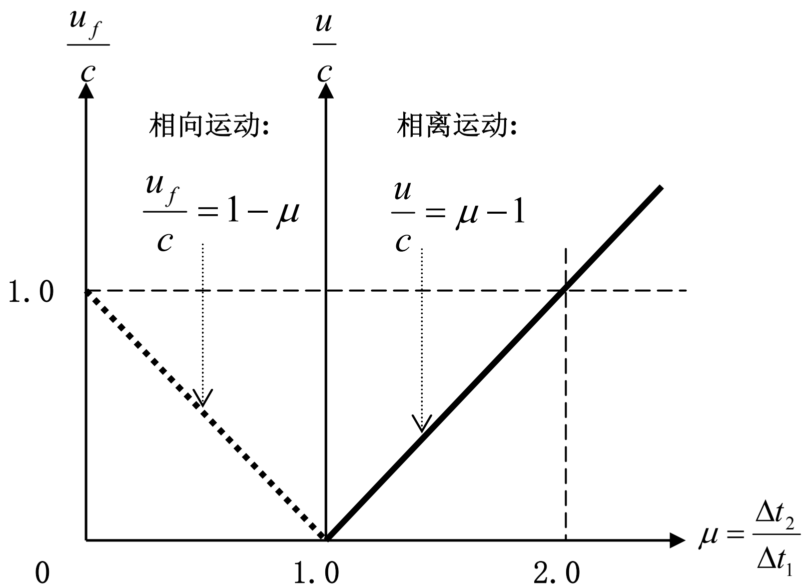
只需在相离运动下的公式 $\mu=\dfrac{\Delta t_2}{\Delta t_1}=1+\dfrac{u}{c}$ 中，将 u 代之以 $-u_f$ （$0<u_f<c$），即可

得到相向运动下的相应公式： $\mu=\dfrac{\Delta t_2}{\Delta t_1}=1-\dfrac{u_f}{c}\leq 1$

这样，在相向运动中：$0\leq\mu\leq 1$，被动式脉冲雷达测速公式为：

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{u_f}{c}=1-\mu\\[2ex](0\leq\mu\leq 1)\end{array}}$$

被动式脉冲雷达测速曲线示于图 5-3。



u — 相离相对速度；u_f — 相向相对速度；c — 光速

图 5-3 被动式脉冲雷达测速曲线

被动式脉冲雷达测速曲线同样也可表为图 5-4。

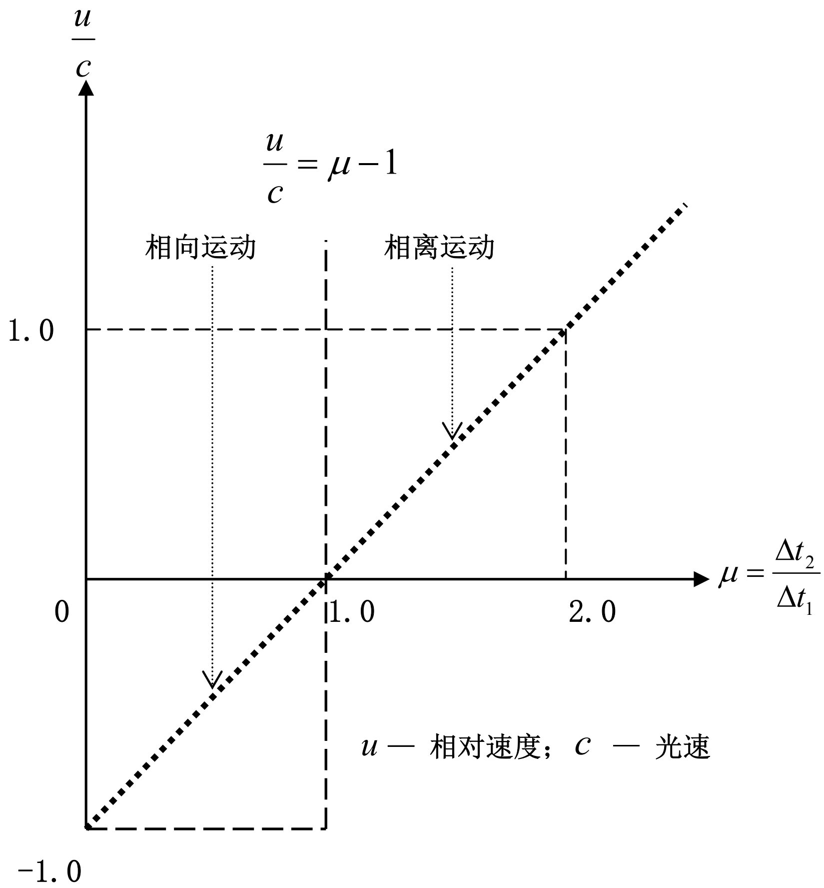
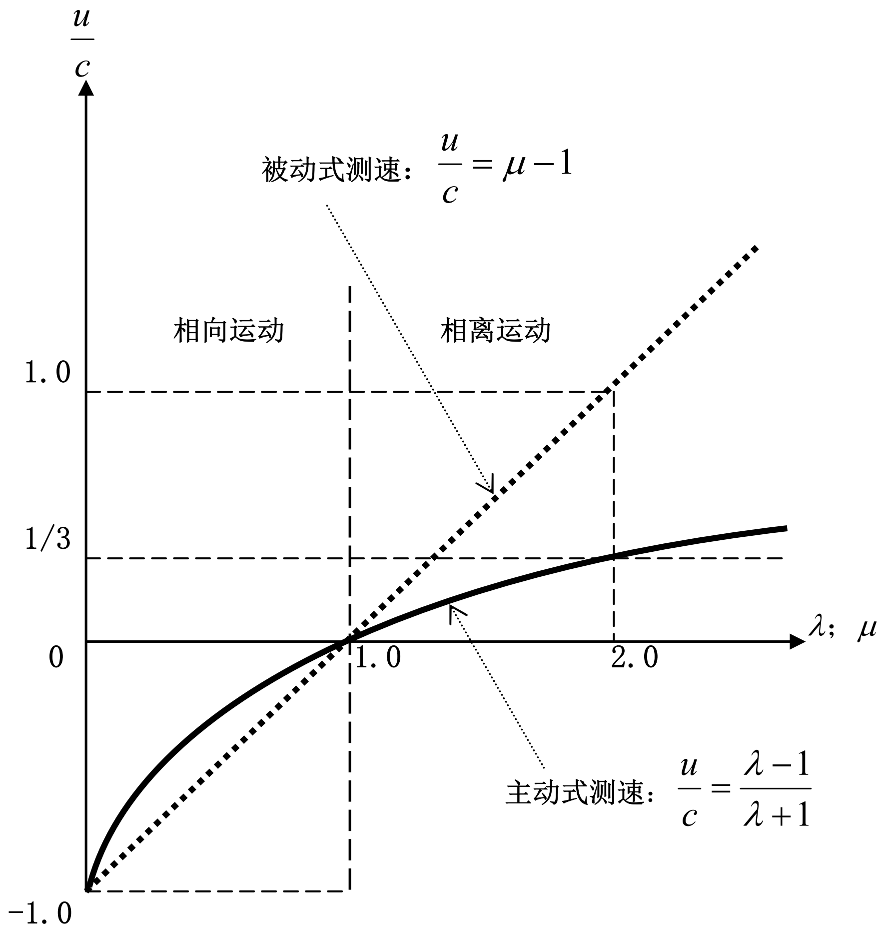


图 5-4 被动式脉冲雷达测速曲线

由以上分析可以看到，被动式脉冲雷达测速可以用于超光速的相离运动。两种测速方法之比较示于图 5-5。



u — 相对速度；c — 光速；$\lambda=\frac{\Delta t_2}{\Delta t_0}$；$\mu=\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}$

图 5-5 两种测速方法之比较

第六章

“哈勃定律”(Hubble’s Law)的理论表达式

1929 年，美国天文物理学家**哈勃**（**E．P．Hubble**）发现河外星系视向退行速度与距离成正比，即距离越远，视向退行速度越大。**“哈勃定律”**的陈述是：来自遥远星系光线的红移与他们的距离成正比。这条定律是**哈勃**在约十年的观测之后，于 1929 年首先提出的。**“哈勃定律”**中速度和距离都是间接观测得到的物理量。“速度 — 距离”关系和“速度 — 视星”关系，是建立在观测“红移 — 视星”等关系及一些理论假设前提上的。**“哈勃定律”**原来由对正常星系观测而得，现今已应用到类星体或其他特殊星系上。**“哈勃定律”**通常被用来推算遥远星系的距离。可是，**“哈勃定律”**至今从未得到理论上的解释。笔者十分简捷地首次给出了**“哈勃定律”**的理论表达式。

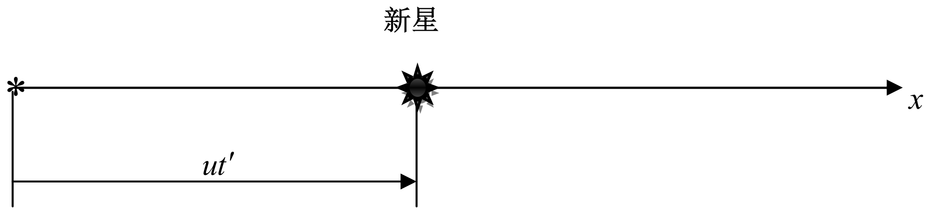
“哈勃定律”：

“在任何一个星系上，都能观测到其他星系在作远离该星系的退行运动，而且距离越远的星系退行速度越大。”

“对宇宙中的任何两个星系来说，它们都在彼此互相远离，而且星系间的距离越远，相互远离的速度也越大。”

“遥远天体的红移（即退行运动）的大小与天体的距离成正比。”

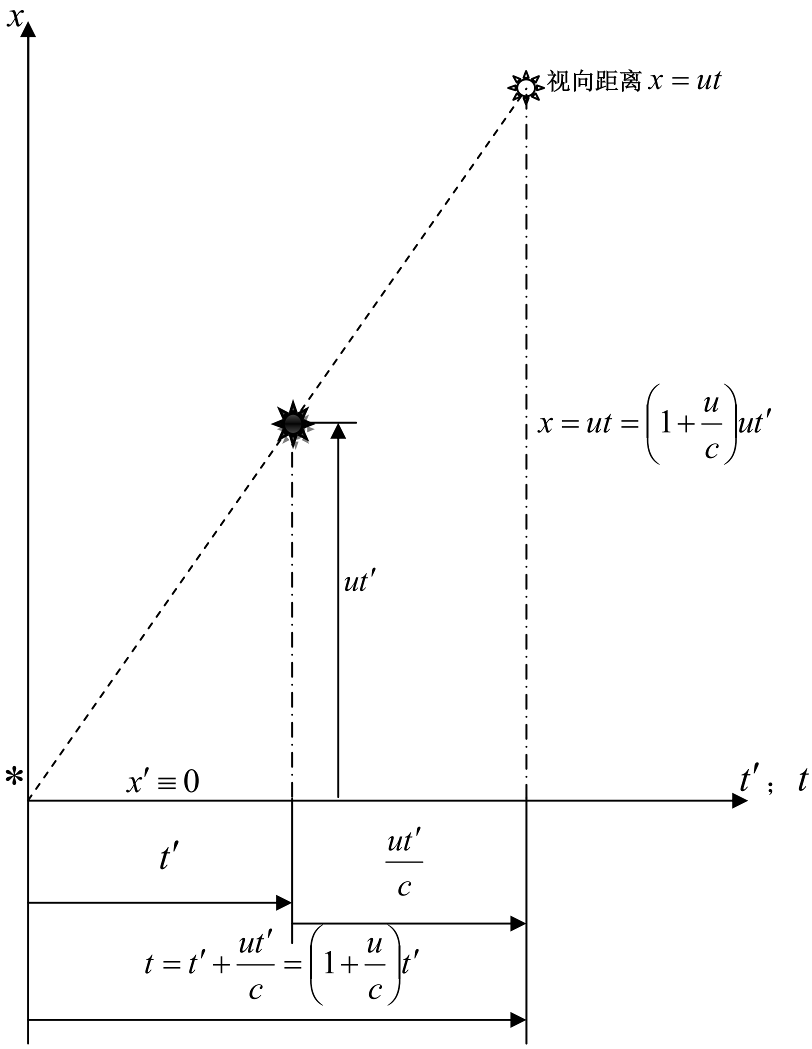
设：在某时刻t'，一颗新星相对于地面观测者＊以匀速u远离而去，示于图 6-1。



（＊为地面观测者；u为新星退行速度 ）

图 6-1 在时刻t'新星以匀速u离观测者＊而远去

在时刻t'，新星离地面观测者＊的距离为ut'。由于光的传播速度为有限值（c），故地面观测者＊在时刻t'尚观测不到新星。直到时刻$t = t' + \frac{ut'}{c} = \left(1 + \frac{u}{c}\right)t'$，地面观测者＊才观测到新星，这时新星离地面观测者＊的视向距离为$x = ut$，示于图 6-2。



（* 为地面观测者；u 为新星退行速度；c 为光速）

图 6-2 时刻 t' 爆发的一颗新星及其视向距离

图 6-2 中的时间关系式 $t=\left(1+\frac{u}{c}\right)t'$ 就是**周方变换**的时间变换式。将时间变换式 $t=\left(1+\frac{u}{c}\right)t'$ 代入 $x=ut$，得 $x=ut=\left(1+\frac{u}{c}\right)ut'$。这个公式 $x=\left(1+\frac{u}{c}\right)ut'$ 恰好就是**伽利略-周方变换**的空间变换式 $x=\left(1+\frac{u}{c}\right)(x'+ut')$ 在 $x'\equiv 0$（即将新星置于新星坐标系的原点）条件下的公式：$x=\left(1+\frac{u}{c}\right)ut'$。将此式写成 $x=\left(1+\frac{u}{c}\right)ut'=\frac{t'}{c}u^2+t'u$，继而写成：

$$x=ct'\frac{u^2}{c^2}+ct'\frac{u}{c}=ct'\left[\left(\frac{u}{c}\right)^2+\left(\frac{u}{c}\right)\right]$$

$$\overline{x}_H = \overline{u}^2 + \overline{u}$$

式中 $\overline{x}_H = \dfrac{x}{ct'}$ 称为**“哈勃距离”**；$\overline{u} = \dfrac{u}{c}$，$c$ 为光速。

这就是**“哈勃定律”**的理论表达式：

$$\boxed{\begin{gathered}\overline{x}_H = \overline{u}^2 + \overline{u} \\ (\overline{u} > 0)\end{gathered}}$$

“哈勃定律”理论表达式曲线示于图 6-3。

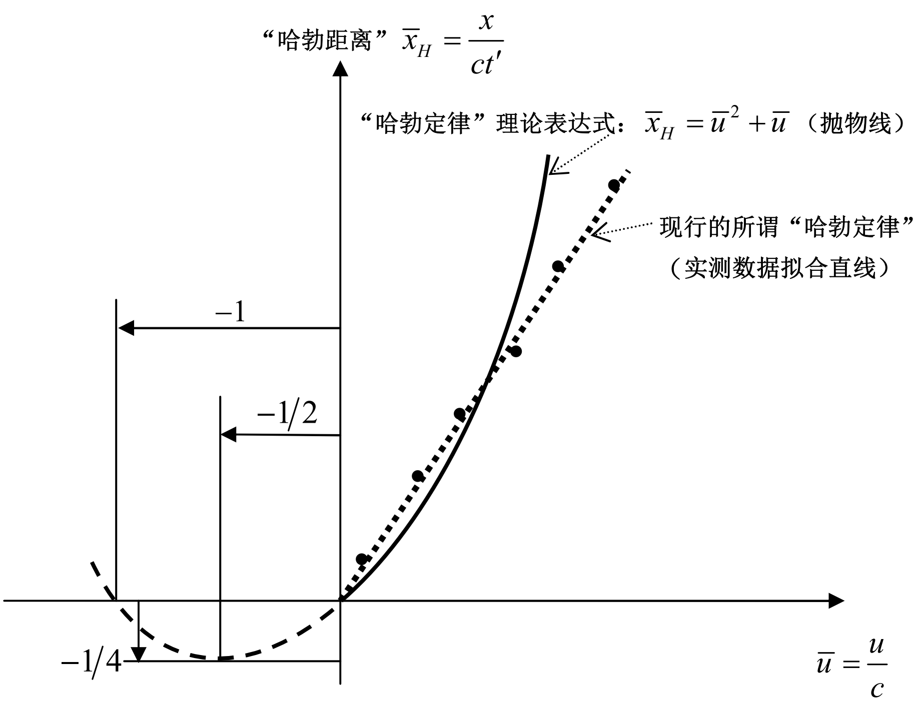


图 6-3 “哈勃定律”

