# Суперструны и параллельные миры
# (Superstrings and parallel worlds)

Александр Васильевич Исаев
(Alexander Vasilievich Isaev)

Abstract

Главная цель этой книги – рассказать об удивительных аналогиях между реальным физическим миром и миром натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,…. Как ни странно, но эти столь знакомые нам числа, обладают богатейшей «внутренней» структурой (целые делители этих чисел и прочие их характе-ристики). При этом натуральный ряд словно распадается на множество па-раллельных миров. Да и все математические идеи в целом (а только они един-ственно верно, адекватно описывают реальность!) – это виртуальный мир Платона, существующий «параллельно» нашему миру. Об этом сейчас заду-мываются самые серьезные ученые-естественники.

The main goal of this book is to tell about amazing analogies between the real physical world and the world of natural numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,…. Oddly enough, but these numbers so familiar to us, have the richest "internal" structure (integer divisors of these numbers and their other characteristics). At the same time, the natural row seems to split into many parallel worlds. And all mathematical ideas in general (and only they are the only true, adequately describe reality!) - This is the virtual world of Plato, existing "parallel" to our world. The most serious natural scientists are now thinking about this.

**ББК 22.313**
**И 85**

**И85** **Исаев А. В.**
**Суперструны и параллельные миры**. СПб.: «ЛИСС», 2006. – 188 с.

**ISBN 5-87050-211-X**

Даже если Вам незнаком мировой бестселлер физика-теоретика Б. Грина «Элегантная Вселенная», то в настоящей книге говорится достаточно (и простым языком), чтобы представить себе *теорию суперструн* – одну из новейших в физике теорий, которая объединяет микромир элементарных частиц с законами бесконечного космоса.

Теория суперструн предсказывает существование целого ряда *параллельных миров*, пока не доступных нам в экспериментах, и главная цель данной книги рассказать ещё об одном из таких миров. Этот бесконечно богатый мир скрывается за бесхитростным бесконечным рядом натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, … . Автор уже девятый год пытается проникнуть в тайну мира чисел, но настоящая работа практически не повторяет предыдущие его книги. И если раньше читатель, наверняка, оценивал труды автора словами «Всё это – чепуха», то теперь уже напрашивается более осторожная оценка: «В этом что-то есть». Остается только надеется, что в скором будущем очень многие скажут о подобных исследованиях мира чисел, что, мол, «Это так очевидно!»…

## О Г Л А В Л Е Н И Е

“Бог – это число”. “Самое мудрое – число”. “Числу же все подобно”. “Первообразы и первоначала не поддаются ясному изложению на словах, потому что их трудно уразуметь и трудно высказать, – оттого и приходится для ясности обучения прибегать к числам”. “Все происходит не из числа, но сообразно с числом, ибо в числе – первичная упорядоченность..."

**Пифагор** (ок. 570–500 до н. э.)

“Из всех проблем, рассматриваемых в математике, нет таких, которые считались бы в настоящее время более бесплодными и лишенными предложений, чем проблемы, касающиеся природы чисел и их делителей.... В этом отношении нынешние математики сильно отличаются от древних, придававших гораздо большее значение исследованиям такого рода. ... Математика, вероятно, никогда не достигла бы такой степени совершенства, если бы древние не посвятили столько сил развитию вопросов, которыми сегодня большинство пренебрегает из-за их мнимой бесплодности”.

**Л. Эйлер** (1707–1783)

“Математика – королева наук, а теория чисел – королева математики”.

**К. Гаусс** (1777–1855)

”... Единственной целью науки является возвеличить человеческий ум, и при таком подходе вопрос о числах столь же значителен, как вопрос о системе мира”.

**К. Якоби** (1804–1851)

“Целые числа сотворил господь бог, а все прочее – дело людских рук”.

**Л. Кронекер** (1823 – 1891)

“Тот, кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества”.

**Р. Бэкон (ок. 1214–1292)**

«Тот, кто порицает высшую точность математики, кормится за счет путаницы и никогда не отступится от уловок софистских наук, порождающих бесконечную болтовню». … «Никакой достоверности нет в науках там, где нельзя приложить ни одной из математических наук».

**Леонардо да Винчи** (1452–1519)

«… физическое представление о мире… составляет сейчас главную часть культуры нашей эпохи».

**Р. Фейнман**

# Глава I. **В В Е Д Е Н И Е**

## 1. ПРЕДИСЛОВИЕ

Главная цель этой книги – рассказать об удивительных аналогиях между реальным физическим миром и миром натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,…. Как ни странно, но эти столь знакомые нам числа, обладают богатейшей «внутренней» структурой (целые делители этих чисел и прочие их характеристики). При этом натуральный ряд словно распадается на множество *параллельных миров*. Да и все математические идеи в целом (а только они единственно верно, адекватно описывают реальность!) – это виртуальный мир Платона, существующий «параллельно» нашему миру. Об этом сейчас задумываются самые серьезные ученые-естественники.

Параллельные миры в реальной жизни это также далеко не фантастика. Теоретическая физика пришла к таким невероятным «сценариям» (гипотезам) по части иных миров, что фантастам они и не снились. Особенно богата новыми идеями так называемая *теория суперструн* – новейшая физическая теория, объясняющая всё мироустройство от микромира до макрокосмоса (т.е. «теория всего»).

Книга начинается с краткого и доступного описания этой теории, рассчитанного на самого неподготовленного читателя. Причем подробней всего рассматривается именно то, что находит своё «отражение» в мире натуральных чисел. Последнему посвящена б*о*льшая часть книги, которая содержит в основном *новый* фактический материал (не повторяющий мои предыдущие книги, см. стр. 183, 185).

Сами «отражения» («***рефлекции***», гл. III §6) собраны в конце книги (гл. IV). Разумеется, это самые спорные мысли автора. Их можно просто игнорировать, однако тогда очень может быть, что некоторые удивительные тайны нашего мира останутся Вами не замеченными. Рефлекции призваны «заманить» читателя в удивительно богатый мир чисел, который наградит открытиями каждого своего исследователя. Лично для меня кристально чистый мир чисел давно уже стал своеобразной новой *религией в числовом формате*, дающей духовные силы в наше непростое, крайне противоречивое время.

## 2. СОКРАЩЕНИЯ

| | |
|---|---|
| БО | – Большой отрезок (ряда натуральных чисел, см. гл. III §6) |
| БПС | – состояние (черного ящика с зарядом и минимальной массой, гл.II §12) |
| ВНТ | – второе начало термодинамики (см. гл. II §20) |
| ГРВ | – гравитационное взаимодействие (сила в природе, см. гл. II §5) |
| ГРЛ | – главный редкий лидер (из нечетного мира *T*, гл. III §20, [10, с. 58]) |
| ГТНЧ | – графическая теория натуральных чисел (см. гл. III §6) |
| ГЧЛ | – главный частый лидер (из четного мира *T*, гл. III §20, [10, с. 65]) |

ДИ – дополнительные измерения (помимо 4-х нам доступных, гл. II §13)
ДНК – дезоксирибонуклеиновая кислота («молекула жизни» [10, с. 199])
ДСВ – дискретная случайная величина (в ТВ, гл. III §23, [14, с. 40])
ЗРБ – закон распределения богатства (см. гл. III §26; гл. IV реф. 47)
КЗП – коэффициент заполнения пространства (реф. 6, [10, с. 113])
КМ – квантовая механика (теория, описывающая микромир, см. гл. II §3)
КС – константа связи (раньше считалась ФФК, §12, реф.36, 39, [14, с.83])
КТГ – квантовая теория гравитации (пока ещё не создана, см. гл. II §2)
КТЭСВ – квантовая теория электрослабых взаимодействий (гл. II §5)
КХД – квантовая хромодинамика (теория, описывает СИЛВ, см. гл.II §5)
КЧ – комплексные числа (неотъемлемая часть структуры КМ, гл. III §7)
КЭД – квантовая электродинамика (частично описывает ЭЛМВ, гл. II §5)
ЛПД – лидер плотности делителей (особое натуральное число, гл. III §25)
ЛРМ – лидер редкого мира (1-ое число с данным нечётным $T$, гл. III §10)
ЛЧМ – лидер частого мира (1-ое число с данным чётным $T$, гл. III §10)
МТЦ – микротрубочки цитоскелета (в них наш мозг «вычисляет», реф.51)
НСВ – непрерывная случайная величина (в ТВ, гл. III §22, [14, с. 44])
ОП – относительная погрешность (какой-либо формулы, см. гл. III §6)
ОТО – общая теория относительности (А. Эйнштейна, см. гл. II §2)
ПК – персональный компьютер (см. гл. III §6, [14, с. 7, 9])
ПКЯ – пространство Калаби-Яу (класс 6-мерных объектов, см. гл. II §13)
ПТС – постоянная тонкой структуры ($\alpha \approx 1/137$, реф. 36, 37, 39, [14, с. 82])
РАН – Российская Академия Наук
СИЛВ – сильное взаимодействие (сила в природе, см. гл. II §5)
СЛВ – слабое взаимодействие (сила в природе, см. гл. II §5)
СМ – стандартная модель (популярная физическая теория, см. гл. II §8)
СТО – специальная теория относительности (А. Эйнштейна, гл. II §2)
ТВ – теория вероятностей (раздел высшей математики, [14, с.39], §22, 23)
ТС – теория суперструн (суперсимметричных струн, струн, см. гл. II §11)
ФМК – фундаментальная математическая константа (см. гл. I §3)
ФФК – фундаментальная физическая константа [14, с.82], реф. 32, 33,35
ФЧ – фундаментальная частица (см. гл. II §4)
ЦИ – центральный интервал (у делителей натурального числа, гл. III §22)
ЭЛМВ – электромагнитное взаимодействие (сила в природе, см. гл. II §5)
IQ – коэффициент интеллектуальности человека (реф. 48, 49, 52, 57)

## 3. ОБОЗНАЧЕНИЯ

§5 – ссылка на параграф 5 (номер главы обычно ясен из контекста)
[3, с. 12] – ссылка на книгу [3] (см. «Литература»), а точнее – на её стр. 12
реф. 7 – отсылка к рефлекции 7 (см. гл. III §6, гл. IV)

Сокращения слов:

в т.ч. (в том числе) т.д. (так далее) т.н. (так называемый)
до н.э. (до нашей эры) т.е. (то есть) т.п. (тому подобно)
м.б. (может быть) т.к. (так как)

## Общепринятые обозначения

+, –, = – арифметические операции: «сложение», «вычитание», «равно»
· , /, ^ – «умножение», «деление», «возведение в степень» (крышка)
8E+60 = $8 \cdot 10^{60}$ экспоненциальный числовой формат (м.б. на графиках)
$\infty$ – бесконечность (как противопоставление понятию конечного)
$N \to \infty$ – означает, что величина $N$ стремиться к бесконечности
$\sum, \prod, \sqrt{}, \int$ – сумма, произведение, корень квадратный, интеграл
$<, >, \le, \ge$ – «меньше», «больше», «меньше (больше) или равно»
$\equiv$ – «равно по определению», например $n! \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$
$n!$ – факториал, то есть $n! \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (формула из комбинаторики)
$\approx$ – символ приближенного равенства, например, $\pi^2 \approx 3{,}14^2 \approx 10$
*const* – числовая константа (когда её значение для нас не существенно)
$N=f(X)$ – величина $N$ является некой функцией ($f$) от величины $X$
ln, lg – логарифм натуральный, логарифм десятичный (две функции)
exp($N$) – показательная функция с основанием $\boldsymbol{e}$, то есть $\exp(N) \equiv \boldsymbol{e}^N$
abs($N$) – абсолютная величина (модуль) $N$, т.е. число $N$ без учета знака
*max*, *min* – максимум, минимум (некой величины, например, $T_{max}$, $T_{min}$)
lim – предел (функции, последовательности, и проч.)
A($N$) – функция “антье” (целая часть числа $N$), например, A(3,14) = 3
($a$; $b$), [$a$; $b$], ($a$; $b$] – интервал, отрезок, полуинтервал ($a < b$ – некие числа)
$R^2$ – величина достоверности аппроксимации линии тренда (в идеале $\to$ 1)
~ (*тильда*) в книге имеет два значения: 1). Равенство порядков, например,
$7 \cdot 10^8 \sim 5 \cdot 10^9$, а $N \sim 10^3$ может означать как $N$=630, так и $N$=2050.
2). Знак асимптотического равенства, см. гл. III §9, [14, с. 13].

## Фундаментальные математические константы (ФМК)

$\boldsymbol{\pi}$ = 3,141593… – число «пи», число Архимеда, [10, с. 88]
$\boldsymbol{e}$ = 2,718282… – основание натуральных логарифмов, [10, с. 86]
$\boldsymbol{C}$ = 0,577215… – постоянная Эйлера–Маскерони, (см. гл. III §10)
4,669201… – 1-ое число Фейгенбаума, открыто в 1975 г., [10, с. 99, 126]
2,502907… – 2-ое число Фейгенбаума, открыто в 1975 г. (реф. 25)
$\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}$ – мнимая единица (в комплексном числе, см. гл. III §7)
$\boldsymbol{K}$ = 6174 – постоянная Капрекара (это не ФМК?) [10, с. 106]
$\boldsymbol{\Phi}$ = 1,618034… – число Фидия (“золотое сечение”) (реф. 31, [10, с. 90])

# Глава II. **ТЕОРИЯ СУПЕРСТРУН**

## 1. ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКИ

Современная физика покоится на двух столпах:
– **общая теория относительности** (**ОТО**), которая объясняет Вселенную в космических масштабах (порядка $10^{12}$ разных галактик и их скопления);
– **квантовая механика** (**КМ**), описывающая мир мельчайших частиц.

Это две мощные, но, увы, конфликтующие теории. Они приводят нас к математически противоречивому лоскутному одеялу физики, что указывает на изъян в понимании окружающего мира. Между макрокосмосом и микромиром нет гармоничного единства, что противоречит нашему опыту и ожиданиям. Вот почему целый ряд крупнейших физиков за последние 40 лет разработали *теорию суперструн* (ТС), которая не только «помирила» ОТО и КМ, но сделала их союз закономерным, неизбежным. Правда, далеко не все физики признали ТС, отчасти из-за чрезвычайно сложной математики, в которую необходимо погрузиться для *полного* понимания ТС (мы будем избегать сложной математики в данной книге).

В рамках ТС богатые, сложные и разнообразные явления во Вселенной вытекают из простого набора универсальных законов. Самая сокровенная тайна мироздания – простота и мощь принципов, лежащих в его основе. Нечто подобное заложено и в ТС, причем она не противоречит уже известной нам физике, и по оценке многих специалистов вероятность того, что ТС неверна – крайне мала.

В части объединения ОТО и КМ помимо ТС активно развивались и другие подходы. Например, в 1980 гг. советские ученые (Я.Б. Зельдович, А.Д. Линде, А.Д. Сахаров, и др.) заложили фундамент новой науки – *космомикрофизики* [28], [36]. Р. Пенроуз 20 лет разрабатывал свою *теорию твисторов*, которая якобы «является просто способом математической записи давно созданных физических теорий» [23, с.203]. Твисторы – это абстрактные геометрические объекты, действующие в многомерном комплексном пространстве (область более глубокая, чем квантовые поля и частицы), которое лежит в основе обычного пространства-времени. Абхей Аштекар разработал метод *новых переменных* (инициатор работ – Р. Пенроуз). Все эти теории могут иметь глубокую связь с ТС [3, с.255].

Идея создания универсальной теории (*теории всего*) давно стала Святым Граалем современной физики и не только физики… Некоторые ученые мечтают систематизировать и обобщить *все* знания о мире, полученные человеком (такую науку назвали *Megascience* – меганаука). В этом же русле лежит попытка увязать микрофизику и… работу нашего мозга, вот что пишет об этом Р. Пенроуз [23, с. 380]: «Я полагаю, что именно *после* открытия *квантовой теории гравитации* (КТГ) у нас, в конце концов, появится возможность описания с её помощью феномена сознания», и далее «…все мы – просто ничтожные частички мира, полностью управляемого (пусть даже только вероятностно) очень точными математическими законами. Равно как и наш мозг…».

## 2. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

*Общая теория относительности* (ОТО) объясняет главные категории нашей Вселенной – пространство, время, тяготение (гравитацию). Когда гравитационное взаимодействие относительно слабое и космические тела движутся медленно по сравнению со *скоростью света* ($\boldsymbol{c} \approx 3{\cdot}10^8$ м/сек), то справедлив закон всемирного тяготения Ньютона. Но в самом общем случае тяготение описывается именно ОТО, которая является обобщением закона тяготения Ньютона на основе *специальной теории относительности* (СТО). Эта теория в своём окончательном виде была разработана А. Эйнштейном в 1905 г., и я скажу о ней пару слов, прежде чем вернусь к ОТО.

Согласно СТО, все объекты во Вселенной *всегда* движутся в *пространстве-времени* с одной постоянной скоростью (суммарной в 4-х измерениях: трех пространственных и одном временном), причем эта скорость равна скорости света $\boldsymbol{c}$. Пространство и время нерасторжимо перемешаны (существует только единое пространство-время) благодаря неожиданному факту (установленному в СТО), что движение объекта в пространстве влияет на его перемещение во времени. Кстати, сам Эйнштейн предлагал называть свою теорию не СТО, а «теорией инвариантности» (поскольку $\boldsymbol{c} = const$).

Если тело движется в пространстве, то часть его движения во времени будет отвлечена, т.е. во времени оно будет двигаться медленнее (будет медленнее стареть). Для наблюдателя, находящегося в движении, время течет медленнее, чем для неподвижного (и наоборот). [И неспроста, когда вы бросаете мимолетный взгляд на проносящийся рядом поезд, то его пассажиры в окнах кажутся «застывшими» (а им кажется «застывшей» ваша фигура).] Но хотя, скажем, быстро движущаяся элементарная частица живет медленной жизнью, «количество жизни» у неё остается тем же самым, что у неподвижной частицы. Таким образом, у фотонов (движущихся со скоростью света) просто не остается скорости во времени, фотоны не стареют, у них возраст остается таким же, как и при их зарождении (в момент возникновения Вселенной при т.н. Большом взрыве).

В 1915 г. (спустя 10 лет после разработки СТО) Эйнштейн сформулировал ОТО, причем он работал над проблемой гравитации с предельной, часто чрезмерной интенсивностью и, по его словам, СТО, «кажется детской забавой» по сравнению с ОТО. Согласно ОТО материя создает искривление пространства-времени, а оно, в  свою очередь, влияет на движение материи, создающей искривление. Этим гравитация резко отличается от других сил в природе (скажем, от ядерных сил), причем искривление пространства-времени (тяготение) определяется не только массой системы, но и всеми видами энергии, присутствующими в данной системе.

Гравитацию уже нельзя считать слабой при больших энергиях частиц ($\sim 10^{27}$ эВ), т.к. их гравитационный заряд становится равным электрическому заряду, а при очень высоких энергиях гравитационное взаимодействие может стать основным. Поэтому ОТО становится неприменима вблизи *сингулярностей* – мест, где искривления пространства-времени очень велики (радиус кривизны $\sim 10^{-35}$ м), где «обрывается» существование в известной нам форме фундаментальных частиц и физических полей. Поэтому в сингулярности гравитационное поле должно подчиняться квантовым законам, скажем, *квантовой теории гравитации* (КТГ, которая ещё не создана).

Поскольку гравитационное поле есть проявление искривления пространства-времени, то в трехмерном пространстве крупномасштабная геометрия Вселенной могла бы оказаться неевклидовой (сумма углов треугольника не равна $\pi$, отношение длины окружности к радиусу не равно $2\pi$ и т. д.), а время в разных точках будет течь по-разному (чем сильнее поле тяготения, тем медленнее течет время). Какова геометрия реального пространства Вселенной в целом (евклидова или сферическая) – наукой пока не установлено.

Физики признают, что ОТО дает наилучшее известное описание пространства-времени и гравитации. В значительной степени это обусловлено удивительной красотой и изяществом ОТО, однако, математический аппарат ОТО настолько сложен, что почти все задачи, кроме самых простейших, оказываются пока неразрешимыми.

## 3. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

*Квантовая механика* (КМ) – это теория, устанавливающая способ описания и законы движения микрочастиц (элементарных частиц, атомов, молекул, атомных ядер) и их систем (например, кристаллов), для которых характерная величина *действия* $S$ (см. чуть ниже) сравнима с квантом действия $h$. Квант действия (*постоянная Планка*) – это универсальная мировая константа $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, играющая фундаментальную роль в КМ (теория зародилась в 1900 г. благодаря открытию, сделанному Максом Планком). Для процессов, в которых величиной $h$ можно пренебречь (по сравнению с характерным действием $S$), справедлива классическая механика Ньютона.

*Действие S* – это величина, занимающая центральное положение в физике. Действие $S$ представляет собой интеграл от *лагранжиана L* по пространству-времени: $S = \int L\, dx\, dy\, dz\, dt$ (лагранжиан определяет собой все свойства физических полей). Универсальная и ключевая роль действия $S$ в физике обусловлена существованием основного закона физики – *принципа наименьшего действия*: для реальных процессов в природе величина действия экстремальна – его вариации обращаются в нуль ($\delta S$=0). Как сказал Ферма «природа действует наиболее легкими и доступными путями». [Мы, оказывается, «подчиняемся» закону физики, когда «срезаем» свой путь и, увы, протаптываем тропинку на газоне (не обходя его по тротуару).]

Но основное величие действия $S$ связано не с законами сохранения, а с тем, что в действии $S$ заключена вся динамика взаимодействия полей и частиц. Фактически, построение теории элементарных частиц сводится к нахождению фундаментального лагранжиана, описывающего физический мир, и к решению вытекающих из него уравнений движения [21, с. 15].

Фундаментальное описание материи должно иметь вероятностный характер. Согласно КМ Вселенная развивается по математическим законам, но они определяют только вероятность того, что может наступить А или В, но что будет в действительности – КМ не говорит. Так, согласно КМ электроны просто существуют в атоме, причем с определенной вероятностью (разной в каждой точке атома), и исключается всякая возможность наблюдения за тем, как электроны "вращаются" вокруг ядра, ибо само наблюдение (а это всегда некое физическое воздействие на атом) безнадежно искажает реальную картину микромира. Тем не менее "*планетарная модель*" атома совместно с квантовомеханическим *принципом Паули* хорошо описывает реальные свойства атома (реф. 10). Для ядра, в свою очередь, срабатывает *квазиатомная модель*: ядро атома, обладая равномерной плотностью, не имеет выделенного центра, а нуклоны в ядре атома движутся фактически свободно по почти независимым "орбитам", подобно электронам в планетарной модели атома.

*Соотношение неопределенностей* Гейзенберга – это сердцевина КМ, её пробный камень, отличающий квантовую логику от классической. Согласно КМ движение любых микрочастиц становится всё более хаотическим, по мере того как их положение мы ограничиваем всё меньшими областями в пространстве (квантовая *клаустрофобия*). Энергия частицы может флуктуировать в очень широких пределах, если измерения проводятся в течение достаточно короткого периода времени. Чем больше частиц в объекте, тем меньше вероятность эффекта туннелирования всех его частиц. Даже в пустой области пространства в микромире имеет место невероятная активность. Энергия и импульс являются неопределенными: они флуктуируют между крайними значениями. Но энергия может превращаться в материю ($E$

$= mc^2$), поэтому и в пустоте могут возникнуть электрон и позитрон (и тут же аннигилировать). Именно *бурлящий хаос* микромира является препятствием к слиянию ОТО и КМ.

Несмотря на всё вышесказанное, следует подчеркнуть, что квантовое описание является *точным*, хотя и радикально отличающимся от классического. Вероятности *не возникают* на микроскопическом уровне (движение частиц, молекул и атомов происходит *детерминистично*), а появляются в результате некоторого загадочного крупномасштабного действия, ответственного за существование классического макромира, доступного нашим ощущениям [23, с. 207]. Говоря о малом масштабе, мы подразумеваем не физические размеры, а малые изменения энергии. Вот почему квантовые эффекты могут происходить на расстояниях многих метров или даже световых лет.

В 1965 г. Р. Фейнман (величайший специалист по КМ) сказал, что если ОТО ещё можно понять, то «КМ не понимает никто». Любопытно, что Эйнштейн так и не признал КМ, считая, что «… вероятности необходимы только для того, чтобы прикрыть наше невежество… законы природы причинны. Бог не играет в кости».

В КМ просто следуют формулам и правилам, установленным «отцами-основателями» КМ, и четким вычислительным процедурам, но без реального понимания того, *почему* эти процедуры работают, или что они в действительности означают (на «интуитивном» уровне). В КМ сущность природы маскируется. Многое из нашей повседневной жизни теряет всякий смысл в КМ, там нужно кардинально менять наш язык и логику рассуждений. Однако КМ – это математически корректная теория, она предсказывает с поразительной точностью – только поэтому ей и доверяют.

Нет согласия физиков и в вопросах о том, что в действительности представляют собой квантовые волновые функции (уравнения) Шредингера. Игнорируя СТО, они дают только приближенное описание микромира, поэтому возникла *квантовая электродинамика*.

Подход Фейнмана к КМ (совершенно другое представление!) полностью эквивалентен (решения тождественны) подходу, основанному на волновых функциях. По Фейнману каждый электрон перемещается («рыщет») по всем возможным траекториям одновременно. Каждому из этих путей можно поставить в соответствие некоторое число, и общее среднее этих чисел даст ту же вероятность, что и расчет с использованием волновой функции («суммирование по путям»). Но все траектории, кроме одной, взаимно сократятся при суммировании их вкладов (весов).

Согласно ОТО, отсутствие масс на больших масштабах Вселенной означает, что пространство является плоским. ОТО говорит, что в пустом пространстве гравитационное поле равно нулю, но согласно КМ так будет в среднем, а текущее значение гравитационного поля испытывает гигантские флуктуации (на ультрамикроскопических масштабах). Т.к. гравитационное поле проявляется в кривизне пространства, то это квантовые флуктуации самого пространства-времени! (кипящая квантовая пена). В такой «пене» понятия «налево и направо», «вверх и вниз», «до и после» – теряют свой смысл.

В КМ рушится основной принцип ОТО – гладкость геометрии пространства. ОТО и КМ позволили рассчитать масштаб расстояний, при переходе к которому проявляется столь разрушительный хаос. Этот масштаб определяется так называемой ***планковской длиной*** $l_{\mathrm{pl}} \equiv [Gh/(2\pi c^3)]^{1/2} \approx 10^{-35}$ м в которую входит $h$ (от КМ) и $G$ (от ОТО) – обе мизерные величины (так, если атом увеличить до размеров Вселенной, то планковская длина станет равной высоте среднего дерева). Заметим, что, говоря в дальнейшем о планковской длине (в рамках повествования о ТС) мы может подразумевать величину, отличную от $10^{-35}$ м на несколько порядков.

Время, за которое фотоны света проходят планковскую (элементарную) длину, называют ***элементарным временным интервалом*** (*эви*), поэтому 1 *эви* $\equiv l_{\mathrm{pl}}/c \approx 5{,}4\cdot10^{-44}$ сек. Это наименьший миг времени, который требуется для протекания любого мыслимого физического события, и некоторые теории утверждают, что на этом уровне время уже квантуется, носит дискретный (зернистый) характер (хотя в обыденной жизни время представляется нам чем-то непрерывно текущим). Чрезвычайная мизерность *эви* осознается, например, в следующем факте. От момента зарождения Вселенной (от так называемого Большого взрыва) прошло около 13 млрд. лет или 100.000.000.000.000.000 $\equiv 10^{17}$ секунд. Это, безусловно, колоссальное число, но нетрудно подсчитать, что каждая секунда, в свою очередь, содержит $1{,}85\cdot10^{43}$ *эви* (!) Короче говоря, *эви* – это исчезающе малый квант времени, недоступный нашему воображению.

Можно также составить величину с размерностью массы – это так называемая ***планковская масса*** $m_{\mathrm{pl}} \equiv [ch/(2\pi G)]^{1/2} \approx 2{,}2\cdot10^{-8}$ кг, характеризующая энергию $mc^2 \approx 10^{19}$ ГэВ, при которой должен осуществляться переход к квантовому описанию пространства-времени.

К сожалению, ученым пока не удается сформулировать КТГ, поскольку её построение эквивалентно построению квантовой (дискретной) геометрии пространства-времени. При этом возникает много трудностей (скорее формально-математических).

Например, в КМ нет понятия «траектория» частицы, а есть понятие *вероятности* найти выбранную частицу в заданной точке пространства-времени. Приближением к понятию «классическая траектория» здесь будет являться *среднее значение* координаты частицы по квантовомеханическим реализациям. Реальные положения частицы будут располагаться вокруг классической траекторией, построенной по средним значениям. В теории поля понятие частицы заменяют понятием величины поля (с некой амплитудой, фазой, частотой). В квантовой теории поля мы имеем дело с вероятностями амплитуды, фазы и частоты. А поскольку в КТГ роль поля играет сама геометрия, то в этой теории необходимо работать с вероятностью иметь какую-либо геометрию *дискретного* пространства-времени.

Дискретность пространства-времени («пена» и прочие эффекты квантовой гравитации) должна проявляться только при планковских масштабах длины и времени. А глубина проникновения ученых в микромир пока «только» $L$=$10^{-18}$ м (***аттометр***) – это комптоновская длина волны частицы, разогнанной в самом мощном из современных *ускорителей* (§7). Соотношение масштабов $L/l_{pl} = 10^{17}$ – безнадежно огромно и лишает нас малейшей возможности увидеть картину микромира ($10^{17}$ равно количеству всех секунд в возрасте Вселенной). При таком гигантском соотношении $L/l_{pl}$ пространство-время выглядит как непрерывное, без всякого намёка на дискретность ("пену"). Для сравнения: даже пролетая над тайгой на высоте $H$~10 км, мы видим только ровный зеленный ковёр, а не нагромождение деревьев (высотой $h$~10 м), хотя $H/h$ =$10^3$, что на 14 (!) порядков меньше, чем соотношение $L/l_{pl} = 10^{17}$ для микромира.

ОТО и КМ – это два столпа современной физики (макромира и микромира). В своей современной формулировке ни ОТО, ни КМ не могут быть справедливы одновременно. Они взаимно несовместимы (на фундаментальном уровне) вплоть до свирепого антагонизма. Но Вселенная может быть и *экстремальной*: центр черных дыр (чудовищные массы в микроскопическом объеме); момент Большого взрыва (вся Вселенная исторгается из микроскопического ядра). При объединение уравнений ОТО и КМ появляются бессмысленные ответы на корректно поставленные вопросы – это гордиев узел (центральная проблема) теоретической физики. Бессмыслица часто принимает форму прогноза, что квантовомеханическая вероятность (которая всегда д.б. меньше единицы) некоторых процессов равна… *бесконечности* (∞). Бесконечные результаты сигнализируют о том, что теория используется за пределами области своей применимости. Причем в отличие от КЭД здесь нельзя применить *перенормировку*, т.к. при слиянии ОТО и КМ всё гораздо серьёзней.

# 4. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЧАСТИЦЫ

*Материя* в философском смысле – это объективная реальность, данная нам в ощущении (т.е. весьма ёмкое понятие). Однако для физиков материя, чаще всего, – просто вещество, которое (если игнорировать теорию суперструн) на самом глубоком уровне состоит из 12 *фундаментальных частиц* (ФЧ) – кирпичиков мироздания (6 кварков и 6 лептонов, см. табл. 4.1), а также из 4 *квантов полей* (переносчиков фундаментальных сил в природе, см. табл. 5.1).

Кварки были обнаружены экспериментально в 1968 г.: оказалось, что элементарная частица первостепенной важности для ядерной физики (главный строительный блок всех атомных ядер) – *протон* – состоят из трех кварков ($u$+$u$+$d$), а нейтрон состоит из трех других кварков ($d$+$d$+$u$). Позже было установлено, что все *элементарные частицы* вовсе не «элементарны», а являются комбинацией более фундаментальных образований (ФЧ). Причем в свободном виде кварк существовать не может – это аксиома и парадокс науки. И все ФЧ данного сорта тождественны друг другу (§7).

12 фундаментальных частиц (пояснения в тексте) Таблица 4.1

| | Семейство №1 | Семейство №2 | Семейство №3 | Заряд | Заряд СЛВ | Заряд СИЛВ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Кварки (адроны)** | $\boldsymbol{u}$ (0,0047) *“верхний”* | $\boldsymbol{c}$ (1,6) *“очарованный”* | $\boldsymbol{t}$ (189,0) *“t-кварк”* | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | красный, зеленый, синий |
| | $\boldsymbol{d}$ (0,0074) *“нижний”* | $\boldsymbol{s}$ (0,16) *“странный”* | $\boldsymbol{b}$ (5,2) *“b-кварк»* | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | красный, зеленый, синий |
| **Лептоны** | $\nu_e$ ($< 10^{-8}$) *электронное нейтрино* | $\nu_\mu$ ($< 0{,}0003$) *мюонное нейтрино* | $\nu_\tau$ ($< 0{,}033$) *тау-нейтрино* | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| | $\boldsymbol{e}$ (0,00054) *электрон* | $\boldsymbol{\mu}$ (0,11) *мюон* | $\boldsymbol{\tau}$ (1,9) *тау-лептон* | –1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 |

Все ФЧ четко разделяются на три семейства, в каждом из которых: два кварка, электрон (или его родственник) и нейтрино. Свойства соответствующих ФЧ в трех семействах идентичны за исключением *массы*, которая последовательно увеличивается в каждом следующем семействе. В табл. 4.1 для каждой ФЧ указаны:

– масса (в долях массы протона, в скобках за символом ФЧ),

– заряд (электрический, в единицах заряда протона);
– заряд СЛВ (слабого взаимодействия, он равен ± 1/2);
– заряд СИЛВ (сильного взаимодействия, условно это «цвет»).

С учётом цвета и спиральностей все ФЧ составляют 45 вейлевских состояния (уравнений движения). Именно столь большое число кварков и лептонов наводит на мысль о том, что они, в свою очередь, могут состоять из *преонов* (субкварков, первочастиц). Однако эксперимент пока не даёт никаких указаний на их существование.

Всё, что мы видим на Земле и в космосе состоит, по-видимому, из комбинаций двух кварков ($u$, $d$) и электронов, т.е. из ФЧ семейства №1. Ещё во Вселенной есть частица-призрак – *нейтрино*, которая чрезвычайно редко взаимодействует с другими видами материи. Почти все ФЧ из семейств №2 и №3 не входят в состав обычной материи. Эти ФЧ либо возникали (на мгновения) в ускорителях, имитирующих условия ранней Вселенной (таких условий сейчас уже нет), либо обнаружены в составе космических лучей (мюон). Несмотря на некую «неуловимость» ФЧ из семейств №2 и №3, физики утверждают: любое вещество (естественное или полученное на ускорителях) состоит из комбинаций 12 известных ФЧ и соответствующих им *античастиц* (они есть у каждой ФЧ). Масса самой тяжелой ФЧ ($t$-кварка), возможно, в $10^{11}$ раз больше массы самой легкой ФЧ (электронного нейтрино) (реф. 39).

В общепризнанной физиками модели элементарных частиц все ФЧ – это нульмерные точечные объекты (математическая идеализация), лишенные какой-либо внутренней структуры. Радикально иной взгляд на природу ФЧ демонстрирует нам *теория суперструн* (§11).

## 5. СИЛЫ В ПРИРОДЕ

Между фундаментальными частицами (ФЧ) действуют четыре силы природы (или фундаментальных взаимодействия, табл. 5.1):

СИЛВ – сильное взаимодействие (ядерная сила);
ЭЛМВ – электромагнитное взаимодействие;
СЛВ – слабое взаимодействие;
ГРВ – гравитационное взаимодействие (оно самое слабое).

Каждая сила действует посредством своего переносчика – наименьшего сгустка данной силы (его кванта, §6). Описанная картина мироздания верна лишь *феноменологически*, т.е. без выяснения глубинной природы, внутреннего механизма 12-ти ФЧ и 4-х фундаментальных взаимодействий. Более глубокое рассмотрение структуры материи (как, например, в *теории суперструн*) может привести к совершенно новым феноменологическим картинам мироздания.

О «мощности» взаимодействия (силы) можно судить по скорости процессов, которые оно вызывает. Обычно сравнивают между собой скорости процессов при энергиях ~ $10^9$ эВ, которые характерны для физики элементарных частиц, время протекания процессов при этом указанно в табл. 5.1. Время равное $10^{-23}$ секунды ($10^{20}$ *эви*) – это так называемое ***ядерное время*** – за это время свет пересечет *протон* (условно $3{\cdot}10^{-15}$ м, но на самом деле размер протона – довольно тонкое понятие). Ядерное время – это наименьший интервал времени, который требуется, чтобы протон наблюдался как единое целое. Остальные пояснения к табл. 5.1 приведены ниже в тексте.

Таблица 5.1. Фундаментальные взаимодействия (четыре силы в природе)

| Взаимодействие | Теория | Переносчик силы | «Мощность» | Время, с | Радиус действия силы |
|---|---|---|---|---|---|
| **СИЛВ** | КХД | Глюон | 1 | $\sim 10^{-23}$ | $\sim 3{\cdot}10^{-15}$, м |
| **ЭЛМВ** | КЭД | Фотон | $10^{-2}$ | $\sim 10^{-21}$ | неограничен |
| **СЛВ** | КТЭСВ | *W*-, *Z*-бозоны | $10^{-5}$ | $\sim 10^{-10}$ | $\sim 2{\cdot}10^{-18}$, м |
| **ГРВ** | КТГ | Гравитон | $10^{-39}$ | | неограничен |

**Сильное взаимодействие** (СИЛВ или ядерная сила) действует только между *адронами* (элементарными частицами определенного класса), и не зависит от их электрических зарядов. Это взаимодействие наиболее сложное по своей природе. В обычном стабильном веществе при не слишком высокой температуре СИЛВ не вызывает никаких процессов и его роль сводится к созданию прочной связи, “склейки” между *нуклонами* (протонами и нейтронами) в ядрах, приводя тем самым к существованию большого числа различных атомных ядер, а следовательно, атомов и химических элементов.

Однако при столкновении ядер или нуклонов, обладающих достаточно высокими энергиями, СИЛВ приводит к многочисленным ядерным реакциям. Особенно важную роль в природе играют реакции слияния (термоядерного синтеза), в результате которого четыре нуклона объединяются в ядро гелия. Эти реакции идут, например, на Солнце и других звездах, при взрыве водородной бомбы [10, с.140].

Законченная теория адронов и СИЛВ между ними пока отсутствует, однако существует теория – *квантовая хромодинамика* (КХД, не закончена и не общепризнанна), которая позволяет объяснить основные свойства адронов. Согласно КХД адроны состоят из *кварков*, а силы между кварками обусловлены обменом *глюонами* (§6).

**Слабое взаимодействие** (СЛВ) действует между элементарными частицами, причем слабые процессы протекают чрезвычайно медленно (разумеется, по меркам микромира, см. табл. 5.1). Так, если адроны (обладающие СИЛВ) можно задержать железной плитой толщиной в десятки сантиметров, то *нейтрино* (обладающее лишь СЛВ) проходило бы через железную плиту толщиной $10^{12}$ м (семь расстояний от Земли до Солнца!), не испытав ни одного столкновения. Несмотря на малую величину и короткодействие, СЛВ играет очень важную роль в природе, в эволюции звезд; так, Солнце просто погаснет, если "выключить" СЛВ. Наиболее распространенный процесс, обусловленный СЛВ, – это $\beta$-распад атомных ядер, порождающий в звездах тяжелые элементы, от которых зависит жизнь (можно сказать, что мы состоим из праха взорвавшихся звезд).

**Электромагнитное взаимодействие** (ЭЛМВ) действует между электрически заряженными частицами, а его характер (притяжение или отталкивание) зависит от знаков зарядов. Так, два точечных заряда ($e_1$ и $e_2$), расположенных на расстоянии $r$, действуют друг на друга в вакууме с силой $F_к = k \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot r^{-2}$, где $k$ – некий коэффициент. Это закон Кулона, который воплощает собой т.н. *закон обратных квадратов*. С электрической силой неразрывно связана магнитная сила, возникающая при движении заряда, поэтому обычно говорят об *электромагнитной силе*. Электромагнитное поле (в КМ – $\gamma$-квант или фотон) либо излучается или поглощается при взаимодействии, либо переносит ЭЛМВ между телами. Константой ЭЛМВ, определяющей его "силу" в квантовых явлениях, служит элементарный электрический заряд $\boldsymbol{e}$ (заряд электрона). Дальнодействующий характер ЭЛМВ связан с нулевой массой покоя фотона (§6).

ЭЛМВ удерживает электроны в атомах и соединяет атомы в молекулы, из которых мы состоим. Т.е. ЭЛМВ определяет возможность устойчивого состояния атомов и молекул, электрические, магнитные и оптические явления, свойства различных агрегатных состояний вещества, химические превращения (можно сказать, что с точки зрения физики – химии "не существует"). Большинство сил в макроскопических явлениях: силы упругости, трения, поверхностного натяжения в жидкостях и др. – сводятся именно к ЭЛМВ.

Электромагнитные явления, в которых участвуют слабые, медленно меняющиеся поля, управляются законами классической электродинамики, описываемой уравнениями Максвелла. Для сильных или быстро меняющихся полей определяющую роль играют квантовые явления, так, взаимодействия между фотонами и заряженными лептонами описываются *квантовой электродинамикой* (КЭД). Это наиболее точная из всех физических теорий. Так, характеристики электронов были рассчитаны с точностью, превышающей $10^{-9}$.

Именно по аналогии с КЭД были разработаны КХД (для СИЛВ) и КТЭСВ (для СЛВ). При разработке этих теорий физики столкнулись с вычислениями, приводящими к бесконечности (как и при слиянии ОТО и КМ). Но здесь со временем физики научились избавляться от бесконечностей с помощью особой процедуры – *перенормировки*.

**Гравитационное взаимодействие** (ГРВ) универсально, т.е. оно действует между всеми без исключения частицами и имеет характер притяжения (тяготения). Так, две точечные массы ($m_1$ и $m_2$), расположенные на расстоянии $r$, действуют друг на друга в вакууме с силой $F_g = G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot r^{-2}$, где $G$ – гравитационная постоянная. Это знаменитый закон всемирного тяготения Ньютона, который также воплощает собой *закон обратных квадратов* (как и для ЭЛМВ). Величину $m \cdot G^{0,5}$ можно назвать “гравитационным зарядом”, при этом закон всемирного тяготения совпадает с законом Кулона, и нет такого вида материи, который имел бы нулевой гравитационный заряд.

Сила притяжения ($F_g$) двух протонов в $10^{37}$ (!) раз меньше, чем кулоновская сила ($F_к$) отталкивания между ними (но последнюю в сто раз превосходит ядерная сила, «склеивающая» протоны в ядре атома, см. табл. 5.1). Хотя ГРВ в $10^{34}$ (!) раз слабее, чем СЛВ, мы ощущаем тяготение вполне весомо, поскольку нас притягивает к себе буквально каждый атом Земли, ведь радиус действия гравитации – неограничен. Именно ГРВ удерживает вместе основные структуры Вселенной – планеты, звезды, галактики и их скопления.

В 1967 г. А.Д. Сахаров выдвинул идею о ГРВ как индуцированном взаимодействии. Т.е. гравитация – не фундаментальное взаимодействие, а результат квантовых флуктуаций всех других полей (и $G$ выражается через параметры этих квантовых полей). Очевидно, в любом случае создание *квантовой теории гравитации* (КТГ) невозможно без учета других фундаментальных взаимодействий.

**Теории великого объединения**. В 1980-х гг. было установлено, что ЭЛМВ наряду со СЛВ – это проявление единого *электрослабого взаимодействия* (ЭСЛВ), а переносчиками СЛВ являются промежуточные векторные бозоны. Спустя долю секунды после Большого взрыва (при энергии взаимодействия свыше $10^{11}$ эВ) ЭЛМВ и СЛВ были слиты (в ЭСЛВ), их характеристики были неразличимы. Но из-за нарушения симметрии они потом приобрели различный облик.

Поскольку закону обратных квадратов подчиняются и ЭЛМВ, и ГРВ, то уже одно это наводит ученых на мысль о возможном фундаментальном единстве всех четырех сил природы. В конце 20 века были созданы многочисленные *теории Великого объединения,* в которых ЭЛСВ и СИЛВ якобы также сливаются между собой, правда, при этом требуется колоссальная энергия порядка $10^{24}$ эВ. Из унификации ЭЛСВ и СИЛВ следует нестабильность протона и распад всей материи во Вселенной (?). Вероятно, это произойдет через $10^{31\pm2}$ лет ($\sim10^{80}$ *эви*) после Большого взрыва (пока прошло чуть более $10^{10}$ лет). Возможно, скорость распада по мере старения Вселенной уменьшается, а это означает, что протоны будут существовать вечно и распад всей материи никогда не завершится [34, с. 30].

Не исключено, что достигнуть великого объединения всех взаимодействий удастся в рамках *теории суперструн* (ТС) (§11).

Почему 4 силы природы так сильно различаются по своей «мощности» (см. табл. 5.1)? Это одна из великих загадок, но не для ТС. В рамках ТС это различие связано с различным влиянием, которое оказывает на силы «туман» квантовых флуктуаций (квантовое облако, состоящее из рождающихся и аннигилирующих частиц). Чем глубже мы проникаем через туман, тем меньшее влияние он оказывает на наши наблюдения. Причем при уменьшении расстояния СИЛВ и СЛВ убывают, а ЭЛМВ растет. Если проникнуть сквозь этот туман на расстояния $10^{-31}$ м ($10^4$ *эви*), то интенсивности («мощности») СЛВ, ЭЛМВ и СИЛВ окажутся одинаковыми [3, с. 123].

## 6. ПЕРЕНОСЧИКИ СИЛ

**Переносчик** силы – это некая виртуальная или реальная частица (квант, наименьший возможный сгусток силы). Физики считают, что каждая из четырех сил в природе (СИЛВ, ЭЛМВ, СЛВ, ГРВ) обусловлена передачей информации. Т.е., скажем, частицы А и В не могут испытывать силы притяжения или отталкивания до тех пор, пока не “узнают” о существовании друг друга с помощью соответствующего переносчика. Радиус действия силы зависит от массы частицы-переносчика: *чем массивнее частица, тем меньше радиус действия силы* (и наоборот, см. фотон и гравитон). Знаменитый *закон обратных квадратов* (для ЭЛМВ и ГРВ) объясняется тем, что площадь сферы ($S = 4\pi r^2$) возрастает пропорционально $r^2$, следовательно, вероятность того, что переносчик, отправленный *случайным* образом от частицы А, будет принят частицей В на расстоянии $r$, пропорционален $1/r^2$. Любопытно, что закон обратных квадратов – это единственный из всех степенных законов (описывающих убывающие с расстоянием силы), для которого орбиты движения вокруг центрального тела в общем случае имеют *простую* геометрическую форму [23, с. 204, 191] (реф. 28).

**Фотоны** – это переносчики ЭЛМВ. Спин фотона равен 1, т.е. фотон относится к *бозонам*, и ни корпускулярно-волновой дуализм, ни возможность взаимопревращения (скажем, γ-кванта в электрон и позитрон) – не выделяет фотон среди других элементарных частиц (им всем присуще указанные свойства). Фотон – истинно нейтральная частица (тождественна своей античастице). Масса покоя фотона равна нулю, поэтому радиус действия ЭЛМВ – неограничен, а скорость фотона равна скорости света (***c***).

В зависимости от своей энергии фотоны выступают в виде радиоволн, обычного света, рентгеновских лучей, жестких γ-квантов (с энергией свыше 100 кэВ). Свет – это электромагнитное излучение с частотой $(4{,}0\div7{,}5)\cdot10^{14}$ Гц, воспринимаемое глазом человека. Обычная лампочка в 60 Вт излучает около $10^{20}$ фотонов в секунду.

Хотя передача любых сигналов (в т.ч. перенос энергии) и движение материальных тел не может происходить со скоростью, большей ***c***, тем не менее, можно привести примеры *сверхсветовой скорости*:

1). Два фотона, движущиеся по расширяющемуся пространству, могут удаляться друг от друга со скоростью больше, чем ***c***.

2). Линейная скорость пятна от пучка электронов, испускаемого из вращающейся электронной пушки, может стать больше ***c***. Однако скорость переноса энергии пучка (только по радиусу!) всегда ≤ ***c***.

Свет – вечный странник, он, вероятно, никогда не останавливается, а его скорость в вакууме равна ***c*** = 299 792 458 ±1,2 м/сек. Когда свет распространяется в какой-либо среде (в воздухе, в воде, в стекле и т.д.), то его скорость уменьшается, но это не влияет на релятивистские эффекты (в рамках СТО и ОТО). В 2001 г. в Гарварде физики сделали удивительное открытие. Оказывается, в условиях сверхнизких температур (–273°С) световой луч замедляется, но до нуля скорость не доходит. Также луч замедляется от параметров магнитного поля. Это открытие очередной раз говорит о тайне понятия «время» (возможно, оно – лишь иллюзия, формируемая нашим сознанием, а в природе никакого времени нет?) (реф. 15).

**Мезоны** – переносчики «внешнего» СИЛВ, действующего между адронами (а не внутри них); так, мезоны связывают между собой нуклоны (протоны и нейтроны) в ядре атома. «Внешнее» СИЛВ (между протонами) качественно находится в таком же отношении к «истинному» СИЛВ (между кварками внутри протона), как вандерваальсова сила (ВС), действующая между атомами, – к электростатической силе

(ЭС), действующей внутри каждого атома. Как известно, ВС стремительно возрастает при сближении атомов (примерно обратно пропорционально межатомному расстоянию в седьмой степени), однако ВС – это всего лишь некое проявление фундаментальной ЭС (описываемой законом обратных квадратов).

Мезоны – это адроны, обладающие целым спином и нулевым барионным числом. Мезоны рождаются при столкновениях частиц высоких энергий (сотни МэВ и выше). Различных мезонов множество. Самый легкий мезон – пион с относительно большой массой (275 электронных масс); вот почему СИЛВ резко падает на расстояниях свыше $10^{-15}$ м, т.е. превышающих размеры нуклонов.

**Глюоны** – это переносчики «истинного» СИЛВ, действующего внутри адронов между кварками: глюоны «склеивают» между собой кварки в адроны (в т.ч. в протоны и нейтроны). Глюоны – это нейтральные частицы со спином 1 и нулевой массой, обладающие специфическим цветовым зарядом (цветом); КХД требует существование 8 глюонных полей (и 8 глюонов), различающихся цветовыми индексами и преобразующихся друг через друга при поворотах в «цветовом пространстве». Наличие у глюонов цветового заряда приводит к их самодействию, т.е. к возможности поглощения и испускания глюонов глюонами.

Наличие цветового заряда у глюонов резко отличает их от квантов ЭЛМВ – фотонов, которые не имеют заряда. В отличие от фотона глюон может испускать новые глюоны, что приводит к росту эффективного заряда кварка с увеличением расстояния и, следовательно, к возрастанию энергии взаимодействия между кварками. В результате кварки не могут освободиться друг от друга и встречаются в природе только в связанном виде – в форме «белых», «бесцветных» адронов. Наоборот, на очень малых расстояниях кварки взаимодействуют относительно слабо, и их можно рассматривать как практически свободные частицы. Если свободные кварки и существуют, то концентрация их в веществе ничтожно мала: не превышает $10^{-20}$ (доля от общего числа протонов и нейтронов), или даже $10^{-30}$. Возможно, кварки как бы обретаются в особом одномерном или двухмерном мире. В свободном состоянии их никак не обнаружить, им словно «не вырваться» в наш трехмерный мир.

**Промежуточные векторные бозоны** ($W^{\pm}$ и $Z^0$) – переносчики СЛВ. Векторные бозоны $W^{\pm}$ (электрический заряд соответственно $+e$ и $-e$) и $Z^0$ (электрический заряд 0) – реальные элементарные частицы со спином 1 и отрицательной внутренней четностью. Массы $W^{\pm}$ и $Z^0$ примерно в 100 раз превышают массу протона, и поэтому радиус действия СЛВ имеет порядок $10^{-18}$ м (сравним с размерами кварков).

Частицы $W^{\pm}$ и $Z^0$ тесно связаны с фотоном и определяют масштаб энергий, характерных для *электрослабого взаимодействия* (ЭЛСВ). Возможное объединение ЭЛСВ и СИЛВ (при энергиях $10^{24}$ эВ) связано с переносчиком, называемым *лепто-кварком*, именно эта частица является «прародителем» (преоном) обычного вещества.

**Гравитоны** – это переносчики ГРВ, его кванты, которые в вакууме распространяются со скоростью света. Гравитоны – это электрически нейтральные частицы со спином 2 и нулевой массой покоя (поэтому их радиус действия – неограничен). Должны существовать гравитационные волны в виде потока гравитонов. Из-за исключительной слабости ГРВ гравитоны и гравитационные волны в прямых экспериментах пока не открыты, но последствия их излучения системами небесных тел были обнаружены ещё в 1970-х гг.

## 7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

В современной физике термин «элементарные частицы» употребляется не в своём точном значении (первичные, далее не разложимые), а менее строго – для наименования мельчайших частиц материи, не ассоциированной в ядра и атомы (исключение составляет протон). Помимо ФЧ (§4) и переносчиков сил (§6) к элементарным относится несколько сотен разнообразных частиц, причем их число продолжает расти (и, скорее всего, неограниченно велико).

Большинство элементарных частиц состоят из различных комбинаций ФЧ (и их античастиц) и являются предельной формой материи, которую еще удается фиксировать. Физики-экспериментаторы проникли в микромир на глубину *аттометра* ($\sim 10^{-18}$ м), а размеры самых «крупных» элементарных частиц (протона, нейтрона, $\pi$-мезона) порядка $10^{-15}$ м. Что происходит в природе на размерах меньше аттометра (такое расстояние фотон проходит за $10^{-26}$ сек или $10^{17}$ *эви*) – ученым увидеть пока не дано, хотя в своих теориях они доходят вплоть до *планковской длины* ($\sim 10^{-35}$ м).

Все элементарные частицы (в т.ч. все ФЧ и переносчики сил) данного сорта (скажем, все $10^{80}$ электронов во Вселенной) абсолютно неразличимы (тождественны друг другу), как и атомы, построенные из них, но почему это так – пока остается загадкой природы. Малейшего отличия (на «чуть-чуть») математический аппарат современной теории не допускает, дискретно увеличивая число степеней свободы (число сортов) частиц и меняя их статистику [21, с.202].

Каждый сорт элементарных частиц характеризуется набором свойств, однако, полное количество этих свойств пока не установлено. У большинства элементарных частиц массы имеют порядок величины массы протона ($m_p \approx$ $1{,}67\cdot10^{-27}$ кг), для частиц с ненулевой массой заметно меньше лишь масса электрона ($m_e \approx 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг). Бессмертными пока считаются только: фотон; электрон, нейтрино (лептоны) и, возможно, протон (§5). Доказано, что электрон не теряет своего заряда, по крайней мере, за $5\cdot10^{21}$ лет.

Все элементарные частицы (кроме фотона и гравитона), разбиваются на два основных класса: *адроны* и *лептоны*. Адроны – это частицы, участвующие во всех типах взаимодействий. Лептоны – это частицы, не участвующие только в СИЛВ (нейтрино не участвует и в ЭЛМВ). Все лептоны имеют спин ½, т.е. являются фермионами.

Каждая группа частиц характеризуется своими специфическими законами сохранения. В настоящее время у элементарных частиц известно 7 «зарядов», сумма которых должна оставаться неизменной в ядерном процессе: барионный заряд; лептонный электронный заряд; мюонный лептонный заряд; тау-лептонный заряд; странность; очарование; прелесть. Электрический заряд любой элементарной частицы (в свободном виде) равен $\pm\boldsymbol{e}$, или 0, или $+2\boldsymbol{e}$. Закон сохранения электрического заряда – один из фундаментальных законов природы, состоящий в том, что алгебраическая сумма зарядов любой замкнутой (электрически изолированной) системы остается неизменной, какие бы процессы ни происходили внутри системы.

Поведение элементарных частиц обусловлено квантовыми свойствами. Наиболее важное из них – способность рождаться и уничтожаться (испускаться и поглощаться) при взаимодействии с другими частицами. В поисках новых частиц ученые строят все более мощные *ускорители*. Самые удивительные эксперименты задуманы в ЦЕРНе – ведущем европейском институте ядерных исследований, расположенном на территории Швейцарии и Франции, где работают 5 тысяч ученых из 40 стран (причем россияне – на первых ролях!). Там завершается строительство Большого адронного коллайдера (LHC). Его длина – 30 км, он углублен под землю на 100 м. В коллайдере при столкновении протонов и антипротонов будут создаваться пучки частиц с огромной энергией – $7\cdot10^{12}$ эВ (характерная энергия при возрасте Вселенной ~ $10^{-14}$ сек) (реф. 13). Это близко к условиям Большого взрыва, после которого материя существовала в виде кварк-глюонной плазмы. Заметим, что предельно возможный ускоритель на Земле, равный по длине земному экватору, позволит достичь энергии $10^{16}$ эВ (которая была при $5 \cdot 10^{-21}$ сек ~ $10^{23}$ *эви*).

*Адроны* делятся на барионы (в т.ч. протон и нейтрон) и мезоны (§6). Общее количество адронов исчисляется сотнями, но есть теории, где счет идет на тысячи. В свободном состоянии все адроны нестабильны (исключением м.б. только *протон*) (§5).

Все адроны обладают внутренней структурой: каждый барион состоит из трех кварков, вообще говоря, разных типов, а каждый мезон – из кварка и антикварка. Возбужденные состояния адронов оказываются просто результатом относительных перестроек составляющих их кварков, подобно тому, как в атоме возбужденные состояния создаются за счет перестроек электронов, в ядре – нуклонов.

Адроны, распадающиеся благодаря СИЛВ и имеющие малое время жизни, называются *резонансами* (их большинство, более 300). Время их жизни близко к ядерному времени (~$10^{-23}$ сек, но есть и исключения ~$10^{-20}$ сек). Адроны, которые распадаются за счет СЛВ или ЭЛМВ – условно “стабильные”, т.к. время их жизни на много порядков больше ядерного времени ($10^{-10}$ сек или $5 \cdot 10^{-20}$ сек).

## 8. СТАНДАРТНАЯ МОДЕЛЬ (ТЕОРИЯ)

Физики-экспериментаторы измерили 19 параметров, «придуманных» теоретиками: массы 12-ти ФЧ; константы 3-х фундаментальных взаимодействий (СИЛВ, ЭЛМВ, СЛВ) [14, с. 83]; их интенсивность и т.д. А когда теоретики подставили числовые значения этих 19 параметров в формулы своих теорий, то всё совпало с поразительной точностью (вплоть до *аттометра*). Поэтому три теории, описывающие СИЛВ, ЭЛМВ, СЛВ, и три семейства ФЧ ученые называют *стандартной моделью* (СМ) физики элементарных частиц.

Вместе с тем СМ страдает целым рядом явных недостатков.

Так, из СМ выпадает гравитация (она игнорируется), СМ не дает описания устройства объектов (ФЧ, сил в природе и т.д.), СМ никак не объясняет, почему у 19 параметров именно такие значения (а ТС это успешно объясняет). Есть ещё существенный недостаток: если эксперименты добавят новые частицы или силы, то в СМ эти изменения могут быть легко учтены путем замены списка входных параметров (сейчас их 19). То есть СМ охватывает целый диапазон различных возможностей (слишком большая гибкость

СМ, что плохо). А вот ТС – это здание единой и жесткой конструкции, входные данные здесь – только один параметр (*мода* резонансных колебаний струны), который устанавливает шкалу для проведения измерений.

Не слишком убедительна СМ и в следующем вопросе: откуда у вещества берется масса, если в момент рождения Вселенной всё сущее было энергией? В рамках СМ чуть ли не единственной возможностью объяснить феномен массы является существование очень массивной частицы под названием хиггс-бозон, которая формирует хиггс-поля (посредством *механизма Хиггса*). Эти поля попытаются впервые зарегистрировать на коллайдере в LHC (§7). Таким образом, вместо объяснения значений масс, СМ всё перекладывает на «частицу, дающую массу» (хиггс-бозон) (§16), [14, с. 78], [28].

## 9. ЗАГАДОЧНЫЕ ФОРМЫ МАТЕРИИ

В современной физике есть (и всегда будут?) ещё неразгаданные тайны. К ним можно отнести такие формы материи как: скрытая материя, античастицы, зеркальные частицы, и т.д.

**Скрытая материя** – это головная боль для современных физиков. Ученые давно заметили, что распределение гравитационного поля почему-то не соответствует распределению звезд, и галактики (их скопления) попросту распались бы, если бы они содержали только вещество, наблюдаемое нами (всеми известными научными методами, по всему спектру). Поэтому, дабы не подвергать сомнению основные законы физики, была введена концепция так называемой *скрытой (темной, невидимой) материи*. Впервые о ней заговорил в 30-х годах XX в. швейцарский астроном Фриц Цвикки.

Если на долю *обычной материи* (по своим свойствам она близка к пыли) приходится менее 10% общей плотности во Вселенной, то на долю *скрытой материи* приходится свыше 90% общей плотности (реф.18). Заметим, что на долю светящейся материи (звезд, газа, пыли) приходится менее 1% общей массы Вселенной. Проявления скрытой материи наблюдали впервые в нашей Галактике. Со скрытой материей тесно связаны исследования гравитационных линз и крупномасштабной структуры Вселенной.

Вероятно, до 30% скрытой материи может иметь неоднородные (кластерированные) формы: чёрные дыры (§15) массой ~ 100 солнечных; «комки» вещества массой ~ $10^{-8}$ масс Солнца; сферические гало (как в нашей Галактики); тёмные карлики («юпитеры», которые не светят); колоссальные «облака» из нейтралино (элементарные слабовзаимодействующие частицы); невидимый барионный компонент (обычная атомная масса) во Вселенной; газ из частиц типа массивных нейтрино; аксионы; не открытые пока элементарные частицы. Ученые различают горячую и холодную скрытую массу.

**Античастица** – это элементарная частица, обладающая той же массой, спином, временем жизни, что и данная частица, но имеющая все зарядовые квантовые числа противоположного знака. Так, античастицей электрона является позитрон (и наоборот). Истинно нейтральные частицы (фотон и др.) являются своими античастицами.

Столкновение частицы и её античастицы приводит к их *аннигиляции* (уничтожению) и рождению других элементарных частиц.

Из античастиц строится *антивещество*, правда, атомы антивещества пока не наблюдались (вплоть до ближайшего скопления галактик). Установлено, что в галактиках доля антивещества д.б. меньше $10^{-15}$ (от концентрации вещества), а в скоплениях галактик – меньше $10^{-6}$ [45, т.1, с.105]. До сих пор не ясно, почему в настоящее время во Вселенной антивещества существенно меньше, чем вещества (при Большом взрыве их было поровну). А. Д. Сахаров выделил три условия такого дисбаланса: 1) протоны должны распадаться, причем крайне медленно (ТС это допускает, а СМ – нет); 2) возможные способы охлаждения Вселенной после Большого взрыва ограничены; 3) существует определенная разница между веществом и антивеществом (которую пытаются измерить на новом ускорителе, см. §7).

**Зеркальные частицы** должны существовать для всех известных элементарных частиц – это предположили Ли и Янг ещё в 1956 г. Частицы определенной зеркальности *стерильны*, так, зеркальный электрон взаимодействует с зеркальным фотоном (как обычный электрон с обычным фотоном), однако, зеркальный электрон не взаимодействует с обычным фотоном, как и обычный электрон «не чувствует» зеркального фотона. В 1982 г. Шварц обнаружил, что существующие топологические решения (типа нитей) обладают свойством изменять зеркальность объекта в результате его обхода вокруг нити по замкнутому пути. Такие решения он назвал нитями Алисы (по имени героини сказки о Зазеркалье). Нити Алисы – это типичные космические нити с эффектами гравитационного линзирования. При пересечении нитью Алисы луча зрения изменяется зеркальность объекта относительно наблюдателя: обычные звезды становятся невидимыми, а зеркальные – видимыми. Эволюция обычного и зеркального вещества симметрична (равенство их космологических плотностей). Эволюция зеркальных звезд должна проходить так же, как и для обычных звезд (той же массы). При нарушении строгой симметрии между обычными и зеркальными частицами может возникать *теневой* (скрытый) мир (скажем, в виде массивных нейтрино). Наблюдения, похоже, исключают однородную смесь обычного и зеркального вещества. На границе обычного и зеркального вещества формируются ударные волны.

Доля зеркального вещества в Земле д.б. меньше $10^{-24}$ (обнаружить его практически невозможно). Но в ядрах галактик количество обычного и зеркального вещества д.б. сравнимым [36, с. 281].

## 10. КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ПОСТОЯННАЯ

Используя уравнения ОТО, Эйнштейн в 1915 г. сумел количественно описать взаимную эволюцию пространства, времени и материи во Вселенной. При этом оказалось, что общий пространственный размер Вселенной должен изменяться с течением времени (либо расширяться, либо сжиматься). Чтобы «вернуть» Вселенную в статическое состояние (столь привычное и комфортное к тому времени для физиков), Эйнштейн в 1917 г. ввел в свои уравнения Λ-член (ламбда-член), который назвал *космологической постоянной*. Положительный Λ-член описывает гравитационные силы отталкивания (отрицательный – силы притяжения), являющиеся дополнительными по отношению к гравитационным силам притяжения, создаваемым обычной материей. Эти дополнительные силы пропорциональны расстоянию между точками и их часто называют *гравитацией вакуума*. Таким образом, в стационарной (неподвижной) модели Вселенной силы притяжения обычной материи уравновешены силами гравитационного отталкивания вакуума ($\Lambda>0$).

После того как в 1922-24 гг. А. Фридман применил ОТО для построения фундаментальных математических моделей *нестационарной* Вселенной, и в 1929 г. Э. Хаббл экспериментально установил, что Вселенная *расширяется* (§16), Эйнштейн в 1931 г. решил убрать из своих уравнений Λ-член, посчитав его «самой большой ошибкой» в своей жизни... Однако каково же было удивление ученых (и не только потому, что стала очевидна очередная ошибка гения!), когда в конце 1998 г. астрономы экспериментально установили, что в скорость расширения Вселенной дает вклад пусть мизерная, но ненулевая космологическая постоянная $\Lambda \sim 10^{-56}$ см$^{-2}$ ($10^{-122}$ *эви*$^{-2}$). Иначе говоря, было обнаружено *ускоренное* расширение Вселенной, и параметром этого ускорения является Λ-член. Это было самое интересное и неожиданное открытие науки в конце XX века!

В космологии одним из основных параметров Вселенной является так называемая *критическая плотность* ($\rho_к$) вещества (при которой согласно ОТО Вселенная оказывается замкнутой). Эту плотность можно принять равной $\rho_к = 10^{-29}$ г/см$^3$, т.е. около 5 атомов водорода в кубометре пространства [3, с.157]. Астрономические наблюдения показывают, что средняя плотность видимой (обычной) материи ($\rho = 10^{-31}$ г/см$^3$) гораздо меньше критической плотности, т.е. Вселенную можно было бы считать открытой (обреченной на бесконечное расширение). Однако не так давно ученые обнаружили, что *скрытой* материи во много раз больше, чем видимой материи (если в ~30 раз, то Вселенная – замкнутая [23, с.286]), и полная масса *нейтрино* значительно превосходит массу видимого вещества [поскольку масса нейтрино конечна (~$10^{-35}$ кг ?), а плотность нейтрино (400 $см^{-3}$) почти как у фотонов (500 $см^{-3}$)]. Таким образом, наша Вселенная, скорее всего, замкнутая, т.е. в будущем (гораздо больше, чем за 10 млрд. лет [23, с.286]) она может сколлапсировать в процессе Большого сжатия (правда, сжаться до размеров меньше планковских ТС запрещает [3, с. 158]). Однако учет *ненулевого* Λ-члена в уравнениях, вероятно, приводит к тому, что Вселенная должна расширяться, даже если её масса достаточна, чтобы считать Вселенную закрытой [34, с. 33], (реф. 16).

Формально Λ-член в уравнениях ОТО эквивалентен дополнительному члену в тензоре энергии-импульса. Этот член дает следующие значения для плотности энергии ($\varepsilon_\Lambda$) и давления ($p_\Lambda$):

$$\varepsilon_\Lambda = -\, p_\Lambda = \Lambda \cdot c^4 (8\pi G)^{-1}, \qquad (10.1)$$

где $c$ – скорость света в вакууме, $G$ – гравитационная постоянная.

Таким образом, Λ-член также может интерпретироваться как суммарная энергия, содержащаяся в пустоте космического пространства (*энергия вакуума*), поэтому её значение может быть рассчитано теоретически. Так, *теория инфляции*, созданная А. Гусом, требовала $\Lambda \sim 10^{54}$ $см^{-2}$ ($10^{-12}$ *эви*$^{-2}$, сравни с тем, что указано выше). Как видим, на сегодняшний день теория и измерения демонстрируют колоссальные расхождение: расчеты указывают, что квантовые флуктуации в вакууме дают значение Λ-члена, которое на 110 порядков (!) больше, чем значение, допускаемое экспериментальными данными! Это бросает вызов физикам-теоретикам, в том числе «струнникам», ведь если ТС сможет устранить указанные расхождения в части Λ-члена, то это существенно укрепит позиции ТС.

С точки зрения теории инфляции в ранней Вселенной **Λ**-член обеспечивал инфляцию. Величина **Λ**-члена тогда была значительно больше, чем сейчас, причем **Λ**-член не являлся новой фундаментальной константой, а генерировался в результате некоторых процессов, происходящих в ранней Вселенной. Современный **Λ**-член (в нашу эпоху) также может иметь «динамическое» происхождение, он может быть результатом неких физических процессов, которые ученые пока не понимают.

В науке есть понятие «физический вакуум» – это море виртуальных (эфемерных) частиц, которые проявляют себя странным образом:

они как бы и не взаимодействуют с окружающим внешним миром, переопределяя только массы элементарных частиц, заряды и моменты (кстати, этого достаточно, чтобы константы классической физики менялись). Но наиболее всего странно следующее свойство физического вакуума. В каждой точке пространства-времени содержится бесконечно много виртуальных частиц, и все они весят бесконечно много. Проблема бесконечной массы физического вакуума является проблемой номер один в теоретической физике. Её называют *проблемой динамической генерации* $\Lambda$-*члена* [28, с. 92].

До 80% *скрытой материи* может существовать в виде *однородного фона*. Возможно, именно пустое пространство (вакуум) обладает такими свойствами. Если бы вакуум имел небольшую, но конечную плотность энергии, то как раз она бы подходила для того, чтобы описать динамику Вселенной. Энергия вакуума из-за того, что у него отрицательное давление, должна ускорять разлет Вселенной. Вероятно, 2/3 жизни Вселенной в ней доминирует вакуумоподобная (скрытая) энергия. Космологи недавно предложили варианты – формы скрытой энергии, названной *квинтэссенцией*[1] с отрицательной энергией, которая может постепенно ослабевать (реф. 19).

## 11. ЗАРОЖДЕНИЕ ТЕОРИИ СУПЕРСТРУН

К 1968 г. физик-теоретик Г. Венециано уже несколько лет как трудился над осмыслением огромных массивов данных, накопленных в экспериментах по столкновению элементарных частиц. И вот однажды он «вдруг» обнаружил, что некая *бета-функция*, придуманная зачем-то ещё лет двести назад великим математиком Леонардом Эйлером, способна описать одним махом все многочисленные свойства частиц, участвующих в СИЛВ (самом «мощном» из всех взаимодействий, см. §5). Бета-функция (и её различные обобщения) оказалась удивительно удачным инструментом, и сразу последовал шквал работ других физиков по его применению.

А через 2 года выявили и физический смысл столь удачной «работы» бета-функции. Оказалось, что СИЛВ элементарных частиц будет в точности описываться бета-функцией, если эти частицы представлять в виде… маленьких колеблющихся струн. Так родилась *теория суперструн* (ТС). Приставка «супер» (её для краткости иногда опускают) указывает на то, что

[1] *Квинтэссенция* – пятая сущность (эфир) в античной философии (наряду с водой, землей, воздухом, огнем); тончайшая субстанция. Основа, самая суть чего-либо, самое главное.

спектр частиц, описываемых струной, обладает суперсимметрией (бозон-фермионной, см. §12).

Итак, что такое струна? Представьте себе резиновый шнур исчезающе малой толщины, т.е. имеющий только *одно* измерение – длину. Из этого шнура образовано кольцо диаметром $10^{-35}$ м (весьма условно, м.б. больше на несколько порядков, т.е. *планковской длине* равен *характерный* размер кольца). А теперь представьте, что этот шнур колеблется (вибрирует), причем по окружности кольца укладывается всегда только *целое* количество волн. Поскольку струны чрезвычайно малы, то они выглядят для экспериментаторов как точечные частицы и не противоречат результатам экспериментов. Струны – это новый (и последний?) микроскопический уровень в известной иерархии материи (следующий за кварками). Мы описали *замкнутые* струны («кольца», именно о них мы, вообще говоря, и повествуем в нашей книге), однако существуют ещё *открытые* струны («палочки» со свободными концами), и для них справедливо почти все, что будет сказано нами о струнах.

Заметим, что бесконечно тонкая одномерная струна – это математическая идеализация. Из чего на самом деле состоят струны? Обычно считают, что этот вопрос не имеет смысла, т.к. нет ничего более фундаментального, чем струна (она не имеет компонентов, более глубокой основы; хотя уже есть интригующие догадки о более глубоких уровнях структуры струны, см. ниже). «Материал» всего вещества и всех взаимодействий (сил природы) в ТС – одинаков, т.к. все струны абсолютно идентичны. А до ТС считалось, что все фундаментальные частицы (ФЧ) «отрезаны от разных кусков ткани».

Каждая из разрешенных мод колебаний струны проявляется в виде частицы, масса и заряды которой определяются конкретным видом колебания. Та же идея применима к фундаментальным взаимодействиям, а вернее, к частицам, которые их переносят. Таким образом, всё вещество и все силы природы обязаны своим происхождением одной фундаментальной величине – колеблющейся струне, которая имеет резонансные частоты, т.е. всё в этом мире состоит из комбинаций вибрирующих волокон. Микроструктура Вселенной – это сложно переплетенный, многомерный лабиринт, в котором струны бесконечно закручиваются и вибрируют, ритмично отбивая законы космоса. То есть ВСЁ (в т.ч. все тайны жизни, наши мысли) – это своеобразный танец струн. Представить это непросто.

Теория хаоса учит, что при увеличении сложности системы начинают действовать новые законы. Так понимание электрона (благодаря ТС) – это одно, а понимание, скажем, торнадо – совсем другое, но это не связано с работой новых физических законов. В объяснении торнадо есть только чисто вычислительные проблемы.

Масса элементарной частицы определяется энергией колебания *внутренней струны* этой частицы: внутренние струны более тяжелых частиц совершают более интенсивные колебания, струны легких частиц колеблются менее интенсивно. Чем больше амплитуда и чем короче длина волны, тем больше энергия. Согласно КМ энергия колебания струн может иметь только *дискретные* значения.

Сначала ТС связывали только с СИЛВ, что слишком сужало область её применения и обнаруживало некие изъяны (противоречия с КМ). С другой стороны КХД, описывающая СИЛВ, демонстрировала просто чудеса и о ТС почти все забыли.

В 1974 г. было обнаружено, что ТС включает как СИЛВ, так и… гравитацию! Но это было проигнорировано всеми физиками. В 1984 г. впервые были представлены убедительные доказательства того, что ТС охватывает все 4 взаимодействия и все виды материи, что в ТС можно модифицировать ОТО и совместить её с КМ. Это стало поворотным пунктом для ТС, почти все специалисты по физике элементарных частиц оставили свои проекты и кинулись на штурм ТС. До 1986 г. во всём мире было написано свыше тысячи научных статей о ТС. Но в итоге все столкнулись с колоссальными математическими проблемами: поиски приближенных решений приближенных уравнений не давали правильных ответов на ряд важных вопросов, тормозя дальнейшие исследования. Наступило всеобщее разочарование, почти все физики опять забросили ТС на долгих 9 лет…

Конец застою в ТС положил доклад Э. Виттена в 1995 г. (начало второй революции в ТС), который воодушевил физиков на новый штурм ТС. Его последствия мы ощущаем до сих пор, в частности, именно после 1995 г. стало понятно, что ТС содержит не только струны, но и другие компоненты: двумерные «диски», трехмерные «капли» и даже более экзотические конструкции (§12).

Единственным параметром, который требуется для калибровки ТС, является натяжение струн. Расчеты показали, что интенсивность взаимодействия, передаваемого колебанием струны, соответствующем гравитону (кванту гравитации), обратно пропорциональна натяжению струны. Из слабости ГРВ (самая слабая сила в природе, см. табл. 5.1)_следует колоссальное (планковское) натяжение струн до $10^{39}$ тонн. Таким образом, струны чрезвычайно жесткие, откуда получаем 3 важных следствия [3, с.104]:

1). Типичная струна сжимается до планковского размера ($10^{-35}$ м), но есть малая вероятность того, что натяжение м.б. меньшим, а размер струн гораздо больше, вплоть до *аттометра* ($10^{-18}$ м ~$10^{17}$*эви*).

2). Типичная энергия колеблющейся петли чрезвычайно большая (планковская). Но струна всегда испытывает действие квантовых осцилляций, которые с энергетической точки зрения сокращают обычные колебания струны. Так мода колебаний, являющаяся кандидатом на роль гравитона, характеризуется полным сокращением энергии частицы (что приводит к нулевой массе гравитона). Но более типичные колебания струны соответствуют частице, масса которой $10^{-9}$ кг (в $10^{18}$ раз больше массы протона). Т.е. сравнительно легкие фундаментальные частицы образуются, словно из тумана, расстилающего над ревущим океаном высокоэнергетических струн.

3). Существует бесконечное число мод колебаний струны, т.е. последовательность элементарных частиц – бесконечна.

**Космические струны**. Струны, несущие б*о*льшую энергию могут вырасти до гораздо б*о*льших размеров. Энергия Большого взрыва могла породить небольшое число крупных, космических струн, которые в ходе расширения Вселенной могли вырасти до астрономических размеров. Космическая струна – это «веревка» диаметром $10^{-30}$ м ($10^5$ планковских длин) и очень большой длины (никто не знает, какой именно), быть может, больше сотен килопарсек (1 парсек = 3 световых года = $3{,}1\cdot10^{16}$ м). Причем очень массивная! Погонный вес этой «веревки» – $10^{18}\div10^{19}$ кг/м длины (т.е. 600 км такой нити могут весить как наша Земля!). Благодаря этому струну можно обнаружить исключительно путем гравитационного взаимодействия. Обнаружение космических струн будет означать, что на масштабах энергий $10^{15}$ $\div10^{16}$ ГэВ имеется нетривиальное и не обнаруженное до сих пор свойство частиц, полей, которое и формирует эту струну. Это подтвердило бы, что физика даже на таких масштабах более или менее похожа на известную нам физику.

**Гармоничный союз** ОТО и КМ – главный успех ТС. Если раньше два столпа физики конфликтовали между собой, то в рамках ТС они необходимы друг другу. Кратко поясним сказанное.

Согласно КМ движение неких ФЧ (*точечных* частиц!) во времени можно условно (схематично) изобразить в виде прямых линий. Взаимодействие двух ФЧ (их «столкновение») происходит всегда в точке, где две линии пересекаются. При этом упаковка всей энергии взаимодействия двух частиц в одну точку ведет к катастрофическим результатам, вроде упоминавшихся ранее бесконечных ответов ($\infty$).

Согласно ТС струны – это уже не точечные объекты (как ФЧ), а объекты с пространственной протяженностью (скажем, в несколько планковских длин). Движение струны-«кольца» во времени – это уже не линия, а некая поверхность «шланга» (его поперечное сечение в любой точке – и есть колеблющаяся струна-«кольцо»). А взаимодействие двух струн во времени условно выглядит как слияние двух «шлангов» в один (так «сливаются» две штанины в брюках). Место встречи «шлангов» (штанин) «размазано» в пространстве (это уже не точка!), что смягчает свойства микромира, настолько, что вычисления дают нормальные конечные результаты вместо получавшихся ранее бесконечностей. Вот так (очень грубо) можно пояснить «уход» ТС от бессмыслицы (от ∞) при слиянии ОТО и КМ.

В ТС нет способа обнаружить «неровности» в структуре пространства-времени на субпланковском уровне (на размерах менее $10^{-35}$ м), а значит, флуктуаций гравитационного поля не существует (с точки зрения ТС). Струна, благодаря своим конечным размерам, смажет флуктуации гравитационного поля так, что устраняется несовместимость ОТО и КМ. Таким образом, ТС требует создания *квантовой геометрии* (для планковских размеров).

«**Теория всего**» (на свете) – так можно назвать ТС, ибо все события во Вселенной являются отражением одного великого физического принципа (главного уравнения). ТС обещает нам унифицированное описание физического мира – универсальную теорию мироздания. ТС дает *единственный* известный способ объединения ОТО и КМ, известный способ объяснения свойств всех взаимодействий и всех видов материи. Причем ТС – это не конец науки, а её начало; прочное основание (точка опоры) для строительства нашего понимания мира. ТС – мощная парадигма понятий о пространстве-времени, выводящая нас на финишную прямую; она впервые дает изящные ответы на самые фундаментальные вопросы. Скажем, ТС позволила решить одну из центральных проблем черных дыр (энтропия Бекенштейна-Хокинга [3, с.217]). Более того, ТС позволяет проникнуть в суть целого ряда *новых* вытекающих из неё физических явлений.

**Главный недостаток** ТС заключается в том, что математический аппарат ТС столь чудовищно сложен, что сегодня никто даже не знает точных уравнений, их вида. Сейчас для приближенных вариантов этих уравнений (они тоже очень сложны) найдены только частичные решения. Подобно тому, как уравнение $0 \cdot x = 0$ имеет бесконечно много решений, так и в ТС уравнения имеют множество решений: например, много возможных способов свертывания дополнительных измерений (§13), и каждое решение соответствует вселенной со своими свойствами – рог изобилия вселенных (большинство из которых не имеют никакого отношения к наблюдаемому миру). Этот недостаток, вероятно, есть следствие того, *как* физики подходят к анализу ТС. А физики пытались анализировать ТС с помощью *теории возмущений* – приближенной процедуры, в которой сначала пытаются найти грубый ответ, а затем поэтапно уточняют его с учетом всё большего числа подробностей, ранее опущенных.

ТС приводит к Вселенной, свойства которой находятся в качественном согласии с данными для известных частиц и взаимодействий. Но представить («выудить») детальные количественные характеристики ТС ещё не в состоянии. В настоящее время ТС окончательно не разработана, не имеет надежного экспериментального подтверждения и не принята всем научным сообществом, хотя волна критики ТС в начале 21 века существенно пошла на убыль. Всё ждут экспериментов в ближайшем будущем, в т.ч. на коллайдоре в Женеве (§7), причем косвенные подтверждения ТС могут быть получены в любой момент.

## 12. СУПЕРСИММЕТРИЯ И М-ТЕОРИЯ

Понятие симметрии играет ключевую роль в эстетических принципах не только искусства, но и физики. Симметрия природы для физиков – это определенный набор свойств физических законов: они не зависят от того, где, когда и под каким углом (с какого направления) мы их применяем (все моменты в пространстве-времени и все направления идентичны и симметричны). Например, гравитационное взаимодействие (ГРВ) налагает очевидную симметрию: она гарантирует равноправие всех возможных точек зрения и всех возможных систем отсчета. Именно в наличии симметрии ГРВ обнаруживает волнующее сходство с 3-мя другими силами природы (правда, симметрия последних не столь очевидна, не столь доступна пониманию). Так, Вселенная обладает симметрией СИЛВ: физические явления не изменятся при сдвиге зарядов СИЛВ (глюонов). Это является примером так называемой (по историческим причинам) *калибровочной симметрии*. В определенном смысле, ГРВ и СИЛВ имеют общее происхождение: каждое из них необходимо для какой-то конкретной симметрии. Это можно сказать обо всех 4-х силах.

Принцип относительности (основа СТО), – это ещё одна разновидность симметрии природы, причем её расширяет принцип эквивалентности (основа ОТО).