或者将与 $\overline{x}_H = \overline{u}^2 + \overline{u}$ 等价的 $x = \left(1 + \dfrac{u}{c}\right)ut' = \dfrac{t'}{c}u^2 + t'u$ 即：

$$\boxed{\begin{gathered}x = \frac{t'}{c}u^2 + t'u \\ (u > 0)\end{gathered}}$$

“哈勃定律”理论表达式（**抛物线**）以及现行的所谓“哈勃定律”（对实际观测数据拟合而成的**直线**）示于图 6-4。

实际上，我们可以从**伽利略-周方变换**的观测矢量合成图直接导出**哈勃定律**的理论表达式。

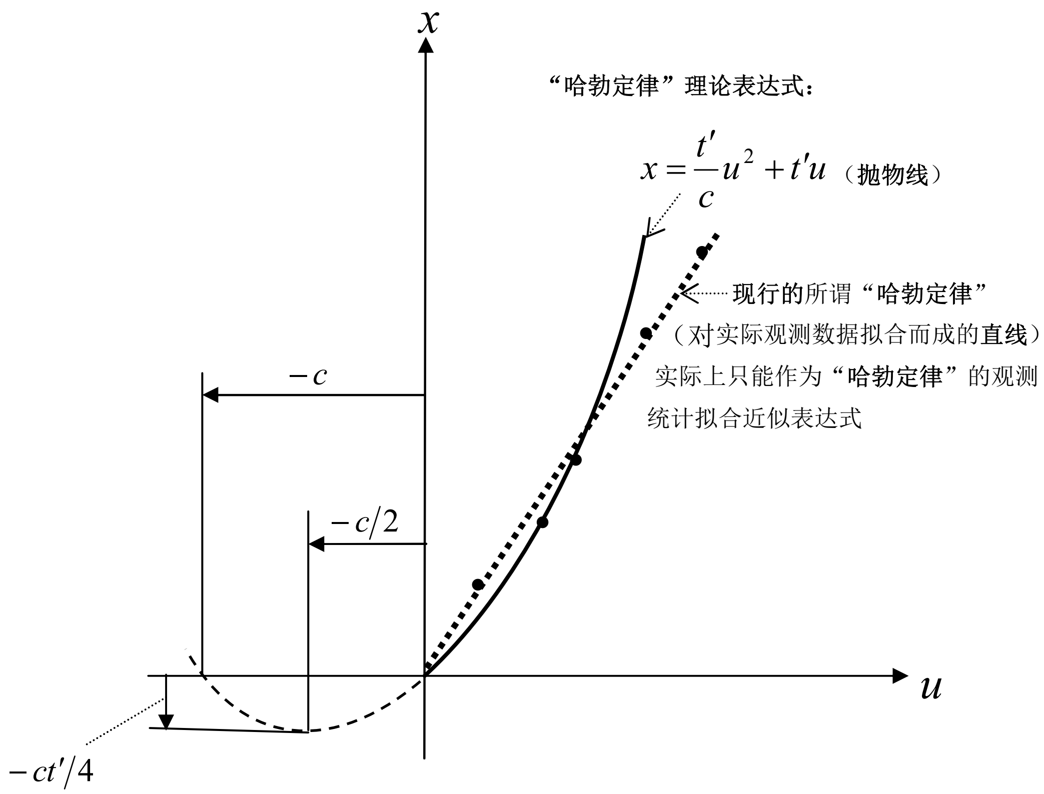


图 6-4 “哈勃定律”

伽利略-周方变换的观测矢量合成图示于图 6-5。

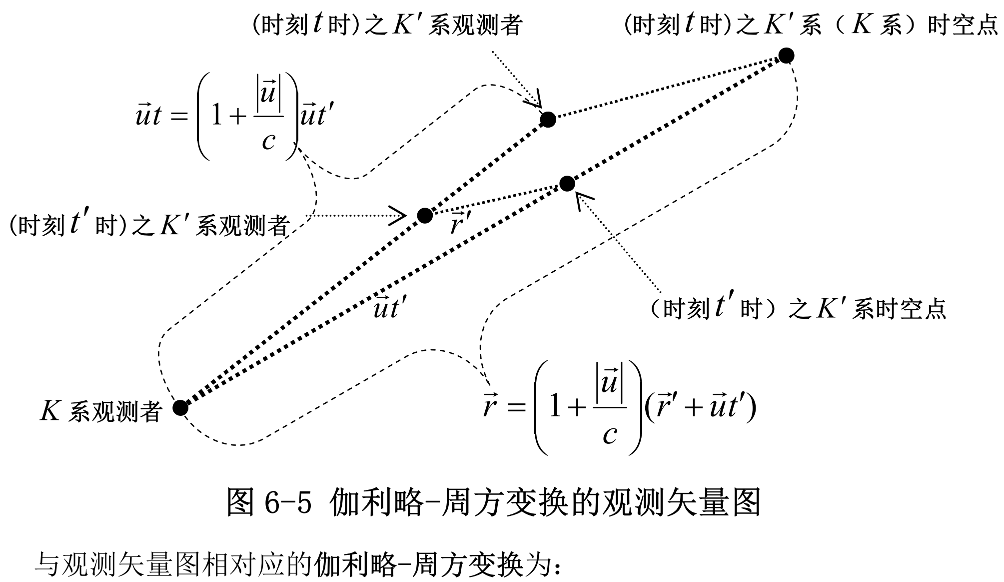


图 6-5 伽利略-周方变换的观测矢量图

与观测矢量图相对应的**伽利略-周方变换**为：

$$\begin{cases}\vec{r}=\left(1+\dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)(\vec{r}'+\vec{u}t')\\[2ex] t=\left(1+\dfrac{|\vec{u}|}{c}\right)t'\end{cases}$$

取$\vec{u}=[u,0,0]^T$之场合，即：K'系沿K系的x轴正方向作匀速直线平移运动，相对速度为u，且保持x'轴与x轴相重合；y'轴与y轴平行及z'轴与z轴平行。在这种场合下，有：$u_x=u$，$u_y=0$，$u_z=0$，即$\vec{u}=[u_x,u_y,u_z]^T=[u,0,0]^T$。于是，**伽利略-周方变换**的时空变换方程组为：

$$\begin{cases} x=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)(x'+ut') \\ y=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)y' \\ z=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)z' \\ t=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)t' \end{cases}$$

取“一维空间”情况（$\vec{r}=[x,0,0]^T$）并令$\vec{r}'\equiv[0,0,0]^T$，得**“哈勃定律”**：

$$x=\left(1+\frac{u}{c}\right)ut' \ , \quad t=\left(1+\frac{u}{c}\right)t'$$

(c为真空中光速)

太空星系观测图示于图 6-6。

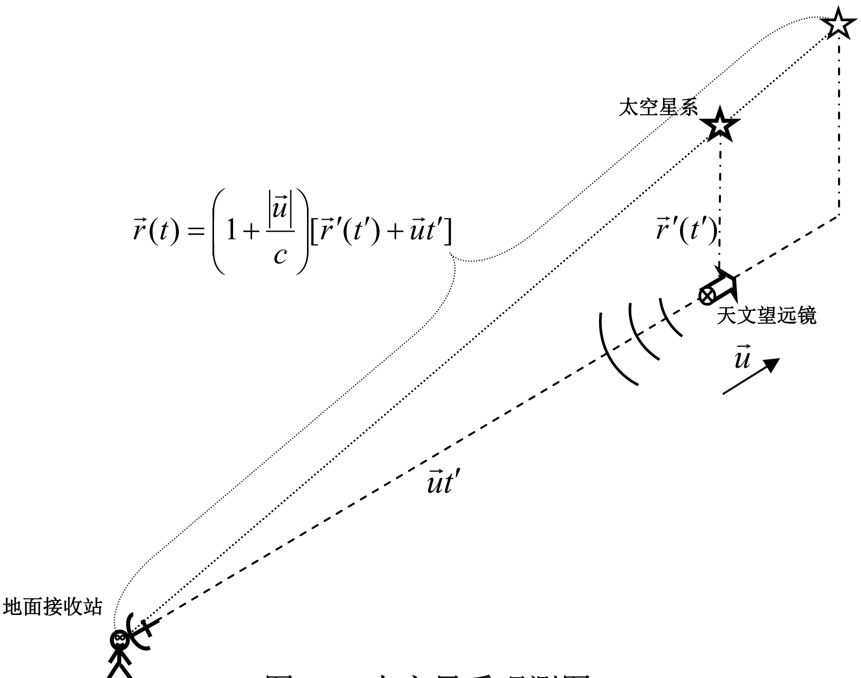


图 6-6 太空星系观测图

“一维空间”情况下**伽利略-周方变换**在$\vec{r}' \equiv 0$时的观测矢量合成图示于**表 6-1**。

表 6-1 “一维空间”下伽利略-周方变换在$\vec{r}' \equiv 0$时的观测矢量合成图

$\vec{u} = [u,0,0]^T$，$\vec{r} = [x,0,0]^T$，　$\vec{r}' \equiv [0,0,0]^T$

“哈勃定律”：$x = \left(1 + \dfrac{u}{c}\right) ut'$ ，　$t = \left(1 + \dfrac{u}{c}\right) t'$

(c 为真空中光速)

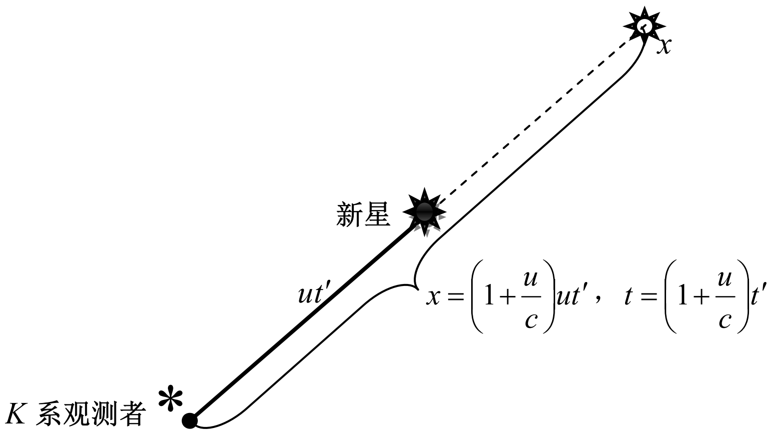


表 6-1 中，（一维）**伽利略-周方变换**的公式：$x = \left(1 + \dfrac{u}{c}\right) ut'$，$t = \left(1 + \dfrac{u}{c}\right) t'$ 实际上就是**哈勃定律**的理论表达式：

$$x = \left(1 + \frac{u}{c}\right) ut' = \frac{t'}{c} u^2 + t'u$$

即：

$$x = \frac{t'}{c} u^2 + t'u$$

最后指出，**哈勃定律**的物理基础是光波多普勒效应。**哈勃定律**的理论表达式实际上就是 $x' \equiv 0$，$y' \equiv 0$，$z' \equiv 0$ 场合下一维时空的**伽利略-周方变换**：

$$\begin{cases} x = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)ut' \\ \\ y = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)y' \equiv 0 \\ \\ z = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)z' \equiv 0 \\ \\ t = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)t' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)ut' \\ \\ t = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)t' \end{cases}$$

对 $x = \left(1+\frac{u}{c}\right)ut'$ 取自然对数：

$$\ln x = \ln\left(1+\frac{u}{c}\right) + \ln u + \ln t'$$

以 t 为自变量取导数：

$$\frac{d}{dt}\ln x = \frac{d}{dt}\ln\left(1+\frac{u}{c}\right) + \frac{d}{dt}\ln u + \frac{d}{dt}\ln t'$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{c+u}\frac{du}{dt} + \frac{1}{u}\frac{du}{dt} + \frac{1}{t'}\frac{dt'}{dt}$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{c+u}\frac{du}{dt} + \frac{1}{u}\frac{du}{dt} + \frac{1}{t'}\frac{1}{1+\frac{u}{c}}$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{c+u}\frac{du}{dt} + \frac{1}{u}\frac{du}{dt} + \frac{1}{t}$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{c+2u}{(c+u)u}\frac{du}{dt} + \frac{1}{t}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{c+2u}{(c+u)u}\frac{du}{dt}\frac{c+u}{c}ut'+\frac{x}{t}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{c+2u}{c}\frac{du}{dt}t'+\frac{x}{t}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{c+2u}{c}\frac{du}{dt}t'+u$$

1. 如若 $\frac{du}{dt}>0$（即星系**加速退行**），则 $\frac{dx}{dt}>u$，即：星系退行距离的增大速度 $\frac{dx}{dt}$ 大于星系退行速度 u，显示宇宙处在**加速膨胀**之中。

2. 如若 $\frac{du}{dt}=0$（即星系**匀速退行**），则 $\frac{dx}{dt}=u$，即：星系退行距离的增大速度 $\frac{dx}{dt}$ 等于星系退行速度 u，显示宇宙处在**匀速膨胀**之中。

3. 如若 $\frac{du}{dt}<0$（即星系**减速退行**），则 $\frac{dx}{dt}<u$，即：星系退行距离的增大速度 $\frac{dx}{dt}$ 小于星系退行速度 u，显示宇宙处在**减速膨胀**之中。

附言

1929 年，美国天文学家哈勃首先发现了星体间的距离不断变大的现象，提出了宇宙膨胀理论。这一发现导致俄裔美国天体物理学家伽莫夫的“宇宙大爆炸理论”，他认为宇宙诞生于约 137±2 亿年的一次大爆炸，星系的退行正是这次宇宙大爆炸的直接结果。

此后，天体物理学界认为宇宙正在以一个恒定的速度膨胀。直到上世纪末，美国天体物理学家萨尔·波尔马特(**Saul Perlmutter**)、美国/澳大利亚物理学家布莱恩·施密特(**Brian P. Schmidt**)以及美国科学家亚当·里斯(**Adam G. Riess**)三位科学家对超新星进行了一系列观测，获得**两组相同的观测结果**，发现**星系离地距离**随其**退行速度**而增大的规律为**‘抛物线’**，从而揭示了宇宙是在加速膨胀。他们在 1998 年向外公布：宇宙的膨胀速度不是恒定的，也不是越来越慢，而是不断加速的，即越来越快。这一发现“动摇了宇宙学的理论基础”，直接撼动了整个天体物理学界。于是人们认为，存在一种“暗能量”在推动着星系快速退行。上述三位物理学家由于他们的这一重大发现，获得了 2011 年诺贝尔物理学奖。

第七章

审视开普勒定律（Kepler’s Law）

开普勒定律（**Kepler’s Law**）是德国天文学家**开普勒**（**Johannes Kepler**，1571-1630）提出的关于行星运动的三大定律。**第一定律和第二定律**发表于 1609 年，是开普勒从丹麦天文学家**第谷**（**Tycho Brahe**，1546－1601）观测火星位置所得资料中总结出来的；**第三定律**发表于 1619 年。开普勒定律是一个普适定律，适用于一切二体问题。开普勒定律不仅适用于太阳系，它对具有中心天体的引力系统（如行星-卫星系统）和双星系统都成立。

1. **第一定律**：所有行星（和彗星）的轨道都属于圆锥曲线，而太阳则在它们的一个焦点上。
2. **第二定律**：行星和太阳的连线在相等的时间间隔内扫过相等的面积。
3. **第三定律**：所有行星绕太阳一周的恒星时间的平方与它们轨道长半轴的立方成比例。

其实，开普勒第一定律、第二定律、第三定律并非是相互独立的三条“定律”，而实际上是一条基于共同的基础，具有三项性质的**开普勒定律**。

下面我们就来审视天文学中极负盛名的**开普勒定律**（**Kepler’s Law**，1609 年）。

一、关于“开普勒第一定律”

诸行星绕恒星公转的方向具有“同向性”，绕恒星公转的轨道面具有“共面性”，绕恒星公转的轨道形状具有“近圆性”。同向性就是指诸行星向着同一个方向绕恒星公转，共面性就是指诸行星绕恒星公转的轨道面在同一平面上，近圆性就是指行星绕恒星公转的轨道形状接近于圆形。