Симметрия также связана с понятием *спин*, о котором скажем пару слов. Все ФЧ «*вращаются*» с постоянной скоростью (это просто удобный образ для представления того, что происходит в реальности). Это внутреннее свойство ФЧ (подобно массе, электрическому заряду). Все частицы (и античастицы) *вещества* имеют спин ½ (это, грубо говоря, квантовомеханическая мера скорости вращения). Частицы, передающие негравитационные взаимодействия (фотоны, глюоны,... ) имеют спин 1, а у гравитона спин 2. Спин π- и К-мезонов равен 0. Спин в ТС связан с модой колебания струны.

Облекая понятие симметрии в точную математическую форму, физики пришли к теориям, где частицы вещества и частицы, передающие взаимодействия, тесно переплетены. Такие теории назвали *суперсимметричными*, причем ТС здесь оказывается непревзойденным лидером. Хотя суперсимметрия была открыта в ходе работ над ТС, она может быть успешно включена в теории, основанные на точечной модели частиц, т.е. не является уникальным признаком ТС.

Если Вселенная является суперсимметричной, то частицы природы должны существовать парами (суперпартнерами), причем в каждой паре спин должен отличаться на ½. Однако до сих пор не обнаружен ни один суперпартнер у известных частиц (со спином меньше на ½). Причина в том, что частицы-суперпарнеры должны быть в тысячу и более раз тяжелее протона (а это за пределом возможностей ускорителей). Если ТС верна, то верна и идея суперсимметрии.

Суперсимметрия – центральное звено в ТС, причем она может быть включена в неё 5-ю способами (методами): теория струн типа I (там есть открытые струны), теория струн типа IIA, теория струн типа IIB, теория гетеротических струн O32 (произносится «О тридцать два»), теория гетеротических струн $E_8 \times E_8$ («Е восемь на Е восемь»). Это пять различных вариантов ТС, у них различаются приближенные уравнения [3, с.126, 187, 259]. Когда будут найдены точные уравнения, возможно, вскроется связь между пятью ТС и они сольются в одну теорию. Такие надежды имеют серьезное основание.

Точные вычисления позволили Э. Виттену обнаружить ещё одно (11-ое) пространственное измерение. Оказалось, что «струны» типа IIA и Е-гетеротические «струны» имеют фундаментальную структуру двумерных *мембран*, живущих в 11-мерной вселенной (о ней ничего неизвестно, кроме набора разнородных фактов). Кроме струн обнаружились и другие объекты: мембраны, капли и проч. Все эти идеи привели ко второй революции в ТС. Для 11-мерной теории Виттен придумал рабочее название: *М-теорию* (материнская, мембранная, матричная, мистическая и т.д.). Именно она дает основу для объединения всех пяти ТС.

Физические процессы в ТС порождаются взаимодействием между струнами: распад и слияние струнных колец (петель) при столкновении. В силу соотношения неопределенностей возникает микроскопический хаос, в котором происходит непрерывное рождение пар – двух петель с противоположными колебательными модами. Они быстро сливаются в одну петлю – виртуальную пару струна/антиструна. Присутствие (хоть и очень скоротечное) этих дополнительных пар влияет на детальную структуру взаимодействия. Извержения виртуальных струн могут произойти любое число раз, что приводит к рождению последовательных пар (петель). Причем число петель определяет точность, с которой учтены квантовомеханические эффекты.

Вероятность распада струны с образованием виртуальной пары при квантовом хаосе определяется неким параметром – *константой связи* (КС) (в каждой из пяти ТС они свои). При малых КС (меньших 1) молниеносное образование большого числа пар виртуальных струн становится крайне маловероятным, в итоге вклады диаграмм с петлями при увеличении числа петель уменьшаются. Но если КС больше 1 (а это м.б. в любой из пяти ТС), то петлевые вклады становятся всё более важными и *теория возмущений* здесь неприменима! Поэтому нахождение числовых значений КС, определяющих большинство физических свойств ТС, – один из главных (и нерешенных пока) вопросов ТС, а повсеместное использование *теории возмущений* в ТС стало помехой на пути прогресса.

В докладе 1995 г. Виттен объявил о новой стратегии в ТС, основанной на понятии *дуальности*, когда различные описания одной и той же ситуации *приводят* к различным взаимодополняющим физическим выводам и математическим методам исследования – именно так из пяти ТС рождается единая М-теория, причем в физике есть место и для 6-й теории. Оказывается, для сильной связи (КС > 1) в каждой из шести теорий ТС есть дуальное описание в терминах слабой связи (КС < 1), и наоборот. Весьма любопытна ещё одна формулировка дуальности: законы физики в ТС типа IIA во вселенной с размером R идентичны законам физики в ТС типа IIB во вселенной с 1/R. Аналогичное утверждение справедливо для теорий Е- и О-гетеротических струн.

Почему в теориях *супергравитации* (суперсимметричных квантовых теориях, созданных до ТС) было 10 измерений? Просто здесь успешнее остальных оказались попытки построить теории *супергравитации* не в 4-х, а в большем числе измерений. А именно, наиболее перспективными оказались варианты теорий в 10-ти или 11-ти измерениях (число 11 оказалось максимально возможным числом измерений). Связь с четырьмя наблюдаемыми измерениями в этих теориях обеспечивалась путем использования формализма Калуцы-Клейна: лишние измерения сворачивались (§13). Поскольку струны на масштабах *аттометра* выглядят (аппроксимируется) как бесструктурные точечные частицы в формализме квантовой теории поля, то 10-мерная супергравитация оказалась лишь вершиной огромного айсберга – М-теории (11-ти мерной супергравитации).

Если внутри черного ящика находится нечто неопознанное с суммарной минимальной массой и с определенным зарядом (электрическим, магнитным, …, любым!), и если в микромире реализуется механизм суперсимметрии, то можно однозначно определить содержимое *такого* черного ящика. При этом говорят, что он в БПС-состоянии (в честь открывших его ученых: Богомольный, Прасад, Соммерфилд). Это открытие значительно расширяет границы понимания в М-теории, так, даже если КС > 1, все равно можно вычислить точные параметры БПС-состояний (*непертурбативные* массы и заряды; заметим, мы говорим в основном о *пертурбативной* ТС).

Примечательно, что удалось узнать даже, как выглядят БПС-состояния. Некоторые из них – одномерные струны (1-браны), другие – двумерные мембраны (2-браны), а некоторые – трехмерны (3-браны), четырехмерны (4-браны), …, девятимерны (9-бран, т.е. до 9 пространственных размерностей). Все эти протяженные объекты равноправны, т.е. существует «демократия бран». Однако массы всех бран, кроме одномерных струн, обратно пропорциональны значениям соответствующих КС струны (в рамках любой из пяти ТС). Значит, в пределе слабой связи все браны, кроме 1-бран, будут иметь огромные массы, на порядки больше планковской (следствия существования многомерных мембран пока не ясны). Для их рождения требуются огромные энергии ($E = m{\cdot}c^2$), и они будут оказывать ничтожное влияние на законы известной нам физики (но не на все). Т.е. для большинства исследований можно пренебречь всеми объектами, кроме одномерных струн. Именно поэтому мы в основном говорили о струнах в рамках ТС (а, по сути, в рамках М-теории).

Открытие замечательной системы дуальных связей позволяет глубже постичь ТС, но многие вопросы остаются неразрешенными. Так, мы ещё не знаем, как выйти за рамки приближенных уравнений для определения значения КС струны. Также *нет ясного понимания* того, почему протяженных пространственных измерений именно три [3, с. 207, 232]. С учетом дуальностей все пять теорий струн, 11-мерная супергравитация и М-теория сливаются в единую схему (“теоретическую карту” физиков, на которой якобы *нет белых пятен*! [3, с. 208]). Задача струнного теоретика (М-теоретика) – показать, что *некая* точка на весьма обширной “теоретической карте” действительно описывает нашу Вселенную.

## 13. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

В 1919 г. малоизвестный математик Т. Калуца в письме Эйнштейну высказал необычную мысль: во Вселенной может быть более 3-х пространственных измерений. А в 1926 г. О. Клейн уточнил эту мысль: пространственные измерения м.б. двух видов – *протяженными* и *свернутыми* (доступными и недоступными) для нашего наблюдения. Расчеты Клейна показали, что свернутое (дополнительное циклическое) измерение существует в каждой точке пространства. Эту гипотезу стали называть *теорий Калуцы-Клейна*.

Дополнительная, пятая координата является компактной (её значения лежат на окружности) и имеет размер сопоставимый с планковской длиной. Поэтому для макроскопического наблюдателя пятая координата не заметна, т.е. все измеряемые нами физические величины не зависят от её значения.

Кроме того, дополнительные измерения (ДИ) оказывают влияние преимущественно на гравитационное взаимодействие (ГРВ, которое самое слабое), поэтому, будь ДИ величиной, скажем, даже в 1 мм, их вполне могли бы «просмотреть» в экспериментах (ускорители не реагируют на ГРВ). Таким образом, могут быть и «крупные» ДИ, пока никем невидимые.

Многочисленные ДИ с самой причудливой геометрией свернуты (туго скручены) в крохотные петли (кольца), спрятанные в ткани мироздания (в складчатой структуре космического пространства). Даже если ДИ всегда будут оставаться в свернутом состоянии и будут малы, то сам факт их существования ведет к глубоким последствиям. Так, добавив всего лишь одно ДИ, Калуца объединил ОТО с максвеловской теорией электромагнитного поля (даже Эйнштейн оценил это только спустя более двух лет!).

Калуца явно опередил свое время, и только с середины 1970-х гг. начались интенсивные разработки теорий высших размерностей со многими ДИ. Поскольку до сих пор ДИ не обнаружены, то считают, что размеры всех возможных ДИ меньше *аттометра*. Теории, содержащие гравитацию, ДИ и суперсимметрию называют *многомерной супергравитацией*. Причем в многомерную формулировку труднее всего включить такое понятие как *киральность*. Ещё в рамках СМ было установлено, что наша Вселенная (её законы) не обладает полной симметрией левого и правого (в части СЛВ), т.е. Вселенная является *киральной*. Поэтому зеркальные аналоги некоторых процессов, определяемых СЛВ, не могут существовать в нашем мире, даже если исходные процессы существуют [3, с.257].

Примечательно, что ТС просто *требует*, чтобы Вселенная имела ДИ. Расчеты показали, что если бы струны могли колебаться в 9-ти независимых пространственных измерениях, то все бессмысленные отрицательные вероятности (которые появлялись на начальном этапе развития ТС) исчезли бы. И к удивлению многих «струнников» в середине 1990-х гг. Виттен доказал, что пространственных измерений должно быть 10 (одно ДИ просто «пропустили»!). Однако до сих пор никто не знает, почему именно 7 их них – это ДИ (помимо привычных нам трех пространственных измерений и одного временного). Также не известно, почему у *времени* нет ни одного ДИ.

Поскольку петли струн колеблются во всех 10 пространственных измерениях, то форма, в которую свернуты пространственные измерения, и форма их взаимного переплетения, сильно влияют и строго ограничивают возможные моды резонансных колебаний струн. Т.е. геометрия ДИ определяет массу и заряды частиц в обычном 3-х мерном пространстве. Уравнения, следующие из ТС, существенно ограничивают геометрическую форму ДИ. В 1984 г. было доказано, что этим условиям удовлетворяет один конкретный класс шестимерных геометрических объектов – *пространств Калаби-Яу* (ПКЯ или *многообразий* Калаби-Яу). Их математическое описание довольно сложное и изощренное, оно было получено Э. Калаби (1957 г.) и Ш.Т. Яу (1977г.) вне всякой связи с физикой (и ТС).

Однако существует около *десятков тысяч* видов ПКЯ, которые удовлетворяют требованиям к ДИ, вытекающим из ТС [3 с. 141]. На обложке нашей книги показан всего лишь один из возможных видов ПКЯ (и его изображение имеет существенные искажения, т.к. шестимерное пространство трудно представить на двумерном листе бумаги). И пока не ясно, как определить из уравнений ТС, какое из ПКЯ определяет вид ДИ. Нерешенной проблемой остается даже поиск принципа выбора ПКЯ. Дело в том, что математический аппарат ТС столь чудовищно сложен, что физики способны выполнить только приближенные вычисления в рамках формализма – *теории возмущений*. В ней все возможные ПКЯ выглядят равноправными; ни одно из них не выделяется уравнениями.

Понятие о ПКЯ позволяет получить ответ на один из сокровенных вопросов физики: с чем связано существование семейств ФЧ и почему семейств именно три (см. табл. 4.1)? До ТС ответа на это вопрос не было, а ответ ТС состоит в следующем. Типичное ПКЯ содержит отверстия (как в бублике), они могут быть самых разных типов (в т.ч. в нескольких измерениях). С каждым отверстием связано семейство колебаний с минимальной энергией. Если свернутое ПКЯ имеет три отверстия, мы обнаружим три семейства ФЧ. Т.е. три семейства – это число отверстий в геометрической форме, которую образуют ДИ. Но число отверстий в каждом из десятков тысяч *известных* ПКЯ может доходить до 3, 4, 5, …, 480, а какое ПКЯ выбрать – пока неизвестно (так, ТС предсказывает существование 4-х семейств ФЧ, в каждом из которых по 27 ФЧ [45, т.4, с.7]). Более того, скажем, три отверстия могут плавно изменять свою форму опять же через бесконечное число промежуточных форм ПКЯ. И, говоря о десятках тысяч ПКЯ, мы уже сгруппировали все такие многообразия, которые могут быть преобразованы друг в друга путем плавных деформаций, и учитывали такие группы как одно ПКЯ [3, с.149].

Массы ФЧ в каждом семействе зависят от того, как пересекаются и накладываются друг на друга границы различных многомерных отверстий в ПКЯ. Однако это также требует знания конкретного вида ПКЯ. Перебрать все альтернативы ПКЯ невозможно. Но небольшое число ПКЯ дает физическую картину, которая на качественном уровне близка к реальному миру.

Перечислим основные *предсказания* ТС, которые можно попытаться проверить в эксперименте [3, с. 150]:

1). У каждой известной частицы имеется суперпартнер (мы можем предсказать для них константы взаимодействия, но не массы).

2). В некоторых ПКЯ м.б. частицы с дробным зарядом 1/5, 1/11, 1/13, 1/53 (в единицах заряда ***e***, в СМ м.б. только 1/3, 2/3, – 0, +1, –1). Масса таких частиц, весьма вероятно, близка к планковской массе.
3). Макроскопическую струну можно… увидеть в телескоп.
4). У нейтрино – ненулевая масса (в 2002 г. она была установлена, и оказалась крайне малой), хотя согласно СМ (§8) масса д.б. нулевая.
5). Возможны распад протона, а также превращения и распады некоторых комбинаций кварков (всё это СМ запрещает).
6). Ряд ПКЯ допускают новые взаимодействия, поля которых отличаются слабой интенсивностью и большим дальнодействием.
7). ТС предлагает ряд кандидатов на роль *скрытой материи* (§9).
8). ТС может объяснить огромное расхождение по *Λ-члену* (§10)?

## 14. “РОДСТВО” БОЛЬШОГО И МАЛОГО

Согласно ТС, в случае, когда радиус циклического измерения становится меньше планковской длины и продолжает уменьшаться, *все* физические процессы во Вселенной происходят идентично тому, когда радиус циклического измерения больше планковской длины и увеличивается. Т.е. космический коллапс становится космическим расширением! Очень краткое объяснение феномена дано ниже.

Струна может наматываться любое число раз (как лассо) на циклическое измерение Вселенной (по циклической пространственной координате), причем она будет продолжать скользить и колебаться, находясь в этой расширенной конфигурации. Т.е. струна может находиться в *топологической моде* движения (открытые струны прекрасно вписываются в схему, изложенную ниже). Число оборотов струны вокруг циклического измерения (любое целое число) называют топологическим числом струны.

Намотанные струны имеют почти тот же набор свойств, что и ненамотанные. Главное отличие в том, что у намотанной струны есть *минимальная* масса (минимальная длина), определяемая *размером* циклического измерения и числом оборотов струны вокруг него. Колебания струны дают добавку к этой минимальной массе. Учитывая закон $E = m{\cdot}c^2$, *топологическая энергия*, сосредоточенная в намотанной струне прямо пропорциональны *радиусу циклического измерения* ($R$). Заметим, что квантово-механические поправки могут в точности сократить массовый вклад ненамотанной струны.

Колебательные движения струны удобно разделить на две категории: обычные (осцилляции) и однородные. Однородные колебания соответствуют поступательному движению струны как целого, когда она скользит из одного положения в другое без изменение формы. Все движения струны

– это суперпозиция *осцилляций* (они играют второстепенную роль) и *поступательных движений*. *Колебательная энергия* (однородных колебательных движений) *обратно* пропорциональна радиусу циклического измерения ($1/R$) (локализация струны в меньших объемах приводит к росту энергии её движения, см. *клаустрофобия* в §3).

В итоге получаем важный результат: всякому $R$ (большому радиусу Вселенной) соответствует некий $1/R$ (малый радиус Вселенной), при котором топологическая энергия струны для $R$ равны колебательной энергии для $1/R$, а колебательная энергия для $R$ равны топологической энергии для $1/R$. Но поскольку физические свойства зависят лишь от полной энергии конфигурации струны (топологической + колебательной), то нет никакого физического различия между этими геометрически разными состояниями ($R$ и $1/R$).

Физические явления обусловлены свойствами фундаментальных составляющих – массами (энергиями) частиц и переносимыми ими зарядами. Не имеет значения, равен ли радиус $R$ или $1/R$: полный список значений свойств фундаментальных составляющих ТС один и тот же. Все эти рассуждения годятся для ПКЯ.

Мы не знаем, уходят ли три пространственных измерения нашей Вселенной (каждый из них это $R \sim 10^{26}$ м или $10^{61}$ *эви*) в бесконечность или замыкаются сами на себя, образуя огромные окружности. Т.е. наши протяженные измерения могут тоже иметь форму окружностей, и поэтому они попадают под действие принципа физической неразличимости пространств с радиусами $R$ или $1/R$ (описанного выше в рамках ТС). Поскольку фотоны (видимые нами в телескопы) – это легкие струнные моды, то результат наших измерений $R{\sim}10^{61}$ *эви* (Вселенная огромная и расширяется). Если бы астрономы обмеряли небеса тяжелыми модами намотанных струн (на неведомом нам пока оборудовании), то получили бы в результате измерений $R{\sim}10^{-61}$ *эви* (Вселенная якобы мала и сжимается). Из-за технических ограничений для нас гораздо привычнее первое определение, но и второе столь же законно [3, с.167]. Следует подчеркнуть, что, используя для наблюдения фотоны, мы всегда зарегистрируем в качестве минимально возможного размера планковскую длину (т.е. ТС избегает ультрамикроскопических расстояний, которые меньше планковской длины, они для нас недосягаемы в принципе). Значит, существует минимальный предел сжатия Вселенной (и он не нуль).

Итак, в ТС окружности радиуса $R$ и $1/R$ физически неразличимы. Это привело физиков к мысли, что два различных ПКЯ, выбранные в качестве ДИ в ТС, могут приводить к одинаковым физическим результатам. Отверстия в 6-ти мерном ПКЯ могут иметь различные размерности, но число семейств ФЧ, возникающих при возбуждениях струны, зависят только от числа отверстий, а не от числа отверстий каждой конкретной размерности. Развивая эти соображения, Б. Грин стал одним из главных участников открытия *зеркальной* *симметрии* в ТС [3, с.172]. По сути, она говорит о том, что если в качестве ДИ выбирать два ПКЯ из любой т.н. зеркальной пары, то получается физически эквивалентная вселенная. С наличием у ПКЯ зеркального партнера можно перевести сложное математическое вычисление на более простое (у партнера), а результат вычисления (физические свойства) будут теми же. Не существует простого объяснения, почему это происходит, но в ряде случаев вычисления становятся поразительно лёгкими в зеркальном пространстве.

Это пример того, как ТС обогнала математику. Так, с использованием ТС и зеркальной симметрии физикам (а не математикам) удалось первым (без ошибки) решить любопытную задачу. Грубо говоря, она звучит так: сколько сфер можно упаковать внутрь некого ПКЯ? Ответ физиков был 317206375. Спустя почти 10 лет математики всё же нашли строгое доказательство для обоснования формул в этой задаче [3, с. 173]. То есть ТС стала снабжать математиков новыми мощными подходами к неразрешенным проблемам.

## 15. КРОТОВЫЕ НОРЫ И ЧЁРНЫЕ ДЫРЫ

**Кротовая нора** – это пространственно-временная червоточина, некий туннель, укорачивающий маршрут из одной области вселенной в другую (подобно мосту-переходу между двумя небоскребами где-то высоко над землей). Кротовая нора, благодаря разрыву структуры пространства, создает новое пространство, прокладывает новую пространственную траекторию. Кротовые норы во Вселенной пока не обнаружены, их размеры неясны (м.б. и макроформы?).

Пример растяжения ткани пространства до предела дают *черные дыры*. Есть свидетельства в пользу их существования. Искривление пространства выглядит проколом в центре черной дыры, но мы ограничены от этой чернодырной сингулярности горизонтом событий, не позволяющим даже свету вырваться из гравитационной ловушки. Действие чернодырной сингулярности состоит в том, что она поглощает и разрушает всё попадающее на неё вещество и *уничтожает информацию* (гл. III §4).

Впервые только в ТС демонстрируется возможность разрыва ткани пространства при определенных физических явлениях. К 1993 г. были получены первые примеры *переходов с изменением топологии* (т.е. процедур с разрывом пространства), при которых физические характеристики не менялись (кроме массы отдельных частиц: у некоторых они будут увеличиваться, а у некоторых – уменьшаться). С точки зрения физики момент разрыва пространства ничем не примечателен, причем он может произойти и сегодня и завтра, мог быть в прошлом. Массы элементарных частиц довольно стабильны во времени, но после Большого взрыва допускаются (и не только в

ТС) периоды, когда эти массы менялись. С точки зрения ТС тогда происходили переходы с изменением топологии. Возможно, это происходит и сейчас (м.б. самая кульминация разрыва!), но очень медленно и мы (в экспериментах) этого просто не замечаем.

Любые две чёрные дыры с одинаковыми массами, зарядами и спинами совершенно идентичны. Но именно такими характеристиками отличаются друг от друга элементарные частицы. Так неужели черные дыры могут быть гигантскими элементарными частицами? Могут, говорит ТС. При эволюции ПКЯ, сопровождающейся *конифолдным* переходом (с сильным разрывом пространства и без всякой физической катастрофы), изначальная ненулевая масса черной дыры уменьшается до нуля, после чего черная дыра превращается в безмассовую частицу (подобно фотону), которая описывается определенной колебательной модой струны. Черные дыры и элементарные частицы являются двумя фазами (наподобие воды и льда) одной струнной материи. Все струнные модели, полученные изменениями константы связи и геометрии ПКЯ, будут разными фазами единой теории. Целостность М-теории сохранится даже после сворачивания всех ДИ.

Энтропия – это мера беспорядка, хаотичности (§20). У черных дыр энтропия очень велика, и она растет по мере засасывания материи, компенсируя наблюдаемое уменьшение энтропии снаружи черной дыры. Бекенштейн предположил, что *площадь горизонта событий черной дыры и есть точная мера ее энтропии*. И это стало всем очевидным после того, как Хокинг установил, что на квантовом уровне черные дыры излучают (светятся, у них есть температура, правда, чуть теплее нуля). Но гипотезу Бекенштейна удалось подтвердить также расчетами в рамках ТС (что стало важным аргументом в пользу ТС). Так, черная дыра в 3 солнечных массы будет иметь энтропию $\sim 10^{78}$! (при температуре черной дыры $\sim 10^{-8}$ К). И чем массивнее дыра, тем энтропия больше (и несусветный беспорядок внутри неё). Но беспорядок чего? Возможно, черная дыра – это окно в другую вселенную, связанную в центре черной дыры с нашей Вселенной (её энтропия $\sim 10^{90}$). Вероятно, ТС сможет дать глубокое понимание и этой сингулярности черной дыры.

Почему энтропия, хранящая информацию о беспорядке в черной дыре, определяется *площадью* поверхности её горизонта, а не *объемом* под ним? Похоже, что площадь горизонта играет роль некой голограммы, в которой закодированы (двумерными данными) образ трехмерной внутренней области черной дыры.

## 16. РАСШИРЕНИЕ ВСЕЛЕННОЙ

Через 15 лет после создания ОТО Фридман нашел т.н. решение *Большого взрыва* для уравнений Эйнштейна, из которого следовало, что наша Вселенная должна расширяться (или сжиматься). А в 1929 г. Хаббл подтвердил это экспериментально: чем дальше от нас галактика, тем быстрее она удаляется. С тех пор относительная скорость расширения Вселенной называется *параметром Хаббла* ($H$):

$$H = \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dt}, \qquad (16.1)$$

где $R$ – масштабный фактор (расстояние между теми или иными двумя далекими объектами, скажем, галактиками); $dR/dt$ – скорость изменения $R$ во времени. По оценке ученых: $H = 65 \pm 7$ км/(с·Мпк) (2002 г.), где 1 *парсек* (пк) $\approx 3 \cdot 10^{16}$ метров – единица расстояний в астрономии. Так, при $H = 65$ км/(с·Мпк) две галактики, между которыми $R = 10$ Мпс (30 млн. световых лет) удаляются друг от друга со скоростью $dR/dt = H \cdot R \approx 650$ км/с.

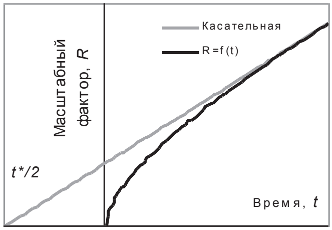

Рис. 16.1. Расширение Вселенной

На рис. 16.1 показана функция $R = \mathrm{f}(t)$ – изменение масштабного фактора $R$ от времени $t$, причем при $t \to 0$ имеем $R \to 0$, а значит $H \to \infty$, т.е. «взрыв» в нулевой момент времени. В дальнейшем скорость изменения $R$ начинает уменьшаться [эта скорость – тангенс (tg) угла наклона касательной к графику $R = \mathrm{f}(t)$, т.е. $\mathrm{tg} \equiv dR/dt \equiv H \cdot R$].

Пусть $t^* \approx 17$ млрд. лет ($10^{61}$ *эви*) – возраст Вселенной (правая граница рис. 16.1, которой соответствует некий $R^*$). График $R = \mathrm{f}(t)$ таков, что касательная к нему в точке $t^*$ пересекает ось времени в точке $x = -t^*/2$ (левая граница рис. 16.1). Поэтому можно записать: $\mathrm{tg} = R^*/(t^* + |x|) = H \cdot R^*$, откуда получаем так называемое *время Хаббла* $H^{-1} = t^* + |x| = (3/2) \cdot t^*$, которое приблизительно (с точностью до множителя 3/2) равно возрасту Вселенной $t^*$.

Расширение Вселенной – это расширение самого пространства, а не перемещение галактик “наружу”, в некую прежде пустую область. Галактики можно сравнить с изюминками в сыром тесте: когда тесто расширяется (набухает от дрожжей), то изюминки «разбегаются» друг от друга подобно галактикам.

Термин «Большой *взрыв*» не следует понимать буквально. Так, при любом взрыве возникает неоднородное распределение вещества, а наша Вселенная *однородна* – контраст плотности в больших масштабах (от скопления галактик и выше) составляет не более $10^{-5}$. Ещё при любом взрыве существует и остаётся центр взрыва, а в нашей Вселенной ничего подобного не наблюдается – *центр отсутствует*, он там, где вы сейчас находитесь, т.к. в нулевой момент времени *все* точки пространства были в одном месте.

Но если взрыва (в обычном понимании этого слова) не было, то почему наша Вселенная расширяется? Ответ был найден в самом конце 20 века: закон расширения Хаббла (16.1) – это наследие стадии *инфляции*, которая играла роль «взрыва», а движущая сила расширения – сила гравитационного *отталкивания* (!). Данная сила была вызвана *конденсатом скалярного поля*. Это вкратце поясним.

В многочисленных попытках объединения всех сил природы (СИЛВ, ЭЛМВ, СЛВ, ГРВ) в единую теорию возникают дополнительные поля и частицы. Одним из самых важных является так называемое *скалярное поле*, которое появляется в любых схемах объединений. При разработке квантовых теорий (КЭД и КХД) выяснилось, что *процедура перенормировки* (это триумф КЭД!) в названных теориях не работает. Для разрешения проблемы был придуман механизм динамической генерации масс элементарных частиц (*механизм Хиггса*). Основная идея здесь в том, что поля взаимодействуют *не линейно*, и частица, изначально безмассовая, приобретает массу из-за взаимодействия с конденсатом некоторого скалярного поля.

*Конденсат скалярного поля* по *всем* основным характеристикам подобен *вакууму виртуальных частиц*. Поэтому он ещё называется состоянием вакуума скалярного поля. Само поле – *нелинейное*, оно взаимодействует само с собой и потенциальная энергия взаимодействия ($V$) в зависимости от величины поля ($F$) представляет сложную функцию. Причем график зависимости $V$=f($F$) имеет две точки (при $F = 0$ и $F = F_o$), в которых касательная к графику параллельна горизонтальной оси $F$ (см. рис. 16.2).

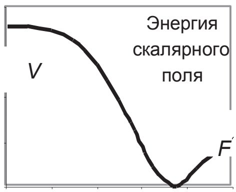

Рис. 16.2. Функция $\boldsymbol{V}$ =f($\boldsymbol{F}$)

Физическое поле, описывающее, например, $W^+$-бозон, взаимодействует с таким скалярным полем, причем величина скалярного поля ($F$) играет роль массы поля $W^+$-бозона. В результате такого взаимодействия W± - и Z-бозоны приобретают массу, что и было названо *механизмом динамической генерации массы*. При малых энергиях взаимодействующих частиц их массы обеспечиваются средней величиной скалярного поля, при повышении энергии массы исчезают.

При этом масса частицы становится функцией энергии взаимодействующих частиц и начинает работать процедура перенормировки, позволяющая точно рассчитать характеристики взаимодействий частиц. Возвращаясь к расширению Вселенной, заметим, что конденсат скалярного поля *эквивалентен* $\Lambda$-члену (§10), [28, с. 115].

В 1981 г. Алан Гус разработал *теорию инфляции*, согласно которой приливные силы, генерируемые $\Lambda$-членом, достигали чудовищной величины $10^{74}$ сек$^{-2}$. Эти силы обеспечивают «разгон» вещества Вселенной в течение эпохи инфляции. Причем эти силы возникают в однородной Вселенной, они сами выравнивают всякие градиенты давления и температуры, способствуя образованию однородного распределения вещества. Теорию А. Гуса признают далеко не все.

Если работает инфляционная модель Вселенной, то её характерный признак – гравитационные волны, образовавшиеся во время раздувания (инфляции) Вселенной. Это гравитационные волны самых разных длин волн, в том числе и очень больших. Про эти волны ученые сегодня не знают ничего. Но теория предсказывает, что они должны оставлять след в *реликтовом излучении* (в его анизотропии и в его поляризации). Этот след ученые пытаются найти [28].

На стадии инфляции масштабный фактор $R$ – это расстояние между двумя пробными частицами (т.к. ещё нет никаких галактик!). Причем здесь масштабный фактор $R$ со временем $t$ растет *экспоненциально*: $R = R_o \cdot \exp(H \cdot t)$. Поэтому производная $dR/dt$ (от экспоненты!) с точностью до численного множителя [а это параметр Хаббла $H$ в тот период, см. формулу (16.1)] совпадает с самой функцией $R=\mathrm{f}(t)$. Иначе говоря, скорость $dR/dt$ между двумя пробными частицами увеличивается пропорционально[1] самому расстоянию $R$ между частицами. Во время самой инфляции параметр Хаббла $H$ остается практически постоянным (время его изменения, умноженное на само значение параметра $H$, гораздо больше единицы).

Насчет начала инфляционной стадии (от нулевого момента) нет единого мнения: $10^{-42}$ сек [28, с. 38)]; $10^{-36}$ сек [3, с.230]. Не решена проблема и с длительностью ($\Delta t$) стадии инфляции, т.е. характерное время $H \cdot \Delta t$ (где $H$ – параметра Хаббла) указывается разное: 60, 100 (у Алана Гуса) и даже $10^{1000}$ (у Андрея Линде) [28, с. 113].

[1] В экономике период, когда рост денежной массы пропорционален самой массе называется инфляцией. По аналогии Алан Гус удачно назвал свою теорию – *инфляционной*.

Если считать, что к началу инфляции размер Вселенной составлял порядка $10^{-32}$ м, то во время инфляционной стадии (за 60 характерных времен, [28, с. 113] он «раздувается» до размера порядка $10^{-2}$ м. После окончания стадии инфляции Вселенная продолжила расширяться *по инерции*, причем за последующие 13 млрд. лет размер Вселенной увеличился «всего» в $10^{28}$ раз, т.е. в 100 раз меньше, чем за мимолетную стадию инфляции (реф. 21).

После стадии инфляции масштабный фактор $R$ начинает изменяться со временем $t$. Причем, для более ранней Вселенной, доминированной излучением, это изменение происходило по закону $R \sim t^{1/2}$, а для современной Вселенной, доминированной пылью, имеем $R \sim t^{2/3}$ (заметим, что $2/3 > 1/2$). Кстати, теперь должно быть ясно, что параметр Хаббла $H$ [см. формулу (16.1)] не является постоянной величиной (хотя его иногда ещё называют *постоянной* Хаббла), ведь $R$ – это функция времени $t$.

## 17. ЗАРОЖДЕНИЕ ВСЕЛЕННОЙ

Согласно уравнениям общей теории относительности (ОТО) в *нулевой момент* времени размер Вселенной был равен нулю, а её температура и плотность обращаются в бесконечность (т.е. здесь ОТО теряет всякий смысл). И только спустя планковское время (1 *эви* $\approx 5{,}4 \cdot 10^{-44}$ сек) от нулевого момента, значения основных параметров Вселенной становятся конечными (правда, ещё чудовищно колоссальными): энергия $E \sim 10^{28}$ эВ; температура $T \sim 10^{32}$ К; плотность $\rho \sim 10^{93}$ г/см$^3$. Начиная с этого момента, Вселенная стала расширяться, её объем начал расти, а температура и плотность – понижаться. Зарождение Вселенной – это несколько планковских времен [28, с. 38].

Гипотетическую область, где царят планковские величины, называют *сингулярностью*. При столь колоссальных энергии, температуре, давлении и плотности для описания происходящего надо привлекать *квантовую теорию гравитации* (КТГ), в которой одно из основных понятий – это нулевые флуктуации квантов данного поля. Но поле в гравитации – метрика пространства-времени, т.е. сама геометрия. Поэтому нулевые флуктуации геометрии образно назвали *«пеной»* пространства-времени. Вселенная в первые мгновения – это кипящая пена черных мини-дыр, которые хаотически возникали, испарялись и образовывались вновь [спустя несколько планковских времен черные дыры почти полностью (?) испарились]. В сингулярности масштабный фактор $R$ (§16) испытывает сильнейшие флуктуации. Это флуктуации самого пространства-времени (классического пространства-времени ещё нет), поэтому сингулярность условно ещё называют «*ничто*».

В квантовой теории поля вероятность рождения Вселенной *из ничего* вычисляется подобно подбарьерному (туннельному) прохождению α-частицы в атомное ядро (при котором у α-частицы не существует классической траектории). То есть *переход* от сингулярности (когда масштабный фактор равен нулю, $R$=0) к однородной и изотропной геометрии (когда $R=H^{-1}$) рассматривается как некий квантовый процесс. И существует, например, *решение де Ситтера*, при котором удалось вычислить вероятность указанного перехода за конечное время $\tau$[1]. Причем, наиболее вероятно рождение Вселенной с радиусом кривизны порядка планковской длины $l_{pl} \sim 1{,}6{\cdot}10^{-35}$ м.

Таким образом, ОТО и КМ не могут объяснить, что происходило от нулевого момента до планковского времени. Эти теории сами по себе оказываются бессильными разгадать тайны сингулярности.

Одно из главных достижений *теории суперструн* (ТС) – это возможность искоренения самого понятия исходной сингулярности. Однако пока ТС не позволяет выполнить надежный расчет для столь экстремальных условий, и работы струнных теоретиков дают лишь первое представление, очень далекое от окончательного понимания.

**Гипотеза Р. Бранденбергера и К. Вафа**. Мысленно двигаясь назад к нулевому моменту, мы обнаружим рост температуры до момента, когда размеры Вселенной сравняются с планковской длиной, после чего температура начнет… уменьшаться. Это происходит потому, что сокращение радиусов $R$ ниже значений планковской длины физически эквивалентно… увеличению радиусов $1/R$ (расширению Вселенной). Поэтому Вселенная никогда не сожмется до размеров меньших планковской длины (§14).

В результате получаем такую картину. Сначала все пространственные измерения совершенно равноправны и полностью симметричны: все они плотно свернуты в многомерный комок минимальных размеров, грубо говоря, до планковской длины. Температура и энергия высоки (но не бесконечны!). В планковский момент времени три пространственных измерения отбираются для последующего расширения, а остальные сохраняют исходный планковский размер. Расширение подстегивается само собой, и при увеличении размеров становится все меньше препятствий к дальнейшему расширению трех измерений (ТС объясняет, почему их именно трех [3, с.232]). Свернутые компоненты *пространства Калаби-Яу* (ПКЯ) остаются малыми, но участвуют в безумном карнавале – стремительных превращений, принимая облик различных ПКЯ в процессе беспрестанных разрывов и восстановлений ткани пространства. По мере того как Вселенная охлаждается, а три

[1] У физиков есть такая гипотеза: Вселенная сначала пребывала в стационарном состоянии (оно описывается, например, теорией суперструн), причем, как угодно долго; а потом произошел самопроизвольный распад из сверхплотного состояния (с планковскими энергиями или даже выше), аналогичный спонтанному α-распаду ядра. Если гипотеза верна, то при рождении Вселенной из сингулярности роль *Создателя* (*Творца*) оказывается лишней.

измерения становятся все больше, переходы от одного ПКЯ к другому происходят всё реже и *дополнительные измерения* (ДИ) в конце концов, упаковываются в определенное ПКЯ (предположительно ответственное за физические свойства наблюдаемого нами мира). Увы, но пока никому не удалось подробно описать эволюцию компоненты Калаби-Яу нашего пространства, чтобы современный её вид можно было вывести из теоретических принципов (§13).

**Гипотеза Г. Венециано и М. Гасперини**. Они допускают существование *доисторической* Вселенной, родившейся задолго до нулевого момента и зачавшей космический эмбрион (комок) планковских размеров. Эта Вселенная не являлась раскаленным и плотно скрученным клубком измерений, а была холодной и имела *бесконечную* протяженность. Затем туда вторглась нестабильность, и все точки Вселенной стали стремительно разбегаться в стороны (как и в эпоху инфляции по Гусу, см. §16). Из-за этого пространство становилось всё более искривленным и в результате произошел резкий скачок температуры и плотности (в эйнштейновской системе отсчета эволюция описывалась бы фазой *ускоренного сжатия*). Потом трехмерная область миллиметровых размеров *внутри* этих бескрайних просторов преобразовалась в раскаленное и плотное пятно (как и в эпоху инфляции по Гусу). Далее это пятно превратилось в наблюдаемую Вселенную. Таким образом, в доисторическую эпоху (до Большого взрыва) происходило свое инфляционное расширение (и эпоха инфляции по Гусу становится уже лишней). Сценарий эволюции Вселенной до Большого взрыва пока весьма спорный, он связан с анализом законченной М-теории.

**Гипотеза Смолина**. Учитывая схожесть условий в момент Большого взрыва и в центре черных дыр (колоссальная плотность материи), Смолин предложил механизм образования мульти-вселенной. Суть его гипотезы: черная дыра – это *семя* новой вселенной, рождающейся в муках Большого взрыва, но навеки спрятанной от нас за горизонтом событий черной дыры. Такой механизм образования мульти-вселенной – это космический вариант генетической мутации. Небольшие изменения параметров (значения масс и зарядов) в дочерних вселенных приведут к появлению отпрысков, ещё более приспособленных к воспроизводству черных дыр, число дочерних вселенных, в которых будет ещё больше. Если гипотеза Смолина верна, то наблюдаемые нами характеристики частиц и взаимодействий должны быть оптимизированы для воспроизводства черных дыр (но это пока вопрос нерешенный) [3, с. 239].

# 18. СОВРЕМЕННАЯ КОСМОЛОГИЯ

**Космология** – это наука о сотворении мира, описывающая основные эпохи (стадии) в биографии нашей Вселенной. В табл. 18.1 указаны моменты *начала* этих эпох (в *эви*, и в секундах или годах,) и характерная для эпох средняя температура во Вселенной (°*K*).

Зная возраст Вселенной (*t* – в секундах от *Большого взрыва*, см. §16), мы всегда можем грубо оценить среднюю энергию Вселенной (всех частиц, её составляющих) – *E* (эВ), а также среднюю температуру во Вселенной – *T* (°К) [34, с. 207]:

$$E \sim 7 \cdot 10^5 \cdot t^{-0,5}; \qquad T \sim 1,2 \cdot 10^{10} \cdot t^{-0,5}. \qquad (18.1)$$

Таблица 18.1. Основные эпохи (стадии) эволюции Вселенной

| № | Наименование эпохи (стадии) | ***t**, эви* | Начало эпохи (***t***) | град. *K* |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Зарождение Вселенной (Большой взрыв) | 0 | 0 секунд | ? |
| 2 | Планковское время (*элементар. временной интервал*) | 1 | $5,4 \cdot 10^{-44}$ с | $10^{32}$ |
| 3 | Стадия инфляции (скалярного поля) | $\sim 10^1$ | $\sim 10^{-42}$ с | изменяется |
| 4 | Рождение вещества (обычной материи) | $10^4$ | $10^{-39}$ с | $10^{29}$ |
| 5 | Рождение избытка вещества (бариосинтез) | $10^6$ | $10^{-37}$ с | $10^{28}$ |
| 6 | Электрослабый фазовый переход | $10^{33}$ | $10^{-10}$ с | $10^{15}$ |
| 7 | Рождение протонов и нейтронов | $10^{40}$ | $10^{-3}$ с | $10^{11}$ |
| 8 | Эпоха нуклеосинтеза легких ядер (А < 5) | $10^{43}$ | 1 с | $10^{10}$ |
| 9 | Эпоха доминирования скрытой материи | $10^{53}$ | 700 лет | $10^5$ |
| 10 | Эпоха образования (рекомбинации) водорода | $10^{56}$ | 225 тыс. лет | 4500 |
| 11 | Образование сверхскоплений галактик | $10^{60}$ | 5 млрд. лет | 30 |
| 12 | Современная эпоха (настоящее время) | $8 \cdot 10^{60}$ | 13±2 млрд. лет | 2,725 |

**Стадия инфляции**. До того, как Вселенная начала расширяться по законам *инфляции* (§16) вся наблюдаемая её часть умещалась в сфере диаметром $10^{-29}$ м, а её масса была ~ 10 кг (т.е. плотность – колоссальная!). Из такого состояния Вселенная начала раздуваться и к концу инфляции приобрела размеры порядка сантиметра, и массу ~ $10^{54}$ кг. И эта масса была значительно больше, чем в настоящее время, т.к. большая часть массы-энергии при расширении Вселенной «ушла» в потенциальную энергию гравитационного поля.

Стадия инфляции характеризуется предельно сильным *отрицательным* давлением (его также называют состоянием *фальшивого вакуума*), при котором меняются сами законы обычной гравитационной физики. Вещество становится источником отталкивания. Вселенная “разгоняется” и приобретает большую кинетическую энергию (поэтому мы и видим хаббловское расширение по инерции).

Температура Вселенной очень быстро падает до нуля (стадия инфляции – это, в основном, “холодная стадия”). Реальных частиц практически нет, материя представлена одним или несколькими скалярными полями (второе название эпохи инфляции – эпоха *доминирования скалярного поля*). На стадии инфляции из вакуумных квантовых флуктуаций скалярного поля рождаются возмущения плотности (“зародыши” будущих галактик и их скоплений), а из квантовых флуктуаций метрики – гравитационные волны.

Фальшивый вакуум обладает колоссальной плотностью потенциальной энергии ($\sim 10^{98}$эрг/см$^3$), но такое состояние вещества неустойчиво и довольно быстро кончается (состояние распадается). Запасенная в фальшивом вакууме потенциальная энергия выделяется в виде рождения частиц и их кинетической (тепловой) энергии.

**Рождение вещества**. В момент времени $t \sim 10^{-39}$ сек, когда гравитация ослабила «хватку», появилась горячая плазма, состоящая из неведомых нам частиц и античастиц (причем в равных количествах), т.е. «вышли на сцену» «прародители» (*преоны*) сегодняшних частиц. В дальнейшем распад преонов привел к образованию *кварков* и *лептонов* (§4), из которых «сконструирована» современная Вселенная. Разумеется, это весьма условное описание эпохи рождения.

Расчеты в рамках ТС показывают, что на расстояниях $\sim 10^4$ планковских размеров интенсивности всех негравитационных взаимодействий (СИЛВ, ЭЛМВ, СЛВ) окажутся одинаковыми [3, с. 122]. Это соответствует времени $t \sim 10^{-39}$ сек, но приводятся и другие моменты слияния трех сил, скажем, $t \sim 10^{-37}$ сек [28, с.97]. Виттен доказал, что если работать в рамках М-теории, то и гравитационное взаимодействие (ГРВ) соединится с 3-мя силами природы [3, с.235].

Итак, от нулевого момента времени и до момента, скажем, $t \sim 10^{-39}$ сек все силы в природе неразличимы. Это соответствует максимально *симметричному* состоянию Вселенной. Причем эта симметрия разрушилась резким скачком – *фазовым переходом*. Простейшим примером последнего является внезапное превращение воды в лед при понижении температуры до 0°С (жидкая вода гораздо более симметричнее, чем твердый лед, кристаллическая структура которого выглядит по-разному при наблюдении под разными углами). Образно говоря, три силы природы также «выкристаллизовываются» по-разному в разные типы взаимодействий: СИЛВ, ЭСЛВ, ГРВ.

**Рождение избытка вещества** над антивеществом соответствует момент времени $t \sim 10^{-37}$ сек (высокотемпературный бариосинтез). Здесь завершилось формирование сильнейшего «перекоса» в сторону частиц по сравнению с *античастицами* (§9).

Эта эпоха далека от понимания: теорией хватает, а вот экспериментальные данные почти отсутствуют. Теории различают также низкотемпературный бариогенез ($t \sim 10^{-15}$ сек), а в интервале от $10^{-37}$ до $10^{-15}$ сек лежит так называемая «пустыня взаимодействий», т.е. физики не усматривают на этом этапе ничего интересного.

После $t \sim 10^{-33}$ сек ($10^{10}$ *эви*; $E \sim 10^{22}$ эВ; $T \sim 10^{26}$ К) все процессы во Вселенной пошли «обычным» порядком, основанным на известной нам физике (где немало "белых пятен"). Подчеркнем, что к описанию Вселенной вплоть до $10^{-33}$ сек от Начала, следует подходить осторожно (особенно средствами теорий великого объединения).

Не позже, чем при $t \sim 10^{-26}$ сек ($10^{17}$ *эви*) возникает классическое пространство-время (безгранично делимое, гладкое, непрерывное). Т.е. оно перестает быть дискретным (если вообще было таковым).

**Электрослабый фазовый переход**. При $t \sim 10^{-10}$ сек [3, с. 228] слабые и электромагнитные взаимодействия, бывшие до этого момента времени *единым* взаимодействием (ЭСЛВ), расщепляются на обычные электромагнитные и слабые взаимодействия (ЭЛМВ и СЛВ, см. §5). Иначе говоря, в ходе второго *фазового перехода* произошло очередное понижение симметрии Вселенной. Заметим, что физическая система вполне может испытывать несколько фазовых переходов; например, вторым фазовым переходом у воды является её превращение в пар (газ) при температурах выше 100 °С.

После данного фазового перехода бозоны $W^{\pm}$ и $Z^0$ (переносчики ЭСЛВ) становятся массивными ($\sim 10^{11}$ эВ), т.е. срабатывает механизм динамического рождения массы (*механизм Хиггса*, см. §16).

**Рождение протонов и нейтронов**. До этой эпохи во Вселенной существовал так называемый "кварковый суп". При $t \sim 10^{-3}$ сек кварки начали объединяться в адроны: протоны, нейтроны и другие частицы (в присутствии фотонов), т.е. вступила в свои права знакомая нам физика элементарных частиц и ядер. В дальнейшем в обычных условиях кварки и глюоны (§6) как свободные частицы уже не существуют (явление “невылетания кварков” или *конфайнмента*).

**Эпоха нуклеосинтеза** легких ядер с атомным весом $A$<5 (гелий, литий и их изотопы) была в интервале от 1 до ~100 сек. Более тяжелые ядра синтезируются позже в звездах. В эпоху нуклеосинтеза Вселенная была подобна сверхбольшому термоядерному реактору, где «варилось» привычное нам вещество. На 180-й секунде и условно завершается стадия “ранней Вселенной” [28, с. 41]. Таким образом, спустя примерно 3 минуты – «дело было сделано»: образовалась б*о*льшая часть ядер гелия и некоторые другие легкие ядра; всё дальнейшее – уже знакомая нам история.

**Эпоха доминирования скрытой материи**. Эпоха преобладания *скрытой материи* (§9) наступает при $t \sim 10^{10}$ сек (700 лет от Начала), а точнее говоря, этот момент зависит от вида скрытой материи (горячей или холодной) и от параметров составляющих её частиц. Начиная с этой эпохи, растут малые возмущения плотности вещества, из которых в будущем появятся галактики, звезды, планеты и проч. Сейчас мир на 90% – это таинственная скрытая материя.

**Эпоха образования (рекомбинации) водорода**. До этой эпохи во Вселенной существует горячая плазма, состоящая из частиц скрытой материи, протонов, электронов, фотонов и некоторого количества легких ядер. Эпоха рекомбинации водорода начинается тогда, когда протоны начинают захватывать электроны, образуя нейтральные атомы *водорода* – ныне самого распространенного элемента во Вселенной. Как известно из лабораторной физики такой захват становится возможным в интервале температур $T = 4500 \div 3000$K, т.е. эпоха рекомбинации водорода это $t \sim (0{,}7 \div 1{,}6) \cdot 10^{13}$ сек или 225÷507 тыс. лет от Большого взрыва (Начала нашей Вселенной).

Одновременно с рекомбинацией водорода исчезает плазма (в которой фотоны не могли свободно распространятся) и Вселенная становится прозрачной. Установилось наблюдаемое ныне «нужное» (в т.ч. для нашего существования) отношение плотностей излучения и вещества – $10^9$:1. После увеличения размера Вселенной в ~1000 раз, т.е. в наше время эти фотоны образуют *реликтовое излучение* с температурой 2,725 К. Причем фотоны, рассеянные последний раз, доходят до наблюдателя, практически не взаимодействуя с веществом по дороге. Если бы наши глаза воспринимали микроволны, то мы увидели бы рассеянное свечение вокруг нас, ведь в *каждом* кубическом метре Вселенной находится $4 \cdot 10^8$ фотонов (эхо сотворения).

**Эпоха образования сверхскоплений галактик**. Сначала во Вселенной образуется крупномасштабная структура – сверхскопления галактик (условное начало эпохи – $t \sim 10^{17}$ сек). А уже после этого идет образование звезд, планет и прочих объектов во Вселенной.

Основные характеристики вещества – это плотность, давление и температура. Именно они распределены во Вселенной *однородно* и *изотропно*, это выявляется в масштабах, начиная с 200 МПк ($6 \cdot 10^{24}$ м). В меньших масштабах контраст плотности уже значителен.

## 19. ПЯТЬ ВОПРОСОВ ТЕОРИИ СТРУН

Струнные теоретики («струнники») в обозримом будущем обязательно будут иметь дело с пятью основными вопросами:

1). **В чем базовая идея ТС**? Принцип эквивалентности с неизбежностью приводит нас к ОТО. Калибровочные симметрии приводят нас к негравитационным взаимодействиям. А вот для ТС до сих пор не найден её организующий принцип (базовая идея).

Некое указание на базовую идею ТС, возможно, содержится в *голографическом принципе*: все физические явления во Вселенной якобы можно полностью закодировать уравнениями, определенными в мире меньшей размерности, скажем, на далекой поверхности её границы (аналогично энтропии черной дыры, см. §15). Всё это может привести к третьей революции в ТС [3, с.262].

2) **Что такое пространство-время**? Сейчас ТС заранее предполагает существование пространства-времени, в котором струны (и другие объекты М-теории) движутся и вибрируют. Гравитационные поля кодируются искривлениями ткани пространства-времени, и эти поля состоит из огромного числа гравитонов (соответствующих мод колебаний струн). Столь колоссальный организованный массив вибрирующих струн называют *когерентным состоянием* струн. Не существует ли исходного материала для ткани пространства-времени? Ведь в исходном состоянии пространства-времени не существует, пока не начался когерентный танец колебаний. Что реально мы имеем в виду, говоря о структуре пространства-времени? (реф. 15).

Очевидно, мы должны позволить ТС создавать её собственную пространственно-временную арену, начиная с конфигурации, в которой оно вообще отсутствует. Последние исследования по М-теории показывают, что некоторое представление о мире без пространства и времени может дать нечто, неизвестное под названием *нуль-брана*. Этот объект, возможно, является наиболее фундаментальным в М-теории; на больших расстояниях он ведет себя подобно точечной частице, однако на малых расстояниях его свойства совершенно иные. На масштабах, меньше планковских, нуль-браны, как и струны, демонстрируют нам неадекватность общепринятых понятий пространства и времени: обычная геометрия заменяется (правда, не совсем корректно, только намёком) новым аппаратом – некоммутативной геометрией, основы которой разработал Алан Конн. Какая геометрическая структура возникает на самом деле – это ключевой вопрос [3, с. 244, 249].

3). **ТС переформулирует КМ**? Полная формулировка ТС (М-теории) не должна начинаться с классических уравнений, которые потом подвергаются квантованию (в них включаются вероятности, неопределенность, квантовые флуктуации и т.д.), как это было раньше (в КМ, ТС, М-теории). При таком подходе неизбежно будут упущены *симметрии дуальности* (§12), лежащие в основе М-теории. Раз Вселенной управляют квантово-механические принципы, то и теории должны являться квантово-механическими с самого начала. Таким образом, ТС требует переформулировки КМ, нового, более геометрического её описания, в котором пространство, время и квантовые свойства будут неразрывно связаны друг с другом.

4) **ТС можно проверить**? На пути от общего теоретизирования к экспериментальным проверкам ТС есть много технических преград. Но открытие новых эффектов и свойств ТС подскажут и новые пути для подтверждения ТС. Важной вехой станет подтверждение суперсимметрии (сердцевины ТС) после открытия частиц-суперпарнеров.

5). **Есть ли пределы познания**? Вполне возможно, что такой предел существует, т.е. для некоторых наблюдаемых свойств реального мира объяснений нет в принципе (реф. 29).

## 20. ЭНТРОПИЯ – МЕРА ХАОСА

**Понятие об энтропии**. В 1824 г. в Париже вышла книга 28 летнего инженера Сади Карно о тепловых машинах. В этих машинах газ получает от нагревателя (с температурой $T_1$) теплоту $Q_1$ и отдает холодильнику (с температурой $T_2$) теплоту $Q_2$. Один из главных выводов, содержащихся в работе Карно, был записан таким образом

$$Q_1/T_1 = |Q_2|/T_2\,. \qquad (20.1)$$

Глубину изложенных Карно мыслей оценили, увы, только после смерти автора. Немецкий физик Р. Клаузиус обратил внимание на то, что соотношение (20.1) похоже на закон сохранения. Клаузиус в 1865 г. постулировал существование некоторой величины – *энтропии* ($S$), являющейся функцией состояния тела (подобно внутренней энергии; в переводе с греческого энтропия – это превращение). Если к рабочему телу (скажем, к идеальному газу) подводится теплота $Q$ при температуре $T$, то энтропия $S$ получает приращение:

$$\Delta S \equiv S_2 - S_1 = Q/T. \qquad (20.2)$$

Энтропия обладает *аддитивностью* (как и внутренняя энергия, масса, объем), т.е. энтропия системы равна сумме энропий частей системы (температура и давление таким свойством не обладают).

**Энтропия и вероятность**. В 1872 г. Л. Больцман опубликовал свою знаменитую формулу, согласно которой энтропия ($S$) системы пропорциональна логарифму вероятности ($P$) состояния системы:

$$S = k\cdot\ln P. \qquad (20.3)$$

Чтобы лучше осознать эту формулу, приведем простые рассуждения, объясняющие столь важный, фундаментальный результат.

Рассмотрим простейшую макросистему – *идеальный газ*, т.е. не будем учитывать взаимодействие частиц газа (газ достаточно разрежен). Идеальный газ имеет целый ряд параметров: $p$ – давление; $T$ – температура; $V$ – объем; $m$ – масса; $\mu$ – молекулярная масса; $Z$ – количество молекул газа в данном объеме $V$. Уравнение состояния идеального газа имеет вид (уравнение Клапейрона-Менделеева):

$$pV = (m/\mu)RT \quad \text{или} \quad pV = ZkT, \qquad (20.4)$$

где $R$ – газовая постоянная, $k$ – постоянная Больцмана (константы).

Найдем работу $A$, совершаемую газом при изотермическом расширении (при $T$ = const, скажем, под поршнем) от объема $V_1$ до объема $V_2$. Первая из формул (20.4) позволяет построить график $p = \mathrm{f}(V)$, тогда работа $A$ численно равна площади под этим графиком:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\,dV = (m/\mu)RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{1}{V}\,dV = (m/\mu)RT\ln\frac{V_2}{V_1} = ZkT\ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad (20.5)$$

При изотермическом расширении работа $A$ совершается за счет теплоты $Q$, отбираемой газом от окружающих тел, т.е. $A = Q$. Учитывая это, из (20.2) и (20.5) для приращения энтропии получаем

$$\Delta S \equiv S_2 - S_1 = Z\cdot k\cdot\ln(V_2/V_1)\,. \qquad (20.6)$$

Такое же приращение энтропии будет наблюдаться в *необратимом* процессе расширения газа и в случае, когда газ представляет собой *замкнутую систему*. Поясним, что *необратимыми* называются процессы, ходом которых нельзя управлять, они протекают в природе самостоятельно, самопроизвольно. Система называется *замкнутой*, если она не обменивается энергией с окружающей средой (не получает энергию извне). В этом случае рассуждаем следующим образом. Пусть в теплоизолированном объеме $V_0$ была перегородка, за которой сначала весь газ и находился, занимая объем $V_1$. Потом перегородка убиралась, и газ расширялся в пустоту, занимая в какой-то момент объем $V_2$. При этом вероятность того, что молекула газа окажется в объеме $V_1$, равна отношению $V_1/V_0$. Вероятность того, что одновременно с первой молекулой в объеме $V_1$ окажется вторая молекула, равна $(V_1/V_0)^2$ и т.д. Таким образом, вероятность ($P_1$) всем $Z$ молекулам собраться в объеме $V_1$ будет, очевидно, равна $(V_1/V_0)^Z$, а вероятность ($P_2$) всем $Z$ молекулам собраться в объеме $V_2$ будет равна $(V_2/V_0)^Z$. Теперь мы можем перейти в формуле (20.6) от объемов к вероятностям:

$$\Delta S \equiv S_2 - S_1 = Zk\ \ln(V_2/V_1) = Zk\ \ln[(P_2/P_1)^{1/Z}] = k \cdot \ln(P_2/P_1). \qquad (20.7)$$

Поскольку формула (20.7) получается из формулы Больцмана (20.3) при $S_1 = k \cdot \ln P_1$ и $S_2 = k \cdot \ln P_2$, то, можно сказать, что мы “вывели” формулу Больцмана (20.3).

Формулы (20.6) и (20.7) оставляют начало отсчета энтропии произвольным. Абсолютное значение энтропии устанавливает *теорема Нернста* (3-е начало термодинамики): энтропию всех веществ при абсолютном нуле температуры можно принять равной нулю.

«**Вероятность состояния системы**» в формуле Больцмана (20.3) мы поясним, используя понятия макросостояния и микросостояния. Рассмотрим систему, состоящую из 4-х молекул: пусть это будет куб пространства, мысленно разделенный на две половины, а каждая из 4-х молекул (*a, b, c, d*) с равной вероятностью может находиться в левой или правой половине куба. Возможны 5 *макросостояний* системы (в каждом свое количество *микросостояний*):

*abcd*|… (одно микросостояние, все молекулы слева, хаос = *min*);
…|*abcd* (молекулы справа, хаос системы также минимальный);
*a*|*bcd*; *b*|*acd*; *c*|*abd*; *d*|*abc* (одна молекула слева и три – справа);
*bcd*|*a*; *acd*|*b*; *abd*|*c*; *abc*|*d* (три молекула слева и одна – справа);
*ab*|*cd*; *ac*|*bd*; *ad*|*bc*; *bc*|*ad*; *bd*|*ac*; *cd*|*ab* (слева и справа – поровну).

Т.е. всего имеем 16 равновероятных микросостояний, причем вероятности ($P$) конкретных макросостояний (1/16; 1/16; 4/16; 4/16; 6/16) пропорциональны количеству соответствующих им микросостояний (*статистическому весу* этого макросостояния). Именно эта вероятность $P$ и фигурирует в формуле Больцмана $S = k \cdot \ln P$. Чем больше микросостояний (хаос) в данном макросостоянии, тем больше вероятность $P$ этого макросостояния, т.е. тем больше его энтропия $S$ (согласно формуле Больцмана). Именно поэтому можно говорить, что ***энтропия – мера хаоса*** (беспорядка) в системе.

Пусть аналогичная система состоит из $Z$ молекул. В данном (в самом общем) случае имеется $Z$+1 макросостояний, которые удобно обозначать числами 0, 1, 2, 3, …, $Z$ – по числу молекул, находящихся, скажем, в левой половине объема. *Статистический вес* $n$-го макросостояния равен, очевидно, числу *сочетаний* из $Z$ по $n$:

$$C_Z^n = Z!/(Z-n)!/n! \qquad (20.8)$$

Вероятность $n$-го макросостояния из формулы Больцмана равна

$$P_n = C_Z^n/(C_Z^0 + C_Z^1 + C_Z^2 + \ldots + C_Z^N). \qquad (20.9)$$

**Великое таинство природы** совершается вокруг нас (и в нас самих) непрерывно, каждое мгновение. Возможно, именно поэтому «нормальный» человек о нем редко когда задумывается. В самом деле, кто из нас удивлялся, скажем, следующим фактам: теплота сама по себе всегда переходит от горячего тела к теплому, стремясь выровнять температуру обеих тел; газ сам по себе всегда расширяется, стремясь выровнять давление по всему объему; целые города сами по себе превращаются в руины, стремясь смешаться с окружающей средой. Подобных фактов бесконечно много, а их суть сводится к одному – в природе существует определенная *направленность* необратимых процессов (протекающих самопроизвольно).

Понятие энтропии позволяет дать строгую (научную) формулировку этому фундаментальному закону природы: *любой необратимый процесс в замкнутой системе приводит к возрастанию энтропии этой системы* (второе начало термодинамики или ВНТ). Более того, формула Больцмана (20.3) $S = k{\cdot}\ln P$ позволяет объяснить этот закон: *возрастание энтропии замкнутой системы означает её переход из менее вероятных в более вероятные состояния* (в крайнем случае, в равновероятные состояния). На практике это неизбежно ведёт к увеличению хаоса в замкнутой системе, к её полному разрушению. *Количество* энергии в замкнутой системе с течением времени не изменяется, однако, изменяется *качество* энергии, в частности, уменьшается её способность совершать полезную работу.

Если изоляция, скажем, малой системы нарушается, то может происходить некое *локальное уменьшение её энтропии*, но при этом возрастает энтропия в большой системе, которая управляет малой.

Формула Больцмана (20.3) интригует тем, что в принципе она не запрещает категорически и ***уменьшение*** *энтропии в замкнутой системе*, просто вероятность подобных событий исчезающе мала.

Чем более упорядочено состояние системы, тем меньше разных возможностей выбора. Состояния с высокой степенью беспорядка (высокой энтропией) реализуются гораздо большим числом способов. Здесь можно провести аналогию с колодой карт, которую начинают беспорядочно тасовать, после чего шансы увидеть карты разложенными по старшинству мастей становятся безнадежно малыми. Таким образом, система, предоставленная самой себе из произвольного начального состояния, устремляется к состоянию, при котором царит наибольший беспорядок (энтропия максимальна) – просто это наиболее вероятная ситуация.

Строго говоря, в принципе энтропия может убывать, а хаотическое распределение молекул газа может самопроизвольно приобрести некоторую структуру, упорядочиться. Это следует из удивительной теоремы Пуанкаре, одно из следствий которой можно перефразировать так: *все что может произойти в полностью изолированной системе, произойдет* и притом бесконечное число раз!

Например, сгоревшая спичка в принципе может сама по себе превратится в целую, а древний город может самопроизвольно воскреснуть из руин, но, увы, за так называемый «период возврата» этого события успеет исчезнуть наша планета Земля (её поглотит «раздувшееся» Солнце), да и само Солнце исчезнет. Ведь *период возврата* Пуанкаре по весьма заниженной оценке равен $10^N$, где $N$ – число частиц, из которых составлена данная система. Мир, окружающий человека, можно оценить как $N$~$10^{26}$ атомов (а если взять все звезды, доступные современным оптическим телескопам, то количество атомов в них оценивается как $N$~$10^{80}$), поэтому, хотя у Пуанкаре чудеса (как своего рода крупные флуктуации) возможны, но они более редки, чем мы в состоянии себе представить, на практике такие события крайне невероятны, а рост энтропии – почти гарантирован.

Итак, теорема Больцмана объясняет механизм перехода системы из состояния с низкой энтропией в равновесное (с высокой энтропией), однако, не объясняет, почему это всегда случается лишь в одном направлении во времени – из прошлого в будущее, т. е. не объясняет асимметрию времени (реф. 15).

**Энтропия и информация**. Ниже будет показано, что понятие информации основано на вероятности (гл.III, §4), а вероятность лежит в основе энтропии. Значит, существует связь между энтропией и информацией (впервые на эту связь указал Л. Сцилард в 1929 г.): энтропия – мера беспорядка, а информация – наоборот, мера порядка, структурной определенности системы, поэтому уменьшению информации отвечает рост энтропии.

Согласно формуле Хартли (гл.III, §4) для выбора одного из $Z_1$ равновероятных вариантов нужна информация $I_1 = \log_2 Z_1$ битов. Если количество вариантов почему-либо уменьшилось $Z_2 < Z_1$, то уменьшиться и количество нужной информации $I_2 = \log_2 Z_2$. Таким образом, $\Delta I \equiv I_1 - I_2 = \log_2 (Z_1/Z_2)$ – это информация, требуемая для уменьшения количества равновероятных исходов от $Z_1$ до $Z_2$.

С другой стороны, согласно формуле Больцмана, уменьшение статистического веса макросостояний от $Z_1$ до $Z_2$ ($Z_2 < Z_1$) означает, что энтропия системы получила приращение $\Delta S \equiv -k \cdot \ln(Z_1/Z_2)$ (приращение энтропии является отрицательным). Для реализации данного приращения требуется, как мы показали выше, приращение информации равное $\Delta I = \log_2(Z_1/Z_2)$, поэтому получаем

$$\Delta S = -k \cdot \Delta I \cdot \ln 2 \,, \qquad (20.10)$$

где $\log_2(Z_1/Z_2) \equiv \ln(Z_1/Z_2)/\ln 2$ и $\ln 2 = 0{,}693147\ldots$ . Формула (20.10) говорит о том, что приращению информации $\Delta I$ соответствует уменьшение энтропии системы, равное $k \cdot \Delta I \cdot \ln 2$. Согласно высказыванию Н. Винера, “*информация – это отрицательная энтропия*”. Когда энтропия растет, информация утрачивается. Например, если беспорядочно перемешать все буквы на данной странице, то информация, полученная читателем, устремляется к нулю.

**Информационная энтропия** ($h$) – это понятие из статистической физики, тесно связанное с энтропией. Это видно из её определения:

$$h \equiv -(P_1 \cdot \ln P_1 + P_2 \cdot \ln P_2 + P_3 \cdot \ln P_3 + \ldots + P_n \cdot \ln P_n), \qquad (20.11)$$

причем $0 \cdot \ln 0 \equiv 0$, см. формулу Шеннона (гл.III, §4) и (20.10).

Информационная энтропия служит мерой неопределенности сообщений данного источника. Сообщения описываются множеством величин $K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n$ (скажем, слова какого-либо языка или некие числа) и вероятностей $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ появления этих величин в сообщении, причем $P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n = 1$. Значение $h$ равно нулю, если какая-либо из вероятностей $P_j = 1$, а остальные вероятности равны нулю, т.е. неопределенность в информации отсутствует. Значение $h$ максимально, когда все $P_j$ одинаковы. Общее значение $h$ нескольких сообщений равна сумме $h$ отдельных сообщений.

**Энтропия черных дыр**. В 1972–75 г. Я. Бекенштейн и С. Хокинг доказали, что точная мера энтропии ($S$) черной дыры – это площадь ($F$) её горизонта событий: $S = F \cdot \beta_1$. Поскольку для сферически симметричной черной дыры имеем $F = M^2 \cdot \beta_2$ (где $\beta_1$ и $\beta_2$ – некие константы), то её энтропию можно выразить следующей формулой:

$$S \approx M^2 \cdot 10^{77}, \qquad (20.12)$$

где $M$ – масса чёрной дыра, выраженная в массах Солнца.

Таким образом, у чёрных дыр энтропия очень велика, например, черная дыра в 3 солнечных массы ($M$=3) будет иметь энтропию $S \sim 10^{78}$ (при температуре черной дыры около $10^{-8}$ °К). А ведь в активных ядрах галактик и в квазарах могут находиться сверхмассивные чёрные дыры с массой до $M \sim 10^8$ (в сотни миллионов масс Солнц [47, с.852]), т.е. с энтропией порядка $S \sim 10^{93}$ (и несусветным беспорядком внутри неё). Данный факт наталкивает на мысль, что, возможно, черная дыра – это окно в другую вселенную, связанную в центре черной дыры с нашей Вселенной.

В центре нашей Галактики может находится около миллиона чёрных дыр с массой Солнца [23, с. 299]. Приняв количество всех галактик равным $10^{11}$, получаем следующую оценку энтропии всех чёрных дыр во Вселенной: $S \approx (10^6 \cdot 10^{11})^2 \cdot 10^{77} \approx 10^{111}$.

**Энтропия Вселенной**. Физики подсчитали, что за время существования Вселенной её энтропия выросла от 1 до $10^{90}$. Выше уже говорилось, что все физические явления во Вселенной можно полностью закодировать уравнениями, определенными в мире меньшей размерности, скажем, на далекой поверхности её границы (т.е. на *площади* её границы) [3, 262]. Более того, в теории струн явно заложен голографический принцип: управляемые ТС физические законы Вселенной имеют эквивалентное описание в терминах законов, относящихся лишь к граничной поверхности (к *площади*). Хорошей иллюстрацией этого служит тот факт, что площадь $F$ горизонта событий чёрной дыры определяет её энтропию (см. выше), т.е. площадь $F$ играет роль некой голограммы, в которой закодированы (двумерными данными) образ трехмерной внутренней области черной дыры.

Если считать, что наша Вселенная замкнутая, то, по мнению Р. Пенроуза, она, в конце концов, должна сколлапсировать в виде одной колоссальной чёрной дыры, энтропию которой можно найти также по формуле (20.12). Причем это значение энтропии будет максимально возможным для нашей Вселенной [23, с. 298, 299].

Для этого оценим **массу Вселенной** в единицах массы Солнца ($2 \cdot 10^{30}$ кг). Пусть возраст Вселенной равен $t \approx 13$ млрд. лет $\approx 4 \cdot 10^{17}$ сек, тогда её “радиус” $R \approx 4 \cdot 10^{17} \cdot (3 \cdot 10^8) \approx 10^{26}$ м, а объем $V \approx (4/3) \cdot \pi \cdot R^3 \approx 8 \cdot 10^{78}$ м$^3$. Средняя плотность *наблюдаемого* вещества во Вселенной $\rho \approx 10^{-28}$ кг/м$^3$, а его масса $m \approx V \cdot \rho \approx 10^{51}$кг. Если считать, что это только 10% от всей массы (доля *скрытой массы* – 90%), то окончательно получаем, что полная масса Вселенной будет равна $M \approx 10^{51} \cdot 10/10^{30} \approx 10^{22}$ солнечных масс (~ $10^{11}$ звезд$\times 10^{11}$ галактик).

Таким образом, максимально возможная энтропия нашей Вселенной (при финальном её коллапсе) составит $S \approx (10^{22})^2 \cdot 10^{77} \approx 10^{121}$. (Если возраст Вселенной ~ 20 млрд. лет, то получим $S \approx 10^{122}$.)

Согласно формуле Больцмана (20.3) энтропия ($S$) системы в некотором состоянии связана с логарифмом вероятности ($P < 1$) этого состояния: $S = \ln P$ (в так называемой *естественной системе единиц*, где $k = 1$). Поэтому конечной энтропии Вселенной $S \sim 10^{121}$ (колоссальному хаосу её финального коллапса) можно поставить в соответствие исчезающе малую величину $P = 1/\exp(10^{121})$ – вероятность возникновения нашей Вселенной (с “правильным” вторым началом термодинамики) среди мириадов возможных вселенных. Мизерность $P$ говорит о поразительной точности организации Большого взрыва, задания его начальных условий при зарождении Вселенной (при создании её Творцом, если верить апологетам церкви).

Таким образом, мы пришли к несимметричной во времени гипотезе в части структуры пространственно-временных *сингулярностей* (сверхточной в Начале и хаотичной в Конце). Но сингулярности – как раз те области, в которых перестают работать все известные законы физики. И это тот тупик, к которому пришла наука в попытках понять направленность и течение времени (понять происхождение "правильного" второго начала термодинамики) (реф.15).

# Глава III. **В И Р Т У А Л Ь Н Ы Е   М И Р Ы**

## 1. ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИКА?

**Математика** – это наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. Такое короткое определение было общепринятым в советской литературе [43]. Однако самое корректное определение математики заключается… в её непосредственном рассмотрении (завершаемом словами «всё это и есть математика!»), или, как минимум, в перечислении названий основных разделов математики. И если в начале 20 века было всего 4 раздела: теория чисел и алгебра, геометрия, анализ, механика и математическая физика, то к началу 21 века добавилось ещё свыше 11(!) новых разделов: математическая логика, топология, теория групп Ли и теория представлений, комбинаторика, теория информации и т.д.

На протяжении двух тысячелетий обладание довольно глубокими математическими знаниями являлось необходимым интеллектуальным багажом каждого образованного человека. В связи с этим уместно вспомнить слова Р. Бэкона или Леонардо да Винчи (см. стр.4).

Математика всегда была одним из краеугольных камней цивилизации, но в современную эпоху её роль становится решающей. Например, вся теоретическая физика – это сверхсложная математика, особенно это касается глобальной физической «теории всего» (например, *теории суперструн*). И весьма символично, что греческое слово «математика» переводится как знание, наука. Гениальный немецкий математик Карл Гаусс однажды сказал: «Математика – королева наук, а теория чисел – королева математики». Первая часть этого пророчества сомнений не вызывает, но что касается теории чисел, то физиками она явно игнорируется (и напрасно, см. о ГТНЧ в §6).

Одновременно с бурным развитием всех наук за последние три столетия, математика становилась всё более недоступной даже для якобы образованной публики. При этом общественно-гуманитарные науки утонули в бурном океане Схоластики, а главное их «достижение» в том, что будущее человечества находится в руках малочисленных элит, действующих в корыстных целях (реф. 48, 56, 57).

Математика продолжает быстро развиваться и в настоящее время (причем Россия, как не удивительно, продолжает удерживать здесь лидирующую позицию). Так, журнал «Математическое обозрение» («Mathematical Review») публикует ежегодно около 8000 кратких резюме статей, содержащих последние результаты – новые математические факты, новые доказательства старых фактов и даже сведения о совершенно новых областях математики. Ещё лет 30 назад выходило более 250 математических журналов во всем мире. Главными результатами современной математики можно считать увеличение разрыва между чистой и прикладной математикой, а также полное переосмысление традиционных областей математики.

**Развитие математического метода.** Для того чтобы понять, в какой мере математика может иметь отношение к реальному миру, мы вкратце рассмотрим развитие самого математического метода.

Рождение математики произошло около 2000 лет до н.э., когда было замечено, что в треугольнике со сторонами в 3, 4 и 5 единиц длины один из углов равен 90° (что позволяло строить прямой угол). Ещё через несколько веков было открыто общее правило – «теорема Пифагора», а, по сути, – первый пример чисто научного достижения, т.к. теорему не только сформулировали, но и доказали, т.е. показали, что она с необходимостью следует из геометрических свойств.

Одной из фундаментальных особенностей математического метода является процесс создания с помощью тщательно выстроенных чисто логических аргументов цепочки утверждений, в которой каждое последующее звено соединено с предыдущими. Причем в любой цепочке должно быть первое звено – *аксиома* (постулат). Знаменитые «Начала» Евклида (3 век до н.э.) – это первый из дошедших до нас теоретических трактатов по математике. Так вот у Евклида аксиомы представлены лишь как исходные пункты для построения математики без каких-либо комментариев об их природе.

Вплоть до 1800 г. ответ на вопрос «Что такое математика?» был достаточно простым. Считалось, что у математиков имеется своя собственная область исследования – числа и геометрические объекты и что математики не пользуются экспериментальным методом. Однако, начиная с Ньютона, механику и астрономию стали изучать также с помощью аксиоматического метода по аналогии с геометрией Евклида. Было признано, что любая наука, в которой результаты эксперимента представимы с помощью чисел, становится областью приложения математики.

Какова природа таких математических объектов, как точка («не имеющая размеров» у Евклида), прямая линия («бесконечно протяженная»), поверхность, угол, число и т.д.? Все эти понятия – «платоновские идеи», которые являются, так сказать, «предельными случаями» физических объектов. Аксиомы Евклида были поставлены на один уровень с физическими законами, поэтому логические следствия из аксиом подлежали проверке путем сравнения с экспериментальными данными. На протяжении 18 века находилось все больше подтверждений того, что все следствия, полученные из основных аксиом, в особенности в астрономии и механике, согласуются с данными экспериментов. А поскольку эти следствия получались с использованием существовавшего в то время математического аппарата, достигнутые успехи способствовали укреплению мнения об истинности аксиом Евклида, которая, как говорил Платон, «ясна каждому» и не подлежит обсуждению.

Однако среди аксиом Евклида одна была явно неочевидна: через точку, лежащую вне данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой. Только в 19 веке математики (Лобачевский и Бойаи независимо друг от друга) поняли, что эта аксиома недоказуема, т.е. в «неевклидовой геометрии» противоречие не появится. С возникновением неевклидовой геометрии сразу же возникло несколько философских проблем. Поскольку претензия на априорную необходимость аксиом отпала, оставался единственный способ проверки их «истинности» – экспериментальный. Но, как заметил Пуанкаре, в описании любого явления скрыто такое множество физических допущений, что ни один эксперимент не может дать убедительного доказательства истинности или ложности математической аксиомы. Кроме того, даже если допустить, что наш мир является «неевклидовым», следует ли из этого, что вся евклидова геометрия ложна? Интуиция подсказывала, что и евклидова и неевклидова геометрии являются примерами полноценной математики.

Неожиданно к таким же выводам пришли совершенно с другой стороны – были открыты «кривые», не имевшие касательной в любой своей точке. Позднее (1890 г.) был получен куда более «патологический» результат: удалось построить пример непрерывной кривой, которая целиком заполняет квадрат, т.е. проходит через все его точки (кривая Пеано). С тех пор были изобретены сотни таких математических «монстров», противоречивших «здравому смыслу» и повергших математиков в шок. Однако существование столь необычных объектов следует из основных аксиом столь же строго и логически безупречно, как существование треугольника или эллипса. Поскольку математические «монстры» не могут соответствовать никакому экспериментальному объекту, то, вероятно, мир математических «идей» гораздо богаче и необычнее, чем можно было ожидать, и лишь очень немногие из них имеют соответствия в мире наших ощущений (который, впрочем, вряд ли является верхом совершенства). Но если математические «монстры» логически следуют из аксиом, то можно ли по-прежнему считать аксиомы истинными?

Упомянутые выше результаты получили подтверждение еще с одной стороны: в математике (чаще в алгебре), один за другим стали возникать новые математические объекты, представлявшие собой обобщения понятия числа. После того как выяснилось, что число (скажем, $\sqrt{2}$) не представимо в виде дроби, греки были вынуждены рассматривать иррациональные числа (§7), хотя вряд ли они соответствует чему-нибудь реальному в физическом мире. Тем не менее, введение иррациональных чисел происходило в духе «идеализации» физических понятий. Но что сказать об отрицательных числах, о «мнимых» («комплексных») числах, для которых весьма трудно подобрать аналогии в реальном мире. Всё это очень далеко от понятия, «ясного каждому», как того требовал Платон от идей, лежащих в основе математики. И всё же с конца 16 века математики, не колеблясь, производят вычисления с комплексными числами, как если бы они «имели смысл», хотя ещё 200 лет эти числа не могли интерпретировать с помощью какой-либо вспомогательной конструкции (вектор на плоскости и прочие интерпретации появились позже).

**Современная аксиоматика.** Переворот произошел во второй половине 19 века: де-факто была провозглашена декларации независимости математики от внешнего мира. С этой точки зрения, математические «объекты», если вообще имеет смысл говорить об их «существовании», – чистое порождение разума, и имеют ли они какие-нибудь «соответствия» и допускают ли какую-нибудь «интерпретацию» в физическом мире, для математики несущественно.

«Истинные» утверждения о таких «объектах» – все те же логические следствия из аксиом. Но теперь аксиомы следует рассматривать как совершенно произвольные, и поэтому отпадает необходимость в их «очевидности» или выводимости из повседневного опыта посредством «идеализации». На практике полная свобода ограничена разного рода соображениями. Разумеется, «классические» объекты и их аксиомы остаются без изменений, но теперь их нельзя считать единственными объектами и аксиомами математики, и в повседневную практику вошла привычка выбрасывать или переделывать аксиомы так, чтобы была возможность использовать их различными способами, как это было сделано при переходе от евклидовой геометрии к неевклидовой.

Хотелось бы особенно подчеркнуть одно обстоятельство, следующее из нового подхода к математическим «объектам»: все доказательства должны опираться исключительно на аксиомы. Если мы вспомним об определении математического доказательства, то подобное высказывание может показаться повтором. Однако это правило редко соблюдалось в классической математике из-за «интуитивной» природы ее объектов или аксиом. Даже в «Началах» Евклида, при всей их кажущейся «строгости», многие аксиомы не формулируются явно и многие свойства либо молчаливо предполагаются, либо вводятся без достаточного обоснования. Чтобы поставить евклидову геометрию на прочную основу, понадобился критический пересмотр самих её начал. Вряд ли стоит говорить о том, что педантичный контроль над мельчайшими деталями доказательства является следствием появления «монстров», научивших современных математиков соблюдать крайнюю осторожность в выводах. Самое безобидное и «самоочевидное» утверждение о классических объектах, например утверждение о том, что кривая, соединяющая точки, расположенные по разные стороны от прямой, непременно пересекает эту прямую, в современной математике требует строгого формального доказательства.

Возможно, покажется парадоксальным утверждение, что именно из-за своей приверженности аксиомам современная математика служит наглядным примером того, какой должна быть *любая наука*. Тем не менее, такой подход иллюстрирует характерную особенность одного из наиболее фундаментальных процессов научного мышления – получения точной информации в ситуации неполного знания. Научное исследование некоторого класса объектов предполагает, что особенности, позволяющие отличать одни объекты от других, умышленно предаются забвению, а сохраняются лишь общие черты рассматриваемых объектов. То, что выделяет математику из общего ряда наук, заключается в неукоснительном следовании этой программе во всех ее пунктах. Считается, что математические объекты полностью определены аксиомами, используемыми в теории этих объектов; или, по словам Пуанкаре, аксиомы служат «замаскированными определениями» тех объектов, к которым они относятся.