K 系（静系）观测者**‘所测得的’**行星 A 在平面$(x'—z')$内绕恒星 S 的匀速圆周运动示于**图** 7-1 及**图** 7-2。

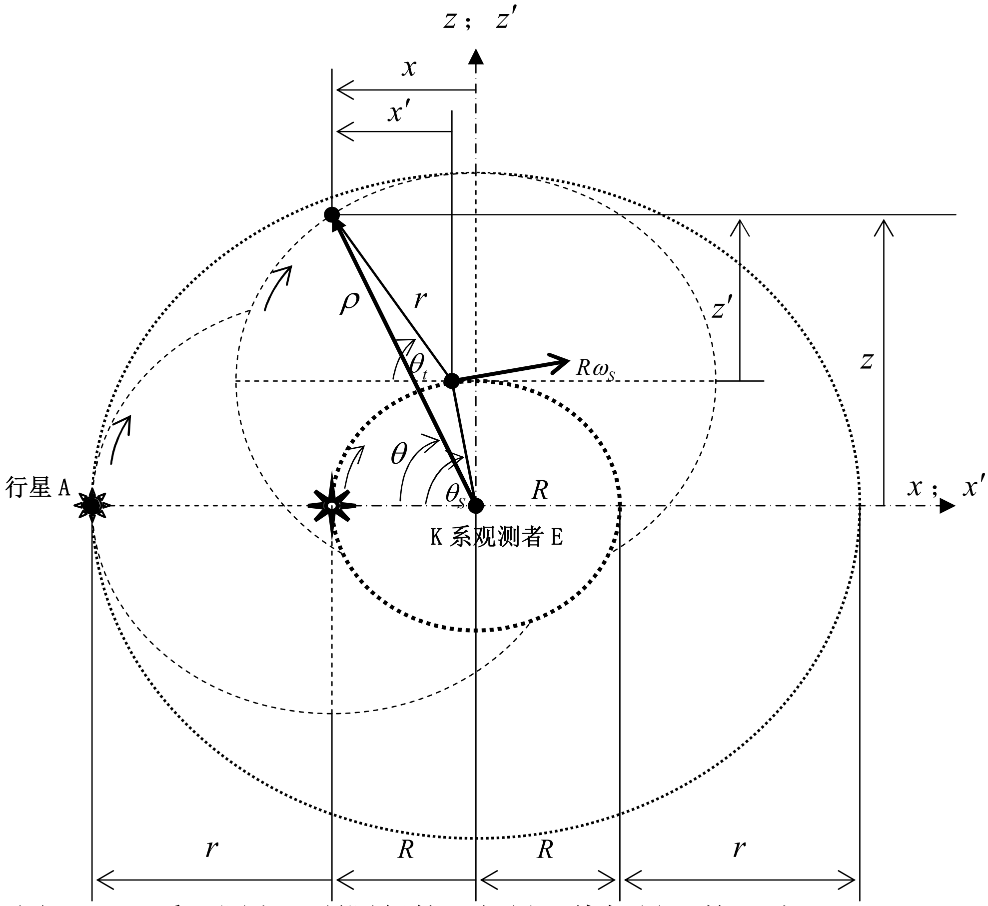


图 7-1 K 系观测者‘所测得的’行星 A 绕恒星 S 的运动（$R/r<1$）

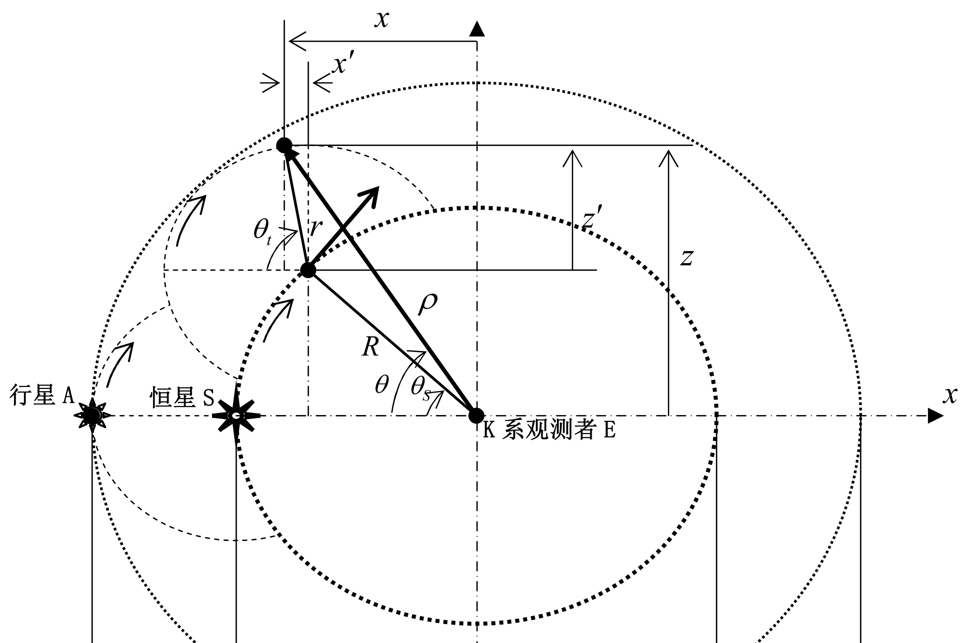


图 7-2 K 系观测者‘所测得的’行星 A 绕恒星 S 的运动（$R/r\geq1$）

参看图 7-1 及图 7-2。K 系观测者(地球 E)绕恒星 S 作**匀速圆周运动**，$\theta_S = \omega_S t = \dfrac{2\pi}{T_S} t$ ，

T_S 为 K 系观测者（地球 E ）绕恒星 S 的运动周期。R 为 K 系观测者（地球 E）绕恒星 S 作匀速圆周运动的半径长度。行星 A 绕恒星 S 作**匀速圆周运动**，$\theta_t = \omega_t t = \dfrac{2\pi}{T} t$ ，T 为行星 A 绕恒星 S 的运动周期。行星 A 在时刻 t' 的 K' 系空间位置（K' **系时空点**）为点(x', z')。K 系观测者在同一时刻 $t = t'$ 即观测到行星 A 的 K 系空间位置（K **系时空点**） — 点(x, z)。在真空中光速为有限值 c 的条件下，点(x', z')与点(x, z)之间存在着**伽利略-周方变换**：

$$\begin{cases} x = \left(1 + \dfrac{2\pi R}{T_S} \Big/ c\right)(x' - R\cos\dfrac{2\pi}{T_S} t') \\ y = y' \equiv 0 \\ z = \left(1 + \dfrac{2\pi R}{T_S} \Big/ c\right)(z' + R\sin\dfrac{2\pi}{T_S} t') \\ t = \left(1 + \dfrac{2\pi R}{T_S} \Big/ c\right) t' \end{cases}$$

在真空中光速为无穷大（$c \to \infty$ ）或 $\dfrac{2\pi R}{T_S}$ 值与真空中光速 c 之比值 $\dfrac{2\pi R}{T_S} \Big/ c$ 远远小于 **1** 的假设条件下，上面的**伽利略-周方变换**就退化为**伽利略变换**：

$$\begin{cases} x = x' - R\cos\dfrac{2\pi}{T_S} t' \\ y = y' \equiv 0 \\ z = z' + R\sin\dfrac{2\pi}{T_S} t' \\ t = t' \end{cases}$$

从图 8-1 及图 8-2 可知：$x' = -r\cos\theta_t = -r\cos\dfrac{2\pi}{T} t'$ 及 $z' = r\sin\theta_t = r\sin\dfrac{2\pi}{T} t'$ 。将 $x' = -r\cos\dfrac{2\pi}{T} t'$ 及 $z' = r\sin\dfrac{2\pi}{T} t'$ 代入上面的**伽利略变换**，便可得出 K **系观测者**（地球 E ）**‘观测到的’** 行星 A 绕恒星 S 作匀速圆周运动的 K **系时空轨迹**，其方程组为：

$$\begin{cases} x = -r\cos\dfrac{2\pi}{T}t' - R\cos\dfrac{2\pi}{T_S}t' \\ y = y' \equiv 0 \\ z = r\sin\dfrac{2\pi}{T}t' + R\sin\dfrac{2\pi}{T_S}t' \\ t = t' \end{cases}$$

从而得出从某个行星 E 观测到的另一行星 A 的 K 系时空轨迹：

$$\begin{cases} x = -r\cos\dfrac{2\pi}{T}t - R\cos\dfrac{2\pi}{T_S}t \\ z = r\sin\dfrac{2\pi}{T}t + R\sin\dfrac{2\pi}{T_S}t \end{cases}$$

对二式取平方和，得：

$$x^2 + z^2 = r^2 + R^2 + 2rR\left(\cos\frac{2\pi}{T}t \bullet \cos\frac{2\pi}{T_S}t + \sin\frac{2\pi}{T}t \bullet \sin\frac{2\pi}{T_S}t\right)$$

$$x^2 + z^2 = r^2 + R^2 + 2rR\cos\left(\frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi}{T_S}\right)t$$

从而得行星 A 的 K 系时空轨迹的矢径 ρ：

$$\boxed{\rho = (x^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \left[r^2 + R^2 + 2rR\cos\left(\frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi}{T_S}\right)t\right]^{\frac{1}{2}}}$$

此外，从图 7-1 及图 7-2 还可得下列关系式：

$$\frac{\sin(\theta - \theta_S)}{r} = \frac{\sin(\theta_t - \theta)}{R}$$

$$\frac{\sin\left(\theta - \dfrac{2\pi}{T_S}t\right)}{r} = \frac{\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t - \theta\right)}{R}$$

即：

$$\boxed{\frac{\sin\left(\theta - \dfrac{2\pi}{T_S}t\right)}{r} = \frac{\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t - \theta\right)}{R}}$$

由此可得：从某个行星 E 观测到另一行星 A 的 K 系时空轨迹为“**内摆线**”（hypocycloid）。曲线的形状取决于 $\left(\frac{2\pi}{T}-\frac{2\pi}{T_S}\right)$ 的值，即由 $\left(\frac{2\pi}{T}-\frac{2\pi}{T_S}\right)$ 的值而定。

结论：

我们得到关于行星运动轨迹的定律 —“**内摆线定律**”：

1.行星绕恒星的运动服从牛顿万有引力定律。诸行星绕恒星公转的方向具有“同向性”，绕恒星公转的轨道面具有“共面性”，绕恒星公转的轨道形状具有“近圆性”。

2.从一个行星观测到另一行星的时空轨迹为：

$$\begin{cases} x=-r\cos\frac{2\pi}{T}t-R\cos\frac{2\pi}{T_S}t \\ z=r\sin\frac{2\pi}{T}t+R\sin\frac{2\pi}{T_S}t \end{cases}$$

或用极坐标表为：（参看图 7-1 及图 7-2）

$$\begin{cases} \rho=(x^2+z^2)^{\frac{1}{2}}=\left[r^2+R^2+2rR\cos\left(\frac{2\pi}{T}-\frac{2\pi}{T_S}\right)t\right]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{T_S}t\right)}{r}=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{T}t-\theta\right)}{R} \end{cases}$$

由此可知，行星的表观运动轨迹为“**内摆线**”（hypocycloid）。曲线的形状取决于 $\left(\frac{2\pi}{T}-\frac{2\pi}{T_S}\right)$ 的值，即由 $\left(\frac{2\pi}{T}-\frac{2\pi}{T_S}\right)$ 的值而定。

二、关于“开普勒第二定律”

（A）我们讨论从 K 系观测者（E）看，行星 A 绕恒星 S 运动中连线 AE 在相等的时间间隔内所扫过的面积是否相等的问题。

行星 A 绕恒星 S 运动中连线 AE 在时间间隔 Δt 内所扫过的面积 ΔS 示于图 7-3。

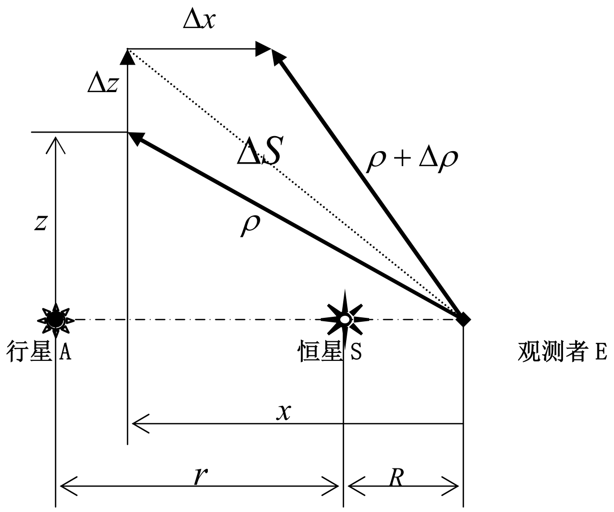


图 7-3 行星 A 绕恒星 S 运动中连线 AE 在Δt之内扫过的面积ΔS

从图 7-3 可知，行星 A 绕恒星 S 运动中连线 AE 在时间间隔Δt内所扫过的面积ΔS为：

$$\Delta S=\frac{1}{2}\Delta x(z+\Delta z)+\frac{1}{2}x\Delta z=\frac{1}{2}(x\Delta z+z\Delta x+\Delta x\Delta z)$$

从K系时空轨迹方程组

$$\begin{cases} x=-r\cos\dfrac{2\pi}{T}t-R\cos\dfrac{2\pi}{T_S}t \\ z=r\sin\dfrac{2\pi}{T}t+R\sin\dfrac{2\pi}{T_S}t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta x=\left(\dfrac{2\pi r}{T}\sin\dfrac{2\pi}{T}t+\dfrac{2\pi R}{T_S}\sin\dfrac{2\pi}{T_S}t\right)\Delta t=\Phi_1(t)\Delta t \\ \Delta z=\left(\dfrac{2\pi r}{T}\cos\dfrac{2\pi}{T}t+\dfrac{2\pi R}{T_S}\cos\dfrac{2\pi}{T_S}t\right)\Delta t=\Phi_2(t)\Delta t \end{cases}$$

故有：$\Delta x\Delta z=\Phi_1(t)\Phi_2(t)(\Delta t)^2$

将$\Delta x=\Phi_1(t)\Delta t$，$\Delta z=\Phi_2(t)\Delta t$及$\Delta x\Delta z=\Phi_1(t)\Phi_2(t)(\Delta t)^2$代入$\Delta S$，得：

$$\Delta S=\frac{1}{2}(x\Delta z+z\Delta x+\Delta x\Delta z)=\frac{1}{2}[x\Phi_2(t)\Delta t+z\Phi_1(t)\Delta t+\Phi_1(t)\Phi_2(t)(\Delta t)^2]$$

$$=\frac{1}{2}[x\Phi_2(t)+z\Phi_1(t)+\Phi_1(t)\Phi_2(t)(\Delta t)]\Delta t$$

由此得：$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{1}{2}[x\Phi_2(t)+z\Phi_1(t)+\Phi_1(t)\Phi_2(t)(\Delta t)]$$

对时间t取微商，得“**面积速度**$\frac{dS}{dt}$”：

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}[x\Phi_2(t)+z\Phi_1(t)]$$

将$x=-r\cos\frac{2\pi}{T}t-R\cos\frac{2\pi}{T_S}t$及$z=r\sin\frac{2\pi}{T}t+R\sin\frac{2\pi}{T_S}t$代入此式，得：

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\left[\left(r\sin\frac{2\pi}{T}t+R\sin\frac{2\pi}{T_S}t\right)\Phi_1(t)-\left(r\cos\frac{2\pi}{T}t+R\cos\frac{2\pi}{T_S}t\right)\Phi_2(t)\right]$$

从式中可以明显地看到，面积速度$\frac{dS}{dt}$与时间t有关。这就是说，K **系观测者**（图 7-3 中的点 E）**‘所测到的’**行星 A 绕恒星 S 运动中连线 AE 在相等的时间间隔内所扫过的面积不为常数，而是随时间t而变的。

（B）我们讨论从K **系观测者**（E）看，行星 A 绕恒星 S 运动中连线 AS 在相等的时间间隔内所扫过的面积是否相等的问题。

行星 A 绕恒星 S 运动中连线 AS 在时间间隔Δt内所扫过的面积ΔS_1示于图 7-4。

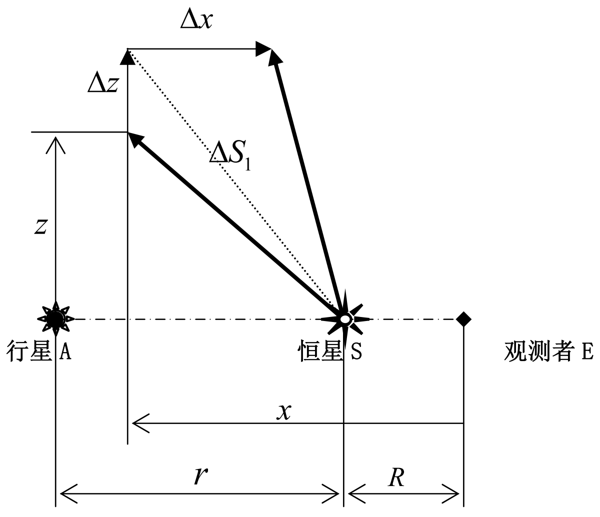


图 7-4 行星 A 绕恒星 S 运动中连线 AS 在Δt之内扫过的面积ΔS_1

从图 7-4 可知，行星 A 绕恒星 S 运动中连线 AS 在时间间隔Δt内所扫过的面积ΔS_1为：

$$\Delta S_1=\frac{1}{2}\Delta x(z+\Delta z)+\frac{1}{2}(x-R)\Delta z=\frac{1}{2}[(x-R)\Delta z+z\Delta x+\Delta x\Delta z]$$

从K **系时空轨迹**方程组

$$\begin{cases} x = -r\cos\dfrac{2\pi}{T}t - R\cos\dfrac{2\pi}{T_S}t \\ z = r\sin\dfrac{2\pi}{T}t + R\sin\dfrac{2\pi}{T_S}t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta x_1 = \left(\dfrac{2\pi r}{T}\sin\dfrac{2\pi}{T}t + \dfrac{2\pi R}{T_S}\sin\dfrac{2\pi}{T_S}t\right)\Delta t_1 = \Phi_1(t)\Delta t_1 \\ \Delta z_1 = \left(\dfrac{2\pi r}{T}\cos\dfrac{2\pi}{T}t + \dfrac{2\pi R}{T_S}\cos\dfrac{2\pi}{T_S}t\right)\Delta t_1 = \Phi_2(t)\Delta t_1 \end{cases}$$

故有：$\Delta x\Delta z = \Phi_1(t)\Phi_2(t)(\Delta t)^2$

将 $\Delta x = \Phi_1(t)\Delta t$，$\Delta z = \Phi_2(t)\Delta t$ 及 $\Delta x\Delta z = \Phi_1(t)\Phi_2(t)(\Delta t)^2$ 代入 ΔS_1，得：

$$\begin{aligned} \Delta S_1 &= \frac{1}{2}[(x-R)\Delta z + z\Delta x + \Delta x\Delta z) \\ &= \frac{1}{2}[(x-R)\Phi_2(t)\Delta t + z\Phi_1(t)\Delta t + \Phi_1(t)\Phi_2(t)(\Delta t)^2] \\ &= \frac{1}{2}[(x-R)\Phi_2(t) + z\Phi_1(t) + \Phi_1(t)\Phi_2(t)\Delta t]\Delta t \end{aligned}$$

由此得：

$$\frac{\Delta S_1}{\Delta t} = \frac{1}{2}[(x-R)\Phi_2(t) + z\Phi_1(t) + \Phi_1(t)\Phi_2(t)\Delta t]$$

对时间 t 取微商，得“面积速度 $\dfrac{dS_1}{dt}$”：

$$\frac{dS_1}{dt} = \frac{1}{2}[(x-R)\Phi_2(t) + z\Phi_1(t)]$$

将 $x = -r\cos\dfrac{2\pi}{T}t - R\cos\dfrac{2\pi}{T_S}t$ 及 $z = r\sin\dfrac{2\pi}{T}t + R\sin\dfrac{2\pi}{T_S}t$ 代入此式，得：

$$\frac{dS_1}{dt} = \frac{1}{2}\left[\left(r\sin\frac{2\pi}{T}t + R\sin\frac{2\pi}{T_S}t\right)\Phi_1(t) - \left(r\cos\frac{2\pi}{T}t + R\cos\frac{2\pi}{T_S}t + R\right)\Phi_2(t)\right]$$

从此式可以明显地看到，面积速度 $\dfrac{dS_1}{dt}$ 与时间 t 有关。这就是说，行星 A 绕恒星 S 运动中连线 AS 在相等的时间间隔内所扫过的面积不为常数，而是随时间 t 而变的。

（C）我们讨论从 K 系观测者（E）看，行星 A 绕恒星 S 运动过程中连线 AS 在相等的时间间隔内所扫过的面积是否相等的问题。

行星 A 绕恒星 S 运动过程中连线 AS 在时间间隔 Δt 内所扫过的面积 ΔS_2 示于图 7-5。

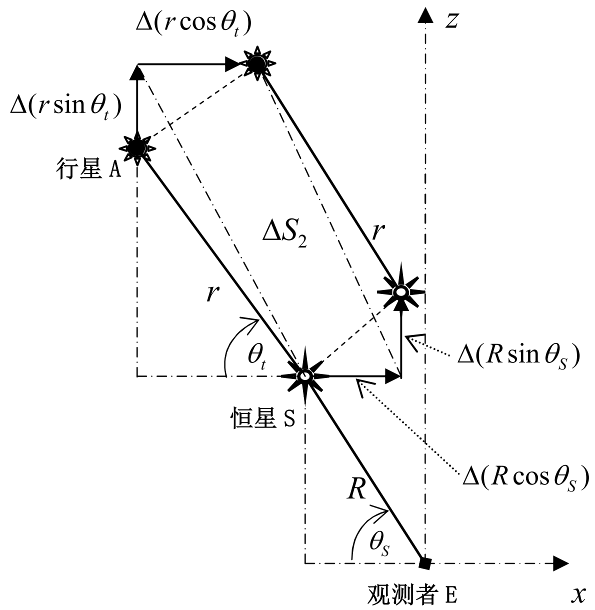


图 7-5 行星 A 绕恒星 S 运动中连线 AS 在 Δt 之内扫过的面积 ΔS_2

图 7-5 中，$\Delta(r\cos\theta_t) = r\Delta(\cos\theta_t) = -r\sin\theta_t\Delta\theta_t = -\frac{2\pi r}{T}(\sin\frac{2\pi}{T}t)\Delta t$

$$\Delta(r\sin\theta_t) = r\Delta(\sin\theta_t) = r\cos\theta_t\Delta\theta_t = \frac{2\pi r}{T}(\cos\frac{2\pi}{T}t)\Delta t$$

$$\Delta(R\cos\theta_S) = R\Delta(\cos\theta_S) = -R\sin\theta_S\Delta\theta_S = -\frac{2\pi R}{T_S}(\sin\frac{2\pi}{T_S}t)\Delta t$$

$$\Delta(R\sin\theta_S) = R\Delta(\sin\theta_S) = R\cos\theta_S\Delta\theta_S = \frac{2\pi R}{T_S}(\cos\frac{2\pi}{T_S}t)\Delta t$$

$$\begin{aligned}\Delta S_2 &= \frac{1}{2}\Delta(r\sin\theta_t)\bullet r\cos\theta_t + \frac{1}{2}[\Delta(r\cos\theta_t) + \Delta(R\cos\theta_S)]\bullet[r\sin\theta_t + \Delta(r\sin\theta_t)]\\ &+\frac{1}{2}\Delta(R\sin\theta_S)\bullet[r\cos\theta_t + \Delta(R\cos\theta_S) - \Delta(r\cos\theta_t)]\\ &-\frac{1}{2}[\Delta(r\sin\theta_t)\bullet\Delta(r\cos\theta_t) + \Delta(R\sin\theta_S)\bullet\Delta(R\cos\theta_S)]\\ &= [\Phi(t) + \Pi(t)\Delta t]\Delta t\end{aligned}$$

式中 $\Phi(t) \neq 0$，故有：$\frac{\Delta S_2}{\Delta t} = \Phi(t) + \Pi(t)\Delta t$

取微商，得“面积速度 $\frac{dS_2}{dt}$”：

$$\frac{dS_2}{dt}=\Phi(t)$$

可以看到，面积速度 $\frac{dS_2}{dt}$ 与时间 t 有关。这就是说，行星 A 绕恒星 S 运动过程中“行星 A—恒星 S”连线 AS 在相等的时间间隔内所扫过的面积不为常数，而是随时间 t 而变的。

参 考 文 献

[1] 《牛顿力学的新时空变换》，周 方/著 经济科学出版社 2013 年版

[2] 《现代牛顿力学的运动观测理论—兼评狭义相对论之“洛伦兹变换”》，周 方/著 经济科学出版社 2014 年版

[3] 《现代牛顿力学的运动观测理论—兼评狭义相对论之“洛伦兹变换”》（第二版），周 方/著 经济科学出版社 2016 年版

[4] 《相对运动观测理论》，周 方/著 经济科学出版社 2018 年版

[5] Fang Zhou：《**The Transformation of Space-Time for the Neo-Newtonian Mechanics**》，vixra.org open e-Print archive，viXra:1209.0089[pdf]

[6] Fang Zhou：《**Zhoufang Transformation (Z Transformation) and Theoretical Interpretation for Hubble's Law**》，vixra.org open e-Print archive，viXra:1704.0011[pdf]

[7]Fang Zhou：《**Zhoufang Transformation (Z- Transformation) : The Motion Observation Theory and Theoretical Interpretation for Hubble's Law**》，vixra.org open e-Print archive，viXra:1704.0313[pdf]

[8]Fang Zhou：《**On the Simplest Deduction for Space-Time Transformation in Motion Observation**》，vixra.org open e-Print archive，viXra:1705.0167[pdf]

[9]Fang Zhou：《**The Simplest Deduction for Space-Time Transformation and 'Law of Equi-Status for Reference Systems'**》，vixra.org open e-Print archive，viXra:1705.0244[pdf]

[10]Fang Zhou：《**Simultaneity and Non-Simultaneity of Events is Absolute and Independent of Reference Frames**》，vixra.org open e-Print archive，viXra:1705.0307[pdf]

[11]周方：国家科技图书文献中心，预印本 https://preprint.nstl.gov.cn/preprint/main.html?action=index

******************** ******************** ********************

附录 A：导出“伽利略-周方变换”之最简捷途径

推导途径一

“时空变换”的数学表达式必须满足以下两项条件：

a. 两坐标系相对运动的起始状态为：在 $t'=t=0$ 时，K' 系与 K 系重合。

b. 在 t'，$t>0$ 时，K' 系相对于 K 系做相对平移运动，相对速度为 $\vec{u}$。

“**伽利略-周方变换**”的观测矢量合成图示于**图 1**。

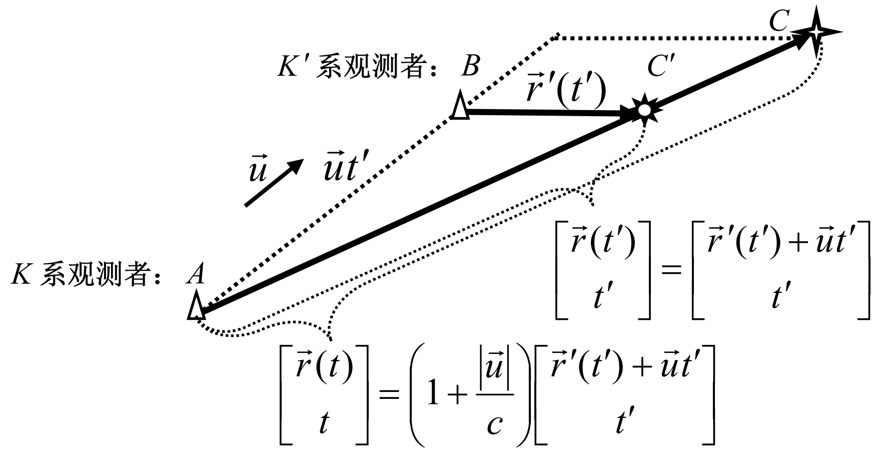


图 1 伽利略-周方变换的观测矢量合成图

1. 在时刻 t'，K' 系观测者（B）观测到运动质点（C'），即发出光波（或电磁波）信号，此时形成**观测矢量合成三角形**：

$$\vec{r}(t')=\vec{r}'(t')+\vec{u}t'$$

2. 光的传播服从**光传播定律**：$|\vec{r}(t')|=ct'$，$c=const.$ c 为光传播速率：

$$\Delta\ln|\vec{r}(t')|=\Delta\ln t'$$

$$\frac{\Delta|\vec{r}(t')|}{|\vec{r}(t')|}=\frac{\Delta t'}{t'}$$

3. 因为光传播速率 c 为有限值（$c\approx 3.0\times 10^5$ 仟米/秒），故 K 系观测者（A）必须从时刻 t' 延迟至时刻 t 才观测到该质点：

$$t=t'+\frac{|\vec{u}|(t'-0)}{c}=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)t'$$

$$\frac{t}{t'}=1+\frac{|\vec{u}|}{c}$$

$$\frac{t}{t'}-1=\frac{\Delta t'}{t'}=\frac{|\vec{u}|}{c}$$

4. $$\because\ \frac{\Delta|\vec{r}(t')|}{|\vec{r}(t')|}=\frac{\Delta t'}{t'},\quad \therefore\ \frac{\Delta|\vec{r}(t')|}{|\vec{r}(t')|}=\frac{|\vec{u}|}{c}$$

$$1+\frac{\Delta|\vec{r}(t')|}{|\vec{r}(t')|}=1+\frac{|\vec{u}|}{c}$$

$$\frac{|\vec{r}(t')|+\Delta|\vec{r}(t')|}{|\vec{r}(t')|}=1+\frac{|\vec{u}|}{c}$$

$$|\vec{r}(t')|+\Delta|\vec{r}(t')|=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)|\vec{r}(t')|$$

5. 在时刻t，K系观测者（A）观测到质点（C）：

$$|\vec{r}(t)|=|\vec{r}(t')|+\Delta|\vec{r}(t')|$$

$$|\vec{r}(t)|=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)|\vec{r}(t')|$$

$$\vec{r}(t)=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)\vec{r}(t')$$

$$\vec{r}(t)=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)[\vec{r}'(t')+\vec{u}t']$$

6. 由此得**"伽利略-周方变换"**：

$$\begin{cases}\vec{r}(t)=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)[\vec{r}'(t')+\vec{u}t'] \\ t=t'+\frac{|\vec{u}|t'}{c}=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)t'\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}\vec{r}(t)\\ t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)[\vec{r}'(t')+\vec{u}t'] \\ \left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)t'\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\begin{bmatrix}\vec{r}(t)\\ t\end{bmatrix}=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)\begin{bmatrix}\vec{r}'(t')+\vec{u}t'\\ t'\end{bmatrix}\\ \textbf{逆变换式：}\\ \begin{bmatrix}\vec{r}'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\vec{r}(t)-\vec{u}t\\ t\end{bmatrix}\end{array}}$$

*************** *************** ***************

推导途径二

在时刻t'，K'系观测者观测到运动质点$\vec{r}'(t')$，将这一事件表为**伽利略时空（'光照时**

空’）$[\vec{r},\ t]^T$ 内的观测矢量 $[\vec{r}'(t'),\ t']^T$。

由于光传播速率 c 为有限值（$c \approx 3.0\times10^5$ 仟米/秒），故在同一时刻 t'，与 K' 系观测者的距离为 $\vec{u}t'$ 的 K 系观测者尚不能观测到该运动质点，直到时刻 t：$t = t' + \dfrac{|u|t'}{c}$，$K$ 系观测者才观测到该质点，将这一事件表为**伽利略时空** $[\vec{r},\ t]^T$ 内的观测矢量 $[\vec{r}(t),\ t]^T$。

对于任意时刻 t，运动质点既处在 K 系内，同时又处在 K' 系内。因此，该质点在 K 系内对 K' 系原点 $\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{u}t = 0$ 的相对位置[$\vec{r}(t) - \vec{u}t$]，等同于它在 K' 系内的位置 $\vec{r}'(t)$，故有：

$$\begin{bmatrix} \vec{r}(t) - \vec{u}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}'(t) \\ t \end{bmatrix}$$

将 $t = t' + \dfrac{|u|t'}{c} = \left(1 + \dfrac{|u|}{c}\right)t'$ 代入等式右边，得：

$$\begin{bmatrix} \vec{r}(t) - \vec{u}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}'(\left(1 + \dfrac{|u|}{c}\right)t') \\ \left(1 + \dfrac{|u|}{c}\right)t' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{r}(t) - \vec{u}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 + \dfrac{|u|}{c}\right)\vec{r}'(t') \\ \left(1 + \dfrac{|u|}{c}\right)t' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{r}(t) - \vec{u}t \\ t \end{bmatrix} = \left(1 + \frac{|u|}{c}\right)\begin{bmatrix} \vec{r}'(t') \\ t' \end{bmatrix}$$

由此得**“伽利略-周方变换”**：

$$\begin{bmatrix} \vec{r}'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \left(1 + \frac{|u|}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix} \vec{r}(t) - \vec{u}t \\ t \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix} \vec{r}'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} \vec{r}(t)-\vec{u}t \\ t \end{bmatrix}
$$

逆变换式：

$$
\begin{bmatrix} \vec{r}(t) \\ t \end{bmatrix} = \left(1+\frac{|\vec{u}|}{c}\right) \begin{bmatrix} \vec{r}'(t')+\vec{u}t' \\ t' \end{bmatrix}
$$

“伽利略-周方变换”的观测矢量合成图示于图 2。

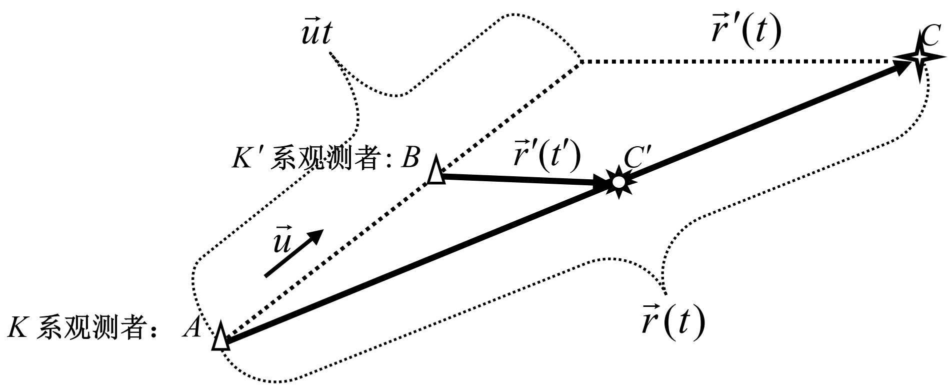


图 2 伽利略-周方变换的观测矢量合成图

***************   ***************   ***************

推导途径三：从标准空间变换式出发进行演绎

“时空变换”的数学表达式必须刻画以下物理事实：

a. 两参考系相对运动的起始状态为：在 $t'=t=0$ 时，K' 系与 K 系重合。

b. 在 t'，$t>0$ 时，K' 系相对于 K 系做相对平移运动，相对速度为 u。

为此，时空变换式必须反映如下事实：“K 系内 $x=ut$ 之点即为 K' 系之原点 $x'=0$”。相应地，空间变换式必须是方程 $x'=k(x-ut)$。下面就从这个标准的空间变换式 $x'=k(x-ut)$ 出发，进行演绎，推导出实际中客观存在的时空变换。

函数 $x'=k(x-ut)$ 的逆函数为：

$$
\begin{cases} x=\dfrac{x'}{k}+ut=\dfrac{1}{k}(x'+kut)=\dfrac{1}{k}(x'+ut') \\ t'=kt \end{cases}
$$

从而得出以下‘等价式’：

$$x' = k(x - ut) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{k}(x' + ut') \\ t' = kt \end{cases}$$

由此得到**'互为正、逆函数'**的两组方程：

$$\begin{cases} x' = k(x - ut) \\ t' = kt \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{k}(x' + ut') \\ t = \dfrac{1}{k}t' \end{cases}$$

取：

$$\begin{cases} x' = k(x - ut) \\ t' = kt \end{cases}$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x - ut \\ t \end{bmatrix}$$