**Современная математика**. Хотя теоретически возможно существование любых аксиом, до настоящего времени было предложено и исследовано лишь небольшое число аксиом. Обычно в ходе развития одной или нескольких теорий замечают, что какие-то схемы доказательства повторяются в более или менее аналогичных условиях. После того как свойства, используемые в общих схемах доказательств, обнаружены, их формулируют в виде аксиом, а следствия из них выстраивают в общую теорию, не имеющую прямого отношения к тем конкретным контекстам, из которых были абстрагированы аксиомы. Получаемые при этом общие теоремы применимы к любой математической ситуации, в которой существуют системы объектов, удовлетворяющие соответствующим аксиомам. Повторяемость одних и тех же схем доказательства в различных математических ситуациях свидетельствует о том, что мы имеем дело с различными конкретизациями одной и той же общей теории. Это означает, что после соответствующей интерпретации аксиомы этой теории в каждой ситуации становятся теоремами. Любое свойство, выводимое из аксиом, будет справедливо во всех этих ситуациях, но необходимость в отдельном доказательстве для каждого случая отпадает. В таких случаях говорят, что математические ситуации обладают одной и той же математической «структурой».

Чтобы лучше понять процесс, обрисованный выше в общих чертах, читателю полезно самостоятельно обратиться к *теории групп* – одному из основных инструментов современного математика. Группы широко применяются во всех разделах математики, в физике (кристаллография, квантовая механика). Природа объектов, образующих группу, может быть весьма разнообразной, но на самом деле в каждом случае все сводится к одному и тому же сценарию: из свойств множества объектов мы рассматриваем лишь те, которые превращают это множество в группу (пример неполноты знания).

В таких случаях говорят, что мы рассматриваем групповую *структуру*. Существуют многие типы структур, теории которых полностью разработаны: структура порядка, структура метрического пространства и т.д. Точное определение понятия структуры довольно сложно. Не вдаваясь в подробности, можно сказать, что на множестве $E$ задана структура определенного типа, если между элементами множества $E$ (а иногда и другими объектами, например числами, которые играют вспомогательную роль) заданы отношения, удовлетворяющие некоторому фиксированному набору аксиом, характеризующему структуру рассматриваемого типа.

С понятием структуры тесно связаны многие абстрактные понятия в т.ч. одно из наиболее важных в современной математике – понятие *изоморфизма*. Внутреннее «устройство» (природа) двух внешне не похожих задач может быть совершенно одинакова и изучение свойств одной системы можно в значительной мере свести к изучению другой системы (§6), [10, с. 93]. Можно показать, что понятие изоморфизма распространяется на структуры любого типа.

Понятие структуры и связанные с ним другие понятия заняли в современной математике центральное место как с чисто «технической», так и с философской и методологической точек зрения. Общие теоремы основных типов структур служат чрезвычайно мощными инструментами математической «техники». Всякий раз, когда математику удается показать, что изучаемые им объекты удовлетворяют аксиомам определенного типа структур, он тем самым доказывает, что все теоремы теории структуры этого типа применимы к конкретным объектам, изучением которых он занимается (без этих общих теорем он, весьма вероятно, упустил бы из виду конкретные их варианты или был бы вынужден обременять свои рассуждения излишними допущениями). Аналогично, если доказано, что две структуры изоморфны, то число теорем немедленно удваивается: каждая теорема, доказанная для одной из структур, сразу же дает соответствующую теорему для другой. Неудивительно поэтому, что существуют весьма сложные и трудные теории, например «теория поля классов» в *теории чисел*, главная цель которых – доказательство изоморфизма структур.

С философской точки зрения, широкое использование структур и изоморфизмов демонстрирует основную особенность современной математики – то обстоятельство, что «природа» математических «объектов» не имеет особого значения, значимы лишь отношения между объектами (разновидность принципа неполноты знания).

Наконец, понятие структуры позволило по-новому классифицировать разделы математики. Современный подход научил нас видеть не только то, что лежит на поверхности, но и заглядывать глубже и пытаться распознавать фундаментальные структуры, лежащие за обманчивой внешностью математических объектов. С этой точки зрения, значение имеет исследование наиболее важных типов структур. Вряд ли в нашем распоряжении имеется полный и окончательный список этих типов; некоторые из них были открыты в последние 40 лет, и есть все основания ожидать в будущем новых открытий. Однако мы уже имеем представление о многих основных «абстрактных» типах структур. (Они «абстрактны» по сравнению с «классическими» объектами математики, хотя и те вряд ли можно назвать «конкретными»; дело скорее в степени абстракции.)

Многие математики надеются с помощью новых средств лучше понять классические теории и решить трудные проблемы. Огромные фрагменты классического материала оказались под властью новой математики и были преобразованы или слились с другими теориями. Однако остаются обширные области, в которых современные методы проникли не столь глубоко (теория дифференциальных уравнений, значительная часть *теории чисел*).

**Философские трудности.** Еще древние греки отчетливо понимали, что математическая теория должна быть свободна от противоречий. Это означает, что невозможно вывести как логическое следствие из аксиом утверждение $P$ и его отрицание не-$P$. Но, поскольку считалось, что математические объекты имеют соответствия в реальном мире, а аксиомы являются «идеализациями» законов природы, ни у кого не возникало сомнений в непротиворечивости математики. При переходе от классической математики к математике современной проблема непротиворечивости приобрела иной смысл. Свобода выбора аксиом любой математической теории должна быть заведомо ограничена условием непротиворечивости, но можно ли быть уверенным в том, что это условие окажется выполненным?

Понятие *множества* всегда использовалось более или менее явно в математике и логике. К концу 19 века были получены важные результаты, составившие содержание т.н. *теории множеств*, ставшей как бы субстратом всех остальных математических теорий. К 1895 казалось, что математика покоится на незыблемом фундаменте теории множеств. Но в следующее десятилетие возникли новые аргументы, которые, по-видимому, показывали внутреннюю противоречивость теории множеств (и всей остальной математики).

Новые парадоксы были простыми. Первый из них – парадокс Рассела («парадокс брадобрея»): в некотором городке брадобрей бреет всех жителей, которые не бреются сами. Кто бреет самого брадобрея? Вместо ответа мы приходим к явному противоречию.

Еще более показателен парадокс Берри. Рассмотрим множество всех русских фраз, содержащих не более 17 слов; число слов русского языка конечно, поэтому конечно и число таких фраз. Выберем среди них такие, которые однозначно задают какое-нибудь целое число, например: «Наибольшее нечетное число, меньшее 10». Число таких фраз также конечно; т.е. конечно и множество определяемых ими целых чисел (пусть это множество $D$). Из аксиом арифметики следует, что существуют целые числа, не принадлежащие $D$, и что среди этих чисел существует наименьшее число $n$. Это число $n$ однозначно определяется фразой: «Наименьшее целое число, которое не может быть определено фразой, состоящей не более чем из 17 русских слов». Но в этой фразе 17 слов, значит, она определяет число $n$, которое принадлежит $D$, т.е. мы получили противоречие.

Шок, вызванный парадоксами теории множеств, разделил всех математиков на *интуиционистов*, *формалистов* и *платонистов*. С точки зрения первых, неправильно применять логические процессы к интуитивно непредставимым объектам. Единственными интуитивно ясными объектами являются натуральные числа 1, 2, 3,... и конечные множества натуральных чисел, «построенные» по точно заданным правилам. Но даже к таким объектам интуиционисты не разрешали применять все дедукции классической логики. Например, они не признавали, что для любого утверждения $P$ истинно либо $P$, либо не-$P$. Располагая столь ограниченными средствами, они легко избегали «парадоксов», но при этом выбрасывали за борт не только всю современную математику, но и значительную часть результатов классической математики, а для тех, что еще оставались, необходимо было найти новые, более сложные доказательства.

Большинство математиков высказалось за метод, который состоит в воздержании от использования обыденного языка при формулировке аксиом и теорем; только предложения, построенные в соответствии с явной системой жестких правил, допускаются в качестве «свойств» или «отношений» в математике и входят в формулировки. Такой процесс называется «формализацией» математического языка, при этом сами слова заменялись специальными *символами*[1]: & («и»); $\vee$ («или»); ~ («не»); ] («пусть»); $\in$ («принадлежит»); $\notin$ («не принадлежит»); $\exists$ («существует…такое, что»); $\forall$ («для любого… выполняется»); *def* («по определению»); $\Rightarrow$ («следует»); $\Leftrightarrow$ («тогда и только тогда»); $\rightarrow$ («стремится к…»); $\uparrow$,$\downarrow$ («растет», «убывает»); и т.д.

В 1931 г. Курт Гёдель показал, что непротиворечивость арифметики (если она действительно такова) невозможно доказать столь ограниченными средствами, которые считают допустимыми интуиционисты. Иначе говоря, есть положения, которые не могут быть «извлечены» из основных аксиом (надо привлекать все новые аксиомы-допущения). Нельзя дедуктивным путем получить все свойства целых чисел, тем более нельзя надеяться охватить все свойства решений дифференциальных уравнений. *Значительное количество законов природы нельзя ограничить никакими рамками*.

Из результатов Гёделя следует, что *любая* достаточно широкая формальная система аксиом и правил вывода, свободная от противоречий, должна содержать утверждения, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть в рамках этой формальной системы. Иначе говоря, какой бы (достаточно сложный) алгоритм ни использовал математик для установления математической истины – всегда найдутся математические суждения, на которые его алгоритм не сможет дать ответа (единого алгоритма для решения всех задач не существует).

Поэтому *интуиция* (а не формализм) во многом определяет развитие математики, а интуитивные критерии («глубина», «оригинальность», «красота», «соответствие реалиям нашего мира») приходится относить к самым строгим математическим результатам. Все-таки именно «смысл» – а не слепые алгоритмические вычисления – составляют сущность математики. А понятие математической *истины* только частично досягаемо в рамках любой формальной системы. При этом надо помнить о «слабостях» интуиции (реф. 50).

Гёдель нанес формализму («бессмысленной игре») сокрушительный удар, но с другой стороны его доказательство не приводит нас и к абсолютно

[1] Обучаясь в техническом ВУЗе («Военмех»), я в своих конспектах (причем по всем дисциплинам) активно использовал эти символы. Вот пример такой записи. Какие числа $N$ являются *простыми числами* $P$: $N \in P \Leftrightarrow$ у $N$ $\exists$ 2 делителя: 1& $N$, причем $1 \notin P$.

надежной альтернативе (этот вопрос до сих пор не разрешен?). Поэтому существует ещё и *платонисткая* точка зрения, согласно которой математическая истина абсолютна и вечна, является внешней по отношению к любой теории и не базируется ни на каком «рукотворном» критерии; а математические объекты обладают свойством собственного вечного существования, не зависящего ни от человеческого общества, ни от конкретного физического объекта.

Резюмируя сложившуюся проблемную ситуацию, мы должны признать, что она далека от завершения. Использование понятия множества ограничивалось оговорками, которые специально вводились, чтобы избежать известных парадоксов, и нет никаких гарантий, что в аксиоматизированной теории множеств не возникнут новые парадоксы. Тем не менее, ограничения аксиоматической теории множеств не помешали рождению новых жизнеспособных теорий.

## 2. МИР ПЛАТОНА

**Мир Платона** – так мы будем называть мир фундаментальных *математических истин*, которые якобы могут существовать вне времени (вечно) и независимо от нас смертных. Знаменитый древнегреческий философ Платон, очевидно, первым (около 360 г. до н.э.) высказал данную мысль, правда, у Платона речь идет о *любых* истинах-идеях (в искусстве, поэзии, литературе, философии, политике и т.д., что, по-моему, уже весьма спорно). Ниже изложен взгляд на мир Платона одного из лучших умов нашего времени – Роджера Пенроуза – известного английского математика, физика и философа.

Мир Платона доступен нам исключительно посредством интеллекта (с помощью математических рассуждений и интуитивных догадок), это та реальность, с которой исследователи имеют дело в минуты творчества. Это царство чистой математики (её объектов), это «божественная книга», в которой записаны все лучшие доказательства. И математикам иной раз приоткрывается та или иная её страница: в моменты прозрения разум просто соприкасается с объективной истиной (приходящей в голову «с неба»). В части личных «прозрений» Пенроуз говорит, что им всегда предшествуют долгие упорные сознательные раздумья, хотя само искомое решение возникает неожиданно подобно «вспышке» (когда он думал о проблеме в «фоновом режиме», не целенаправленно), причем при полной уверенности в правильности и красоте решения [23, с. 359], [10, с. 120]. Примечательно также, что многим идеям, рожденным в минуты вдохновения присуще *масштабность*, т.е. идея охватывает весьма обширную область математической мысли.

Платон, в частности, учил: наша душа существовала то того, как мы родились [*но когда и откуда появилась наша душа*?]; душа умершего продолжает существовать в Аиде (царстве мертвых) и обладает способностью мыслить; душа бессмертна и неуничтожима. Именно поэтому математическое открытие, возможно, – всего лишь одна из форм *воспоминания*! Во всяком случае, Пенроуз говорит: «… меня часто поражало сходство между двумя состояниями, когда ты мучительно стараешься *вспомнить* чье-то имя – и когда пытаешься найти адекватное математическое понятие» [23, с. 366].

А. Эйнштейн как-то написал в письме: «Слова или язык, как в устной, так и в письменной форме, по-видимому, не играют никакой роли в механизме моего мышления». Об этом же говорит и Пенроуз: «… я нахожу слова бесполезными для математического мышления… Нет сомнения, что каждый человек думает по-своему… Наиболее полярными стилями математического мышления являются, как кажется, аналитический/геометрический» [23, с. 363].

Многие думают, что математическое доказательство строится в виде цепочки последовательных утверждений, где каждый шаг вытекает из предыдущего. Однако лишь общее представление и интуитивно понятное концептуальное содержание – вот что в действительности необходимо для построения математического доказательства. Любопытно такое наблюдение Пенроуза: «Во сне необычные идеи возникают легко и в большом количестве – но лишь в очень редких случаях они проходят критический контроль бодрствующего сознания. (Что касается меня, то у меня во сне никогда не возникали плодотворные научные идеи…)» [23, с. 361] (о снах также см. §5).

Все наиболее точные теории (ОТО, КМ, ТС, …) необычайно плодотворны и с точки зрения математики, что свидетельствует о глубоких связях между реальным (физическим) миром и миром Платона. Быть может, эти миры тождественны? *Функционирование реального мира, в конечном счете, может быть понято только в терминах математики*, т.е. в терминах платоновского мира. Сама точность ОТО и КМ обеспечивает почти математический уровень существования нашей физической реальности (и она кажется нам уже не столь очевидной, как до создания этих глубоких теорий).

Понятие математической истины выходит за пределы сотворенного человеком. Истинные математические открытия должны, как правило, рассматриваться как достижения более великие, чем «просто» изобретения – суть «творения человека». В математике нередко происходят самые настоящие *открытия* – это когда некая структура (объект) дает гораздо больше того, что в неё было заложено изначально (скажем, автором, предложившим к рассмотрению данный объект). Примеры таких объектов: комплексные числа, множество Мандельброта и т.д. В связи с такими объектами даже ученые-атеисты задумываются о возможности «творений» Сверхразума, некого высшего существования мыслительной деятельности. Математическое открытие состоит в расширении области прямого контакта с миром Платона. Никакой содержательной «информации» в общепринятом смысле исследователь математического объекта не получает, т.к. вся информация уже находилась там *изначально*. Всё, что требовалось от исследователя – это соединить разные части и «увидеть» ответ. «Независимость-от-исследователя» математического объекта и обеспечивает ему платоническое существование.

Подчеркнем, что математические структуры (даже самые экзотические, такие как фрактальные структуры [10, с.122]) существуют не менее «реально», чем гора Эверест, и могут быть исследованы точно также, как исследуются джунгли (это относится и к миру чисел). Но платоновский мир состоит не из осязаемых вещей, а из «математических объектов». Объекты, скажем, чистой геометрии – прямые, окружности, треугольники, плоскости и т.п. – могут быть лишь приблизительно реализованы в реальном мире физических вещей.

При общении (беседе), скажем, двух математиков их отдельные предложения (фразы, факты, образы, понятия) чаще всего остаются… *не поняты*. Тем не менее, два человека все-таки способны понять друг друга, ибо интересные или глубокие математические истины растворены (с небольшой плотностью) в массе всех возможных математических истин. Во время беседы каждый из математиков вступает в прямой контакт с *одним и тем же* миром Платона, что приводит к взаимному пониманию на уровне интуиции.

Одно из наиболее поразительных свойств математики заключается в том, что истинность математических утверждений м.б. установлена посредством абстрактных рассуждений (которые *передаваемы*)! Математическая истина строится из простых и очевидных составляющих, и когда они становятся ясны и понятны нам, с их истинностью соглашаются все без исключения. Мы должны «видеть» истинность математических рассуждений, чтобы убедиться в их обоснованности. Это «в*и*дение» – самая суть сознания. Абсолютно точные, корректные формулировки иной раз являются помехой при первом изложении математической идеи, так что вначале может потребоваться менее четкая описательная форма (характерная, например, для научно-популярной литературы).

Свойство вычислимости – не то же самое, что математическая точность. Сколько тайны и красоты в мире Платона – а ведь б*о*льшая непознанная часть этого мира связана далеко не с алгоритмами и вычислениями. Пенроуз говорит: «… я не могу отделаться от ощущения, что в случае математики вера в некоторое высшее вечное существование – по крайней мере, для наиболее глубоких математических концепций, – имеет под собой гораздо больше оснований, чем в других областях человеческой деятельности. Несомненная уникальность и универсальность такого рода математических идей по своей природе существенно отличается от всего того, с чем приходится сталкиваться в области искусства и техники» [23, с. 109].

## 3. МАТЕМАТИКА И РЕАЛЬНЫЙ МИР

Несмотря на заявления о независимости математики, никто не станет отрицать, что математика и физический мир связаны друг с другом. Разумеется, остается в силе математический подход к решению проблем классической физики. Верно и то, что в весьма важной области математики, а именно в теории дифференциальных уравнений, обыкновенных и в частных производных, процесс взаимообогащения физики и математики достаточно плодотворен (гл.II, §14).

Математика полезна при интерпретации явлений микромира. Однако новые «приложения» математики существенно отличаются от классических. Одним из важнейших инструментов физики стала *теория вероятностей*, которая раньше применялась главным образом в теории азартных игр и страховом деле. Математические объекты, которые физики ставят в соответствие «атомным состояниям», «переходам», «ПКЯ» и т.д., носят весьма абстрактный характер и были введены и исследованы математиками задолго до появления квантовой механики. Следует добавить, что после первых успехов возникли серьезные трудности. Это произошло в тот момент, когда физики пытались применить математические идеи к более тонким аспектам квантовой теории; тем не менее, многие физики по-прежнему с надеждой взирают на новые математические теории, полагая, что те помогут им в решении новых проблем (в т.ч. ТС).

Даже если мы включим в «чистую» математику теорию вероятностей и математическую логику, выяснится, что *в настоящее время другие естественные науки используют менее 50% известных математических результатов*. Что же мы должны думать об оставшейся половине? Какие мотивы стоят за теми областями математики, которые не имеют отношения к решению физических проблем?

Мы уже упоминали об иррациональности числа как о типичном представителе такого рода теорем. Другим примером может служить теорема, доказанная Лагранжем. «Важная» и «красивая» с точки зрения любого математика эта теорема утверждает, что любое натуральное число представимо в виде суммы квадратов не более чем четырех чисел (например, $23 = 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$, см. §19). Однако в настоящее время немыслимо, чтобы этот результат мог пригодиться физику-теоретику, а тем более экспериментатору (реф. 24). Правда, физики имеют дело с целыми числами сегодня гораздо чаще, чем в прошлом, но целые числа, которыми они оперируют, всегда ограничены (они редко превышают несколько сотен, реф.40); следовательно, такая теорема, как теорема Лагранжа, может быть «полезна» только в том случае, если применять ее к целым числам, не переходящим некоторой границы. Но стоит нам ограничить формулировку теоремы Лагранжа, как она сразу перестает быть интересной для математика, поскольку вся притягательная сила этой теоремы заключается в ее применимости ко всем целым числам. (Существует великое множество утверждений о целых числах, которые можно проверить с помощью компьютеров для очень больших чисел; но, коль скоро общего доказательства не найдено, они остаются гипотетическими и не интересны профессиональным математикам [10, с.121].)

Сосредоточенность на темах, далеких от непосредственных приложений, не является чем-то необычным для ученых, работающих в любой области, будь то астрономия или биология. Однако в то время как экспериментальный результат можно уточнить и улучшить, *математическое доказательство всегда носит окончательный характер*. Именно поэтому трудно удержаться от искушения рассматривать математику, или, по крайней мере, ту ее часть, которая не имеет отношения к «реальности», как *искусство* (а не науку).

Математические проблемы не навязываются извне, и, если принять современную точку зрения, мы совершенно свободны в выборе материала. При оценке некоторых математических работ у математиков нет «объективных» критериев, и они вынуждены полагаться на собственный «вкус». Вкусы же сильно меняются в зависимости от времени, страны, традиций и отдельных личностей. В современной математике существуют мода и три «школы»: «классицисты», «модернисты» и «абстракционисты». Чтобы лучше понять различия между ними, проанализируем четыре критерия, которыми пользуются математики, когда оценивают теорему или группу теорем:

1). «Красивый» математический результат должен быть нетривиальным. Это не следствие аксиом или известных теорем; должна быть новая идея или остроумно применены старые представления. Т.е. для математика важен не сам результат, а процесс преодоления трудностей, с которыми он столкнулся при его получении.

2). Существенным элементом «красоты» теоремы является ее простота. Поиск простоты свойствен всей научной мысли начиная ещё с Эпикура, впервые высказавшего мысль о том, что за кажущейся сложностью и бесконечным разнообразием окружающего нас мира может скрываться *внутренняя простота* структуры (реф. 28).

3). Математик обязан решить новую задачу любыми возможными средствами. Однако, начиная с 19 века, математики явно делятся на «тактиков», стремящихся найти чисто силовое решение задачи (классическими средствами математики), и на «стратегов», склонных к обходным маневрам (более «абстрактным» структурам), дающим им возможность сокрушить проблему малыми силами.

4). У любой математической проблемы есть своя история («родословная»). Когда решение получено (например, через 356 лет как у Великой теоремы Ферма [30], [10, с. 117]), история на этом не заканчивается, ибо начинаются известные процессы расширения и обобщения. Так, теорема Лагранжа приводит к вопросу о представлении любого целого числа в виде суммы кубов, четвертых степеней и т.д. («проблема Варинга», до сих пор окончательно не решенная). Даже если первоначальная теория, в конце концов «умирает», она, как правило, оставляет после себя многочисленные живые побеги.

*Математики уже столкнулись с такой необозримой россыпью задач, что, даже если бы прервалась всякая связь с экспериментальной наукой, их решение заняло бы еще несколько столетий!*

Однако экспериментаторы готовы примириться с «некрасивыми решениями», лишь бы задача была решена. Точно так же и в математике классицисты и абстракционисты не очень обеспокоены появлением «патологических» результатов. С другой стороны, модернисты заходят так далеко, что усматривают в появлении «патологий» в новой теории – симптом, свидетельствующий о несовершенстве основополагающих понятий.

## 4. ЧТО ТАКОЕ ИНФОРМАЦИЯ?

**Информация** – это любые сведения, передаваемые любым способом между любыми объектами во Вселенной. Фактически вся деятельность человека связана с получением, переработкой, хранением и передачей информации. Причем это характерно для всех живых существ и растений (например, передача информации от клетки к клетке, генетика). Ведь даже когда мы срезаем розу – она «кричит» о своей боли. Это доказано после открытия в растительной клетке семи сигнальных систем, снабжающих её информацией об окружающем мире. Информационный вакуум, вероятно, является синонимом не-жизни (смерти). Уже давно был выдвинут тезис о том, что информация является одним из универсальных свойств материи.

Главная особенность человеческой цивилизации в последнем столетии – это лавинообразное нарастание информации (речь не только об Интернете). В связи с чем можно привести две точки зрения: а) неизбежен переход количества в качество, т.е. наука близка к очередной революции, гарантирующей некий прогресс общества; б) когда чего-то слишком много, то это теряет смысл, т.е. «информационный взрыв» – симптом грядущего хаоса, катаклизма на Земле.

Понятие «информация» изучается в трех направлениях:

1). Разработка математического аппарата, отражающего основные свойства информации (информатика, *теория информации*).

2). Строгое определение смысловой ценности информации, т.е. количества *семантической* информации (скажем, как приращения вероятности достижения данной цели в результате использования данной информации – согласно теории А. Харкевича, 1960 г.).

3). Использование теории информации в биологии, социологии, психологии и т.д. (вне рамок точных наук). Так, в лингвистике была обнаружена избыточность языков: тексты на любом языке можно сократить в 4÷5 раз почти без потери информации в тексте. В нейрофизиологии было установлено, что ощущение пропорционально логарифму возбуждения (закон Вебера-Фехнера [10, с.203]), т.е. нервные волокна работают как каналы связи в теории информации.

**Бит – единица информации**. Мы настолько привыкли пользоваться десятичной системой счисления, что для многих будет настоящим откровением расшифровка записи, скажем, числа $235 = 2\cdot10^2 + 3\cdot10^1 + 5\cdot10^0$ (число “строится” на базе 10 и десяти цифр 0, 1, 2, 3, …, 9). Разумеется, что можно было бы использовать любую другую систему счисления (их бесконечно много). Так, в *двоичной системе счисления* число 235 запишется в виде 11101011, т.к. $235 = 128 + 64+32+8+2+1 = 1\cdot2^7 + 1\cdot2^6 + 1\cdot2^5 + 0\cdot2^4 + 1\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 1\cdot2^0$ (число “строится” на базе 2 и двух цифр 0 и 1). Именно двоичная форма записи удобнее всего для работы компьютера. Так, соответствующее устройство, переключаясь в состояние “1” (есть электрический ток) или в состояние “0” (нет тока), посылает управляющий сигнал, содержащий информацию в 1 ***бит***. Сам термин «бит» происходит от словосочетания *binary digit* (анг.) – «двоичная цифра».

Из одного бита информации можно составить только два *равновероятных* варианта (исхода): 1 и 0. Из двух битов – 4 варианта: 00, 01, 10, 11. Из трех битов – 8 вариантов: 000, 001, 010, 100, 011, 110, 101, 111. Из четырех битов – 16 вариантов и т.д. Таким образом, из $I$ битов информации можно составить $Z = I^2$ вариантов. Иначе говоря, для выбора одного из $Z$ *равновероятных* вариантов нужна информация в $I$ битов (*формула Хартли*, предложена им в 1928 г.):

$$I = \log_2 Z. \qquad (4.1)$$

Итак, 1 бит информации – это есть информация, содержащаяся в кодовом знаке, принимающем лишь два равновероятных значения.

**Информация и вероятность**. Предположим, что задается вопрос, ответ на который имеет два исхода – «да» (1) или «нет» (0). Если оба исхода равновероятны, то ответ несет информацию ровно в 1 бит. Если же исходы «да» и «нет» имеют (внимание!) *разную* вероятность, то в ответе содержится информация меньше 1 бита. В предельном случае, скажем, когда вероятность «да» равна 100%, то ответ вообще не содержит информации ($I$=0). Вполне очевидно, что равновероятные варианты – это малоинтересные случаи из реального многосложного физического мира, поэтому надо учитывать *различные* вероятности выбора того или иного варианта.

Клод Шеннон в 1948 г. исследовал случаи, когда различные варианты имеют разные вероятности, и получил результат, который лег в основу *теории информации*. Коротко изложим этот результат.

Пусть $\xi$ – случайная дискретная величина, которая может принимать значения $X_1, X_2, X_3,\ldots, X_Z$ с вероятностями (соответственно): $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_Z$. То есть перед нами $Z$ исходов ($Z$ разных значений случайной величины), которые реализуются с разными вероятностями. Мы производим наблюдение над величиной $\xi$ и в результате выясняем, что она приняла такое-то значение. Какое количество информации $I$ (в битах) мы получим в результате произведенного наблюдения? *Формула Шеннона* дает следующий красивый ответ:

$$I = -\,(P_1{\cdot}\log_2 P_1 + P_2{\cdot}\log_2 P_2 + P_3{\cdot}\log_2 P_3 + \ldots + P_z{\cdot}\log_2 P_z), \qquad (4.2)$$

причем считается, что $0{\cdot}\log_2 0 \equiv 0$ (хотя $\log_2 0$ не существует).

Очевидно, что формула Хартли (4.1) – это частный случай для формулы Шеннона, когда $P_j = 1/Z$ где $j = 1, 2, 3, \ldots, Z$.

Рассмотрим случай, когда среди $Z$ вероятностей только две из них отличны от нуля (т.е. ответ на вопрос может содержать только «да» или «нет»). Тогда, если первая вероятность равна, скажем, $P$, то вторая – будет равна $(1 - P)$, и формула Шеннона примет вид:

$$I = -\,P{\cdot}\,\log_2 P - (1-P){\cdot}\,\log_2(1-P). \qquad (4.3)$$

Из формулы (4.3) следует, что максимум информации ($I$=1 бит) получается в случае, если обе вероятности равны $P$ = ½ (т.е. когда исходы «да» и «нет» равновероятны). Именно этот факт следует использовать для ведения наиболее *продуктивного опроса* (или допроса, не дай Бог, конечно): вопросы надо задавать так, чтобы предполагаемые ответы (только «да» или «нет»!) были равновероятными (или почти таковыми). Этот же принцип позволяет быстрее всего найти льва в заповеднике. Делим последний пополам и спрашиваем: «Лев справа или слева»? Пусть ответ был: «Лев – справа». Тогда уже правую половину заповедника делим пополам и снова спрашиваем: «Лев справа или слева?» и т.д., пока лев не окажется перед вами.

Итак, в основе теории информации лежит предложенный Шенноном способ измерения *количества* информации, содержащейся в каких-либо данных (сообщениях). В связи с этим заметим, что в геометрии площадь фигуры можно выразить числом и на этой основе сравнивать между собой фигуры произвольной формы. Подобно этому часто можно пренебречь качественными особенностями информации и выразить её количество числом. Причем только этим числом определяются возможности передачи информации по каналам связи и её хранения в запоминающих устройствах.

Осознав пусть даже самые азы теория информации, мы невольно приходим к мысли, что субъективные представления конкретного человека о приобретенной им информации (знаниях, опыте) могут оказаться весьма далёкими от реального количества информации.

Формула Шеннона говорит о глубокой внутренней связи между информацией и вероятностью (случайностью). Случайность не только “крадет” информацию, но и генерирует её, так как наиболее сложные информационные устройства (в т.ч. мозг человека) принципиально основаны на случайной структуре внутренних связей. Например, попробуйте описать процесс своего мышления, зарождения *новой* идеи – и вы вступите в область сложнейших случайных связей, случайных догадок, случайных внезапных “озарений”, т.е. в область вероятностных отношений (где нет никаких алгоритмов).

Представление о количестве информации тесно примыкает к понятию *энтропии* (§20). Связь между ними становится особенно содержательной, если учесть, что получение любой информации неизбежно связано с определенными затратами энергии и времени.

## 5. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

**Теория чисел** – это бесконечно обширная область математики, которую можно исследовать с самых разных точек зрения. Об этом говорит тот факт, что перед словами “*теория чисел*” часто уточняют название раздела этой теории: классическая (аналитическая) …, аддитивная …, мультипликативная …, и, наконец, графическая теория натуральных чисел (ГТНЧ, см. §6), а также ещё различают теорию алгебраических чисел и трансцендентных чисел.

**Классическая теория чисел** – чрезвычайно сложный раздел математики. Мы проиллюстрируем это в небольшом экскурсе в историю, связанном с тремя яркими, талантливыми личностями, внесшими заметный вклад в математику (в т.ч. в теорию чисел).

Основные труды английского математика Г. Х. Харди (1877–1947) посвящены теории чисел и теории функций. Большинство его трудов выполнено совместно с английским математиком – Дж. И. Литлвудом (1885–1977), но отдельные работы Харди были выполнены вместе с самобытным индийским математиком С. Рамануджаном (1887–1920), которого Харди считал своим открытием и "единственным романтическим событием" в жизни. Харди говорит о нём так.

Рамануджан был самой романтической фигурой в современной истории математики. Не имея специального математического образования, он за свою короткую жизнь сделал многое: его опубликованные работы образуют книгу в 400 страниц, и осталось масса не опубликованных работ. Его можно считать самым великим формалистом своего времени, ибо его формулы (показывал их Харди полдюжины почти каждый день) – просто поражают [10, с.89], [35].

Исключительные способности в математике у Рамануджана проявились к 10 годам. Однако критический для карьеры любого математика период (18÷25 лет, когда ум наиболее эластичен) был, к сожалению, упущен в борьбе с трудностями жизни *бедной* индуской семьи (в 22 года Рамануджан женился). Таким образом, в лучшие годы его гений был направлен в неверном направлении, отодвинут на запасные пути и до некоторой степени искажен. Только в возрасте 26 лет Рамануджан написал письмо Харди, после чего тот смог доставить его из Индии в Англию. Но всего 3 года спустя Рамануджан заболел туберкулёзом и так больше и не выздоровел.

Рамануджан говорил Харди, что богиня Намаккал внушала ему формулы *во снах* (про сны Пенроуза см. §2). Часто, встав с кровати, он мог записать результаты и быстро проверить их, хотя и не всегда мог дать строгое доказательство. Но Рамануджан не был мистиком и религия не являлась важной частью его жизни; он считал, что все религии более или менее одинаково истинны, т.е. никак не выделял индуизм, а только выполнял его обряды [сам Харди не верил в древнюю мудрость Востока]. Рамануджан не являлся убежденным атеистом, он был типичным агностиком и ортодоксальным индусом из высокой (но очень бедной) касты; был строгим вегетарианцем, и сам готовил себе еду (предварительно переодевшись в пижаму).

В самостоятельных работах Рамануджана нет *простоты и неизбежности*, свойственных величайшим работам других математиков. Его работы были скорее странными. Бо́льшую часть своей жизни [до приезда в Англию] он работал, оставаясь в неведении относительно открытий современных европейских математиков (около 2/3 его работ – это переоткрытия). Отсюда идет его вызов почти всем канонам: его формулы практически не содержат доказательств; он не до конца понимал, что такое аналитическая функция; он никогда не использовал глубокую теорему Коши (§18). Рамануджан был далек от понимания настоящих сложностей *аналитической теории чисел*, которая оказалась его единственным настоящим поражением: здесь он в одиночку почти ничего не доказал и многое из того, что он вообразил, было ложным. Но, вместе с тем, у него была страсть к самим числам: его способность помнить характерные особенности чисел была почти сверхъестественной. По словам Литлвуда, каждое положительное число было одним из личных друзей Рамануджана…

В словах Харди для нас важен тот факт, что даже такому гению как Рамануджан теория чисел не открыла свои тайны. Вот как это объясняет сам Харди [35, с. 32, 28] (курсив мой): “Аналитическая теория чисел является одной из тех исключительных областей математики, в которых доказательство является всем и *ничего, лишенное абсолютной строгости, не принимается*. … вы не можете достигнуть никакого настоящего понимания структуры и смысла теории [чисел] или получить какой-либо здравый инстинкт, ведущий вас в дальнейших исследованиях, пока вы не изучите доказательства. Сравнительно просто делать остроумные догадки, действительно, существуют теоремы, подобные “теореме Гольдбаха” [10, с.31], которые никогда не были доказаны и которые любой *дурак*[1] может угадать”. “Математик обычно получает теорему с помощью интуиции; он обнаруживает правдоподобное заключение и начинает работать над созданием доказательства. Иногда это является рутинным действием, и любой хорошо обученный профессионал может представить требуемый результат, но более часто воображение является очень ненадежным проводником. В частности, так происходит в аналитической теории чисел, где даже воображение Рамануджана вело его по неправильному пути”. “Никто не может убедить себя, что $2^{127}–1$ является

[1] Возможно, именно так Харди мог бы назвать и автора ГТНЧ (§6), добавив ещё эпитеты вроде “вдохновленный идиот” или “психологический уродец” [35, с.13]. Но подобные оценки ГТНЧ из уст *профессиональных математиков* (таких как Б.В. Лурье), увы, правомерны.

простым числом, если не изучить доказательство. Никто не имеет столь живого и всеобъемлющего воображения”.

**Великое заблуждение?** Как правило, ещё в школе на уроке арифметики мы впервые узнаем слова гениального Карла Гаусса: “*Математика – королева наук, а теория чисел – королева математики*”. Однако далеко не все математики разделяли такую точку зрения. Например, уважаемый Харди соглашался с Гауссом, но в том смысле, что теория чисел также бесполезна, как английская королева. Это остроумное высказывание Харди, возможно, является примером великого заблуждения (оно исходит от великих умов). В истории науки таких примеров немало, так, Эйлер считал, что человеческий ум никогда не проникнет в тайну распределения простых чисел [10, с.128], а Эйнштейн не признавал квантовую механику.

Общеизвестно, что со священным трепетом относился к натуральным числам знаменитый Пифагор (см. его изречения на стр. 4). Однако преклонение древних пифагорейцев перед числами со временем стали объяснять исключительно ограниченностью их знаний (что м.б. спорным, так считал, например, даже Эйлер, см. стр. 4).

В наше время значение *теории чисел* явно занижено даже среди профессиональных математиков. Например, в Санкт-Петербургском математическом институте им. В. А. Стеклова РАН в 2005 г. был только один единственный (!) специалист по теории чисел – уважаемый Борис Вениаминович Лурье. Что касается «широкой публики», то для неё теория чисел – это что-то вроде кабалистики («науки» о числах), астрологии и т.п. мракобесья [10, с.133, 135].

Главным аргументом «полезности» теории чисел в реальной жизни стало применение простых чисел в *криптографии* (с 1977 г.), занимающейся, как известно, кодированием секретных сообщений. Оказалось, что удобным шифровальным ключом может служить огромное составное число, полученное перемножением двух больших простых чисел (скажем, порядка $\sim 10^{80}$). Эти два числа – надежный дешифровальный ключ, для поиска которого надо *факторизовать* ( §9) шифровальный ключ на два простых множителя, что сделать практически невозможно, т.к. даже самым мощным компьютерам в мире на это потребуется несколько лет работы.

Ещё простые числа якобы причастны к миру живой природы, однако, доказательства этого факта выглядят пока малоубедительно [30, с. 100]. На фоне весьма скромной роли, которую официальная наука отводит теории чисел, наша ГТНЧ выглядит полным безумием, ибо её рефлекции «обнаруживают» глубочайшую связь мира чисел с фундаментальными основами мироздания (пространства-времени). Можно сказать, что ГТНЧ – это *пифагореизм* 21 века, апеллирующий к открытиям естественных наук. Кстати говоря, львиная доля этих открытий совершена за последние лет 300 (миг в истории человечества), и подобными знаниями, в принципе, могла обладать предыдущая «волна» человеческой цивилизации, исчезнувшей в некой глобальной катастрофе (реф. 58). Быть может, девиз пифагорейцев «Всё есть число» – это своеобразное «эхо» погибшей цивилизации, ведь любые *устные* предания быстро утрачивают достоверную информацию, «растворяя» её практически до нуля.

## 6. ЧТО ТАКОЕ ГТНЧ?

(позже – **виртуальная космология** или **космология чисел**)

Начиная с 1997 г. мной проводились всевозможные исследования натурального ряда 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …. с помощью персонального компьютера (ПК), причём построение и анализ графиков – стали главным инструментом для проникновения в тайны мира чисел. Вот почему наработанный таким путем материал я назвал для краткости – ГТНЧ (*графической теорией натуральных чисел*). В отличие от *теории чисел* (архисложного раздела высшей математики, §5), ГТНЧ – общедоступна и может быть интересна самой широкой аудитории. А если вы умеете работать в электронной таблице («Excel»), и, тем более, можете написать программку для ПК, то вас ждёт множество «открытий чудных» в недрах натурального ряда (см. стр.184).

Разумеется, что ГТНЧ не должна противоречить общепризнанной математике, но, в силу некомпетентности автора, такое случается. Кроме того, любая новая теория просто обречена на ошибки.

Характерная особенность ГТНЧ в том, что она сплошь и рядом апеллирует к реальному физическому миру в крайне сомнительных и, вместе с тем, любопытных, интригующих рефлекциях.

**Рефлекция** (от позднелат. *reflexio* – отражение) – труднообъяснимое «отражение» миром чисел реальной структуры пространства-времени (структуры Вселенной). Термин «рефлекция» призван подчеркнуть проблематичность приводимых мной аналогий: не чёткие отражения, а Бог знает что – какие-то рефлекции. Скептики могут считать, что рефлекции – всего лишь *рефлексии* автора, но даже и это, согласитесь, далеко не худшее применение нашего разума…

Мои рефлекции – это попытка доказать, что реальный физический мир и абстрактный мир чисел – *изоморфны* (хотя бы отчасти, если такое вообще возможно). Понятие «изоморфизм» можно пояснить на примере следующего утверждения: количество разбиений выпуклого семиугольника на треугольники равно количеству вариантов расстановки скобок для 6 букв. То есть триангуляция многоугольников *изоморфна* (подобна) задаче расстановки скобок (приводящей к числам Каталана). Об изоморфизме см. [10, с. 94].

Рефлекции не образуют единой картины, они могут даже противоречить друг другу. Но в них есть нечто притягательное и, наверняка, поучительное для пытливого ума. Кроме того, рефлекции могут дополнять основной текст книги (без учета моих «фантазий»).

Ниже, по сути дела, приводятся первые рефлекции, без которых трудно понять все остальные, помещенные в главе IV. Отсылка, скажем, к седьмой рефлекции выглядит обычно так: (реф.7).

**Дискретность и "расширение"** натурального ряда – вот глубинная (фундаментальная) первопричина для всех рефлекций в ГТНЧ. Дискретность ряда никаких сомнений не вызывает, а вот его "расширение" можно пояснить записью натурального ряда в следующем виде: 0, 1, 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1, … . И если каждую единицу отождествлять с *планковским временем* (элементарным временным интервалом: 1 *эви* $\approx 5{,}4\cdot10^{-44}$ сек) (гл. II §3), то натуральный ряд как бы превращается в некий поток квантов времени. А вернее, пространства-времени, ибо, как мы знаем из физики (§2), математические описания пространства и времени оказались очень похожими и в действительности это две стороны одной единственной структуры, именуемой "пространство-время" (реф. 1, 2, 3, 16, 28).