下面确定系数k。

在某个时刻t'，K'系观测者观测到运动质点x'，由于光传播速率c为有限值（$c \approx 3.0 \times 10^5$仟米/秒），故在同一时刻$t'$，与$K'$系观测者的距离为$ut'$的$K$系观测者尚不能观测到该运动质点。直到$K'$系观测者发出光波（电磁波）信号的时刻$t'$之后的时刻$t$：$t = t' + \dfrac{ut'}{c}$（真空中光传播速率$c = const.$），$K$系观测者才观测到该运动质点。故有：

$$t = t' + \frac{ut'}{c} = \left(1 + \frac{u}{c}\right)t'。$$

考虑到方程中的关系式$t' = kt$，得： $k = \left(1 + \dfrac{u}{c}\right)^{-1}$

从而得**伽利略-周方变换**：

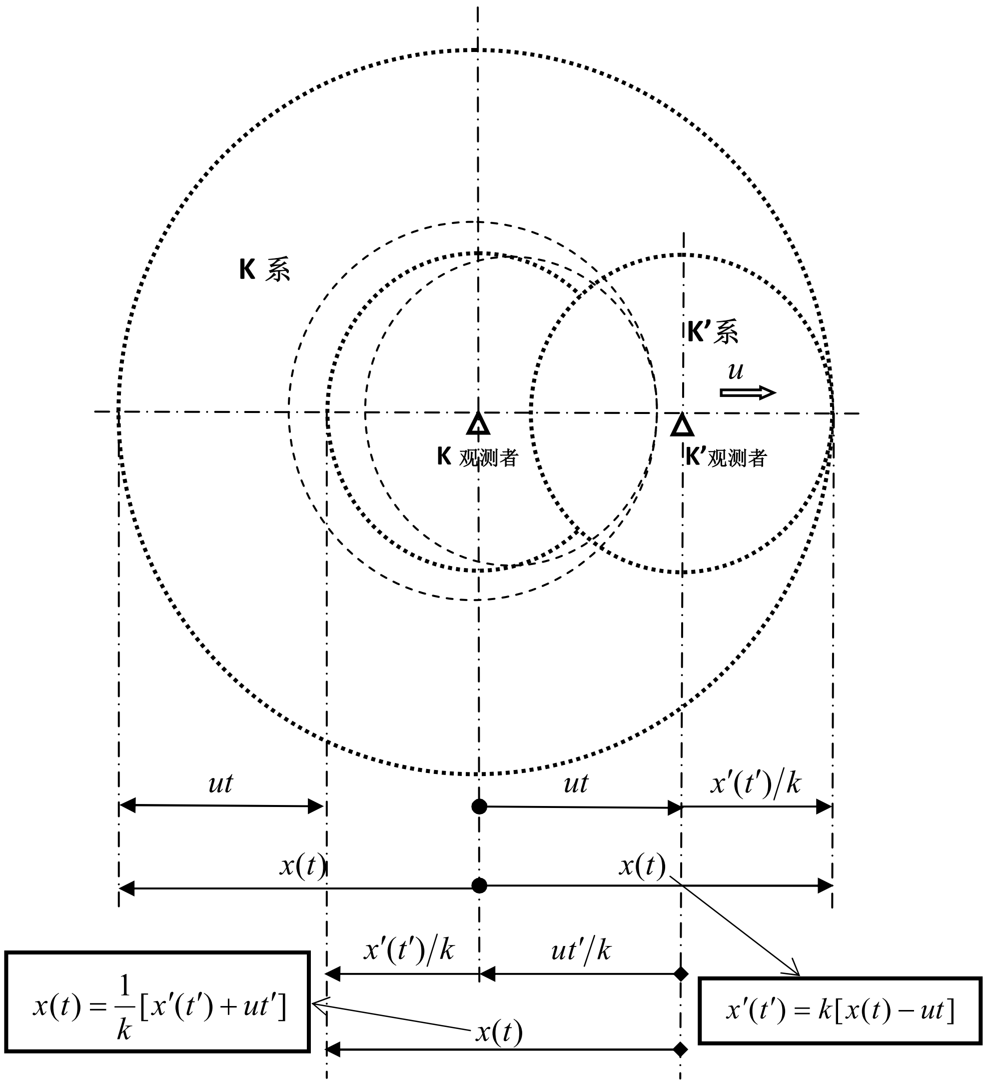
$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} x - ut \\ t \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} x - ut \\ t \end{bmatrix}}$$

逆变换式：

$$\boxed{\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = \left(1 + \frac{u}{c}\right) \begin{bmatrix} x' + ut' \\ t' \end{bmatrix}}$$

“伽利略-周方变换”之形成：



$$x'(t') = k[x(t) - ut]；\quad x(t) = \frac{1}{k}[x'(t') + ut']；\quad t' = kt；\quad k = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} < 1$$

$k = 1$时，伽利略-周方变换即退化为伽利略变换

***************　　***************　　***************

推导途径四

“观测矢量合成图”的形成过程如下：

时空变换的数学表达式必须描述以下实际物理过程：

a. 在$t' = t = 0$时，K'系与K系重合（$x' = x = 0$）。

b. 在t'，$t > 0$时，K'系相对于K系做速度为u的平移运动。

（1）在相对运动中的某时刻t'_0，K系观测者（K系原点）驻留在原地不动（$x = 0$），此

时，K' 系观测者已运动至离 K 系观测者距离为 ut'_0 之处。在此时刻 t'_0，K' 系观测者发出一道闪光 **k'**。闪光 **k'** 以恒定的传播速率 c 向四周传播。

（2）光点 **k'** 在时刻 t'_0 至时刻 t' 的时间段 $(t'-t'_0)$ 内完成了径向行程 $c(t'-t'_0)$，(c 为 K' 系内的光传播速率，同时也是 K 系内的光传播速率)。在时刻 t'，K' 系观测者观测到光点 **k'**，即观测到运动质点 D。此时运动质点 D 至相对运动起始点（$t'=t=0$ 之点）的距离为 $c(t'-t'_0)+ut'_0$。

（3）在时刻 t，K 系观测者观测到光点 **k'**，即观测到运动质点 D。此时运动质点 D 至相对运动起始点（$t'=t=0$ 之点）的距离为 $c(t-t'_0)$。

这样，K' 系观测者在时刻 t' 观测到运动质点 D，K 系观测者在时刻 t 观测到运动质点 D。

K' 系观测者与 K 系观测者在不同时刻 t' 与 t 观测到运动质点 D 之情形（即"观测矢量合成图"）示于图 1。

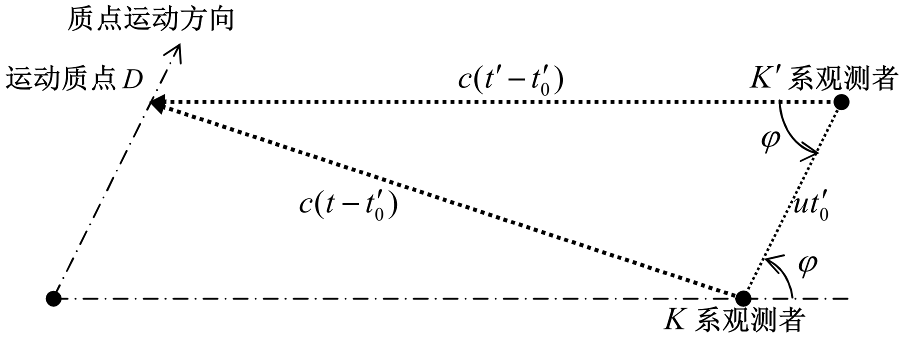


图 1 K 系观测者与 K' 系观测者的观测矢量合成图

下面，找出 K' 系观测者与 K 系观测者观测到运动质点 D 的时刻 t' 与 t 之间的关系。

从图 1 可得：

$$c^2(t-t'_0)^2 = c^2(t'-t'_0)^2 + (ut'_0)^2 - 2c(t'-t'_0)(ut'_0)\cos\varphi$$

取 $\varphi=\pi$ 之情况，即"在时刻 t'_0，K' 系观测者沿直线处在 K 系观测者前方 ut'_0 之处"的情况，得：

$$c^2(t-t'_0)^2 = c^2(t'-t'_0)^2 + (ut'_0)^2 + 2c(t'-t'_0)(ut'_0)$$

$$c(t-t'_0) = c(t'-t'_0) + ut'_0$$

等式右边表示：在某时刻 t'_0，K' 系观测者发出闪光 **k'**，光点 **k'** 经过一段行程 $c(t'-t'_0)$，在时刻 t'，到达运动质点 D，即 K' 系观测者观测到运动质点 D。这时运动质点 D 至相对

运动起始点（$t'=t=0$之点）的距离为$c(t'-t_0')+ut_0'$。

等式左边表示：一直驻留在相对运动起始点（$t'=t=0$之点）的K **系观测者**在时刻t_0'之后的时刻t观测到K' **系观测者**在时刻t_0'所发出**光点 k'**，即K **系观测者**在时刻t观测到**运动质点**D。这时**运动质点**D至相对运动起始点（$t'=t=0$之点）的距离为$c(t-t_0')$。

设：在**任意的**时刻t'，K' **系观测者**发出**闪光 k'**，于是，上式中变量t_0'取流动值t'：$t_0'=t'$，上面的等式$c(t-t_0')=c(t'-t_0')+ut_0'$便成为下式：

$$c(t-t')=c(t'-t')+ut'$$

$$c(t-t')=ut'$$

$$t=\left(1+\frac{u}{c}\right)t'$$

$$t'=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t$$

t'为K' **系观测者**观测到**运动质点**D的时刻，t为K **系观测者**观测到**运动质点**D的时刻。

由关系式$t'=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t$可知，$K'$ **系观测者**先于K **系观测者**观测到**运动质点**D。关系式$t'=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t$可以换写成$t=\left(1+\frac{u}{c}\right)t'$，此式说明，$K$ **系观测者**滞后于K' **系观测者**观测到**运动质点**D。其原因是：K' **系观测者**对K **系观测者**有相对运动，使得从K' **系观测者**发出的光波（或电磁波）在传播中产生**‘多普勒红移’**效应。

关系式$t'=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t$表示两观测者观测到**运动质点**$D$的时刻之间的关系，这个公式就是**伽利略-周方变换**的**‘时间变换式’**。

将时间变换式$t'=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t$表为：

$$t'=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t=T$$

将此式作为**“伽利略变换”**成立之**‘同时性’**条件，导出在时刻$t' = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} t = T$下的**“伽利略变换”**，后者就是我们所要推导出的**“伽利略-周方变换”**。

$t' = T$下的**“伽利略变换”**：

$$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(T) - uT \\ T \end{bmatrix} \qquad t' = T$$

等价于：

$$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} t) - u\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} t \\ \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} t \end{bmatrix} \qquad t' = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} t = T$$

由此得出**“伽利略-周方变换”**：

$$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} x(t) - ut \\ t \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} x(t) - ut \\ t \end{bmatrix}}$$

*************** *************** ***************

推导途径五

“观测矢量合成图”的形成过程如下：

时空变换的数学表达式必须描述以下实际物理过程：

a. 在$t' = t = 0$时，K'系与K系重合（$x' = x = 0$）。

b. 在t'，$t > 0$时，K'系相对于K系做速度为u的平移运动。

（1）在相对运动中的某时刻t'_0，K**系观测者**（K**系原点**）驻留在原地不动（$x = 0$），此时，K'**系观测者**已运动至离K**系观测者**距离为ut'_0之处。在此时刻t'_0，K'**系观测者**发出一道闪光 **k’**。

（2）光点 **k’**在时刻t'_0至时刻t'的时间段$(t'-t'_0)$内完成了径向行程$(c-u)(t'-t'_0)$，[式中c为K系内的光传播速率，$(c-u)$为K'系内的光传播速率]。在时刻t'，K'**系观测者**观测到光点 **k’**，即观测到**运动质点**D。此时**运动质点**D至相对运动起始点（$t' = t = 0$之点）的

距离为$(c-u)(t'-t_0')+ut_0'$。

（3）在时刻t，K系观测者观测到光点 **k'**，即观测到运动质点D。此时运动质点D至相对运动起始点（$t'=t=0$之点）的距离为$c(t-t_0')$。

这样，K'系观测者在时刻t'观测到运动质点D，K系观测者在时刻t观测到运动质点D。

K'系观测者与K系观测者在不同时刻t'与t观测到运动质点D之情形（即“观测矢量合成图”）示于图 2。

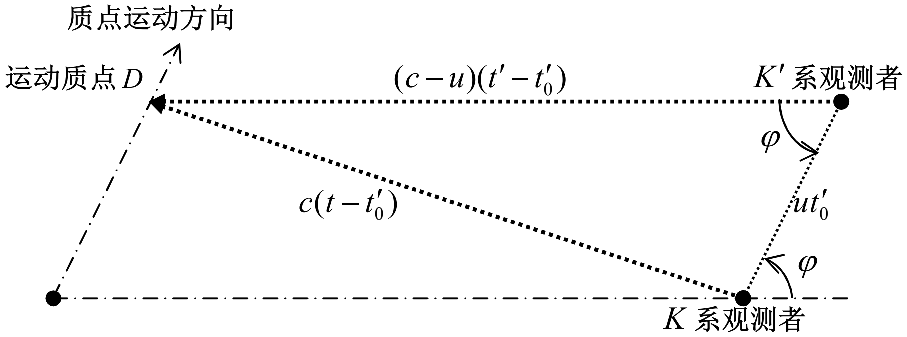


图 2 K系观测者与K'系观测者的观测矢量合成图

从图 2 可得：

$$c^2(t-t_0')^2=(c-u)^2(t'-t_0')^2+(ut_0')^2-2(c-u)(t'-t_0')(ut_0')\cos\varphi$$

取$\varphi=\pi$之情况，即“在时刻t_0'，K'系观测者沿直线处在K系观测者前方ut_0'之处”的情况，得：

$$c^2(t-t_0')^2=(c-u)^2(t'-t_0')^2+(ut_0')^2+2(c-u)(t'-t_0')(ut_0')$$

$$c(t-t_0')=(c-u)(t'-t_0')+ut_0'$$

设：在任意的时刻t'，K'系观测者发出闪光 **k'**，于是，上式中变量t_0'取流动值t'：

$t_0'=t'$，等式$c(t-t_0')=(c-u)(t'-t_0')+ut_0'$便成为下式：

$$c(t-t')=(c-u)(t'-t')+ut'$$

$$c(t-t')=ut'$$

$$t=\left(1+\frac{u}{c}\right)t'$$

$$t'=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t$$

t'为K'**系观测者**观测到**运动质点**D的时刻，t为K **系观测者**观测到**运动质点**D的时刻。

由关系式$t'=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}t$可知，$K'$**系观测者**先于$K$ **系观测者**观测到**运动质点**D。关系式$t'=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}t$可以换写成$t=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)t'$，此式说明，$K$ **系观测者**滞后于K'**系观测者**观测到**运动质点**D。其原因是：K'**系观测者**对K **系观测者**有相对运动，使得从K'**系观测者**发出的光波（或电磁波）在传播中产生**‘多普勒红移’**效应。

关系式$t'=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}t$表示两观测者观测到**运动质点**$D$的时刻之间的关系，这个公式就是**伽利略-周方变换**的**‘时间变换式’**。

将时间变换式$t'=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}t$表为：

$$t'=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t=T$$

将此式作为**“伽利略变换”**成立之**‘同时性’**条件，导出在时刻$t'=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}t=T$下的**“伽利略变换”**，后者就是我们所要推导出的**“伽利略-周方变换”**。

$t'=T$下的**“伽利略变换”**：

$$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x(T)-uT \\ T \end{bmatrix} \qquad t'=T$$

等价于：

$$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x(\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t)-u\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t \\ \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t \end{bmatrix} \qquad t'=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t=T$$

由此得出**“伽利略-周方变换”**：

$$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix}=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix} x(t)-ut \\ t \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix}=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix} x(t)-ut \\ t \end{bmatrix}}$$

关于“伽利略变换”：

“伽利略变换”为：

$$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) - ut \\ t \end{bmatrix}$$

t'为K'**系观测者**观测到**运动质点**D的时刻，t为K**系观测者**观测到**运动质点**D的时刻。

由上式可以看到，**“伽利略变换”**成立之充要条件是$t = t'$，就是说，**“伽利略变换”**要求：在相对运动中当K'**系观测者**在时刻t'观测到**运动质点**时，K**系观测者**同时（在时刻$t = t'$）观测到该**运动质点**。在K**系观测者**与K'**系观测者**有相对运动之场合下，这种情况只有在传递运动质点位置讯息的光波（电磁波）之传播速率（c）为无穷大的条件下才会出现。所以，**“伽利略变换”**得以实现之必需条件是光波（电磁波）之传播速率（c）为无穷大，换言之，在光波（电磁波）之传播速率（c）为有限值（$c \approx 3.0 \times 10^5$仟米/秒）之场合下在物理上是不可能实现**“伽利略变换”**的。因此，在“真空中光（电磁波）传播速率为有限值（$c \approx 3.0 \times 10^5$仟米/秒）之场合下**“伽利略变换”**在物理上是不现实的。在这种场合下，在物理上唯一现实存在的时空变换是**“伽利略-周方变换”**：

$$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} x(t) - ut \\ t \end{bmatrix}$$

由此式可以清楚地看到，**“伽利略变换”**只是**“伽利略-周方变换”**在真空中光（电磁波）传播速率为无穷大之假定条件下的特例。

******************** ******************** ********************

附录 B：“洛伦兹变换”必被“伽利略-周方变换”取代

“洛伦兹变换”必被“伽利略-周方变换”取代

摘要 不论采用何种方法推导出的**“洛伦兹变换”**都是错误的。**“洛伦兹变换”**在逻辑上不自洽，在数学上‘似是而非’，在物理上虚无不实，不具有任何实际意义。本文的分析得到一个重要结论：‘闽可夫斯基时空’内对质点运动的观测必满足“时空间隔不变性”，这个命题只适合于两观测者无相对运动之场合。在两观测者有相对运动的场合下，此命题是一个伪命题。相对应地，不论两观测者是否有相对运动，‘伽利略时空’内对质点运动的观测都满足“矢量合成法则”。本文的分析揭示：两观测者有相对运动且真空中光传播速率为有限值场合下客观存在的唯一的时空变换为**“伽利略-周方变换”**。