**Пространство-время** – это основные формы существования материи, которые имеют решающее значение для построения физической картины мира, нашей Вселенной. В современной *квантовой теории* пространству и времени отводится центральная роль, существуют даже гипотезы, где вещество рассматривается не более как возмущение этой основной структуры. Средняя плотность *видимого* вещества во Вселенной оценивается как 5 атомов вещества на один кубический метр пространства, т.е. наша Вселенная – это почти «пустое» *пространство-время*, которое непрерывно расширяется и дискретно (при самом глубоком рассмотрении, скажем, в теории суперструн, §11). Таким образом, изучая натуральный ряд, мы как бы «расшифровываем» некие тайны «пустого» пространства-времени.

**Большой отрезок** (БО) – это отрезок натурального ряда, содержащий числа 0, 1, 2, 3, …, $8{\cdot}10^{60}$; на языке математики этот отрезок обозначают так: $[0;\ 8{\cdot}10^{60}]$. БО чудовищно колоссален по длине, ведь такое количество планковских временем (*эви*) равно возрасту нашей Вселенной от момента т.н. Большого взрыва (13±2 млрд. лет назад):

$$(5{,}4{\cdot}10^{-44}\text{ сек}){\cdot}(8{\cdot}10^{60}) \approx 4{,}3{\cdot}10^{17}\text{ сек} \approx 13{,}7\text{ млрд. лет.}$$

Именно в пределах БО (и не дальше) обнаруживается большинство *рефлекций*. Говоря о БО, мы иногда для краткости будем брать отрезок $[1;\ 10^{61}]$, который «равен» 17,2 млрд. лет. Напомним, что возраст Вселенной пока точно не установлен (реф.18), да это и не принципиально, тем более, что ГТНЧ претендует на то, чтобы самой указать точный возраст Вселенной [14, с. 84].

Даже если закрыть глаза на рефлекции, то всё равно отождествление единицы с планковским временем (*эви*) – это весьма полезная идея, благодаря которой натуральный ряд и сухие математические законы словно «оживают» во времени и в нашем воображении.

**Сингулярность** как место, где ещё не начинается действие известных нам законов, в натуральном ряде, безусловно, существует – это его начало. Именно там не работают почти все формулы классической теории чисел и ГТНЧ: они там либо вообще не имеют смысла (скажем, получаем деление на нуль, см.§15), либо дают огромную *погрешность* (о ней много сказано в книгах [10], [14]).

Сингулярность в мире чисел это, во-первых, интервал (полуинтервал?) между нулём и единицей (0; 1); а во-вторых, это некий отрезок $[1;\ N^*]$, где $N^*$ – число, до сих пор вызывающее вопросы. Ясно только, что $N^* < 10^{17}$ (*эви*), то есть сингулярность в ГТНЧ явно меньше *аттометра* ($10^{-18}$ м или $10^{-26}$ сек) [10, с. 33], [14, с. 90].

Любопытно, что если физики в своих экспериментах мечтают опуститься ниже аттометра, то в ГТНЧ наоборот – можно только мечтать о компьютерах, способных легко оперировать числами порядка $10^{17}$ и выше. Ведь это пока недоступно даже самому мощному компьютеру (IBM, 2004 г.), выполняющему $7{,}1{\cdot}10^{13}$ операций в секунду. А вот в мире чисел сингулярность – “как на ладони”, поэтому и возникает соблазн найти в начале натурального ряда “отражения” физического мира, его сингулярности (реф. 2, 5, 30, 41, 42).

**Относительная погрешность** (ОП) приближения $B^*$. Так называется отношение ОП $\equiv (B - B^*)/B^*$, где $B^*$ – найденное нами приближенное значение величины $B$. Как правило, величина $B$ является неизвестной нам функцией $f$ от $N$, то есть $B = f(N)$. Но вместо неё нам удается найти только некое грубое приближение – функцию $B^*=\psi(N)$. После чего мы оцениваем ОП (обычно в %) и принимаем решение о пригодности функции $\psi$ для наших оценок в рамках ГТНЧ. Такой *инженерный подход* абсолютно неприемлем с точки зрения классической теории чисел (§5), но следует помнить, что задача ГТНЧ на первом этапе – это получение хотя бы неких качественных результатов и оценок в пределах Большого отрезка.

***Эви*-конвертация**. Поскольку за планковское время (за 1 *эви*) фотоны света проходят путь равный $1{,}6\cdot10^{-35}$ м (планковский размер), то единицу натурального ряда можно отождествлять не только с “квантом” времени, но и с “квантом” длины (с планковским размером). Тогда весь БО окажется равным характерному размеру Вселенной: $(1{,}6\cdot10^{-35}$ м$)\cdot(8\cdot10^{60}$ *эви*$) \approx 1{,}3\cdot10^{26}$ м. Таким образом, работая в рамках ГТНЧ полезно помнить, что единица, “формирующая” весь натуральный ряд, равна 1 *эви* = $5{,}4\cdot10^{-44}$ сек = $1{,}6\cdot10^{-35}$ м.

Очевидно, что подобно БО любой отрезок натурального ряда (любой длины) с помощью *эви* можно перевести в промежутки времени (в секунды) или в отрезки длины (в метры). Подобный перевод мы будем называть *эви-конвертацией*. Полезные её примеры приведены в [14, с. 97]; табл.18.1 (гл. II); табл. 13.1 (гл. III).

**Малый отрезок** (МО) – это отрезок $[1;\ 10^{20}]$. После *эви*-конвертации его длина будет эквивалентна $5{,}4\cdot10^{-44}\cdot10^{20}\approx10^{-23}$ секунды, т. е. МО можно отождествлять с *ядерным временем* или с характерным размером протона (он всего на 3 порядка больше аттометра).

**Предельный отрезок** (ПО) – это отрезок $[1;\ 10^{308}]$, который после *эви*-конвертации можно трактовать как $10^{257}$ лет – для нас это самая настоящая *вечность*. Числа, превосходящие $10^{308}$, просто выходят за диапазон допустимых значений, с которыми работает ПК. Дойдя до числа $10^{308}$, ПК прекращает счет и выдает специальное сообщение, например, «#ЧИСЛО!» (реф. 40).

“**Вообще говоря**” – это выражение на строгом языке математики означает, что “*бывают случаи, когда это не так*”. Так, можно с уверенностью сказать, что люди с гуманитарным образованием, *вообще говоря*, не станут читать данную книгу (см. стр. 4 и реф. 48, 56, 57).

**Важное замечание**. По ходу изложения ГТНЧ мной вводится множество *обозначений* (букв из разных алфавитов). Часто они имеют силу только внутри параграфа, а иногда – только для конкретной формулы. В других частях текста эти обозначения могут иметь иной смысл. Вообще, из-за стремления автора к лаконичному и широкодоступному тексту, предлагаемые обозначения, названия, и сами рассуждения поначалу могут «удивить» читателя, но в ходе дальнейшего изложения многое «становится на свои места».

## 7. КАКИЕ БЫВАЮТ ЧИСЛА?

**Натуральные числа** – это самый элементарный и фундаментальный вид чисел, одно из основных понятий математики. Множество всех натуральных чисел $N = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$, т.е. целых положительных чисел, снабженных естественным порядком, называется *натуральным рядом* (в части *нуля* см. [23, с.91]). Натуральные числа появились ещё у древних людей в результате счёта предметов, и эти числа – *первая* абстрактная истина[1], открывшаяся человеку.

Общее количество всех *натуральных чисел* равно бесконечному числу $\aleph_0$ («*алеф-нуль*», $\aleph$ – это первая буква древнееврейского алфавита). Г. Кантор доказал два парадоксальных утверждения, которые наше воображение, увы, «отказывается» понимать (реф. 50):

1). Количество всех *целых чисел* (т.е. натуральных чисел со знаком «+» и со знаком «–») также равно $\aleph_0$ (а не в два раза больше).

2). Количество всех дробных чисел (дробей) также равно $\aleph_0$.

**Простые числа**. Все натуральные числа математики делят на две группы. К первой группе относят числа, имеющие ровно два делителя (1 и само число) – эти числа называют *простыми* (2, 3, 5, 7, … ).

Ко второй группе относят все остальные числа, которые называют *составными*. У математиков есть основания считать число $N$=1 – совершенно *особым числом* (ни простым, ни составным) (реф. 32).

**Действительные числа** (вещественные числа) включают в себя:

*Рациональные числа*, т.е. числа, представимые в виде отношения двух целых чисел $m/n$. Рациональные числа также представимы в виде

---

[1] Эта Истина может оказаться и *последней* (абсолютной), из доступных человеку – настолько сложен и фундаментален мир чисел. Но с этим, наверняка, пока согласятся немногие.

конечной или бесконечной *периодической* десятичной дроби. Период последней начинается сразу после запятой, если в несократимой дроби $m/n$ знаменатель $n$ не делится на 2 и на 5.

*Иррациональные («неразумные») числа*, т.е. числа, в десятичном разложении которых нет никакого периода. Все они разделяются на *алгебраические* числа, которые являются корнями многочлена $a_n \cdot x^n + \ldots + a_1 \cdot x^1 + a_0$ с целыми коэффициентами, и *трансцендентные* («потусторонние») числа. Э. Борель установил, что «почти все» действительные числа – это трансцендентные числа, ибо их нельзя «пронумеровать» (в отличие от алгебраических чисел). Очень легко самому придумать множество иррациональных чисел, например, такое число как 0,1010010001…, но гораздо сложнее доказать, что некое конкретное число является именно иррациональным. Так было с числом $\boldsymbol{\pi}$ = 3,14159…, числом $\boldsymbol{e}$ = 2,71828…, а для числа $\boldsymbol{C}$ = 0,57721… вопрос остаётся открытым. Ещё Теэтет Афинский (ок.410–369 до н.э.) обосновал иррациональность всех чисел вида $\sqrt{N}$ (и $\sqrt[3]{N}$), где $N$ – натуральное число, не являющееся точным квадратом (кубом).

А. Гурвиц и Э. Борель доказали, что для любого иррационального числа $w$ существует бесконечно много приближений рациональными числами $m/n$, для которых выполняется неравенство $|w - m/n| < 1/(n^2 \sqrt{5})$, причем число $\sqrt{5}$ не может быть увеличено [49, с. 183].

Корректное определение иррациональных чисел с помощью бесконечной последовательности приближений рациональными числами принадлежит к наивысшим достижениям человеческого разума, но вряд ли соответствует чему-нибудь реальному в физическом мире (где любое измерение неизменно сопряжено с ошибками).

Количество *действительных чисел больше, чем натуральных* [23, с.100]. Причем этот вывод Кантора интуитивно понятен, ведь между двумя действительными числами (вне зависимости от их близости) существует третье действительное число. При этом совершенно не ясно, можно ли обоснованно утверждать то же самое о физических расстояниях или промежутках времени (действительные числа, как представляется, дают величины, необходимые для их измерения – отсюда и название “действительные”). Действительные числа следует рассматривать скорее как некую *математическую идеализацию*, чем как реальную меру физически объективных величин. Действительные числа могут воплощать собой понятие “непрерывность” (которое, очевидно, нарушается на очень малых пространственных и временных масштабах, см. гл. II, § 3; реф. 3).

Если $\boldsymbol{C}$ (континуум) – это количество всех действительных чисел, а $\aleph_1$ – бесконечное число следующее за $\aleph_0$, то утверждение $\boldsymbol{C} = \aleph_1$ выражает знаменитую и нерешенную до сих пор математиками проблему (так называемую *континуум-гипотеза*).

**Обратные числа** ($R$, *reverse*) – так мы будем называть все действительные числа, находящиеся между нулем и единицей, то есть $0 < R < 1$. Термину “обратные” лучше всего соответствуют так называемые *аликвотные* дроби, т.е. дроби вида $1/N \equiv N^{-1}$, где $N$ – натуральное число. Ясно, что бесконечный ряд аликвотных дробей ($2^{-1}$, $3^{-1}$, $4^{-1}$, $5^{-1}$, …) не исчерпывает множества всех обратных чисел.

Сумма аликвотных дробей ($S_a$) находится с помощью формулы Эйлера для суммы так называемого *гармонического ряда*:

$$S_a \equiv 1 + 2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1} + 5^{-1} + \ldots + N^{-1} = \ln N + C + \varepsilon. \quad (7.1)$$

где $C = 0{,}577216\ldots$ – постоянная Эйлера, а $\varepsilon \to 0$ при $N \to \infty$ [10, с.16]. В конце Большого отрезка (БО) мы получаем $S_a \approx 140{,}81$.

Любое положительное рациональное число представимо в виде суммы конечного числа аликвотных дробей с различными знаменателями, например: $2/43 = 22^{-1} + 946^{-1} = 30^{-1} + 86^{-1} + 645^{-1} = 42^{-1} + 86^{-1} + 129^{-1} + 301^{-1}$. Столь важный факт мы будем называть *аликвотизацией* рационального числа. В отличие от факторизации (§9) натуральных чисел, аликвотизация – процедура многозначная (различных вариантов, вообще говоря, много), но её закономерности (они кем-то изучались?) также могут иметь важное значение.

В Древнем Египте существовали таблицы, которые давали разложение дробей вида $2/N$ на аликвотные дроби (где $N$ – все нечетные числа, скажем, до 331, как в папирусе Райнда). Поэтому мы назовем дроби вида $2/N$ – *египетскими* дробями. С помощью указанных таблиц решались многие практические задачи в течение тысячелетий (вплоть до средних веков!), хотя это требовало порой немалых ухищрений от древних математиков. По мнению авторитетного Д. Я. Стройка «египетская математика была скорее примитивного характера» [31, с.40]. Однако аликвотные дроби могли быть и некой «подсказкой» от неведомой ныне цивилизации (реф. 58), которую человечество, увы, так и не смогло постичь к настоящему времени.

**Простые аликвотные дроби** – это дроби вида $1/P$, где $P$ – некое простое число. Аналогично этому будем называть дробь вида $2/P$ – *простой* египетской дробью. Очевидно, что любую египетскую дробь $2/N$ можно представить как произведение дробей вида $1/P_k$ и дроби $2/P$, а последняя – это сумма двух аликвотных дробей:

$$2/P = [(P+1)/2]^{-1} + [P(P+1)/2]^{-1} = [(P-1)/2]^{-1} - [P(P-1)/2]^{-1} . \qquad (7.2)$$

Формула (7.2) отчасти объясняет многовариантность аликвотизации. Вероятно, у обратных чисел $R$ «внутренняя структура», в некотором смысле, многообразнее, чем у натуральных чисел $N$.

Среди первых 500 простых аликвотных дробей только две ($2^{-1}$ и $5^{-1}$ ) – конечные и, вероятно, только 11 дробей – периодические: $3^{-1}$, $7^{-1}$, $11^{-1}$, $13^{-1}$, $37^{-1}$, $41^{-1}$, $73^{-1}$, $101^{-1}$, $137^{-1}$, $239^{-1}$, $271^{-1}$.

Сумму простых аликвотных дробей ($S_{pa}$) можно найти с помощью формулы Гаусса-Мертенса [В. Боро и др. «Живые числа», с.16]:

$$S_{pa} \equiv 2^{-1}+3^{-1}+5^{-1}+7^{-1}+\ldots+P^{-1} = \ln\ln P + 0{,}261497 + \varepsilon. \qquad (7.3)$$

где $\varepsilon \to 0$ при $P\to\infty$. По моей оценке $\varepsilon(P) < C\cdot P^{-C}$, где $C$ – постоянная Эйлера. В конце БО мы получаем $S_1 \approx 5{,}2048$.

**Комплексные числа** (КЧ) – это числа вида $z = x+i\cdot y$, где $x$ и $y$ – действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$ – *мнимая единица*, т.е. число, квадрат которого равен –1. Действительные числа – частный случай КЧ при $y$ = 0. Впервые, по-видимому, мнимые величины появились в труде Дж. Кардано в 1545 г. Но их пользу признали далеко не сразу, так, спустя более ста лет великий Ньютон даже не включал их в понятие числа. В конце 19 века было доказано, что всякое расширение понятие числа за пределы поля КЧ возможно только в случае отказа от каких-либо привычных свойств действий (гиперкомплексное число). “Мнимые” числа не менее реальны, чем ставшие уже привычными “действительные” числа; вневременн*а*я реальность КЧ выходит далеко за пределы мыслительных процессов любого математика, ибо КЧ существуют в мире Платона! (§2).

В настоящее время КЧ являются неотъемлемой частью структуры квантовой механики (гл. II, §3) и вследствие этого лежат в основе поведения самого мира, в котором мы живем. Кроме того, КЧ являют собой одно из великих чудес математики [23, с. 97].

**Последовательности чисел** – их в математике существует множество. Как ни странно, первый «Справочник по целочисленным последовательностям» был опубликован только в 1973 г., и первым, кто догадался это сделать был Н. Слоун [10, с. 32]. Он собрал и упорядочил более 2300 (!) последовательностей, каждую из которых описывает *рекуррентная* и (или) *точная формула*, а также сопровождает список рекомендуемой литературы.

Самая известная из бесконечных последовательностей – это *числа Фибоначчи* (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …), в которых каждое число последовательности равно сумме двух предыдущих [10, с.90].

В «Справочнике» Слоуна под номером 577 значатся т.н. *числа Каталана*: 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, …. Эти числа не столь известны, как числа Фибоначчи, но они не менее зн*а*чимы и возникают в самых неожиданных местах, особенно при решении комбинаторных задач. По некоторым компетентным оценкам числа Каталана – наиболее часто встречающаяся последовательность (!), однако, она всё еще недостаточно известна даже среди математиков, особенно не имеющих доступа к «Справочнику» Слоуна.

В «Справочник» Слоуна, очевидно, можно включить и бесконечные последовательности, «открытые» в рамках ГТНЧ: лидеры частых и редких миров, верхние лидеры миров, ЛПД, и т. д. (§10, 25).

Бесконечно много т.н. *самопорожденных чисел*, которые открыл Капрекар в 1949 г. Про них также мало кто знает [10, с.106].

Есть последовательности, продолжение которых находится под вопросом (пока не известно), например, *числа Ферма* (гауссовы простые числа) 3, 5, 17, 257, 65537, …(?); совершенные числа (числа Мерсенна); дружественные и общительные числа; циклические числа (142857, 285714, …) [10, с. 97, 102, 104, 106, 110].

Есть фигурные числа [10, с.108], почти целые числа [10, с.105]. И, наверняка, есть ещё масса интересных последовательностей.

**Константы**. Во-первых, это фундаментальные математические константы (ФМК): $\pi$, $e$, $C$, … (см. гл.I, §3). Во-вторых, это отдельные любопытные числа: 6174 – постоянная Капрекара [10, с.106]; 77,84% – коэффициент заполнения пространства (КЗП) (реф. 6); 666 – «число зверя» [10, с.110]; прочие числа (реф. 31÷40, 44).

## 8. КЛАССЫ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

**Пять классов**. Все натуральные числа можно разделить на пять классов (открыл для себя в 1997 г. [7]). То есть всё множество натуральных чисел – это члены 5 арифметических прогрессий:

$$N_n = A + B\cdot(n–1) = B\cdot n + A – B, \quad (8.1)$$

где $A$ – это первый член прогрессии; $B$ – шаг (разность) прогрессии; $n$ = 1, 2, 3, … – порядковый номер натурального числа внутри данной прогрессии. Каждую из пяти арифметических прогрессий мы будем называть *классом чисел,* и обозначать его как класс $AB$ (первый член и разность прогрессии). Все натуральные числа распределяются между классами: **14**, **26**, **34**, **46**, **66**. В табл. 8.1 приведено по 24 первых числа $N$ из каждого класса (в пяти столбцах). Пять чисел $N$, расположенных *в строке* табл. 8.1 (по одному из каждого класса), будем называть $n$-м *слоем* натуральных чисел.

Таблица 8.1. Пять классов чисел

| $J$ | Класс ($n$) | Слой $n$ | Числа $N$ из класса … | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | **14** | **34** | **26** | **46** | **66** |
| **1** | 14 | **1** | 1 | 3 | 2 | 4 | 6 |
| | 26 | **2** | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 |
| | 34 | **3** | 9 | 11 | 14 | 16 | 18 |
| | 46 | **4** | 13 | 15 | 20 | 22 | 24 |
| | 14 | **5** | 17 | 19 | 26 | 28 | 30 |
| | 66 | **6** | 21 | 23 | 32 | 34 | 36 |
| | 34 | **7** | 25 | 27 | 38 | 40 | 42 |
| | 26 | **8** | 29 | 31 | 44 | 46 | 48 |
| | 14 | **9** | 33 | 35 | 50 | 52 | 54 |
| | 46 | **10** | 37 | 39 | 56 | 58 | 60 |
| | 34 | **11** | 41 | 43 | 62 | 64 | 66 |
| | 66 | **12** | 45 | 47 | 68 | 70 | 72 |
| **2** | 14 | **13** | 49 | 51 | 74 | 76 | 78 |
| | 26 | **14** | 53 | 55 | 80 | 82 | 84 |
| | 34 | **15** | 57 | 59 | 86 | 88 | 90 |
| | 46 | **16** | 61 | 63 | 92 | 94 | 96 |
| | 14 | **17** | 65 | 67 | 98 | 100 | 102 |
| | 66 | **18** | 69 | 71 | 104 | 106 | 108 |
| | 34 | **19** | 73 | 75 | 110 | 112 | 114 |
| | 26 | **20** | 77 | 79 | 116 | 118 | 120 |
| | 14 | **21** | 81 | 83 | 122 | 124 | 126 |
| | 46 | **22** | 85 | 87 | 128 | 130 | 132 |
| | 34 | **23** | 89 | 91 | 134 | 136 | 138 |
| | 66 | **24** | 93 | 95 | 140 | 142 | 144 |

**Дюжина классов**. Классы чисел в натуральном ряду чередуются определенным образом – начиная с единицы, бесконечное число раз повторяется набор из 12 классов, которые мы назовем *дюжиной* классов: 14, 26, 34, 46, 14, 66, 34, 26, 14, 46, 34, 66.

Поскольку номера слоев ($n$) в табл. 8.1 – это суть натуральный ряд (уходящий вниз до бесконечности), то слева от него указан класс ($AB$) для каждого числа $n$, а также *порядковые номера дюжин* ($J$=1, 2, …), образованных этими классами. Таким образом, легко видеть, что в каждой дюжине по три числа из классов **14** и **34**, а доля каждого из этих классов составляет $D$≡3/12=1/4, т. е. по 25% (как внутри дюжины, так и среди всех натуральных чисел). Ещё в каждой дюжине по два числа из классов **26**, **46** и **66**, а доля каждого из них составляет $D$≡2/12=1/6, т. е. около 16,67…% (как внутри дюжины, так и среди всех натуральных чисел). Иначе говоря, на любом достаточно большом отрезке натурального ряда вероятность встречи с числами из классов **14** или **34** составляет по 25%, а с числами из классов **26**, **46**, **66** – по 16,7%.

Чтобы определить, к какому классу принадлежит произвольное натуральное число $N$ достаточно разделить это число на 12 и посмотреть чему равен остаток. Так, у числа $N$=19 остаток от деления на 12 равен 7, значит наше число $N$ из класса **34**, поскольку 7-ому числу в первой дюжине (по порядку от её начала, см. табл.8.1) соответствует именно **34** класс. Если остаток от деления некого числа $N$ на 12 окажется равным 0 (нулю), то число $N$ будет из класса **66** (это единственный класс, в котором числа $N \geq 12$ делятся нацело на 12). Очевидно, что в классах **26**, **46**, **66** – только четные числа, а все простые числа содержатся исключительно в классах **14** и **34**. Причем в самом начале натурального ряда простых чисел в классе **34** больше, нежели в классе **14**, но на бесконечности этот «сдвиг» исчезает [7].

Мои исследования в части деления натурального ряда на пять классов см. в книге [13, с.31÷34]. Там, например, доказано следующие: сумма чисел из данного класса (*AB*) *в любой* дюжине стремится к такой же доле от суммы всех чисел дюжины, как и их количество.

## 9. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

Напомним, что к *простым* относят числа, имеющие ровно два делителя (1 и само число): 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31,… . Ниже приведены ключевые сведения о простых числах, а более подробно о них сказано в книгах [10, с.33÷41], [14, с.8÷16].

**Базис натуральных чисел**. Основная теорема арифметики утверждает, что всякое натуральное число $N$, кроме единицы, единственным образом разлагается в произведение простых чисел:

$$N = P_1^{\,a} \cdot P_2^{\,b} \cdot P_3^{\,c} \cdot \ldots \cdot P_n^{\,m}\ , \qquad (9.1)$$

где $P_1 < P_2 < P_3 < \ldots < P_n$ – простые числа; ($a$, $b$, $c$, …, $m$) – показатели степени (натуральные числа). Например, $261360 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 11^2$ и всякий другой набор простых чисел никогда не даст нам числа 261360.

Представление числа $N$ в виде (9.1) называется его *каноническим разложением* (*факторизацией*). Теперь легко объяснить, почему единицу математики не считают простым числом, ведь, сколько не умножай на единицу, ничего в формуле (9.1) не изменится.

**Пирамида базиса** – это графический образ канонических разложений всех натуральных чисел $N$. Глядя на Пирамиду (рис.9.1), например, легко сообразить, что $N = 20 = 2^2 \cdot 5^1$. Ниже описан алгоритм построения Пирамиды базиса:

1). Натуральный ряд $N = 1, 2, 3, \ldots$ – это одновременно и номера строк в Пирамиде. Под простым числом $P_i$ (на сером фоне) находится $i$-й столбец с чёрными клетками (камнями).

2) Каждый ($i$–й) столбец начинается (в строке с номером $N_i = P_i$) с чёрной клетки с цифрой «1» (степень $P_i$ в каноническом разложении $N_i$). Далее каждая $P_i$-я клетка столбца будет чёрной, но вот какую цифру (степень $P_i$) в них указывать – в этом главная проблема Пирамиды базиса.

| N | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | | | | | | | | |
| 3 | | 1 | | | | | | | |
| 4 | 2 | | | | | | | | |
| 5 | | | 1 | | | | | | |
| 6 | 1 | 1 | | | | | | | |
| 7 | | | | 1 | | | | | |
| 8 | 3 | | | | | | | | |
| 9 | | 2 | | | | | | | |
| 10 | 1 | | 1 | | | | | | |
| 11 | | | | | 1 | | | | |
| 12 | 2 | 1 | | | | | | | |
| 13 | | | | | | 1 | | | |
| 14 | 1 | | | 1 | | | | | |
| 15 | | 1 | 1 | | | | | | |
| 16 | 4 | | | | | | | | |
| 17 | | | | | | | 1 | | |
| 18 | 1 | 2 | | | | | | | |
| 19 | | | | | | | | 1 | |
| 20 | 2 | | 1 | | | | | | |
| 21 | | 1 | | 1 | | | | | |
| 22 | 1 | | | | 1 | | | | |
| 23 | | | | | | | | | 1 |

Рис. 9.1. Пирамида базиса

3). В первом столбце ($P_i = 2$) все чёрные клетки образуют *серии* с номерами $k = 1, 2, 3, 4, \ldots\infty$ (белая цифра в чёрной клетке). Каждая серия начинается с числа $N = (P_i)^k$, и далее следует шагом $S = (P_i)^{k+1}$.

4). При $P_i=3$ все чёрные клетки образуют две *группы* ($g=1$ и $g=2$), а внутри каждой из них образует *серии* с номерами $k = 1, 2, 3, 4, \ldots\infty$ (белая цифра в чёрной клетке). Каждая серия начинается с числа $N = g \cdot (P_i)^k$, и далее следует шагом $S = (P_i)^{k+1}$ (внутри данной группы $g$).

5). При $P_i=5$ имеем пять групп ($g=1; 2; 3; 2 \cdot 2; 2 \cdot 3$), а при $P_i=7$ – уже десять групп ($g=1; 2; 3; 5; 11; 2 \cdot 2; 2 \cdot 3; 2 \cdot 5; 3 \cdot 5; 2 \cdot 3 \cdot 3$), и также бесконечно много *серий* ($k = 1, 2, 3, \ldots\infty$) в каждой из них. И также каждая серия начинается с $N = g \cdot (P_i)^k$, и следует шагом $S = (P_i)^{k+1}$.

Построение Пирамиды базиса равносильно ответу на вопрос о том, какие числа $N_{gkn}$ содержат в своём каноническом разложении простое число $P_i$ в степени $k$? Возможно, эти числа имеют вид:

$$N_{gkn} = g \cdot (P_i)^k + (n-1) \cdot (P_i)^{k+1}, \tag{9.2}$$

где $g$ – некий множитель (разный для каждой группы); $k = 1, 2, 3, \ldots$ – порядковый номер серии (внутри $g$-й группы); $n = 1, 2, 3, \ldots$ – порядковый номер искомого числа $N_{gkn}$ (внутри $k$-й серии). Множитель $g$ – это, вероятно, некие сочетания простых чисел (чисто комбинаторная задача, но, увы, мною до конца не решенная).

Нет сомнений в том, что чёткий алгоритм построения Пирамиды базиса *существует* (это подтверждает и [14, с. 64÷70]). Однако колоссальное количество комбинаций (скажем, множителя $g$ при больших $P_i$) делает построение такой Пирамиды практически невозможным даже на самом мощном компьютере (реф. 27).

**Количество простых чисел** на произвольном отрезке. Поскольку простые числа образуют своеобразный *базис натуральных чисел*, то проблема распределения простых чисел в натуральном ряде всегда представляла большой интерес, причем проблемы, связанные с этим распределением, классифицируются как *очень трудные*.

Пусть $K$ – это количество простых чисел на отрезке [2; $N$], тогда справедлив следующий *асимптотический* закон (при $N \to \infty$):

$$\lim \frac{K}{N/\ln N} = 1\text{, или (что то же самое)}\quad K \sim \frac{N}{\ln N}. \qquad (9.3)$$

Знак асимптотического равенства (~) не может быть заменен обычным знаком (=), это ясно хотя бы из того, что $K$ – непременно целое число (количество), тогда как $N/\ln N$ – не является таковым. Простой (по форме) закон (9.3) относят к числу самых замечательных открытий, сделанных когда-либо во всей математике! (реф.28).

Из формулы (9.3) получаем обратную ей (и важную) формулу:

$$N \sim K\cdot\ln K\ , \qquad (9.4)$$

которая указывает (разумеется, только примерно) на простое число $P \approx N$ по его порядковому номеру $K$ (внутри мира простых чисел).

**Сумма простых чисел** на отрезке [1; $N$] – это сумма $S_p \equiv 2 + 3 + 5 + 7 + \ldots + P_K$, где $P_K$ – простое число, ближайшее к $N$ (пусть $N = P$).

Согласно формуле (9.4) мы вправе записать: $S_p \sim \sum k\cdot\ln k \equiv 1\cdot\ln 1 + 2\cdot\ln 2 + 3\cdot\ln 3 + \ldots + K\cdot\ln K$, где $k = 1, 2, 3, \ldots, K$ – порядковый номер простого числа. Рост суммы $\sum k\cdot\ln k$ происходит по такому закону:

$$S_p \sim A\cdot K^B,\ \text{где}\ A = 0{,}1839\cdot\ln K\ \ \text{и}\ \ B = 2 + (\ln K)^{-1}. \qquad (9.5)$$

В конце БО имеем: $K \sim N/\ln N \sim 5{,}7\cdot 10^{58}$; $A \approx 24{,}8854$; $B \approx 2{,}0074$; $S_p \sim 25\cdot K^{2{,}0074} \sim 2{,}2\cdot 10^{119}$. Поскольку для суммы всех натуральных чисел на БО можно записать: $S \equiv 1+2+3+4+\ldots+N = (1+N)\cdot N/2 \approx 0{,}5\cdot N^2 \approx$

$3{,}2\cdot10^{121}$, то, скажем, *удельный вес* простых чисел равен $Z \equiv S_p/S \sim 0{,}0069$ (*доля* простых чисел на БО: $K/N \sim 1/\ln N \approx 0{,}0071$, реф. 36). Причем следует подчеркнуть внешнюю схожесть двух формул в конце БО: $S_p \sim 25\cdot K^{2{,}0074}$ и $S \approx 0{,}5\cdot N^2$ (почти квадратные уравнения).

## 10. ТИПЫ (МИРЫ) ЧИСЕЛ

**Тип числа** – это количество всех его делителей. Например, у числа $N$=20 всего шесть делителей: 1, 2, 4, 5, 10, 20 поэтому его тип $T$ = 6. Мы и далее всегда будем обозначать тип числа буквой $T$.

Заметим, что первое натуральное число $N$ = 0 имеет бесконечно большой тип ($T = \infty$), поскольку нуль делится на любое число (кроме нуля). Бесконечность ($\infty$), как и нуль (0), делится на все натуральные числа $N\geq1$, поэтому первое натуральное число $N$ = 0, в некотором смысле, «смыкается» с бесконечностью (реф. 42).

Число $N$=1 является единственным, особым числом, у которого тип равен единице ($T$ = 1). Ясно, что у любого *простого числа* $T$ = 2.

Знаая каноническое разложение числа $N = P_1^{\,a}\cdot P_2^{\,b}\cdot P_3^{\,c}\cdot\ldots\cdot P_n^{\,m}$, можно легко вычислить его тип по красивой формуле:

$$T = (a+1)(b+1)(c+1)\ldots(m+1). \qquad (10.1)$$

Так, для $N=261360=2^4\cdot3^3\cdot5^1\cdot11^2$ имеем $T$=(4+1)(3+1)(1+1)(2+1)=120.

**Малые делители**. Если все делители любого числа $N$ расположить по возрастанию, то, перебрав первую их половину (*малые делители*), мы обнаружим, что остальные (*большие делители*) равны частному от деления числа $N$ на один из малых делителей. Так, у числа $N$=20 есть три малых делителя – 1, 2, 4, и три больших делителя – 5, 10, 20 (которые равны отношениям: 20/4, 20/2, 20/1).

Таким образом, определение типа числа $N$ сводится к поиску его малых делителей, причем на отрезке $[1; \sqrt{N}]$. Ведь если число $N$>1 равно произведению двух натуральных чисел, то, по крайней мере, одно из них не больше, чем $\sqrt{N}$ – это заметил ещё Фибоначчи. Малые делители – это «паспорт» числа $N$, с полной информацией о нём.

**Средний тип числа**. В натуральном ряде появление различных типов (чисел с различными типами) носит *псевдослучайный* характер, т.е. на практике, вообще говоря, невозможно предсказать какой тип будет у следующего числа $N$. Очевидно только одно – чем дальше мы уходим от единицы, тем бóльшие типы могут появиться, причем наряду с ними неизбежно будут появляться числа и с самыми малыми типами $T = 2, 3, 4, ...$ (типы – это точки на рис. 10.1).

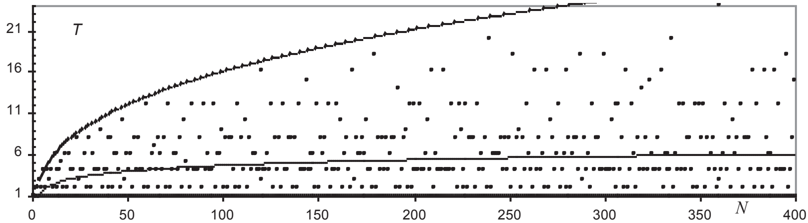


Рис. 10.1. Типы $\boldsymbol{T}$ у первых 400 чисел $\boldsymbol{N}$. Средний тип $\boldsymbol{T_s}$ и $\boldsymbol{T_{max}}$ (верхняя линия)

Любому натуральному числу $N$ помимо типа $T$ мы будем также приписывать *средний тип* ($T_s$), который равен среднему арифметическому всех типов у чисел от 1 до $N$ включительно:

$$Ts \equiv (T_1 + T_2 + T_3 + ... + T)/N \ . \qquad (10.2)$$

Несмотря на беспорядочные колебания типов $T$, средний тип $T_s$ ведет себя на удивление спокойно (нижняя линия, идет среди точек). Закон роста параметра $T_s$ (*формула Дирихле*) имеет вид:

$$T_s = \ln N + (2 \cdot C - 1) + \varepsilon \ , \qquad (10.3)$$

где $C = 0{,}577...$– постоянная Эйлера–Маскерони, а $\varepsilon \to 0$ при $N \to \infty$.

Число $C$ – это сумма сходящегося ряда: $C = \sum[1/k - \ln(1+1/k)]$ при $k = 1, 2, 3, \ldots, n$; ($n \to \infty$). В 1740 г. Эйлер вывел формулу, позволяющую вычислить число $C$ с любой точностью. Однако арифметическая природа числа $C$ не изучена (рациональное число или нет?).

В конце Большого отрезка (БО) средний тип равен $T_s \approx 140{,}389$.

Относительная погрешность (ОП) формулы Дирихле быстро убывает. Считая $\varepsilon = 0$, я оценил модуль ОП формулы (10.3) следующим выражением: abs(ОП) < $N^{-w}$, где $w = \pi^2/12 \approx 0{,}8225$.

**Миры чисел**. Мы будем говорить, что все натуральные числа с одинаковым типом $T$ образуют мир №$T$. Просто хотя бы потому, что иногда удобнее (разумеется, на вкус автора) говорить именно о *мирах*, а не о типах. Так, все простые числа (с $T = 2$) образуют мир №2; числа с типом $T = 3$ образуют мир №3, и т.д. Миры *возникают* (появляются первый раз в натуральном ряде) далеко не по возрастанию: № 1, 2, 3, 4, 6, 5, 8, 9, 10, 12, 7, 16, 15, 18, 14, 20, 24,….

Все миры можно разделить на две разные группы:

*Редкие* (*нечетные*) *миры*– в них числа $N$ имеют нечетный тип $T$.
*Частые* (*четные*) *миры* – в них числа $N$ имеют четный тип $T$.

Редкие миры образуют числа вида $N = i^2$, где $i$ =1, 2, 3, … . Только у таких чисел $N$ последний малый делитель равен первому большому делителю, поэтому количество больших делителей всегда будет на единицу меньше, чем малых – так возникает нечетный тип $T$. Первые числа из редких миров: $N$ = 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, … . Ясно, что доля таких чисел в натуральном ряде быстро убывает.

**Лидеры миров**. При движении от начала натурального ряда у некоторого числа $N$ впервые появляется тип $T$. Такое число $N$ мы будем называть *лидером* мира $T$. Лидер, можно сказать, “открывает” данный мир $T$. Ясно, что лидеры частых миров (ЛЧМ) и лидеры редких миров (ЛРМ) – это бесконечные ряды чисел, вот первые из них:
ЛЧМ: $N$ = 2, 6, 12, 24, 48, 60, 120, 180, 192, 240, 360, 720, 840, 960, …
ЛРМ: $N$ = 4, 16, 36, 64, 144, 576, 900, 1024, 1296, 3600, 4096, 5184, 9216, …

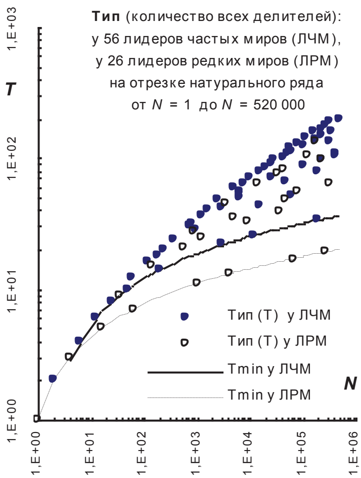

Рис. 10.2. Лидеры 82-х миров

На рис. 10.2 показаны типы ($T$) у лидеров ($N$) первых 82-х миров, появившихся на рабочем отрезке [1; 520000], также см. табл. 10.1 (на стр. 91).

Ранее мне удалось найти на БО (предположительно) все 120000 ЛРМ. А вот ЛЧМ смог найти только на отрезке [1; $10^{32}$ ], их там оказалось 22164. На БО, по моей оценке, около 687430 ЛЧМ, то есть 5,7 раз больше, чем ЛРМ [10, с.58 ÷ 77].

При рассмотрении всего БО любопытно знать какой тип $T$ наиболее вероятен у ЛЧМ и ЛРМ? Вероятно, это тип $T = 10^7 \div 10^9$ у ЛРМ и $T = 10^8 \div 10^9$ у ЛЧМ [10, с. 64, 69].

**Нижние лидеры** в частых мирах – это лидеры *удвоенных миров* (у них тип равен удвоенному простому числу $T$ = 4, 6, 10, 14, 22, 26, 34, ... ). А нижние лидеры в редких мирах – это лидеры *простых миров* (у них тип равен простому числу $T$ = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, …) [10, с.51]. Нижний лидер $N$ в частых и редких имеет следующий вид (соответственно):

$$N = 2^{T/2-1} \cdot 3 \quad \text{и} \quad N = 2^{T-1}. \qquad (10.4)$$

Поэтому нижняя граница «флуктуаций» ЛЧМ и ЛРМ (см. рис. 10.2) определяется выражениями (для частых и редких миров):

$$T_{min} = 2\cdot\ln(N/3)/\ln2 + 2 \quad \text{и} \quad T_{min} = \ln N/\ln2 + 1. \qquad (10.5)$$

Нижняя граница примечательна тем, что с ростом числа $N$ у любого нового ЛЧМ (ЛРМ) его тип $T$ будет никак не меньше $T_{min}$.

К концу БО набирается совсем немного нижних лидеров: в частых мирах – 46 штук ($T_{min}$ = 398), а в редких мирах – 47 штук ($T_{min}$ = 199). Это означает, что на БО в частых мирах появятся *все* (без пропусков!) чётные типы $T$ = 2, 4, 6, …, 398, а в редких мирах – нечётные типы $T$ = 1, 3, 5, …, 199. А все б*о*льшие типы, скажем, в редких мирах будут появляться со средней вероятностью всего лишь ~ $10^{-6}$, поскольку верхняя граница «флуктуаций» ЛРМ к концу БО вырастет до $T_{max} \approx 8\cdot10^{10}$ (см. ниже), а всего появится 120000 нечётных миров.

**Аномальный мир** – это мир №8 (его лидер $N$=24), поскольку $T$=8 – не является удвоенным простым числом, однако первая из формул (10.5) – все равно точно срабатывает (реф.33).

**Верхние лидеры** образуют верхнюю границу «флуктуаций» лидеров, которая хорошо угадывается на рис. 10.2. Можно дать, скажем, и такое определение (отдельно для частых и редких миров): если у лидера $N$ его тип $T$ больше ранее появившихся типов, то такой лидер мы будем называть *верхним лидером*. Таковыми не являются лидеры, указанные мелким шрифтом в приведенных выше рядах ЛЧМ и ЛРМ. Очевидно, что с ростом $N$ верхние лидеры будут встречаться всё реже (на рис.10.2 этого не видно, т.к. шкала логарифмическая). На БО в редких мирах набирается 270 верхних лидера, а в частых мирах, вероятно, около 748 верхних лидеров [10, с.63, 69].

Надо ясно понимать, что старший (наибольший) верхний лидер на отрезке [1; $N$] – это натуральное число, у которого максимальное количество делителей (из всех чисел данного отрезка). Например, у верхнего лидера $N$ = 3600 (см. ряд ЛРМ выше) тип $T$=45 и это значит, что на отрезке [1; 3600] ни одно число (из редких миров), кроме $N$ = 3600, не имеет так много делителей (45 делителей). Таким образом, верхние лидеры – это весьма интересные числа в ГТНЧ.

**Максимально возможный тип** ($T_{max}$) на отрезке [1; $N$]. Беря за основу типы $T$ у верхних лидеров $N$, хотелось бы построить некую линию $T_{max}$ = f($N$), «огибающую» сверху все типы $T$ (точки на рис. 10.2).

Однако далее мы сможем указать лишь т.н. лже-функцию $T_{max} = \varphi(N)$, «вокруг» которой расположены реальные значения $T_{max}$.

***$T_{max}$* в редких мирах**. В табл.10.2 приведены, для примера, три последних (наибольших) на БО верхних лидера $N$ (из 270 предполагаемых) и их типы $T$. *Лже-функция* $T_{max} = \varphi(N)$ будет иметь вид:

$$T_{max} \approx T_s \cdot \exp[a \cdot (\ln N)^b] \,, \tag{10.6}$$

где $T_s$ – средний тип у числа $N$, для которого находим $T_{max}$, причем
$a = 0{,}2465$; $b = 0{,}9028$ и ОП = ± 12% на отрезке $[24; 10^{20}]$;
$a = 0{,}3031$; $b = 0{,}8493$ и ОП = ± 9% на отрезке $[10^{20}; 10^{61}]$.

Таблица 10.2. Три наибольших верхних лидера $\boldsymbol{N}$ на БО в редких мирах

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{N} = 2^{12}\cdot3^4\cdot5^4\cdot7^4\cdot\boldsymbol{M}^2 \approx 3{,}51\cdot10^{60}$ | $\boldsymbol{T} = 69\ 950\ 921\ 625 \approx 7{,}0\cdot10^{10}$ |
| $\boldsymbol{N} = 2^{12}\cdot3^8\cdot5^4\cdot7^2\cdot\boldsymbol{M}^2 \approx 5{,}81\cdot10^{60}$ | $\boldsymbol{T} = 75\ 546\ 995\ 355 \approx 7{,}6\cdot10^{10}$ |
| $\boldsymbol{N} = 2^{10}\cdot3^6\cdot5^4\cdot7^4\cdot\boldsymbol{M}^2 \approx 7{,}91\cdot10^{60}$ | $\boldsymbol{T} = 82\ 864\ 937\ 925 \approx 8{,}3\cdot10^{10}$ |

где $\boldsymbol{M} = 11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29\cdot31\cdot37\cdot41\cdot43\cdot47\cdot53\cdot59\cdot61\cdot67\cdot71$

***$T_{max}$* в частых мирах**. Лже-функция $T_{max} = \varphi(N)$ здесь также выражается формулой (10.6), но уже при других параметрах:
$a = 0{,}2710$; $b = 0{,}9028$ и ОП = ± 9% на отрезке $[24; 10^{20}]$;
$a = 0{,}3197$; $b = 0{,}8588$ и ОП = ± 5% на отрезке $[10^{20}; 10^{61}]$.

В конце БО по формуле (10.6) получаем $T_{max} \approx 6{,}85\cdot10^{11}$, то есть у некоторых гигантских натуральных чисел (состоящих из 61-й цифры, т.к. $N{\sim}10^{61}$) будет порядка $10^{11} \div 10^{12}$ делителей (реф. 39).

В конце БО $T_{max}$ частых миров примерно в 8 раз превосходит $T_{max}$ редких миров и почти на 10 порядков больше среднего типа всех чисел ($T_s \approx 140$). Последний факт можно объяснить единственным образом: *мир чисел отдает явное предпочтение малым типам $T$*, то есть у подавляющего большинства натуральных чисел $N$ количество делителей невелико (реф. 32). Например, *простых чисел* ($T$=2) на БО около $7\cdot10^{58}$, что составляет примерно 0,7%. И это весьма солидная доля, ведь в среднем на один мир должно приходиться $10^{61}/807430 \approx 1{,}2\cdot10^{55}$ чисел или 0,00012% от всех чисел БО.

Таблица 10.1. **Спектр миров** на отрезке [1; 520000]

56 частых миров из отрезка [1; 520000]

| *T* | *N* | *K* | *K*, % | *sum* |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 24 | 116650 | 22,464 | 22,464 |
| 4 | 6 | 112317 | 21,629 | 44,093 |
| 16 | 120 | 63546 | 12,237 | 56,331 |
| 12 | 60 | 48826 | 9,403 | 65,733 |
| 2 | 2 | 43061 | 8,292 | 74,026 |
| 24 | 360 | 34897 | 6,720 | 80,746 |
| 6 | 12 | 24374 | 4,694 | 85,440 |
| 32 | 840 | 19124 | 3,683 | 89,123 |
| 48 | 2520 | 11017 | 2,122 | 91,244 |
| 20 | 240 | 7976 | 1,536 | 92,780 |
| 36 | 1260 | 6515 | 1,255 | 94,035 |
| 18 | 180 | 5216 | 1,004 | 95,039 |
| 10 | 48 | 4532 | 0,873 | 95,912 |
| 40 | 1680 | 4525 | 0,871 | 96,783 |
| 64 | 7560 | 2856 | 0,550 | 97,333 |
| 72 | 10080 | 2232 | 0,430 | 97,763 |
| 28 | 960 | 1775 | 0,342 | 98,105 |
| 30 | 720 | 1577 | 0,304 | 98,409 |
| 60 | 5040 | 1450 | 0,279 | 98,688 |
| 96 | 27720 | 1274 | 0,245 | 98,933 |
| 14 | 192 | 1160 | 0,223 | 99,157 |
| 80 | 15120 | 936 | 0,180 | 99,337 |
| 56 | 6720 | 798 | 0,154 | 99,491 |
| 54 | 6300 | 492 | 0,095 | 99,585 |
| 42 | 2880 | 374 | 0,072 | 99,657 |
| 120 | 55440 | 248 | 0,048 | 99,705 |
| 84 | 20160 | 242 | 0,047 | 99,752 |
| 108 | 50400 | 184 | 0,035 | 99,787 |
| 90 | 25200 | 140 | 0,027 | 99,814 |
| 144 | 110880 | 140 | 0,027 | 99,841 |
| 128 | 83160 | 130 | 0,025 | 99,866 |
| 50 | 6480 | 100 | 0,019 | 99,885 |
| 44 | 15360 | 99 | 0,019 | 99,904 |
| 22 | 3072 | 98 | 0,019 | 99,923 |
| 112 | 60480 | 98 | 0,019 | 99,942 |
| 100 | 45360 | 54 | 0,010 | 99,953 |
| 70 | 25920 | 41 | 0,008 | 99,961 |
| 26 | 12288 | 29 | 0,006 | 99,966 |
| 160 | 166320 | 28 | 0,005 | 99,971 |
| 66 | 46080 | 25 | 0,005 | 99,976 |
| 52 | 61440 | 22 | 0,004 | 99,981 |
| 88 | 107520 | 22 | 0,004 | 99,985 |

26 редких миров из отрезка [1; 520000]

| *T* | *N* | *K* | *K*, % | *sum* |
|---|---|---|---|---|
| 36 | 9 | 213 | 29,542 | 29,542 |
| 4 | 3 | 128 | 17,753 | 47,295 |
| 900 | 27 | 110 | 15,257 | 62,552 |
| 144 | 15 | 81 | 11,234 | 73,786 |
| 3600 | 45 | 55 | 7,628 | 81,415 |
| 576 | 21 | 34 | 4,716 | 86,130 |
| 14400 | 63 | 19 | 2,635 | 88,766 |
| 44100 | 81 | 14 | 1,942 | 90,707 |
| 32400 | 75 | 10 | 1,387 | 92,094 |
| 16 | 5 | 9 | 1,248 | 93,343 |
| 9216 | 33 | 8 | 1,110 | 94,452 |
| 1296 | 25 | 7 | 0,971 | 95,423 |
| 5184 | 35 | 6 | 0,832 | 96,255 |
| 64 | 7 | 4 | 0,555 | 96,810 |
| 36864 | 39 | 4 | 0,555 | 97,365 |
| 129600 | 105 | 4 | 0,555 | 97,920 |
| 176400 | 135 | 4 | 0,555 | 98,474 |
| 1024 | 11 | 2 | 0,277 | 98,752 |
| 230400 | 99 | 2 | 0,277 | 99,029 |
| 1 | 1 | 1 | 0,139 | 99,168 |
| 4096 | 13 | 1 | 0,139 | 99,307 |
| 65536 | 17 | 1 | 0,139 | 99,445 |
| 262144 | 19 | 1 | 0,139 | 99,584 |
| 46656 | 49 | 1 | 0,139 | 99,723 |
| 82944 | 55 | 1 | 0,139 | 99,861 |
| 331776 | 65 | 1 | 0,139 | 100,000 |

56 частых миров (продолжение)

| *T* | *N* | *K* | *K*, % | *sum* |
|---|---|---|---|---|
| 126 | 100800 | 18 | 0,003 | 99,988 |
| 168 | 221760 | 13 | 0,003 | 99,991 |
| 192 | 332640 | 9 | 0,002 | 99,992 |
| 140 | 181440 | 8 | 0,002 | 99,994 |
| 180 | 277200 | 8 | 0,002 | 99,996 |
| 78 | 184320 | 5 | 0,001 | 99,997 |
| 150 | 226800 | 4 | 0,001 | 99,997 |
| 34 | 196608 | 3 | 0,001 | 99,998 |
| 98 | 233280 | 3 | 0,001 | 99,998 |
| 162 | 352800 | 3 | 0,001 | 99,999 |
| 132 | 322560 | 2 | 0,000 | 99,999 |
| 104 | 430080 | 1 | 0,000 | 100,000 |
| 110 | 414720 | 1 | 0,000 | 100,000 |
| 200 | 498960 | 1 | 0,000 | 100,000 |

Принятые обозначения:
*T* – номер мира и количество всех делителей у любого натурального числа из мира *T*,
*N* – лидер мира, т.е. первое натуральное число, “открывающее” данный мир *T*,
*K* – количество всех натуральных чисел из данного мира *T* на отрезке [1; 520000],
*sum* – количество всех чисел (в %) нарастающим итогом по рассмотренным мирам.

**Спектр миров** – это картина распределения всех миров ($T$) по количеству ($K$) чисел, в них содержащихся (на данном отрезке). Так, спектр миров отрезка [1; 520000] можно представить в графическом виде (рис. 10.3), или в виде таблицы 10.1. Графика наглядно показывает, что с ростом типа $T$ максимально возможные количества ($K_{max}$) чисел в данных мирах экспоненциально убывают. А из табл. 10.1 хорошо видно, что *семь* самых «густонаселенных» миров содержат 85,44% (88,77 %) всех чисел рабочего отрезка (реф. 45).

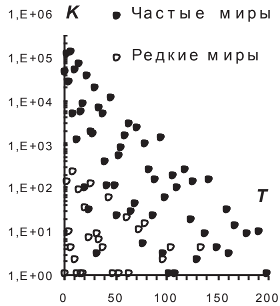


Рис.10.3. Спектр миров

**Миры-фантомы**. Нетрудно убедиться, что на отрезке [1; 360] не появляются миры № 11, 13, 17, 19, 21, 22, 23 – это *миры-фантомы*. Ясно, что при увеличении правой границы отрезка ($N > 360$) миры-фантомы рано или поздно появятся, перестав быть таковыми (фантомами станут другие миры). Ведь номера *всех* миров (типы чисел) образуют бесконечный натуральный ряд.

На произвольном отрезке [1; $N$] количество миров-фантомов $K_ф$ (как в частых, так и в редких мирах) устремляется к значению максимально возможного типа $T_{max}$ (в соответствующих мирах). Разумеется, всегда будет выполняться условие: $K_ф < T_{max}$ [14, с.20].

## 11. ПИРАМИДА ДЕЛИТЕЛЕЙ

**Пирамида делителей** натуральных чисел (рис. 11.1) – это весьма полезное «наглядное пособие» ГТНЧ. Ниже приводится алгоритм построения Пирамиды (который, фактически, всё и проясняет):

1). Строим *натуральный столбец* – клетки с числами: $N$ =1, 2, 3, …, 50, …, которые также являются и *номерами строк* Пирамиды. Второе название любой клетки – *камень* Пирамиды. Число $N$ – это *высота* Пирамиды (от 1 до бесконечности!).

2) Справа от натурального столбца ($N$) поместим другие столбцы. Начало $J$–го столбца – в строке с тем же номером: $J$ = 1, 2, 3, … (на рис.11.1 только 10 столбцов, остальные – «обрезаем» из экономии).

3). В каждом ($J$–ом) столбце закрасим серым цветом все клетки, начиная со строки с номером $N$=$J^2$. Все серые клетки образуют *Ствол*

Пирамиды. Ствол имеет *ступени*, которые начинаются с чисел $N = J^2$ , где $i$ =1, 2, 3, … – это *номер ступени* Ствола.

4). В каждом ($J$–ом) столбце закрасим черным цветом клетки, идущие с шагом $J$. Причем, чёрные клетки «заслоняют» серые (при их совпадении). Во всех черных клетках указываем номер столбца ($J$), т.е. каждый камень имеет *массу*, равную $J$ (у белых и серых камней эту массу также подразумеваем, хотя и не пишем в клетках).

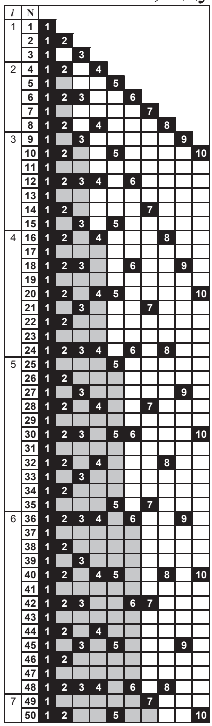

Рис. 11.1. Пирамида

**Законы Пирамиды**. Пирамида позволяет легко осознать и сформулировать весьма интересные выводы – *законы Пирамиды*. Ниже, в качестве примера, приводятся основные из них:

• Все делители числа $N$ – это все черные камни в $N$-ой строке (т.е. находим их без всякого деления).

• Количество *малых делителей* у числа $N$ не превосходит номера ступени Ствола ($i$), на которой число $N$ находится. Причем, $i$=A($\sqrt{N}$), где А – функция “*антье*” (целая часть от корня квадратного $\sqrt{N}$ ).

• Тип числа $N$ равен $T$=2·$t$, если $\sqrt{N}$ – не целое число, иначе $T$=2·$t$–1, где $t$ – количество малых делителей у $N$. Числа $N$ из редких миров (с нечетным $T$) – это первое число каждой $i$-й ступени Ствола.

• Формирование типа $T$ у любого числа $N$ – это *псевдослучайный процесс* (только похожий на случайный). Тип любого числа строго предопределен (детерминирован) алгоритмом построения Пирамиды, который исключает всякую случайность. Мы не можем *предсказать* тип произвольного числа, скажем, порядка $N$~$10^{61}$, но в этом – только слабость *человеческого* разума, не способного представить (нарисовать) *такую* Пирамиду (реф. 27).

• На Большом отрезке (БО) количество всех камней (белых, серых, чёрных) в Пирамиде равно $K = (1+N)\cdot N/2 \sim 0{,}5\cdot(10^{61})^2 = 0{,}5\cdot 10^{122}$.

• На БО количество всех камней (серых и чёрных) в Стволе будет равно $k \sim (2/3)\cdot N^{3/2} \sim 10^{92}$ (параметры Ствола и впредь будем обозначать строчными буквами, а у Пирамиды – прописными).

• В Стволе общая масса черных камней *(m*)* равна количеству (*k*) всех его камней, то есть $m^* \sim (2/3)\cdot N^{3/2}$ («звездочка» * будет указывать нам, что речь идет о черных камнях). Общая масса черных камней в Стволе – это сумма всех малых делителей.

• Для Пирамиды высотой $N\to\infty$ имеем: $K/M^* \sim 6/\pi^2 = 0{,}6079...$, где $K$ – количества всех камней, $M^*$ – масса всех черных камней (сумма делителей у всех чисел Пирамиды высотой $N$). Возможно, что определение числа $\pi$ (важнейшей ФМК) в терминах Пирамиды (через $K$, $M^*$ и $N$) является наиболее глубоким (§20), [10, с.22, 89].

О законах Пирамиды много сказано в [10, с.17] и в [14, с.20].

**Уровни сложности** числа $N$**.** Каноническое разложение числа, скажем, $N = 20 = 2^2\cdot5^1 = 1\cdot2\cdot2\cdot5$ – это фундаментальный (самый глубокий) уровень его рассмотрения. Высочайшая степень сложности "организации" натурального ряда на фундаментальном уровне проявляется в колоссальных проблемах при построении Пирамиды базиса (§9). Заметим также, что большинство главных формул теории чисел обращаются именно к каноническому разложению.

А вот все делители того же числа $N = 20$ (малые $d = 1, 2, 4$ и большие $D = 5, 10, 20$) – это уже, как бы, второй уровень рассмотрения числа $N$ (ведь его делители – это лишь всевозможные сочетания, вытекающие из канонического представления $N$). Здесь всё гораздо проще, а Пирамида делителей даже удивляет своим бесхитростным алгоритмом построения (реф. 4, 28).

## 12. ЛИДЕРЫ МИРОВ СТЕДВА

**Миры ст*е*два** (миры "степени два") – так мы будем называть миры с номером $T = 2^n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ – порядковый номер мира ст*е*два. Приведем первые миры ст*е*два: $T = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, \ldots$ . Миры стедва – одни из самых «густонаселенных»; так, на отрезке [1; 1800000] до 68,78% всех чисел принадлежит мирам стедва (на б*о*льших отрезках эта доля, вероятно, будет медленно уменьшаться). При удалении правой границы отрезка [1; $N$] спектр всех миров (скажем, график их долей) будет непрерывно изменяться, «перестраиваться», однако, *максимальная доля*, очевидно, всегда будет принадлежать одному из миров стедва.

**Лидеры стедва** – это числа $N_n = 2, 6, 24, 120, 840, 7560, 83160, 1081080, \ldots$, с которых начинается $n$-й мир стедва ($T = 2^n$). Каноническое разложение любого числа $N$ из любого мира стедва будет содержать показатели степени вида $2^n–1$, т.е. числа: 1, 3, 7, 15, 31, …. (самые большие из найденных простых чисел имеют вид $a \cdot 2^n \pm 1$). Этот факт позволяет найти лидеры стедва в принципе на любом отрезке натурального ряда. Например, нетрудно найти все лидеры стедва на БО, конец которого находится между двумя лидерами:

$N_{39}=2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11^3 \cdot 13^1 \cdot \ldots \cdot 131^1 \approx 3{,}64 \cdot 10^{60}$ ($T=2^{39}=$ 549 755 813 888),

$N_{40}=2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11^3 \cdot 13^1 \cdot \ldots \cdot 137^1 \approx 4{,}98 \cdot 10^{62}$ ($T=2^{40}=$1 099 511 627 776).

Запись $13^1 \cdot \ldots \cdot 131^1$ означает, что перемножаются все простые числа с $P_6=13$ до $P_{33}=131$ (с 6-го по 33-е простое число, все в степени 1).

Оказывается, что первые 17-ть лидеров стедва ($N_1$, $N_2$, $N_3$, …, $N_{17}$) – это суть *верхние лидеры* частых миров. Но вот уже 18-й лидер стедва ($N_{18} = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^1 \cdot \ldots \cdot 41^1 \approx 1{,}88 \cdot 10^{20}$) не является верхним лидером. При $18 \le n \le 40$ для каждого $n$-го лидера стедва ($N_n$) можно указать, например, число $N^* \approx \lambda \cdot N_n$ (меньшее, чем $N_n$, поскольку $\lambda = 0{,}698 \div 0{,}977$), у которого $T^* = 1{,}0546875 \cdot 2^n$ (больше, чем у лидера стедва). Если брать $\lambda = 0{,}000073 \cdot (\ln N_n)^2 - 0{,}0154 \cdot \ln N_n + 1{,}5249$, то получим число $N^*$ с точностью ОП = ± 6%. Возможно, около лидера стедва есть некие числа $N^{**}$ с ещё бóльшим типом, чем $T^*$.

Итак, при $N \ge 10^{20}$ (сразу за пределами т.н. *малого отрезка*, см.§6) в мирах стедва тип $T$ меньше, чем у верхних лидеров. К концу БО эта разница может достигать, вероятно, 10%. Последние верхние лидеры (?) на БО могут быть, скажем, такими:

$N = 2^9 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^1 \cdot \ldots \cdot 137^1 \approx 2{,}88 \cdot 10^{60}$ ($T =$ 579 820 584 960),

$N = 2^9 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^1 \cdot \ldots \cdot 139^1 \approx 4{,}00 \cdot 10^{62}$ ($T =$ 1 159 641 169 920).

В итоге мы приходим к очень важному в ГТНЧ выводу: в конце БО ($N \equiv 8 \cdot 10^{60}$) максимально возможное количество делителей у натуральных чисел будет равно $\boldsymbol{T_{max} \approx 7 \cdot 10^{11}}$ (реф. 39).

**Лже-функция**. Можно ли описать формулой рост максимально возможного типа $T_{max}$ при удалением правой границы отрезка $[1; N]$? Оказывается, ещё Вигерт [35, с. 85] впервые доказал, что

$$T_{max} \sim T_B \equiv 2^W, \quad \text{где } W = \frac{\log N}{\log \log N}\ . \tag{12.1}$$

Если основание логарифма считать равным $a = e \equiv 2{,}718\ldots$, то в конце БО отношение реального $T_{max}$ к значению $T_B$, полученному по формуле Вигерта, превысит 2000 раз (продолжая расти и в дальнейшем?). Если считать $a = 53$ (это правомочно?), то при $N \ge 60$ и до конца БО будем иметь $T_{max} < T_B$, причем модуль ОП у $T_B$ *медленно* убывает от 100% до 4% по такому закону: $\text{abs(ОП)} \approx 1{,}1568 \cdot N^{-0,02}$.

Таким образом, на БО формула Вигерта (12.1) не пригодна с точки зрения ГТНЧ (для «обслуживания» её рефлекций). Поэтому в рамках ГТНЧ предлагается и такая *лже-функция* (также см. §10):

$$T_{max} \approx \exp[a \cdot (\ln N)^b], \tag{12.2}$$

где $a = 0{,}9304$, $b = 0{,}6776$ при $N \leq 10^{20}$;

$a = 0{,}8200$, $b = 0{,}7083$ при $N > 10^{20}$, что дает нам ОП = ±10%.

Указанная лже-функция будет часто появляться в ГТНЧ при описании динамики того или иного параметра в первом приближении (как правило, на рабочих отрезках с правой границей $N \leq 10^{17}$). Например, можно считать, что лже-функция с выше указанными $a$ и $b$ также описывает (с ОП = ±10%) миры стедва: связь между их номерами ($T = 2^n$) и лидерами $N_n$ (правда, при $N_n > 10^{20}$ следует брать $a = 0{,}8157$). Однако всю зыбкость лже-функции разоблачает истинная связь между $T$ и $N_n$ в мирах стедва, о которой говорится ниже.

**Эпохи стедва** – это отрезки натурального ряда, в пределах которых параметры $T$ и $N_n$ в мирах стедва связанны одинаковым образом. На БО можно выделить 8 эпох стедва, каждая из них начинается с числа $N_n$, указаного в табл. 12.1. Пояснения к этой таблице:
*Э* – номер эпохи стедва (внутри неё номера $n$ растут с шагом 1);
$n$ – номер мира стедва ($T=2^n$), с которого начинается данная эпоха;
$N_n$ – $n$-й лидер стедва, который «открывает» данную эпоху *Э*;
$k$ – порядковый номер последнего простого числа $P_k$ в факторизации $N_n = P_1^{a1} \cdot P_2^{a2} \cdot \ldots \cdot P_k^{ak}$. В каждой эпохе $k = n - Э + 1$, где $Э = const$;
$P_1, P_2, \ldots, P_k$ – простые числа, а под ними – «их» показатели степени $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (за первой единицей вплоть до $P_k$ идут только единицы).

Например, 8-я эпоха ($Э = 8$; $k = 30$; $P_{30} = 113$) начинается с 37-го лидера стедва, равного $N_{37} = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11^3 \cdot 13^1 \cdot \ldots \cdot 113^1 \approx 2{,}19 \cdot 10^{56}$.

Табл. 12.1 устанавливает *строгое* (однозначное) соответствие на БО между *всеми* лидерами стедва $N_n$ и их номерами $n$ (между $T$ и $N_n$, поскольку $T = 2^n$). А теперь эту *дискретную* таблицу попробуйте «вложить» в некую формулу $T = \varphi(N_n)$, единую для всего БО!

Очевидно, после сказанного становится ясно, что *лже-функция* – это всего лишь «бледная тень» реально существующих взаимосвязей в мире чисел. И всё-таки, неужели, у верхних лидеров частых миров связь между $T_{max}$ и $N$ нельзя описать точнее, чем это сделал Вигерт, доказав формулу (12.1)?

Таблица 12.1. Параметры первых восьми эпох стедва (весь БО)

| **Э** | ***n*** | ***k*** | $N_n$ | $P_1 = 2$ | $P_2 = 3$ | $P_3 = 5$ | $P_4 = 7$ | $P_5 = 11$ | $P_6 = 13$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 3 | 2 | 24 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 6 | 4 | 7560 | 3 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 9 | 6 | $1{,}73\cdot10^{7}$ | 7 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 13 | 9 | $3{,}21\cdot10^{12}$ | 7 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 20 | 15 | $4{,}34\cdot10^{23}$ | 7 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 |
| 7 | 28 | 22 | $1{,}84\cdot10^{38}$ | 7 | 7 | 3 | 3 | 1 | 1 |
| 8 | 37 | 30 | $2{,}19\cdot10^{56}$ | 7 | 7 | 3 | 3 | 3 | 1 |

# 13. НОРМАЛЬНЫЙ ТИП ЧИСЕЛ

**Нормальный тип** ($T_н$) – это тип, который имеют большинство натуральных чисел на данном интервале (об интервалах поговорим ниже). Иначе говоря, $T_н$ – это количество делителей у большинства чисел данного интервала. Впервые этим вопросом заинтересовались, вероятно, Харди и Рамануджан [35, с. 82]. В итоге они нашли примерную оценку нормального типа у произвольного числа $N>1$:

$$T_н \sim 2^{\ln\ln N} \equiv (\ln N)^{\ln 2} \equiv (\ln N)^{0{,}6931\ldots}. \qquad (13.1)$$

В том факте, что нормальный тип числа $N$ намного меньше своего среднего типа ($T_н < T_s$, см. формулу Дирихле (10.3)), нет ничего удивительного. Подобный эффект достигается благодаря верхним лидерам (у которых $T_{max}$) и другим пусть редким числам $N$, но тип которых также очень большой. Судя по всему, нормальный тип – это всегда тот или иной мир ст*е*два, поэтому к ним и обратимся.

**Динамика миров стедва**. Пусть на отрезке [1; $N$] соседние миры стедва ($T/2$ и $T$) имеют соответственно $K_{T/2}$ и $K_T$ чисел, тогда:

$$Q_T \equiv K_T/K_{T/2} \approx A\cdot\ln\ln N - B, \qquad (13.2)$$

где аргумент $N$ «стартует» с лидера $N_n$ рассматриваемого мира $T = 2^n$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ – порядковый номер мира ст*е*два; параметры $A$ и $B$ – почти константы мира $T$ (на достаточно большом отрезке). Исследования показывают, что во всех мирах стедва параметр $Q_T$ начинает рост со значений меньших единицы, но потом $Q_T$ неизбежно достигает единицы и продолжает далее свой бесконечный рост.

Например (см. табл. 13.1), у мира №4 сначала $Q_4 < 1$ (преобладает доля чисел из мира №2), но после $N_p = 27$ (*точка паритета* миров №2 и №4) параметр $Q_4 > 1$ и продолжает расти дальше (преобладает доля чисел из мира №4). Однако после $N_p \approx 245000$ (точка паритета миров №4 и №8, после которой $Q_8 > 1$) мир №4 "передает" лидерство миру №8 (которое закончится при $N \approx 7{,}5 \cdot 10^{15}$). Для мира №4 при $N = 10^2 \div 3 \cdot 10^6$ имеем: $Q_4 \equiv K_4/K_2 \approx 1{,}2772 \cdot \ln\ln N - 0{,}6856$. В конце БО по формуле (13.2) получаем $Q_4 \approx 5{,}63$, т.е. доля мира №4 соответствует 4,0%, что близко к оценке найденной иным путем (3,4%, см. §16).

Таблица 13.1. Параметры изменения доли чисел из мира $T$ на БО

| $T$ | $N_n$ | $A$ | $B$ | $D_{БО}$ | $N_p$ (*эви*) | $N_p$ (м) | «Расшифровка» $N_p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 6 | 1,2772 | 0,6856 | 3,4% | $2{,}7 \cdot 10^1$ | $4{,}3 \cdot 10^{-34}$ | «Пена» пространства-ремени |
| 8 | 24 | 0,6531 | 0,6447 | 8,2% | $2{,}4 \cdot 10^5$ | $3{,}9 \cdot 10^{-30}$ | |
| 16 | 120 | 0,4452 | 0,6024 | 12,3% | $7{,}5 \cdot 10^{15}$ | $1{,}2 \cdot 10^{-19}$ | Кварки, лептоны |
| 32 | 840 | 0,3866 | 0,6952 | 15,1% | $7{,}0 \cdot 10^{34}$ | $1{,}1 \cdot 10^0$ | Человек (жизнь) |
| 64 | 7560 | 0,3711 | 0,8068 | 15,5% | $2{,}9 \cdot 10^{56}$ | $4{,}6 \cdot 10^{21}$ | Галактики |
| 128 | 83160 | 0,3358 | 0,8212 | 12,9% | $3{,}0 \cdot 10^{98}$ | $4{,}8 \cdot 10^{63}$ | Больше Вселенной |

Поясним табл. 13.1 [результаты расчетов по формуле (13.2)]:
$N_n$ – лидер мира $T = 2^n$ (где $n$ – порядковый номер мира стедва);
$A$ и $B$ – константы мира стедва $T$, используемые в формуле (13.2);
$D_{БО}$ – доля чисел из мира $T$ в конце БО, причем для миров $T \geq 16$ она уменьшена на 0,79% от значения, полученного по формуле (13.2);
$N_p$ – точка паритета мира $T$, т.е. после числа $N_p$ начинает преобладать мир $T$ (до этого преобладал мир $T/2$). Число $N_p$ «переведено» в метры и указан объект, наиболее характерный для данного масштаба.

Подставляя в формулу (13.1) шесть значений $N_p$ из табл.13.1 (разумеется, в *эви*), мы получим шесть нормальных типов: $T_н = 2, 6, 12, 21, 29, 43$, которые близки к шести первым мирам стедва $T = 2, 4, 8, 16, 32, 64$. Таким образом, именно миры стедва $T$, указанные в табл. 13.1, могут являться *нормальными* типами на интервалах, «нарезаемых» точками паритета $N_p$: $T_н = 2$ на интервале [1; 27); $T_н = 4$ на интервале $[27; 2{,}4 \cdot 10^5)$; $T_н = 8$ на интервале $[2{,}4 \cdot 10^5; 7{,}5 \cdot 10^{15})$; …; $T_н = 64$ на интервале $[2{,}9 \cdot 10^{56}; 3{,}0 \cdot 10^{98})$ (в том числе и в конце БО). Заметим, что если реальные значения $N_p$ и отличаются от указанных, то сами рассуждения на этот раз гораздо ближе к истине. Ведь раньше (см. [10, с. 47]) я полагал, что мир №8 будет лидировать «вечно», и это, увы, оказалось одним из досадных заблуждений, которые, очевидно, неизбежны при подобного рода «научных» изысканиях.

## 14. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Едва начав повествование о мире чисел мы уже несколько раз обратились к логарифмической функции $y = \ln x$ (с основанием равным $e \equiv 2{,}718\ldots$). И это не случайно, поэтому рассмотрим эту функцию более пристально и довольно необычным образом (что заметно даже в наших дальнейших обозначениях: $y = t$ и $x = N$).

**Главная особенность** логарифмической функции $t = \ln N$ заключается в том, что обратная к ней экспоненциальная функция (или просто – *экспонента*) $N = e^t \equiv \exp(t)$ – наиболее "популярна" во всех естественных науках. Нехитрая на вид формула $N = a\cdot\exp(b\cdot t)$ описывает наиболее "любимый" природой экспоненциальный рост или убывание самых разных величин [10, с.86]. Очевидно, экспонента есть прямое следствие того, что величина $N$ изменяется независимым образом, *случайно*, т.к. скорость её изменения (производная $dN/dt$) пропорциональна только самой величине $N$ в рассматриваемое мгновение ($dN/dt = b\cdot N$ – это просто математическое свойство экспоненты). Таким образом, ярко выраженная «любовь» природы к экспоненте свидетельствует о том, что миром правит Его Величество Случай (кругом – вероятностные законы, см. реф.26).

Хотя структура натурального ряда *исключает всякую случайность* (делители всех чисел словно "зацементированы" в Пирамиде, см. рис. 11.1), но при этом и в мире чисел мы также сплошь и рядом встречаемся с экспонентой (логарифмической функцией).

**Единица меняет семантику**. Площадь $F$ под логарифмической кривой (между "жирной" линией и осью абсцисс, см. рис. 14.1) в ГТНЧ можно наделить неким смыслом (семантикой), поскольку интеграл логарифмической функции равен $F = N\cdot(\ln N - 1)$. Так, если взять отрезок $1 \leq N \leq K_P$, где $K_P$ – количество *простых чисел* на Большом отрезке (БО), то площадь $F$ численно близка к правой границе БО (чуть меньше неё):

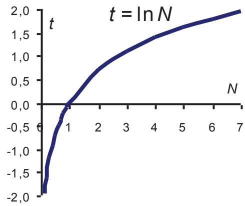


Рис. 14.1. Функция $t = \ln N$

$F = K_P \cdot (\ln K_P - 1)$ [сравните с формулой (9.4)]. То есть справа от единицы площадь $F$ “обозначает” правую границу отрезка, на котором находится данное количество простых чисел.

А вот слева от единицы (скажем, когда мы берем *аликвотные дроби* $1/N$, см. §7) смысл площади $F$ меняется, вероятно, на обратный: здесь $F$ «обозначает» количество простых чисел, которые соответствуют данной левой границы отрезка. Причем согласиться с этим уже гораздо труднее (ибо «мешают» знаки «–» и степени «–1»): $F = -(N/\ln N)^{-1} - N^{-1}$. Но, в любом случае, слева от единицы происходит некая *инверсия семантики* (смена смысла) площади $F$.

**«Сжатие»** – это одна из особенностей логарифмической функции $t = \ln N$, которая как бы «спрессовывает» натуральный аргумент $N$ (по оси абсцисс) в действительные числа $t$ (по оси ординат), располагая их всё ближе и ближе друг к другу (с ростом $N$, см. рис. 14.1). Рассмотрим процесс такого “сжатия” более детально.

Функция $t = \ln N$ отображает отрезок $[1; N]$ натурального ряда (по оси абсцисс) в отрезок $[0; \ln N]$ действительных чисел (по оси ординат). Разобьем отрезок $[1; N]$ на $K$ интервалов *одинаковой* длины $[1; N_1]$, $(N_1; N_2]$, $(N_2; N_3]$, …, $(N_{k-1}; N_k]$, …, $(N_{K-1}; N_K]$, где $N_k = k \cdot S$ – это правая граница $k$-го интервала ($k = 1, 2, 3, \ldots, K$), а $S$ – количество чисел на каждом интервале (шаг разбиения по оси абсцисс, $S = N/K$). При указанном разбиении функция $t = \ln N$ «нарезает» ось ординат на $K$ интервалов $(\ln N_{k-1}; \ln N_k]$, которые будут иметь *разную* длину. Длина 1-го интервала равна $\Delta_1 = \ln N_1 - \ln 1 = \ln S$. Длина других интервалов определяется по формуле $\Delta_k = \ln N_k - \ln N_{k-1} = \ln(N_k / N_{k-1}) = \ln[k/(k-1)] = -\ln(1-1/k)$. Суммируя длины всех интервалов, мы получим: $\sum\Delta \equiv \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots + \Delta_K = \ln N_K = \ln N$. А теперь мы логически «свяжем» между собой оба разбиения (по оси абсцисс и по оси ординат): поскольку сумма $\sum\Delta$ – *эквивалентна* отрезку $[1; N]$ длиной $N$, то $k$-й интервал ($\Delta_k$) будет эквивалентен отрезку длинной $L_k = (\Delta_k/\sum\Delta) \cdot N$. То есть для 1-го и $k$-го интервала ($k \geq 2$) можно записать:

$$L_1 = \ln S \cdot N/\ln N, \qquad L_k = (\Delta_k/\textstyle\sum\Delta) \cdot N = -\ln(1-1/k) \cdot N/\ln N\,. \tag{14.1}$$

Заметим, что отношение $N/\ln N$ – символизирует количество *простых чисел* на отрезке $[1; N]$ (см. §9). Для последнего ($K$-го) интервала по формуле (1) мы получим $L_K = -\ln(1 - S/N) \cdot N/\ln N$. Таким образом, по оси ординат 1-й интервал будет длиннее последнего в следующее количество раз (второе выражение – только для БО):

$$L_1/L_K = -\ln S/\ln(1 - S/N) \approx 3{,}33\cdot 10^{62}\cdot S^{-0{,}9912}. \qquad (14.2)$$

Чтобы лучше прочувствовать возможности функция $t = \ln N$ в части «сжатия» натурального ряда $N$ (дискретного и «равномерно текущего» по оси абсцисс), мы отождествим значения этой функции по оси ординат (т.е. значения $t$) с понятием… *время* (одна из великих загадок физики! см. реф.15). Тогда формула (14.2) говорит о том, что, скажем, первый год в биографии Вселенной ($S \approx 5{,}84\cdot 10^{50}$ *эви*) длился в $L_1/L_K \approx 10^{12}$ раз дольше, чем один "наш" год (в конце БО).

Аналогично этому первая секунда ($S \approx 1{,}85\cdot 10^{43}$ *эви*) после Большого взрыва длилась в $L_1/L_K \sim 10^{19}$ раз дольше, чем одна секунда в настоящее время. Короче говоря, если планковское время (1 *эви*) считать неким "кадром" гипотетической кинопленки, то скорость её прокрутки (в "кино" под названием "Эволюция Вселенной") непрерывно увеличивается.

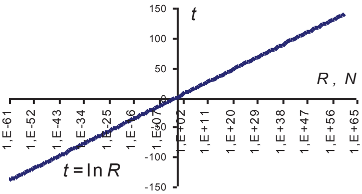


Рис. 14.2. Логарифмическая функция

«**Равноправие**» натуральных чисел ($N$) и обратных к ним чисел ($R = 1/N$) – это ещё одна любопытная особенность, которую нам демонстрирует логарифмическая функция (значения $t = \ln N$ и $t = \ln R$ будут отличаться только знаком). "Равноправие" наглядно видно, когда числа $R$ и $N$ (по оси абсцисс) мы рассматриваем в логарифмической шкале (сравните рис. 14.1 и рис. 14.2). При этом ось ординат ($t$) служит как бы осью симметрии, проходящей через точку $N = 1$. График на рис. 14.2 убеждает нас в том, что существуют два бесконечно больших мира чисел ($R$ и $N$), которые соединяет число $N$=1 (горловина?) (реф. 30, 42).

## 15. ФУНКЦИЯ БАЗИСА

**Функция базиса**. Один из главных законов *теории чисел* имеет вид $K \sim N/\ln N$, где $K$ – это количество *простых чисел* на отрезке [1; $N$], т.е. $K$ указывает (приблизительно) на порядковый номер простого числа, ближайшего к $N$. Поскольку простые числа являются *базисом* натуральных чисел (§9), то выражение $K = N/\ln N$ мы будем называть *функцией базиса*. Рассмотрим поведение этой функции, считая, что $N$

– это любое положительное действительное число (а не только натуральные 1, 2, 3, …, как в *теории чисел*).

При $N = e \equiv 2{,}718\ldots$ функция базиса имеет наименьшее из возможных положительных значений: $K_{min} = e \equiv 2{,}718\ldots$ .

При $N > e$ функция базиса растет, причем относительно медленно и в предельно упрощенном (грубом) виде этот рост можно описать выражением $K \approx a{\cdot}N^b$, где $a = 0{,}8784$, $b = 0{,}7913$, что при $N \leq 10^7$ обеспечивает ОП = ± 40%; и $a = 0{,}065$, $b = 0{,}983$, что при $N > 10^7$ обеспечивает ОП = ± 30% вплоть до конца Большого отрезка (БО).

При $N < e$, по мере приближения аргумента $N$ к единице ($1 \leftarrow N$), значение $K$ катастрофически быстро устремляется к бесконечности ($+\infty$). Можно сказать, что справа от единицы происходит своеобразный *взрыв* функции базиса, который мы выразим формулой:

$$K \approx (N - 1)^{-1}. \tag{15.1}$$

При $N \approx 1 + 0{,}1754{\cdot}10^{-58}$ (т.е. $N$ почти равно единице) по формуле (15.1) получаем $K \approx 5{,}7{\cdot}10^{58}$, причем столь же огромный номер $K$ мы имеем и в конце БО (при подстановке в функцию базиса значения $N = 8{\cdot}10^{60}$). Т.е. мы приходим к парадоксальному утверждению: порядковый номер ($K$) первого простого числа $N$=1 устремляется к… бесконечности ($+\infty$)! Хотя $N$=1 *не принято* считать простым числом, в данном случае мы будем считать, что 1 – особенное простое число (иногда так поступают [35, с. 69]): для функции базиса число $N$=1 является так называемой *точкой разрыва* (реф. 30, 41, 42).