关键词　相对论 狭义相对论 运动观测论 洛伦兹变换 伽利略变换 伽利略-周方变换

定义：

a. ‘时空’之定义：$\left[\text{（三维）欧氏空间}(\vec{r}),\ \text{时间}(t)\right]^T \equiv [\vec{r},\ t]^T \equiv \left[[x,y,z]^T,\ t\right]^T$ 为可量测的“物理时空（**Physical Space-Time**）”，可命名为“伽利略时空（**Galilean Space-Time**）”。

“伽利略时空”的度规为 $\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，可称为“伽利略度规（**Galilean Metric**）”。

b. 整个“宇宙”为伽利略时空 $[\vec{r},\ t]^T \equiv \left[[x,y,z]^T,\ t\right]^T$，在其‘子时空’$[\vec{r},\ t]^T$ 内任意时空点 $[\vec{r}(t),\ t]^T$ 光的传播满足光传播定律：$|\vec{r}(t)| = ct$，$c = const.$（c 为真空中光传播速率），

故有：$d\ln|\vec{r}(t)| = d\ln t$，即光在任意时空点的“传播时空弹性”为 $\varepsilon = \dfrac{d\ln|\vec{r}(t)|}{d\ln t} = 1$，

因此，有：$\lambda[\vec{r}(t),\ t]^T = [\lambda\vec{r}(t),\ \lambda t]^T = [\vec{r}(\lambda t),\ \lambda t]^T$。观测者对时空点 $[\vec{r}(t),\ t]^T$ 的观测示于图 1。

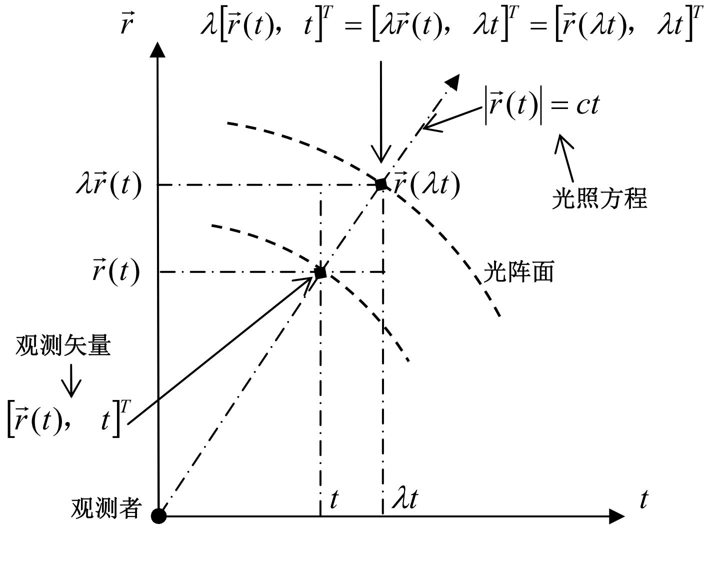


图 1 观测者对时空点 $[\vec{r}(t),\ t]^T$ 的观测矢量

因此，按物理实质，伽利略时空 $[\vec{r},\ t]^T$ 为“光照时空”（**Illuminated Space-Time**）。

c. K 系观测者在时刻 t 观测到运动质点的位置坐标记为 $\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]^T$。

$[\vec{r}(t)\quad t]^T$ 为‘K 系观测者在时刻 t 观测到运动质点 $\vec{r}(t)$ 时’指向该运动质点的“观测矢

量”（**Observation Vector**），同时也是‘该运动质点$\vec{r}(t)$在时刻t被K系观测者观测到时’的“光照矢量”（**Illuminated Vector**）。$[\vec{r}(t), \ t]^T$也可称为‘K系观测者在时刻t观测到运动质点$\vec{r}(t)$时’的“时空点”。

d. K'系观测者在时刻t'观测到运动质点的位置坐标记为$\vec{r}'(t') = [x'(t'), y'(t'), z'(t')]^T$。$[\vec{r}'(t') \quad t']^T$为‘$K'$系观测者在时刻$t'$观测到运动质点$\vec{r}'(t')$时’指向该运动质点的“观测矢量”，同时也是‘该运动质点$\vec{r}'(t')$在时刻t'被K'系观测者观测到时’的“光照矢量”。$[\vec{r}'(t'), \ t']^T$也可称为‘K'系观测者在时刻t'观测到运动质点$\vec{r}'(t')$时’的“时空点”。

*************** *************** ***************

一、推导时空变换数学式的前提条件

不失一般性，本文仅分析（一维）伽利略时空$[x \quad t]^T$的场合。

定义：

t'、t分别为K'系观测者、K系观测者所持‘时钟’指示的‘时刻’；

x'、x分别为K'系观测者、K系观测者所持‘量尺’指示的‘位置’；

$x'(t')$为K'系观测者在时刻t'观测到运动质点处于K'系内的位置。通常为了简化书写，省略括号中的t'，即将$x'(t')$简写为x'。

$x(t)$为K系观测者在时刻t观测到运动质点处于K系内的位置。通常为了简化书写，省略括号中的t，即将$x(t)$简写为x。

$[x'(t') \quad t']^T$为K'系观测者在时刻t'对运动质点$x'(t')$的“观测矢量”。

$[x' = ct' \quad t']^T$为光照点$x' = ct'$在时刻t'的“光照矢量”，即K'系观测者在时刻t'对光照点$x' = ct'$的“观测矢量”。

$[x(t) \quad t]^T$为K系观测者在时刻t对运动质点$x(t)$的“观测矢量”。

$[x = ct \quad t]^T$为光照点$x = ct$在时刻t的“光照矢量”，即K系观测者在时刻t对光照点$x = ct$的“观测矢量”。

~~~~~~
~~~~~~

迄今，人们在推导时空变换数学表达式时，无不都认为时空变换式应满足以下三项**前提条件**：

（1）“两观测者始终有相对运动”—

在$t'=t=0$时，两参考系（K'系与K系）重合（$x'=x=0$）。在t'，$t\geq 0$时，K'系相对于K系做速度为u的平移运动。两观测者持有一样的‘时钟’及‘量尺’。

（2）两观测者对同一运动质点进行观测时必满足“相对性原理”—

a.“互作匀速直线运动的两观测者（A 和 B）对同一运动质点进行观测时，观测者 A（B）‘观测到’该质点的时刻及空间坐标与观测者 B(A)在观测中‘所推测的’观测者 A（B）‘所观测到’该质点的时刻及空间坐标完全一致”。

或者表述为：

b.“互作匀速直线运动的两观测者对同一运动质点进行观测时，一个观测者‘观测到的’该质点的时刻及空间坐标就是另一个观测者在观测中‘所推测到的’，对于两个观测者皆是如此”。

（3）光的传播满足“光速不变性”定律 —

“真空中光传播速率为恒定值（约3.0×10^5仟米/秒），乃是光的固有属性，与它在哪个参考系内进行传播无关”。

~~~~~~

二、“洛伦兹变换”之导出

人们采用多种方法推导出**“洛伦兹变换”**，这里我们仅例举其中一种最简单的但具有代表性的推导**“洛伦兹变换”**的方法。

“洛伦兹变换”的‘炮制者’依据上述三项**前提条件**进行推导。

（1）“两观测者始终有相对运动”—

在$t'=t=0$时，K'系与K系重合（$x'=x=0$）。在t'，$t\geq 0$时，K'系相对于K系沿$x(x')$轴作速度为u的平移运动。因此，时空变换的**空间变换式**之数学形式为

$x'=k(x-ut)$，$u>0$。

（2）两观测者对同一运动质点进行观测时必满足“相对性原理”—

“洛伦兹变换”的炮制者将方程$x=k(x'+ut')$视为方程$x'=k(x-ut)$的**‘逆变换式’**，引入数学模型，藉以使时空变换能够满足**“相对性原理”**。
~~~~~~

（3）光的传播满足“光速不变性”定律—

设：在K'系观测者与K系观测者重合点（$t'=t=0$，$x'=x=0$）发出一道闪光。光照点在K'系与K系内的传播分别表为光照方程$x'=ct'$与$x=ct$（c为真空中光传播速率）。于是，在数学模型中引入光照方程$x'=ct'$与$x=ct$，使时空变换满足以两观测者重合点（$t'=t=0$，$x'=x=0$）为光源的“光速不变性”定律。

这样，“洛伦兹变换”的炮制者综合以上三项前提条件，预设一个包含变量x,x',t,t'的线性方程组：

$$\begin{cases} x'=k(x-ut) \\ x=k(x'+ut') \\ x=ct \\ x'=ct' \end{cases} \qquad \text{(A)}$$

式中k为待定系数。

求解这组联立方程，得出完整解：

$$x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}，\quad t'=\frac{t-\frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}，\quad x=ct，\quad x'=ct'$$

从完整解中摘取满足$x=ct$与$x'=ct'$的两个函数：$x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$与$t'=\frac{t-\frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$，分别作为时空变换的“空间变换式”与“时间变换式”，将这组函数命名为“洛伦兹变换”。

~~~~~~

三、两观测者对光照点的观测矢量$\begin{bmatrix}x'=ct' & t'\end{bmatrix}^T$与$\begin{bmatrix}x=ct & t\end{bmatrix}^T$之间的对应关系

（1）将光照点的（K系）时空轨迹$x=ct$代入空间变换式$x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$，得：

$$x'=\frac{ct-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{c-u}{\sqrt{c^2-u^2}}ct=ct\sqrt{\frac{c-u}{c+u}}=ct'$$

即得出该光照点的（K'系）时空轨迹：$x'=ct'$。
~~~~~~

（2）将光照点的（K 系）时空轨迹 $x=ct$ 代入**时间变换式** $t'=\dfrac{t-\dfrac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$，得：

$$t'=\frac{t-\dfrac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}=\frac{t-\dfrac{uct}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}=\frac{t-\dfrac{u}{c}t}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}=t\sqrt{\frac{c-u}{c+u}}$$

即得出该光照点被两观测者观测到的时刻 t' 与 t 之间的关系：$t'=t\sqrt{\dfrac{c-u}{c+u}}$ 。

于是，得到以下‘等价式’：

“洛伦兹变换”

$$\left\{x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}，\ t'=\frac{t-\dfrac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}，\ x=ct，\ x'=ct'\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{x=ct，x'=ct'，t'=t\sqrt{\frac{c-u}{c+u}}\right\}\Leftrightarrow\left\{\frac{x'}{t'}=\frac{x}{t}=c，\ t'=t\sqrt{\frac{c-u}{c+u}}\right\}\Leftrightarrow\left\{\frac{x'}{t'}=\frac{x}{t}=\frac{x\sqrt{\dfrac{c-u}{c+u}}}{t\sqrt{\dfrac{c-u}{c+u}}}=c\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\frac{x'}{t'}=\frac{x}{t}=c,\frac{x'}{t'}=\frac{x\sqrt{\dfrac{c-u}{c+u}}}{t\sqrt{\dfrac{c-u}{c+u}}}=c\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned}&\begin{bmatrix}x'(t')\\t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x(t)-0\bullet t\\t\end{bmatrix},\\&\begin{bmatrix}x'(t')\\t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x(t\sqrt{\dfrac{c-u}{c+u}})-0\bullet t\sqrt{\dfrac{c-u}{c+u}}\\t\sqrt{\dfrac{c-u}{c+u}}\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned}&\begin{bmatrix}x'(t')\\t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x(t)-0\bullet t\\t\end{bmatrix},\\&\begin{bmatrix}x'(t')\\t'\end{bmatrix}=\sqrt{\frac{c-u}{c+u}}\begin{bmatrix}x(t)-0\bullet t\\t\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{bmatrix}x'(t')\\t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x(t)-0\bullet t\\t\end{bmatrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\frac{x'}{t'}=\frac{x}{t}=c\right\}$$

式中 $\begin{bmatrix}x'(t')\\t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x(t)-0\bullet t\\t\end{bmatrix}$ 为**‘两观测者无相对运动（$u\equiv0$）’**下的**伽利略变换**。

将方程组$\frac{x'}{t'}=\frac{x}{t}=c$示于图 2。

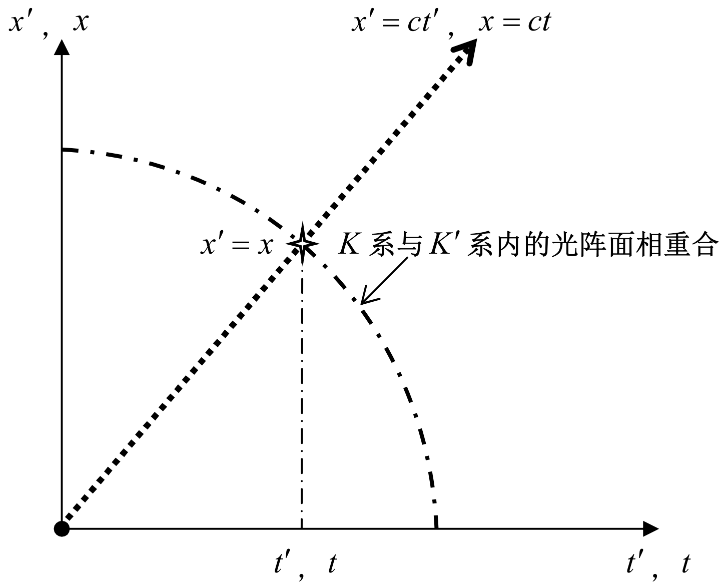


图 2 K'系观测者与K系观测者对光照点进行观测之过程

可以看到，图 2 中出现$x'=ct'$与$x=ct$，即**‘两直线相重合’**，即：对于任何时刻$t\equiv t'$都有$x=x'$：$\frac{x'}{t'}=\frac{x}{t}=c$。这就是说，$K'$系观测者与$K$系观测者在每个时刻（$t\equiv t'$）同时观测到运动质点处在同一位置$x=x'$。也就是说，$K'$系观测者与$K$系观测者始终没有相对运动（$u\equiv 0$），即始终停留在两观测者重合点（$x'=x=0$）上，在每时每刻（$t\equiv t'$）同时盯视着光照点。

这显然有悖于描述**“两观测者始终有相对运动”**的方程[$\forall(t)$：$x'=k(x-ut)$，$u>0$]。

还可以看到，图 2 中$x=ct$与$x'=ct'$（**‘两直线相重合’**），使得在时刻$t'=t=0$从两观测者重合点（$x'=x=0$）发出的闪光在K'系与K系内的光阵面为同一阵面。

~~~~~~

四、“洛伦兹变换”是物理上不存在的‘时空变换’

下面我们揭示**“洛伦兹变换”**之谬误。

（1）方程$x'=k(x-ut)$能满足以下条件：

a. 在$t'=t=0$时，K'系与K系重合（$x'=x=0$）。

b. 在t'，$t\geq 0$时，K'系相对于K系做速度为u的平移运动。

因此，联立方程组(A)中预设的方程$x'=k(x-ut)$是一个正确的方程。

（2）为了满足**“相对性原理”**，**“洛伦兹变换”**的炮制者在联立方程组(A)中预设方程
~~~~~~

$x=k(x'+ut')$，并将方程 $x=k(x'+ut')$ 与方程 $x'=k(x-ut)$ 视为时空变换的**‘正变换式’**与**‘逆变换式’**。

事实上，函数 $x=k(x'+ut')$ 不能单独成为函数 $x'=k(x-ut)$ 的**‘逆函数’**，其原因是：函数 $x'=k(x-ut)$ 中除空间变量 x，x' 之外还含有时间变量 t，因此在它的**‘逆函数’**中必定有变量 t'。因此，**‘正函数’**及**‘逆函数’**除有‘x 与 x' 之关系式’（**空间变换式**）之外必定还有‘t 与 t' 之关系式’（**时间变换式**），（**读者可自行推导**）。所以，$x=k(x'+ut')$ 与 $x'=k(x-ut)$ 单独两个方程并不能成为时空变换的**‘正变换式’**与**‘逆变换式’。所以，“洛伦兹变换”**：

$$x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}，\quad t'=\frac{t-\frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

不满足**“相对性原理”。（读者可自行验证）**

[提示：必须使用求“逆函数”的正规方法（而不是采用‘对换数学符号’的简单手法）进行逐步推演，试看能否使‘正函数’与‘逆函数’具有相同的结构形式，即试看变换方程组的变换矩阵与逆变换矩阵是否具有相同的张量形式。]

（3）**“洛伦兹变换”**的炮制者依据**‘闽可夫斯基时空’**内质点运动满足**“时空间隔不变性”**：

$$\forall(t，t')：x^2-c^2t^2\equiv x'^2-c^2t'^2=s^2=const.$$

得出关系式：

$$\boxed{\forall(t，t')：x-ct\equiv x'-ct'=0}$$

于是在数学模型中引入方程 $x'=ct'$ 与 $x=ct$ 。

‘以 K' 系观测者与 K 系观测者重合点（$t'=t=0$，$x'=x=0$）为光源’的“**光速不变性**”定律示于图 3。

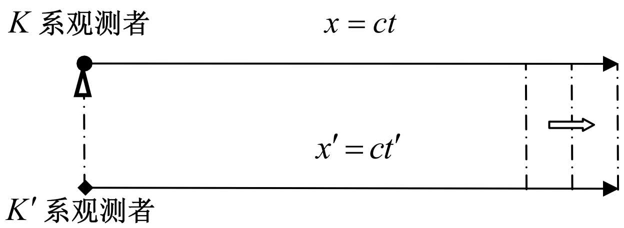


图 3 在两观测者重合点发光的“光速不变性”定律

如图 3 所示，**‘以两观测者重合点**（$t'=t=0$，$x'=x=0$）**为光源’**的**“光速不变性”定律**应表为如下关系式：

$$\boxed{\forall(t\equiv t')：x-ct\equiv x'-ct'=0\Leftrightarrow x\equiv x'}$$

（因为两观测者持有相同的‘时钟’，故式中：$t\equiv t'$）

引入方程 $x'=ct'$ 与 $x=ct$，就使得图 2 中出现 $x'=ct'$ 与 $x=ct$，即**‘两直线相重合’**。

图 2 中**‘两直线相重合’**，说明对于任何时刻 $t=t'$ 都有 $x=x'$。这就是说，K' **系观测者**与 K **系观测者**在每个时刻（$t\equiv t'$）同时观测到运动质点处在同一位置 $x=x'$。也就是说，K' **系观测者**与 K **系观测者**之间不存在相对运动（$u\equiv 0$），即两观测者始终停留在重合点（$t'=t=0$，$x'=x=0$）上，于每时每刻同时盯视着光照点的实时运动。

这样，依据**‘闽可夫斯基时空’**内质点运动必满足**“时空间隔不变性”**，推导出：

$$\text{“洛伦兹变换”}\left\{x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}，\ t'=\frac{t-\frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}，\ x=ct，\ x'=ct'\right\}\Leftrightarrow\left\{\frac{x'}{t'}=\frac{x}{t}=c\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{bmatrix}x'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x(t)-0\bullet t\\ t\end{bmatrix}\right\}$$

可以看到，推导出的**“洛伦兹变换”**为**“恒等变换（Identical Transformation）”** $\left\{\frac{x'}{t'}=\frac{x}{t}=c\right\}$，即**‘两观测者无相对运动（$u\equiv 0$）’**下的**“伽利略变换”** $\begin{bmatrix}x'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x(t)-0\bullet t\\ t\end{bmatrix}$，这显然违背了描述**“两观测者有相对运动”**的方程[$\forall(t)$：$x'=k(x-ut)$，$u>0$]的前提条件：$u>0$。

“洛伦兹变换”将**事实上有相对运动的两观测者**对运动质点的观测过程**在数学上**歪曲为**无相对运动的两观测者**对运动质点的观测过程。因此，**“洛伦兹变换”**是物理上根本就不存在的**‘时空变换’**。

~~~~~~

下面，为了与**“洛伦兹变换”**相对照，我们采用一种极简捷的方法推导出**伽利略-周方变换**。
~~~~~~

“伽利略-周方变换”之简捷推导

按下列步骤进行推导。

（1）**“两观测者始终有相对运动”**—

在$t'=t=0$时，K'系与K系重合。在t'，$t\geq 0$时，K'系相对于K系做速度为u的平移运动，故空间变换式的数学式应为$x'=k(x-ut)$，$k>0$。

（2）**两观测者对同一运动质点进行观测时必满足“相对性原理”**—

函数$x'=k(x-ut)$的**逆函数**为：

$$\begin{cases} x=\dfrac{x'}{k}+ut=\dfrac{1}{k}(x'+kut)=\dfrac{1}{k}(x'+ut') \\ t'=kt \end{cases}$$

从而得到**‘互为正、逆函数’**的两组方程：

$$\begin{cases} x'=k(x-ut) \\ t'=kt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{k}(x'+ut') \\ t=\dfrac{1}{k}t' \end{cases}$$

其中任意一组方程皆可为时空变换式。取：

$$\begin{cases} x'=k(x-ut) \\ t'=kt \end{cases}$$

为时空变换式。式中k为待定系数。

（3）**光的传播必满足“两参考系有相对运动（$u\neq 0$）下的‘光速不变性’定律”**—

“两参考系有相对运动（$u\neq 0$）下的‘光速不变性’定律”：

$$\forall(t\equiv t')\text{：}x-ct\equiv(x'+ut')-ct'=0\Leftrightarrow x\equiv x'+ut'$$

等价于**“两观测矢量通过观测者之间距离形成矢量合成三角形”**准则。

在两观测者有相对运动之场合下，光的传播必满足**“两参考系有相对运动（$u\neq 0$）下的‘光速不变性’定律”**。这就是说，在引入方程$x=ct$与$x'=ct'$时应考虑**“两参考系有相对运动（$u\neq 0$）”**这一约束条件：$x=x'+ut'$，也就是说，应当在K'**系观测者**（$x'=0$）运动至“K**系内**$x=ut'$**之点**”时，分别从**“两观测者重合点**（$t'=t=0$，$x'=x=0$）**”**与“K**系内**$x=ut'$**之点**”各自发出闪光，而不应当像**“洛伦兹变换”**的炮制者那样：在**两观测者重合点**（$t'=t=0$，$x'=x=0$）发出一道闪光，引入**‘以两观测者重合点**（$t'=t=0$，

$x'=x=0$）为光源’的“光速不变性”定律。

约束条件 $x=x'+ut'$ 下的“光速不变性”定律示于图 4。

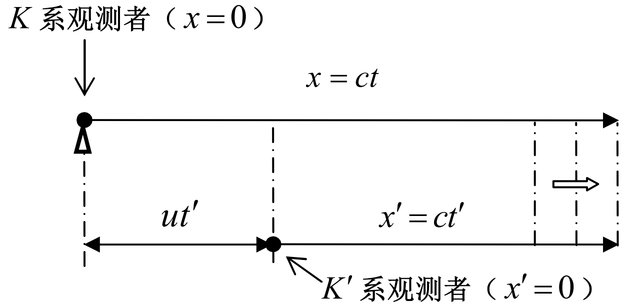


图 4 两观测者在不同地点同时发光的“光速不变性”定律

如图 4 所示，约束条件 $x=x'+ut'$ 下的“光速不变性”定律对应于以下关系式：

$$\boxed{\forall(t\equiv t')：x-ct\equiv(x'+ut')-ct'=0\Leftrightarrow x\equiv x'+ut'}$$

将 $x=ct$ 与 $x'=ct'$ 代入约束条件 $x=x'+ut'$

得：
$$ct=ct'+ut'$$

从而得：
$$t'=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t$$

将此关系式与上面的时间变换式 $t'=kt$ 相对照，便得到待定系数 k：$k=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}$

于是，就得到‘一维时空’下的伽利略-周方变换：

$$\begin{bmatrix}x'\\t'\end{bmatrix}=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix}x-ut\\t\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x'\\t'\end{bmatrix}=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix}x-ut\\t\end{bmatrix}$$

逆变换式：

$$\begin{bmatrix}x\\t\end{bmatrix}=\left(1+\frac{u}{c}\right)\begin{bmatrix}x'+ut'\\t'\end{bmatrix}$$

引入两参考系有相对运动（$u\neq0$）下的“光速不变性”定律，等同于在预设方程组中引入方程组 $x=ct$，$x'=ct'$ 与 $x=x'+ut'$。这样，关于伽利略-周方变换的预设方程组便是：

$$\begin{cases} x' = k(x-ut) \\ t' = kt \\ x = ct \\ x' = ct' \\ x = x' + ut' \text{。} \end{cases}$$

从这组方程即可得出**伽利略-周方变换**：$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} x-ut \\ t \end{bmatrix}$

将两观测者重合点（$t' = t = 0$，$x' = x = 0$）发出之**光照点**的（K 系）时空轨迹 $x = ct$ 通过 **‘伽利略-周方变换’**，映射为该**光照点**的（K' 系）时空轨迹：

将 $x = ct$ 代入**伽利略-周方变换** $\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} x-ut \\ t \end{bmatrix}$，得：

$$\begin{cases} x' = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}(ct-ut) = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}(c-u)t = (c-u)t' \\ t' = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} t \end{cases}$$

由此得：

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} x-ut \\ t \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ x = ct，x' = (c-u)t'，t' = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} t \right\}$$

于是，得出一组同时成立的函数：$x = ct$ 与 $x' = (c-u)t'$，描述 K' **系观测者**与 K **系观测者**对**光照点**进行观测之过程。关系式 $t' = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} t$ 反映两观测者之间相对运动产生的**“多普勒效应”**。

将 $x = ct$ 与 $x' = (c-u)t'$ 示于图 5。

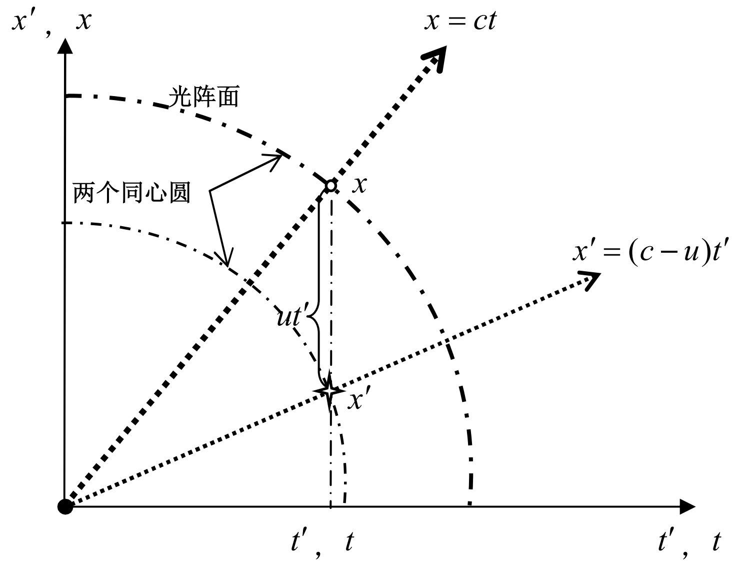


图 5 $x=ct$ 与 $x'=(c-u)t'$ 之间的伽利略-周方变换

伽利略-周方变换 $\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} \begin{bmatrix} x-ut \\ t \end{bmatrix}$ 可等价地表为：

$$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} t) - u\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} t \\ \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} t \end{bmatrix}$$

由此可以看出，**“伽利略-周方变换”**其实就是两观测者有相对运动场合下于时刻 $t'=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} t$ 的**“伽利略变换”**。换言之，**“伽利略-周方变换”**就是两观测者有相对运动且真空中光传播速率为有限值场合下因‘多普勒效应’导致两参考系之间‘时空度规’发生变动而形成于时刻 $t'=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} t$ 的**“伽利略变换”**。

~~~~~~

“伽利略-周方变换”计算示例

对于**‘一维时空’**场合，K' 系与 K 系之间的关系示于图 6。
~~~~~~

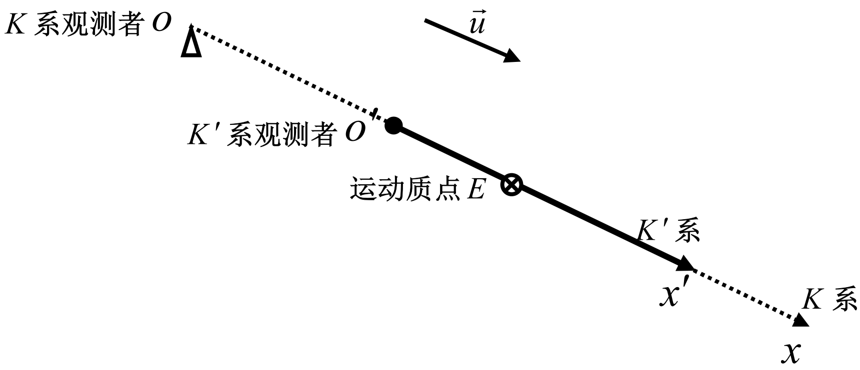


图 6 K' 系与 K 系之间的关系

伽利略-周方变换$\begin{bmatrix} x(t) \\ t \end{bmatrix} = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)\begin{bmatrix} x'(t')+ut' \\ t' \end{bmatrix}$的 K' 系时空点与 K 系时空点示于图 7。

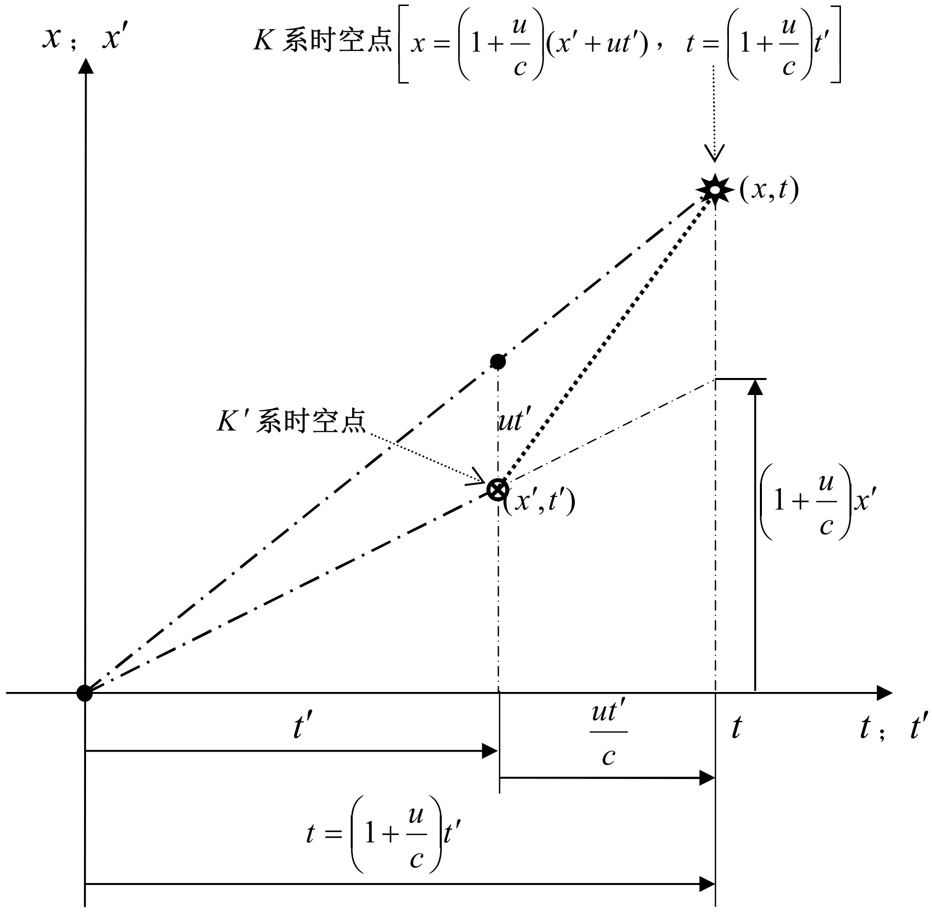


图 7 伽利略-周方变换的 K' 系时空点与 K 系时空点

计算结果示于图 8。

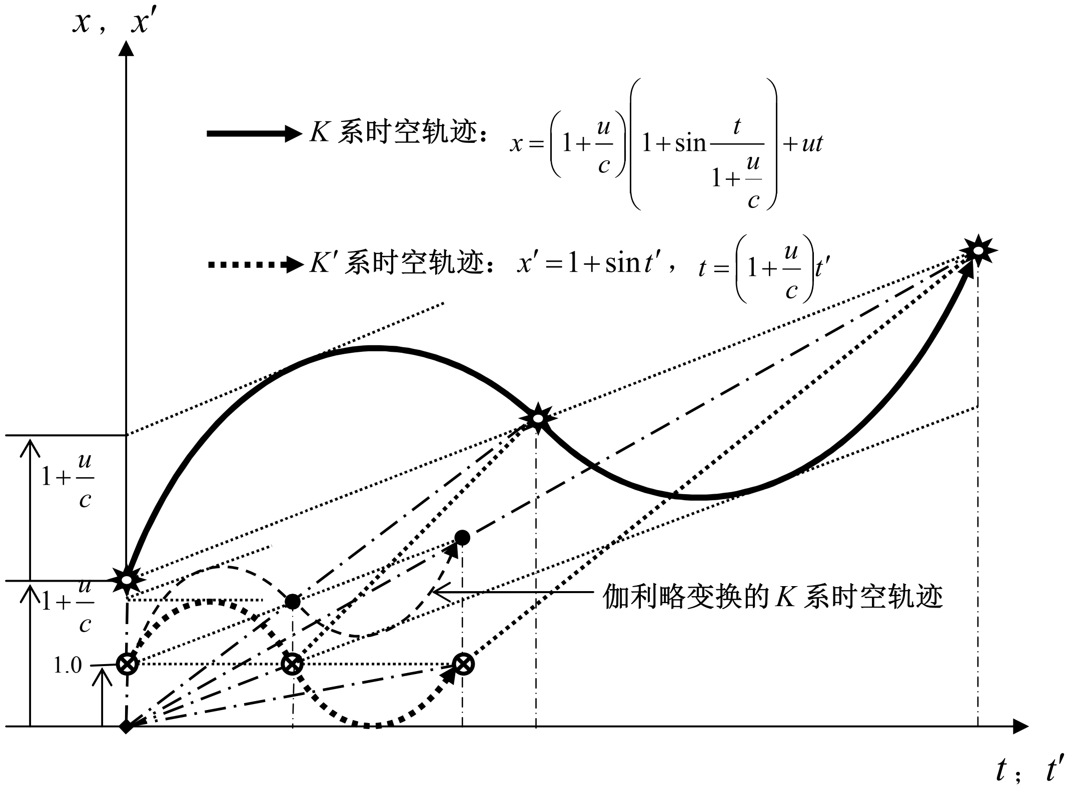


图 8 伽利略-周方变换的 K' 系时空轨迹与 K 系时空轨迹

图 7 及图 8 展示了运动质点的 K' 系时空轨迹 $x'=1+\sin t'$ 通过伽利略-周方变换转换为 K 系时空轨迹 $x=\left(1+\frac{u}{c}\right)\left(1+\sin\frac{t}{1+\frac{u}{c}}\right)+ut$ 的清晰图景：

1. 由于 K' 系观测者与 K 系观测者之间有相对运动（u），使得从 K' 系观测者向 K 系观测者传播的波动产生‘多普勒效应’。因此，在 K 系观测者看来，K' 系中的波动变慢 $\left(1+\frac{u}{c}\right)$ 倍[即频率变低 $\left(1+\frac{u}{c}\right)$ 倍]，相应地周期及波长均变大 $\left(1+\frac{u}{c}\right)$ 倍。

2. 由于真空中光传播速率为有限值（c），致使 K 系观测者在时间上滞后于 K' 系观测者 [$t=\left(1+\frac{u}{c}\right)t'$] 观测到运动质点。因为（观测中）时空点（即‘光照点’）$[x(t),\quad t]^T$ 满足‘光传播定律’：$x(t)=ct$，$c=const.$ 使得光的“传播时空弹性”为 $\varepsilon=\frac{d\ln x(t)}{d\ln t}=1$，所以 K' 系中的波动周期变大 $\left(1+\frac{u}{c}\right)$ 倍。就使得波动振幅也变大 $\left(1+\frac{u}{c}\right)$ 倍。

总的情况是：在 K 系观测者看来，K' 系中的波动：**频率变低** $\left(1+\frac{u}{c}\right)$ 倍，**周期变大** $\left(1+\frac{u}{c}\right)$ 倍，**波长变大** $\left(1+\frac{u}{c}\right)$ 倍，**振幅变大** $\left(1+\frac{u}{c}\right)$ 倍。

在 K 系时空轨迹 $x=\left(1+\frac{u}{c}\right)\left(1+\sin\frac{t}{1+\frac{u}{c}}\right)+ut$ 中必然出现‘ut’，说明两观测者始终处在相对运动之中。

~~~~~~

下面，列出五个表，对**“洛伦兹变换”**与**伽利略-周方变换**进行全面对照。

表 1

	“洛伦兹变换”	**伽利略-周方变换**
相对性原理	“洛伦兹变换”： $x'=\dfrac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$，$t'=\dfrac{t-\frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ 不满足“相对性原理”。（读者可自行验证） ~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~ 提示： 必须使用求“逆函数”的正规方法（而不是采用‘对换数学符号’的简单手法）进行逐步演绎，试看能否使‘正函数’与‘逆函数’具有相同的结构形式，即试看变换方程组的变换矩阵与逆变换矩阵是否具有相同的张量形式。	函数 $x'=k(x-ut)$ 的‘逆函数’为： $\begin{cases} x=\frac{x'}{k}+ut=\frac{1}{k}(x'+kut)=\frac{1}{k}(x'+ut') \\ t'=kt \end{cases}$ 由此得到互为‘正变换’与‘逆变换’的（互相等价的）两组方程： $\begin{cases} x'=k(x-ut) \\ t'=kt \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{k}(x'+ut') \\ t=\frac{1}{k}t' \end{cases}$ （k 为待定系数） 其中任一组方程即为时空变换方程组 ~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~ “伽利略-周方变换”为： $\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix}=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix} x-ut \\ t \end{bmatrix}$ 能满足“相对性原理”。
~~~~~~

表 2

	“洛伦兹变换”	伽利略-周方变换
光 速 不 变 性	依据：‘闽可夫斯基时空’内光照点运动必满足“时空间隔不变性”— $\boxed{\begin{array}{l}\forall(t\equiv t')：\\ x-ct\equiv x'-ct'=0\end{array}}$ 从而引入方程 $x=ct$ 与方程 $x'=ct'$，得“洛伦兹变换”： $\left\{x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}，\ t'=\frac{t-\frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}，\ x=ct，\ x'=ct'\right\}$ $\Updownarrow$ $\left\{\frac{x'}{t'}=\frac{x}{t}=c，\ t'=t\sqrt{\frac{c-u}{c+u}}\right\}$ $\Leftrightarrow$“恒等变换”$\left\{\frac{x'}{t'}=\frac{x}{t}=c\right\}$ $\Leftrightarrow$‘两观测者无相对运动（$u\equiv 0$）’下的“伽利略变换”$\left\{\begin{bmatrix}x'(t')\\ t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x(t)-0\bullet t\\ t\end{bmatrix}\right\}$ 两观测者对光照点观测的时空轨迹为： $x=ct$，$x'=ct'$ 两直线相重合（参看图 2）	依据：‘伽利略时空’内光照点运动必满足“两观测矢量通过观测者之间距离形成矢量合成三角形”，引入约束条件 $x=x'+ut'$ 下的“光速不变性”定律： $\boxed{\begin{array}{l}\forall(t\equiv t')：\\ x-ct\equiv(x'+ut')-ct'=0\\ \Leftrightarrow x\equiv x'+ut'\end{array}}$ 从而引入方程 $x=ct$、方程 $x'=ct'$ 与约束条件 $x=x'+ut'$，得： $t'=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t$ 与变换方程组：$x'=k(x-ut)$，$t'=kt$ 中的时间变换式 $t'=kt$ 相对照，得出待定系数 k：$k=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}$ 从而得“伽利略-周方变换”： $\begin{bmatrix}x'\\ t'\end{bmatrix}=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix}x-ut\\ t\end{bmatrix}$ $\Updownarrow$ $x=ct,x'=(c-u)t',t'=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}t$ 两观测者对光照点观测的时空轨迹为： $x=ct$，$x'=(c-u)t'$ 两直线不相重合（参看图 5）

表 3

<table>
<tr><th>“洛伦兹变换”</th><th>伽利略-周方变换</th></tr>
<tr><td>
“洛伦兹变换”

$$\left\{x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},\ t' = \frac{t-\frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},\ x = ct,\ x' = ct'\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{x = ct,\ x' = ct',\ t' = t\sqrt{\frac{c-u}{c+u}}\right\}$$

$$\Updownarrow$$

“恒等变换”

$$\left\{\frac{x'(t')}{t'} = \frac{x(t)}{t} = c\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) - 0 \bullet t \\ t \end{bmatrix}$$

—‘两观测者无相对运动（$u \equiv 0$）’下的“伽利略变换”
</td><td>
“伽利略-周方变换”

$$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix} x(t)-ut \\ t \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{x = ct, x' = (c-u)t', t' = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} t\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} x'(t') \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\left(\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} t\right) - u\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} t \\ \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} t \end{bmatrix}$$

—两观测者有相对运动且真空中光传播速率为有限值场合下因‘多普勒效应’导致两参考系之间‘时空度规’发生变动而形成于时刻 $t' = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} t$ 的“伽利略变换”。
</td></tr>
</table>

表 4

	“洛伦兹变换”	**伽利略-周方变换**
	（1）“洛伦兹变换”的炮制者依据‘闽可夫斯基时空’内光照点运动必满足“时空间隔不变性”： $\boxed{\begin{array}{l}\forall(t\equiv t')：\\ x-ct\equiv x'-ct'=0\end{array}}$ 预设联立方程组： $\begin{cases}（1）\ x'=k(x-ut),\ \ u>0\\ （2）\ x=k(x'+ut'),\ \ u>0\\ （3）\ x-ct\equiv x'-ct'=0\end{cases}$ 等同于方程组： $\begin{cases}x'=k(x-ut)\\ x=k(x'+ut')\\ x=ct\\ x'=ct'\end{cases}$ (A) 方程组中四个方程是互相独立的方程。此方程组有解。 由此得出“洛伦兹变换”： $\left\{x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},\ t'=\frac{t-\frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}，\ x=ct，\ x'=ct'\right\}$	依据‘伽利略时空’内光照点运动必满足“两观测矢量通过观测者之间距离形成矢量合成三角形”，引入约束条件 $x=x'+ut'$ 下的“光速不变性”定律： $\boxed{\begin{array}{l}\forall(t\equiv t')：\\ x-ct\equiv(x'+ut')-ct'=0\\ \Leftrightarrow x\equiv x'+ut'\end{array}}$ （参看图 4） 预设方程组为： $\begin{cases}x'=k(x-ut), & u>0\\ t'=kt\\ x-ct\equiv(x'+ut')-ct'=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow x\equiv x'+ut',\ \ u>0$ 等同于方程组： $\begin{cases}x'=k(x-ut),\ \ u>0\\ t'=kt\\ x=ct\\ x'=ct'\\ x=x'+ut'，\ u>0\end{cases}$ 方程组中五个方程显然是兼容的。 此方程组有解。 由此得出“伽利略-周方变换”： $\begin{bmatrix}x'\\ t'\end{bmatrix}=\left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1}\begin{bmatrix}x-ut\\ t\end{bmatrix}$

表 4（续）

<table>
<tr><th></th><th>“洛伦兹变换”</th><th>伽利略-周方变换</th></tr>
<tr><td></td><td>（2）实际上，以两观测者重合点（$t' = t = 0$，$x' = x = 0$）为光源的“光速不变性”定律应当表为如下关系式：

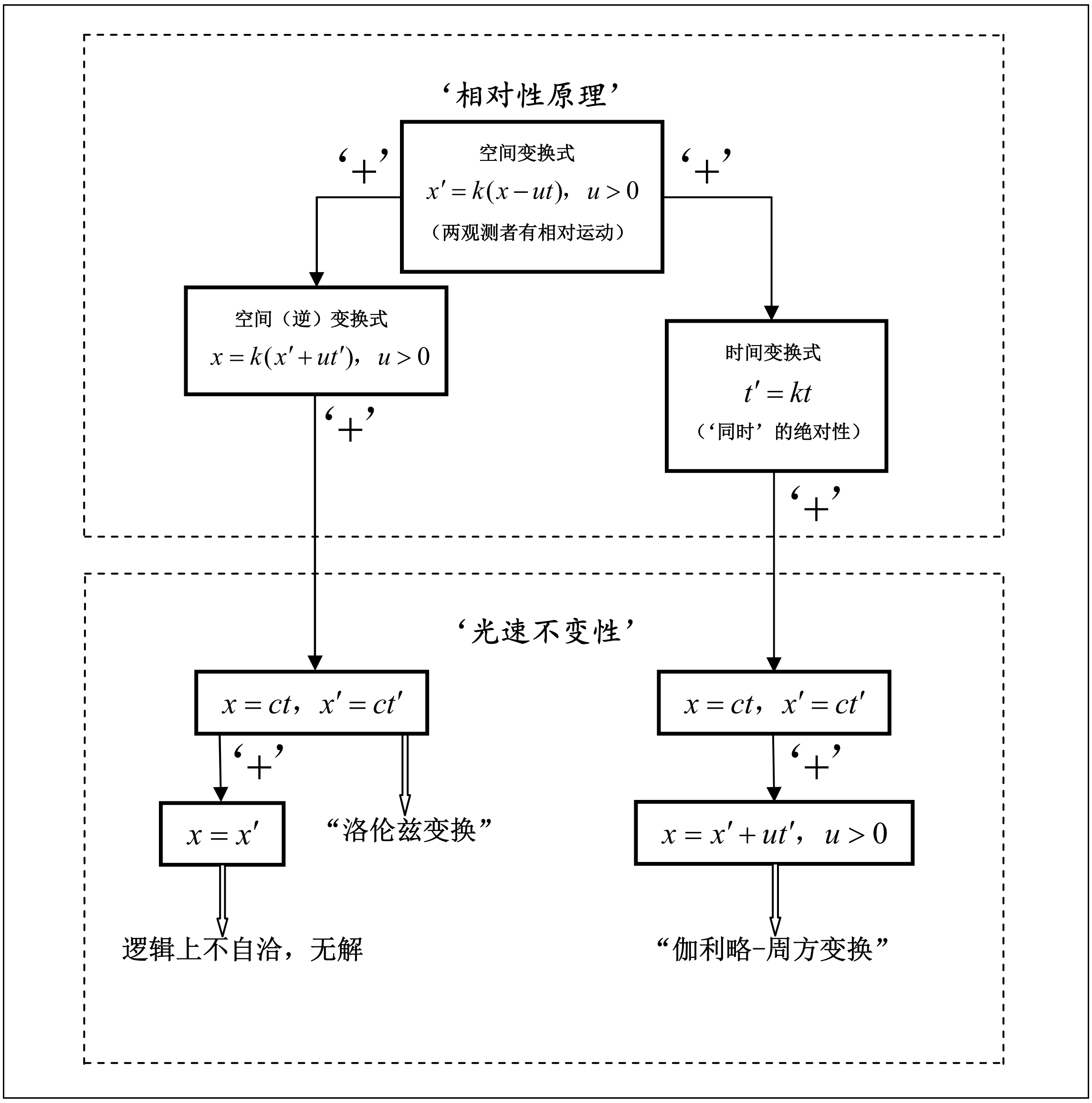
$$\boxed{\begin{aligned}&\forall(t \equiv t')：\\&x - ct \equiv x' - ct' = 0\\&\Leftrightarrow x \equiv x'\end{aligned}}$$
（参看图 3）

故预设方程组应为：

$$\begin{cases}（1）\ x' = k(x - ut)，\ u > 0\\（2）\ x = k(x' + ut')，\ u > 0\\（3）\ x - ct \equiv x' - ct' = 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x \equiv x'$$
等同于方程组：

$$\begin{cases}x' = k(x - ut)，\ u > 0\\x = k(x' + ut')，\ u > 0\\x = ct\\x' = ct'\\x = x'\end{cases}$$
此情况下，将 $x = x'$ 代入方程 $x' = k(x - ut)$ 及方程 $x = k(x' + ut')$，导致 $u \equiv 0$，与方程 $x' = k(x - ut)$ 及方程 $x = k(x' + ut')$ 的前提条件 $u > 0$ 相矛盾。因此，此方程组无解。</td><td></td></tr>
</table>

表 5 预设方程组的构成



结 论

迄今，人们采用各种方法推导出的**“洛伦兹变换”**竟然皆为**“恒等变换（Identical Transformation）”**即：**‘两观测者无相对运动（$u \equiv 0$）’**下的**“伽利略变换”**。时至今日，终于真相大白：一个多世纪以来，**“洛伦兹变换”**通过‘似是而非’的数学公式，‘指鹿为马’，‘偷梁换柱’，将**事实上有相对运动的两观测者**对运动质点的观测过程**在数学上**歪曲为**无相对运动的两观测者**对运动质点的观测过程。因此，**“洛伦兹变换”**是物理上根本就不存在的**‘时空变换’**。

~~~~~~
~~~~~~

本文得到一个重要结论：‘闽可夫斯基时空’内质点运动必满足“时空间隔不变性”，只在‘两观测者无相对运动’之场合下是正确的。在‘两观测者有相对运动’的场合下，‘闽可夫斯基时空’内质点运动必满足“时空间隔不变性”，是一个伪命题。

相应地，本文的分析得出如下定律：“处于相对运动中的两观测者不可能于每时每刻（$t \equiv t'$）同时观测到运动质点处在同一位置（$x = x'$），除非两观测者始终无相对运动”。

这是一条‘自然定律’，可称为“运动观测定律”。“运动观测定律”是“运动观测论”的基础定律，在“运动观测论”中具有奠基性地位。

总之，“洛伦兹变换”$\left\{ x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}\ ,\ t' = \dfrac{t - \dfrac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \right\}$是在逻辑上不自洽，在数学上‘似是而非’，在物理上根本不存在的‘伪时空变换’。

“洛伦兹变换”祸害全球物理学界长达一个多世纪，对现代科学的发展起了阻碍作用，带来严重的恶果 ，从它所得出的结论中“悖论百出”。因此可以说，直接或间接依赖于“洛伦兹变换”所得出的任何物理学结论，以及以“洛伦兹变换”为基础，或有其参与，或赖其佐证而得到的任何结论统统都不可避免是荒谬的、是不可置信的。

文中分析揭示，只需铲除“洛伦兹变换”的各项致命错误，对“洛伦兹变换”进行‘拨乱反正’，便立即得出正确的时空变换 —“伽利略-周方变换”。

“两观测者有相对运动且真空中光传播速率为有限值”场合下客观存在的唯一的时空变换是“伽利略-周方变换”。

~~~~~~

参 考 文 献

[1]《狭义与广义相对论浅说》，（美）A.爱因斯坦/著　杨润殷/译　北京大学出版社　2006 年版

[2]《狭义相对论（第二版）》，刘辽 费保俊 张允中 编著　科学出版社　2008 年版

*******************　　*******************　　*******************
~~~~~~

Theory for Motion Observation

Zhoufang

(Chinese Academy of Social Sciences)

Abstract The objectively existing in nature transformation of space-time for the case of observers' mutual uniform motion and limited light velocity is firstly revealed. The discovered transformation, referred to as Galilean-Zhou Transformation , is logically derived by author, using both the principle of relativity and the postulate of constancy of the light velocity. The Galilean-Zhou Transformation is actually and essentially the General Galilean Transformation. A new theory of special relativity, referred to as 'Theory for Motion Observation' is put forward. The theoretical interpretation for Hubble's Law is firstly revealed by author, and the Kepler's Law is as well reviewed, utilizing Galilean-Zhou Transformation.