При $0 < N < 1$ числа $N$ – это суть *обратные числа* $R$ (§7), поэтому для обозначения действительных чисел на интервале (0; 1) мы будем использовать символ $R$ (в функции базиса): $K \sim R/\ln R$.

При $R \to 0$ функция базиса устремляется к нулю (слева), поскольку $R/\ln R \to 0/(-\infty) \to -0$. Причем нуль остается не достижимым.

С ростом аргумента $R$ функция базиса убывает, причем при подходе к единице ($R \to 1$) значение $K$ катастрофически быстро устремляется к бесконечности со знаком “минус” ($-\infty$). Т.е. слева от единицы происходит *коллапс* (резкое падение) функции базиса. В первом приближении коллапс мы опишем такой формулой:

$$K \approx -(1-R)^{-1}. \qquad (15.2)$$

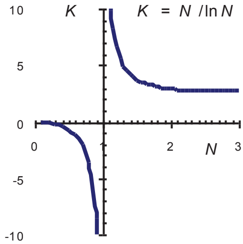


Рис. 15.1. Функция базиса

При $R \approx 1 - 0{,}1754 \cdot 10^{-58}$ (т.е. $R$ почти равно единице) по формуле (15.2) получаем $K \approx -5{,}7 \cdot 10^{58}$, причем столь же огромный номер $K$ (только со знаком “+”) мы имеем и в конце БО.

**“Тени” простых чисел**. Среди бесконечного множества всех значений аргумента $R$ рассмотрим только *аликвотные дроби*, то есть пусть $R = 1/k$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$(натуральные числа). Для таких $R$ функция базиса примет следующий любопытный вид:

$$K \equiv R/\ln R = -(k \cdot \ln k)^{-1}, \qquad (15.3)$$

где в круглых скобках, по сути дела, указано $k$-ое простое число ($P_k$). Это следует из *теории чисел*, поскольку, зная точный порядковый номер ($k = 1, 2, 3, \ldots$) простого числа, можно указать приблизительное значение этого простого числа: $P_k \sim k \cdot \ln k$ (§9).

Таким образом, когда аргумент $R$ «пробегает» по всем аликвотным дробям (или, иначе говоря, по всем натуральным числам $N$ в степени $-1$), то функция базиса как бы «перебирает» все простые числа, а, точнее говоря, обратные им числа со знаком «минус».

## 16. ВСЕ ЧИСЛА ИЗ ДАННОГО МИРА

**Как найти все числа** из любого мира (№2, №3, №4, …)? Точнее говоря, как найти все натуральные числа из данного мира на любом отрезке $[1; N]$? Напомним, что мир №$T$ содержит все числа с типом $T$, т.е. числа, у которых количество всех делителей равно $T$. Сразу скажем, что *в принципе* существует алгоритм, позволяющий найти все числа из любого мира. Однако при больших $T$ этот алгоритм, вообще говоря, на практике применить просто нереально.

Поиск чисел из мира №$T$ требует (помимо здравого смысла) знания фундаментальных математических истин (см. §9, 10):

1). Мир №2 (простые числа $P_1$=2, $P_2$=3, $P_3$=5,…$P_k$,…) в принципе алгоритмичен (решето Эратосфена, формула Римана) [10], [14].

2). Количество ($K$) простых чисел на отрезке [1; $N$]: $K \sim N/\ln N$.

3). Если $k$ – порядковый номер простого числа $P_k$, то $P_k \sim k\cdot\ln k$.

4). Любое число $N$ факторизуемо: $N = P_1^{a1}\cdot P_2^{a2}\cdot P_3^{a3}\cdot\ldots\cdot P_k^{ak}\cdot\ldots$.

5). Тип любого числа $N$ равен $T = (a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_k+1)\cdot\ldots$ .

Ниже мы рассмотрим самые первые миры. И даже это даст нам понимание того, что с удалением правой границы отрезка [1; $N$] в ряде миров банальные *комбинаторные* задачи становятся практически неразрешимыми. В конце БО (при $N \equiv 8\cdot 10^{60}$), возможно, уместней говорить о *псевдонеалгоритмичности* миров (реф. 27).

**Простые миры** – это миры, номера которых ($T$) – суть простые числа: №2, 3, 5, 7, 11, …[10, с.51]. Очевидно, что мир №1 (с единственным числом $N = 1$) – *простой* мир в той же мере, как единица – простое число (считают, что это не так, но здесь есть и проблемы!).

Ясно, что для любого числа $N$ из простого мира №$T$ его тип запишется выражением $T = a_k+1$, так как простое число $T$ нельзя разложить ни на какие сомножители. Поэтому любой простой мир №$T$ содержит исключительно числа вида $N = (P_k)^{T-1}$, и мы всегда можем записать (вычислить) любое $k$-ое число в любом простом мире №$T$.

Мы также всегда можем оценить количество ($k$) чисел из простого мира №$T$ на любом достаточно большом отрезке [1; $N$] по формуле $k \sim P_k/\ln P_k$ (выдает количество меньше реального), где $P_k \sim N^{1/(T-1)}$. Например, на БО в мире №2 содержится порядка $k \sim 5{,}7\cdot 10^{58}$ простых чисел (0,71% всех чисел БО). В мире №3 будет порядка $k \sim 4\cdot 10^{28}$ чисел, что составляет мизерную долю ($5\cdot 10^{-33}$) от всех чисел БО. И чем больше номер ($T$) простого мира, тем ещё меньше будет его доля. Так, для мира №5 она составит лишь $\sim 6\cdot 10^{-48}$ от всех чисел БО.

**Мир №4** допускает только два варианта формирования своего номера: $T = (1+1)(1+1) = 4$ и $T = (3+1) = 4$. Поэтому все числа в мире №4 имеют также только два варианта своей факторизации:

$$N_j = P_k\cdot P_{k+j} \quad \text{и} \quad N_0 = (P_k)^3\,, \tag{16.1}$$

где $k$ = 1, 2, 3, …, $K$ – порядковый номер простого числа и одновременно номер $k$-й *серии* натуральных чисел, внутри которой растет порядковый номер $j$ = 1, 2, 3, …, $J$. Так, числа 1-й серии это: $N_1 = 2\cdot 3$; $N_2 = 2\cdot 5$; $N_3 = 2\cdot 7$; …, а числа 2-й серии это: $N_1 = 3\cdot 5$; $N_2 = 3\cdot 7$; $N_3 = 3\cdot 11$; …. Количество серий и чисел $N_j$ в каждой из них ($K$ и $J$) определяет правая граница $N$ рассматриваемого отрезка [1; $N$]: $N_j \le N$. Число $N_0$ расположено "внутри" чисел соответствующей $k$-ой серии.

**Доля чисел** из мира №4 (доля этого мира), вообще говоря (колеблясь), сначала растет и у 14-го числа в мире №4 (у $N$=39) достигает максимума $D_{max} = 14/39 \approx 36\%$. Затем доля мира №4 начинает, вообще говоря (колеблясь), убывать, и к концу БО она, вероятно, уменьшится на порядок. Ниже поясняется, как была получена оценка столь важного параметра в ГТНЧ – как доля мира на БО:

1). Количество всех серий ($k$ = 1, 2, 3, …, $K$) находим из условия $N = P_K \cdot P_{K+1} \sim (K \cdot \ln K)^2$, откуда получаем $K \sim 4{,}29 \cdot 10^{28}$ серий.

2). Последнее ($J$-ое) число внутри $k$-й серии равно $N = P_k \cdot P_{k+J}$. Откуда получаем оценку количества всех чисел внутри $k$-ой серии $J_k \equiv J \sim (P_{k+J})/\ln(P_{k+J}) - k$, где $P_{k+J} = N/P_k$, а $P_k$ – $k$-ое простое число. Так, в 1-ой серии $J_1 \sim 2{,}87 \cdot 10^{58}$ чисел (чем больше $k$, тем меньше $J_k$).

3). Первые 60000 серий содержат ~$1{,}69 \cdot 10^{59}$ чисел, а дальше сумма $\sum_k \equiv J_1 + J_2 + \ldots + J_k$ растет по закону: $\sum_k \sim 5{,}79 \cdot 10^{58} \cdot \ln\ln k + 3 \cdot 10^{58}$. В конце БО (при $k = K$, см. п. 1) имеем $\sum_k \sim 2{,}72 \cdot 10^{59}$ – столько чисел из мира №4 содержится на БО (т.е. около 3,4% от всех чисел БО).

**Серии чисел** (в том смысле, как мы обозначили их в мире №4) – понятие характерное для очень многих миров. Причем у всех чисел (конкретного мира), относящихся к одной и той же серии, обнаруживаются общие закономерности: их параметры (скажем, дисперсия и другие) могут подчиняться одному и тому же закону.

Поясним это на примере *нормальной дисперсии* (§23) чисел из мира №4. Если на достаточно большом отрезке [6; $N$] у всех чисел $N_i$ из этого мира найти дисперсию $D_i$ по формуле (23.8), то на графике $D_i = \mathrm{f}(N_i)$ мы увидим некий набор линий, образованных из точек-дисперсий $D_i$. Причем каждая из этих линий «порождена» числами $N_i$ из одной и той же $k$-ой серии и описывается уравнением $D_i \sim a \cdot (\ln N_i)^b$, где параметры $a$ и $b$ зависят (по закону параболы) от лидера данной серии (точнее, от его логарифма). Сами *лидеры серий* ($N_{1k} \equiv P_k \cdot P_{k+1}$) имеют наименьшую дисперсию $D_{imin} \sim (1/8) \cdot (\ln N_{1k})^2$. Наибольшая дисперсия (верхняя линия) будет у чисел $N_i$ из 1-й серии мира №4.

**Мир №6** также допускает только два варианта формирования своего типа: $T = (2+1)(1+1) = 6$ и $T = (5+1) = 6$. Поэтому все числа в мире №6 имеют также только два варианта своей факторизации:

$$N_j = (P_k)^2 \cdot P_j \quad [\text{кроме чисел } (P_k)^2 \cdot P_k] \quad \text{и} \quad N_0 = (P_k)^5, \tag{16.2}$$

где для каждого номера серии $k = 1, 2, 3, \ldots, K$ берем $j = 1, 2, 3, \ldots, J_k$. Так, числа 1-й серии это: $N_1 = 2^2 \cdot 3$; $N_2 = 2^2 \cdot 5$; $N_3 = 2^2 \cdot 7$; …, а числа 2-й серии это: $N_1 = 3^2 \cdot 2$; $N_2 = 3^2 \cdot 5$; $N_3 = 3^2 \cdot 7$; …. (разумеется, $N_j \le N$).

Доля чисел из мира №6 имеет максимум $D_{max} = 9/52 \approx 17\%$.

Оценим долю чисел из мира №6 в конце БО (за два “шага”):

1). Первое число наибольшей серии на БО имеет вид $N \approx (P_K)^2 \cdot P_1$, откуда $K \sim P_K/\ln P_K$, где $P_K \approx (N/2)^{1/2}$. Значит, на БО $K \sim 3 \cdot 10^{28}$ серий.

2). Количество ($J_k$) чисел внутри серии с ростом её номера ($k$) убывает: $J_k \sim (N/P_k^2)/\ln(N/P_k^2)$. Поэтому сумма $\sum_k \equiv J_1+J_2+\ldots+J_k$ уже при $k$ >100 практически перестает расти. При $k = 60000$ имеем $\sum_k \sim 2{,}62 \cdot 10^{58}$ , поэтому можно смело считать, что в конце БО доля чисел из мира №6 будет чуть больше, чем $\sum_k/N$, то есть около 0,33%.

**Мир №8** допускает уже три варианта формирования своего типа: $T = (1+1)(1+1)(1+1) = 8$; $T = (3+1)(1+1) = 8$ и $T = (7+1) = 8$. Поэтому числа в мире №8 имеют три варианта своей факторизации:

$$N_m = P_s \cdot P_{s+k} \cdot P_{s+k+j}, \quad N_n = (P_k)^3 \cdot P_j \quad \text{и} \quad N_j = (P_j)^7, \tag{16.3}$$

где для каждого номера суперсерии $s = 1, 2, 3, \ldots$ берем номер серии $k = 1, 2, 3, \ldots$, а для каждого номера серии берем $j = 1, 2, 3, \ldots$ Во втором варианте исключаем числа вида $N_n = (P_k)^3 \cdot P_k$.

Доля чисел из мира №8 имеет максимум $D_{max} = 224431/999994 =$ 22,4432% (реф. 6), после которого начинается бесконечное уменьшение доли: до $D = 22{,}28\%$ – в конце *рабочего отрезка* [24; $10^7$], и до $D \approx 18{,}7\%$ – в конце БО (экстраполяция темпа убывания доли, что крайне сомнительно). После $N \approx 245000$ доля мира №8 становится наибольшей среди прочих миров. Долю мира №8 в конце БО также можно оценить с помощью *комбинаторного алгоритма*:

1). Доля чисел $N_n$, порожденных второй из формул (16.3), в конце рабочего отрезка убывает до 6,74%, а в конце БО эта доля, скорее всего, меньше 0,3%. Поэтому для всего БО мы будем рассматривать “производительность” только первой из формул (16.3) – для $N_m$.

2). Пусть $N \equiv 8 \cdot 10^{60}$ – правая граница БО и $N = N_m$, где $N_m = P_s \cdot P_s \cdot P_s$ (что, строго говоря, не совсем так). Тогда $P_s = N^{1/3}$, а количество всех суперсерий на БО мы оценим как $s \sim P_s/\ln P_s \sim 4{,}28 \cdot 10^{18}$.

3). Пусть суперсерия $s$ заканчивается числом $N = P_s \cdot P_{s+k} \cdot P_{s+k}$ (что, строго говоря, не совсем так). При этом количество ($k$) всех серий внутри суперсерии $s$ можно оценить выражением $k \sim (P_{s+k})/\ln(P_{s+k}) - s$, где $P_{s+k} = (N/P_s)^{1/2}$, а $P_s$ – простое число данной суперсерии $s$. Так, при $s$ =1 получаем $k \sim 2{,}87 \cdot 10^{28}$ (с ростом $s$ количество $k$ убывает).

4). Первая серия ($k$ = 1) в первой суперсерии ($s$ = 1) на БО – это числа: $2 \cdot 3 \cdot 5$, $2 \cdot 3 \cdot 7$, $2 \cdot 3 \cdot 11$, …, $N_j = 2 \cdot 3 \cdot P_x$, где $x = s+k+j$. Пусть $N_j = N$, тогда в общем случае количество ($j$) чисел в $k$-й серии внутри $s$-й суперсерии будет равно $j \sim P_x/\ln P_x - (s+k)$, где $P_x = N/(s \cdot k)$.

5). Согласно п. 4 внутри суперсерии $s$ количество ($K_s$) всех чисел есть некая функция номера серии $k$. Причем внутри первых суперсерий ($s = 1 \div 40000$) для первых серий ($k =1 \div 60000$) эта функция имеет вид $K_s \approx A_s \cdot \ln\ln k + B_s$, где $A_s$ и $B_s$ – почти константы (свои для каждой суперсерии $s$). Определив $A_s$ и $B_s$ для $k = 59000 \div 60000$ и взяв значение $k$ для данной $s$ (по п.3), – находим количество чисел внутри данной суперсерии $K_s$ (это количество будет, вероятно, чуть меньше реального). Так, при $s$ = 1 получаем $K_1 \sim 1{,}2 \cdot 10^{59}$ (максимальное количество, поскольку с ростом $s$ количество $K_s$ убывает).

6). Согласно п. 5 можно оценить количество чисел, скажем, в 20-ти первых суперсериях: $K_1+K_2+K_3+\ldots+K_{20} \approx 3{,}71 \cdot 10^{59}$, а для остальных суперсерий ($s =21 \div 40000$) установить закон $K_s \approx 9 \cdot 10^{58} \cdot s^{-1{,}2248}$(который «продлим» вплоть до $s$ = 65500). Пусть $\sum_s \equiv K_1+ K_2+ K_3+ \ldots + K_s$, причем рост этой суммы (как некой функция от $s$) почти не меняет своего закона и, скажем, при $s = 64500 \div 65500$ имеет вид: $\sum_s \approx (0{,}8259 \cdot \ln\ln s + 3{,}4245) \cdot 10^{59}$. Поэтому, подставив сюда количество всех суперсерий (значение $s$ по п. 2), – находим количество всех чисел из мира №8 на БО: $\sum_s \approx 6{,}53 \cdot 10^{59}$. Таким образом, искомая доля чисел из мира №8 в конце БО составляет около 8,16%.

Итак, мы рассмотрели законы формирования младших миров №2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Очевидно, это должно убедить всякого в том, что в принципе можно найти все числа из любого мира, хотя с ростом его номера ($T$) объем работ, вообще говоря, нарастает катастрофически (особенно в *мирах стедва*, номера которых $T = 2^n$) (реф. 27).

## 17. КАНОН ЧИСЛА, ОТРЕЗКА

**Канон** ($k$) натурального числа $N$ – это сумма всех показателей степени в *каноническом разложении* числа $N$ (см. §9). Например, у трех чисел 8, 12, 30 – одинаковый канон $k = 3$, что видно из их канонических разложений (соответственно: $2^3$, $2^2 \cdot 3^1$, $2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$). Ясно, что канон любого *простого числа* равен единице ($k = 1$).

Канон единицы ($N$=1) на первый взгляд – понятие неопределенное, т.к. в любой степени (0, 1, 2, 3, …, $\infty$) единица неизменна. Однако более интересной представляется гипотеза о том, что канон единицы – бесконечность ($k = \infty$) (реф. 32, 42).

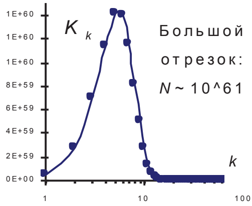

Рис. 17.1. $K_k$ = f($k$)

**Максимальный канон**. Очевидно, что на отрезке [1; $N$] наибольший канон ($k_{max}$) будет у числа $N_m$, каноническое разложении которого имеет вид: $N_m = 2^{k_{max}}$, где $k_{max}$ = A(ln$N$/ln2); A – это функция “антье”. На БО имеем: $k_{max} = 202$ и $N_m = 2^{202} \approx 6{,}43 \cdot 10^{60}$.

**Нормальный канон отрезка**. Пусть $K_k$ – это количество чисел на данном отрезке, которые имеют канон $k$. Найдем каноны у всех натуральных чисел, скажем, отрезка [2; 150], см. [49, с.157]. Поскольку $k_{max}$ = A(ln150/ln2) = 7, то на этом отрезке будет 7 разных канонов, причем: $K_1 = 35$; $K_2 = 50$; $K_3 = 35$; $K_4 = 18$; $K_5 = 7$; $K_6 = 3$; $K_7 = 1$. То есть на отрезке [2; 150] больше всего чисел имеют канон $k = 2$, а количество чисел с бо́льшим каноном – быстро убывает.

Для Большого отрезка (БО) зависимость $K_k$ от канона $k$ представлена в виде графика на рис. 17.1. И здесь мы уже видим некое подобие нормального «колокола» Гаусса [14, с.42], поэтому значение аргумента $k$ под вершиной «колокола» ($k = 5$ для БО) мы обозначим символом $k_н$ и будем называть нормальным каноном. Итак, *нормальный канон отрезка* [2; $N$] – это канон $k_н$, который имеют большинство натуральных чисел данного отрезка.

**Канон отрезка** – это сумма канонов ($k_\Sigma$) всех натуральных чисел данного отрезка. Например, для отрезка [2; 150] мы получим $k_\Sigma = 1 \cdot K_1 + 2 \cdot K_2 + 3 \cdot K_3 + 4 \cdot K_4 + 5 \cdot K_5 + 6 \cdot K_6 + 7 \cdot K_7 = 372$. А можно ли оценить канон произвольного отрезка [2; $N$]? Оказывается, можно, если вспомнить формулу из классической теории чисел [35, с.77]:

$$K_k \approx \frac{N}{\ln N} \frac{(\ln\ln N)^{k-1}}{(k-1)!}, \qquad (17.1)$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots, k_{max}$ и $k_{max}$ = A(ln$N$/ln2); A – функция “антье”. Так, для отрезка [2;150] мы получим семь значений $K_k$: 29,9; 48,2; 38,9; 20,9;

8,4; 2,7; 0,7, откуда видно недостаток формулы (17.1) – она “обрубает” малые значения $K_k$ (при подходе $k$ к $k_{max}$). Так, на БО “обрубание” происходит при $k = 78$ (поскольку $K_{78} < 1$), причем $K_{202} \sim 10^{-176}$, хотя должно быть $K_{202} = 1$ (и только при $k = k_{max}$).

Формула (17.1) «обрубает» каноны, которые больше, чем

$$k \approx k_{max}\cdot(1{,}2916 - 0{,}5646\cdot\ln\ln\ln N). \qquad (17.2)$$

Тем не менее, формула (17.1) позволяет оценить канон БО: $k_\Sigma \sim 4{,}75\cdot10^{61}$, который оказывается в 5,94 раза больше самого БО (что стыкуется с ранее полученной оценкой [14, с. 67]. При этом $K_{\max} = K_5 \sim 1{,}42\cdot10^{60}$, т.е. большинство натуральных чисел БО имеет канон $k_{н} = 5$ (нормальный канон, см. рис. 17.1).

**Эпоха канона** – это отрезок $[1; N_k]$, нормальный канон которого равен $k_{н}$. Таким образом, число $N_k$ – это первое число, начиная с которого нормальный канон (рассматриваемого отрезка с правой границей $\geq N_k$) становится равным $k_{н}$. Согласно формуле (17.1) для шести значений $k_{н} = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ мы получим следующие числа: $N_2 \approx 21$; $N_3 \approx 1635$; $N_4 \approx 5{,}3\cdot10^8$; $N_5 \approx 5{,}2\cdot10^{23}$; $N_6 \approx 3\cdot10^{64}$; $N_7 \approx 1{,}7\cdot10^{175}$. То есть БО попадает в пятую эпоху канона ($k_{н} = 5$), которая началась при $N_5 \approx 5{,}2\cdot10^{23}$, а закончится пятая эпоха при $N_6 \approx 3\cdot10^{64}$ (когда будет $k_{н} = 6$). Для границ эпох можно записать:

$$N_c \approx \exp(\exp(k_{н} - 1)), \quad \text{поскольку} \quad k_{н} \sim 1 + \ln\ln N. \qquad (17.3)$$

При увеличении $k_{н}$ порядок числа $N_k$ (обозначим его символом *ПЧ*) стремительно растет примерно по следующему закону:

$$ПЧ \sim 0{,}1449\cdot\exp(1{,}0151\cdot k_{н}), \qquad (17.4)$$

например, при $k_{н} = 8$, мы получаем $ПЧ \approx 487$, то есть $N_8 \sim 10^{487}$.

**Скрытый канон числа**. В канонических разложениях не принято писать единиц (их «скрывают»), ибо они ничего не меняют. Так, у числа $261360 = 2^4\cdot3^3\cdot5^1\cdot11^2$ «скрыта» одна единица (т.к. $7^0 \equiv 1$).

Рассмотрим каноническое разложение числа $N = 21$, но со «скрытыми» единицами: $N = 2^0\cdot3^1\cdot5^0\cdot7^1\cdot11^0\cdot13^0\cdot17^0\cdot19^0 = 1\cdot3^1\cdot1\cdot7^1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1$ (все простые числа $P \leq N$). Т.е. у числа 21 есть 6 «скрытых» единиц.

Очевидно, подобным образом можно найти все «скрытые» единицы у любого натурального числа, начиная с $N$=3. Будем называть количество всех «скрытых» единиц у числа $N$ – *скрытым каноном* ($k_c$) *числа N*. Так, у числа $N = 21$, как мы убедились выше, скрытый канон равен 6. Скрытый канон числа $N$ – это, иначе говоря, количество простых чисел, которые не появились в его каноническом разложении.

Например, у чисел $N = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ будут соответственно такие скрытые каноны $k_c = 1, 1, 2, 1, 3, 3, 3, 2$.

Канон числа (отрезка), скрытый канон числа (отрезка), *числовой вакуум* – это очень интересные понятия (реф.19), придуманные именно в ГТНЧ. Настоящая глава только дополняет ранее проведенные исследования [14, с. 64÷71], да ещё предлагает более рациональную терминологию (*канон числа* вместо *плотность числа*).

## 18. РАЗБИЕНИЯ И РЯД ФАРЕЯ

**Разбиение числа** $N$ – это представление натурального числа $N$ в виде суммы натуральных чисел. Например, число $N = 4$ имеет пять разбиений: 1+1+1+1; 2+1+1; 2+2; 3+1; 4+0. Порядок, в котором расположены числа (дающие в сумме $N$), значения не имеет (иначе мы имели бы дело с *композициями* числа $N$, которых гораздо больше, чем его разбиений). Пусть $K_N$ – это количество всех разбиений числа $N$. Ясно, что $K_1 = 1$ и $K_4 = 5$. Удобно считать, что $K_0 = 1$.

Об арифметических свойствах параметра $K_N$ известно очень мало; к примеру, мы не знаем, когда $K_N$ нечётное или чётное. Майор Мак-Махон (он был умелым и увлекающимся вычислителем) сделал таблицу значений $K_N$ для $N = 1÷200$, а Рамануджан был первым, кто обнаружил (по данной таблице) некие свойства $K_N$. В частности, $K_N$ для чисел $N$ вида $5i+4$, $7i+5$, $11i+6$ делятся соответственно на 5, 7, 11.

Существует много различных теорем о разбиениях. Ряд из них м.б. доказаны с помощью изучения графических изображений (разбиения – как массив точек, «узлов»). Именно так Ф. Франклин красиво доказал знаменитое *тождество Эйлера* [35, с. 122], [14, с. 30].

В 1917 г. Рамануджан и Харди получили первые *приближенные* формулы для $K_N$. Простейшая из них выглядит так [35, с. 166]:

$$K_N \approx (N\cdot 4\sqrt{3})^{-1}\cdot \exp(\pi\cdot\sqrt{N\cdot 2/3}). \tag{18.1}$$

При $N = 3434$ по формуле (18.1) получаем $K_N \approx 8\cdot 10^{60}$; при $N = 76567$ получаем $K_N \approx 3{,}4\cdot 10^{302}$; в конце БО (при $N = 8\cdot 10^{60}$), вероятно, $K_N < 10^X$, где $X \sim 10^{32}$. Формула (18.1) выдает завышенное значение $K_N$, моя оценка погрешности формулы такова: $\mathrm{abs}(\text{ОП}) < 0{,}5\cdot N^{-0,5}$.

**Разбиение на простые** числа $N$ – это представление натурального числа $N$ в виде суммы *простых чисел*. Пусть $K_{Np}$ – это количество всех разбиений числа $N$ на простые. Вообще говоря, $K_{Np} < K_N$ и имеет место следующее примерное соотношение [35, с.164, 185]:

$$K_N / K_{Np} \sim \exp\left(\pi\cdot\left(\sqrt{\frac{2N}{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{N}{\ln N}}\right)\right), \tag{18.2}$$

которое начинает «работать» при достаточно больших числах $N$.

Смотри также т.н. *проблему Гольдбаха* [10, с. 31].

**Точное количество разбиений**. В 1831 г. Огюстен Коши впервые рассмотрел особый интеграл, который стал играть важную роль в теории аналитических функций. *Интеграл Коши* позволяет выразить значение аналитической функции внутри области через её значения на границе этой области. Так, используя интеграл Коши, можно весьма точно вычислить количество $K_N$ разбиений числа $N$:

$$K_N = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(x)}{x^{N+1}}\,dx\,,\ \text{где}\ F(x) \approx \frac{x^{1/24}}{(2\pi)^{1/2}}(\ln x^{-1})^{1/2}\exp\frac{\pi^2}{6\cdot\ln(x^{-1})}\,; \tag{18.3}$$

$i$ – мнимая единица; $C$ – контур вокруг начала координат (жорданова кривая, принадлежащая области комплексной плоскости вместе со своей внутренностью); $F(x) \equiv [(1-x^1)(1-x^2)(1-x^3)\ldots]^{-1}$ – *производящая функция* или функция Эйлера для количества разбиений (функция – фундаментальная в теории эллиптических функций).

В формуле (18.3) в качестве контура $C$ выбрана окружность с радиусом лишь чуть меньшим, чем 1 (то есть $0 < x < 1$), что приводит к ошибке, порядок которой равен $\exp(H\cdot N^{1/2})$, где $H < \pi\cdot(2/3)^{1/2}$. При $x\to 0$ имеем $F(x) \to 1$, а при $x\to 1$ имеем $F(x)\to\infty$. Логарифмы значений $F(x)$ (скажем, в интервале $0{,}001 \le x \le 0{,}99768$) на графике $\ln[F(x)] = \varphi(x)$ образуют стройную *тильду* (наподобие рис. 26.1).

Исследуя поведение функции $F(x)$ во всех “рациональных точках” (а не только вблизи $x = 1$) Радемахер получил точную формулу для вычисления количества разбиений: $K_N = \psi(N)$ – *тождество Радемахера*, которое мы рассматривать не будем, т.к. оно довольно сложное, а его доказательство приведено в [35, с. 173].

**Ряд Фарея** порядка $N$ (обозначается как $\mathfrak{I}_N$) – это множество всех *несократимых* дробей из отрезка [0; 1], чьи знаменатели не превосходят $N$. Например, ряд Фарея порядка 5 ($\mathfrak{I}_5$) – это следующие дроби: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 2/3, 2/5, 3/4, 3/5, 4/5 и 0/1, 1/1, причем они приведены в том порядке, как их выдает генератор Фарея (см. ниже).

Ряд Фарея – это не только любопытный объект (выборка) из мира *обратных чисел* (§7), но, оказывается, и неотъемлемая часть в доказательстве *тождества Радемахера* (множество “точек Фарея”).

Пусть натуральное число $A$ – это числитель, а натуральное число $B$ – знаменатель дроби $A/B$, тогда *генератор Фарея* – это есть следующий алгоритм: для каждого $A$ из отрезка $[1; N–1]$ берем поочередно все $B$ из отрезка $[A+1; N]$ и вычисляем наибольший общий делитель (НОД) каждой пары чисел ($A$ и $B$), если НОД >1, то дробь $A/B$ является сократимой (т.е. не входит в искомый ряд Фарея $\mathfrak{I}_N$). Ясно, что данный алгоритм не генерирует двух “крайних” дробей: 0/1 и 1/1, которые входят в ряд Фарея согласно его определению. Все дроби, входящие в ряд Фарея – это, по сути дела, некие десятичные числа из отрезка [0; 1], причем все эти числа *разные*.

Нетрудно убедиться, что генератор Фарея “просмотрит” всего $K$ дробей, где $K = N!/2!/(N–2)!$ (число сочетаний из $N$ по 2), причем легко проверить, что $K \sim 0{,}5 \cdot N^2$. Последняя формула дает завышенное значение: abs(ОП) $\approx N^{-1}$, однако, это вполне приемлемо в рамках ГТНЧ. Если обозначить через $k$ – количество сократимых дробей просмотренных генератором Фарея, то ряд Фарея (порядка $N$) будет содержать следующее количество несократимых дробей:

$$K_Ф = K + 2 - k\ . \qquad (18.4)$$

Судя по всему, с ростом $N$ отношение $K/K_Ф$ устремляется к некой константе, скажем, к числу $\sqrt{e} = 1{,}6487\ldots$ ($K/K_Ф \to \sqrt{e}$ при $N \to \infty$). Так, при $N$=10000 имеем $K/K_Ф \approx 1{,}6448$. Поэтому можно записать:

$$K_Ф \sim (2\sqrt{e})^{-1} \cdot N^2 \approx 0{,}3032 \cdot N^2\ . \qquad (18.5)$$

Т.к. $K_Ф >> N$, то, в некотором смысле, ряд Фарея содержит гораздо больше чисел (правда, рациональных), чем “соответствующий” ему отрезок натуральных чисел $[1; N]$. См. также [35, с.66], [49, с.254].

## 19. ЧИСЛО – КАК СУММА КВАДРАТОВ

**Теорема Лагранжа.** В классической теории чисел существует значительный раздел, а именно *теория представления* целых чисел $N$ в виде сумм квадратов. Одно из самых красивых утверждений этой теории было доказано 1772 г. Ж. Лагранжем: каждое натуральное число $N$ есть сумма не более чем четырех квадратов:

$$N = X^2 + Y^2 + Z^2 + t^2\text{, где } X, Y, Z, t \text{ – натуральные числа.} \qquad (19.1)$$

В рамках ГТНЧ мы будем говорить, что теорема Лагранжа (19.1) касается *4-х измерений*. Мы также будем говорить: о 3-х измерениях, когда ниже станем исследовать представление $N = X^2 + Y^2 + Z^2$; о 2-х измерениях при $N = X^2 + Y^2$; об одном измерении при $N = X^2$. В мире чисел количество измерений бесконечно много, например, в 5-ти измерениях мы имеем $N = V^2 + W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2$ и т.д.

**Кратность числа**. Согласно теореме Лагранжа (т.е. в 4-х измерениях) у произвольно взятого числа $N$ может оказаться вплоть до $K$ наборов (комбинаций) $X_k$, $Y_k$, $Z_k$, $t_k$ (где $k = 1, 2, 3, \ldots, K$), которые «формируют» данное число $N$ по формуле (19.1). Количество таких наборов у числа $N$ мы будем называть *кратностью* ($K$) числа $N$. Например, число $N$=7 формируется единственным набором ($1^2+1^2+1^2+2^2$), поэтому в 4-х измерениях его кратность $K$=1. Число $N$=2500 в 4-х измерениях формируется 67-ю наборами, поэтому здесь $K$=67 (но в 3-х измерениях $K$=5, в 2-х измерениях $K$=3, в 1-ом измерении $K$=1, а вот в 5-ти измерениях $K$=483).

В *1-ом измерении* все числа вида $N = X^2$ (где $X = 1, 2, 3, \ldots$) будут иметь единичную кратность ($K$=1) (эти числа $N$ – из *редких миров*, см. §10). Все остальные натуральные числа $N$ (их подавляющее большинство) будут иметь нулевую кратность ($K$=0), и никаких других кратностей в 1-ом измерении быть не может.

Несложно придумать алгоритм для нахождения всех наборов, формирующих произвольное число $N$ в любом измерении. В этом алгоритме для $k$-го набора выполняются условия (на примере 4-х измерений): $X_k \le Y_k \le Z_k \le t_k \le \sqrt{N}$, и всего необходимо просмотреть $k = 1, 2, 3, \ldots, J$ наборов-кандидатов, чтобы «выудить» среди них $K$ наборов ($J$>>$K$), формирующих число $N$. Поиск по такому алгоритму весьма трудоёмкий, так, для определения кратности всех чисел из *рабочего отрезка* [1; 7000] в 4-х измерениях ПК потребовалось свыше 46 часов (поскольку $J \approx 5$ млрд. наборов-кандидатов).

Был также найден алгоритм, указывающий количество наборов-кандидатов ($J$) для числа $N$ в 4-х измерениях. Функция $J = \mathrm{f}(N)$ устремляется к параболе и в конце БО, вероятно, верна оценка

$$J \approx \pi^{-3} \cdot N^2 \approx 0{,}0322 \cdot N^2, \tag{19.2}$$

которая дает порядка $J \approx 2 \cdot 10^{120}$ наборов-кандидатов. Т.е. нахождение кратности у больших чисел $N$ в 4-х измерениях – это уже непосильная задача даже для самых мощных компьютеров в мире.

**Сумма кратностей** ($\sum K$) в 4-х измерениях у всех натуральных чисел на отрезке [1; $N$] растет примерно с такой же скоростью, как и количество наборов-кандидатов: $\sum K \approx \alpha \cdot J$, где коэффициент $\alpha = 0{,}38$ при $N$=10, а к концу БО он, вероятно, убывает до значения $\alpha \approx 0{,}01$. Таким образом, в конце БО *средняя кратность* ($K_s$) вполне может дорасти до значения порядка $K_s \equiv \sum K/N \approx 0{,}0003 \cdot N$.

Какая *максимальная кратность* ($K_{max}$) может быть у числа $N$ в 4-х измерениях? При $N$=100÷7000 мы получаем степенной закон:

$$K_{max} \approx A \cdot N^B, \qquad (19.3)$$

где $A$ = 0,0943 и $B$ = 0,9545. В конце БО эта $K_{max}$, вероятно, будет на 2÷3 порядка меньше самого числа $N$.

С удалением правой границы отрезка [1; $N$] чuсла с наименьшей кратностью $K_{min} \approx 1$ (как и числа с любой другой кратностью) будут встречаться всё реже и реже, а всего их на БО наберется, вероятно, от 300 до 400 штук. На рабочем отрезке больше всего чисел $N$, кратность которых близка к закону $K \approx 0{,}05 \cdot N^{0{,}915}$ или $K \approx 0{,}05 \cdot N^{0{,}956}$, а меньше всего чисел $N$ с кратностью $K \approx 0{,}05 \cdot N^{0{,}865}$. Иначе говоря, на графике $K$=f($N$) явно выделяются области, где точки (кратности $K$) расположены особенно "густо" и крайне "редко", т.е. *спектр* кратностей (их распределение по количеству на данном отрезке натурального ряда) представляет интерес для исследований.

Переходя к *3-м измерениям*, нетрудно убедиться, что там существуют некие "пустоты" – натуральные числа с *нулевой кратностью*: $N^*$ = 7, 15, 23, 28, 31, 39, 47, 55, 60, 63, … . Т.е. далеко не все натуральные числа (мы обозначили их $N^*$) представимы в виде суммы не более чем трех квадратов ($N = X^2 + Y^2 + Z^2$). Ещё А. Н. Лежандр доказал, что такие числа имеют вид

$$N^* \approx 4^a(8 \cdot k + 7), \qquad (19.4)$$

где $k$ =1, 2, 3, … – порядковый номер чисел $N^*$. На рабочем отрезке [1; 15000] содержится $k$ = 2497 таких чисел, причем показатель степени устремляется к значению $a = -\,0{,}2070 \pm 0{,}0005$. Если параметр $a$ существенно не изменится, то на БО окажется 16,65% чисел с нулевой кратностью $K$=0 (в среднем каждое 6-ое число), причем максимально возможная кратность достигает значения $K_{max} \sim 5 \cdot 10^{31}$.

В *2-х измерениях* количество «пустот» ещё больше, так, на рабочем отрезке [1; 100000] появились все кратности вплоть до $K$=9 (кроме $K$=7), но чисел с нулевой кратностью $K$=0 оказалось подавляющее большинство – 75,98%. Такие числа ($N^*$ = 3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, …) нельзя представить в виде суммы не более чем двух квадратов ($N = X^2 + Y^2$). На БО в целом, вероятно, до 99,998% всех натуральных чисел имеют нулевую кратность, а максимально возможная кратность достигает значения $K_{max} \sim 10^{12}$.

В *5-ти измерениях* «букет» всевозможных кратностей $K$ у натурального числа $N$ заметно "богаче", чем в 4-х измерениях. При этом только шесть чисел ($N$ = 1, 2, 3, 6, 7, 15) имеют единичную кратность $K_{min}$ =1, а дальше (с ростом $N$) минимально возможная кратность $K_{min}$ сама начинает расти по степенному закону. На рабочем отрезке [1; 2500] диапазон возможных кратностей у числа $N$ выглядит так: от $K_{min} \approx 0{,}0164 \cdot N^{1{,}2727}$ до $K_{max} \approx 0{,}0169 \cdot N^{1{,}3743}$ (для чисел $N$ в конце БО мы получаем $K_{min} \approx 5{,}32 \cdot 10^{75}$ и $K_{max} \approx 8{,}45 \cdot 10^{81}$).

В 2-х, 3-х, 4-х и 5-ти измерениях (на соответствующих рабочих отрезках) максимально возможная кратность $K_{max}$ растет по степенному закону $K_{max} \approx A \cdot N^B$. Обозначим количество измерений буквой $\Psi$ (где $\Psi$ = 2, 3, 4, 5, …), тогда можно утверждать, что параметры $A$ и $B$ являются некими функциями числа измерений $\Psi$:

$$A \approx 11{,}561 \cdot \exp(-1{,}1971 \cdot \Psi); \qquad B \approx 0{,}3723 \cdot \Psi - 0{,}5584. \qquad (19.5)$$

Например, при $\Psi$ = 6, 7, 8, 9, 10, 11 в конце БО мы получим следующие оценки: $K_{max} \sim 10^{100}$, $10^{122}$, $10^{144}$, $10^{166}$, $10^{188}$, $10^{210}$, т.е. с ростом количества измерений максимально возможная кратность больших чисел $N$ устремляется, практически, к бесконечности.

Сопоставляя все рассмотренные нами измерения, мы приходим к выводу, что именно в случае 4-х измерений натуральный ряд обладает неким оптимумом, в том числе с точки зрения "наилучшего" соотношения кратностей ($K_{min}$ и $K_{max}$) (реф. 24).

## 20. ПАРАМЕТР ЭЙЛЕРА

**Взаимно простые числа** – это целые числа, не имеющие общих *простых* делителей (единица, разумеется, не в счет). Например, три числа 6, 8, 9 – взаимно просты (но не попарно просты), это легко увидеть из их канонического разложения ($2 \cdot 3$, $2^3$, $3^2$). В работах Ж. Бюффона, а позже и П. Л. Чебышева был получен любопытный результат: если наугад (случайным образом) выписать два натуральных числа, то *вероятность их взаимной простоты* ($P_{вп}$) будет равна $P_{вп} = 6/\pi^2 =$ 0,6079… (это число «спрятано» и в Пирамиде, см. §11).

Сколько натуральных чисел, не превосходящих $N$, взаимно просты с $N$ (т.е. не имеют общих с $N$ простых делителей)? Пусть количество таких чисел $K_э$. Эйлер, рассматривая канонические разложения всех чисел от 1 до $N = P_1^{\,a} \cdot P_2^{\,b} \cdot \ldots \cdot P_n^{\,m}$, впервые пришел к следующему выражению (*функция Эйлера*, 1763 г., [49, с.158]):

$$K_э = N\cdot(1 - P_1^{-1})(1 - P_2^{-1})(1 - P_3^{-1})\cdot \ldots \cdot(1 - P_n^{-1}). \qquad (20.1)$$

Рассмотрим только лидеры редких миров (см. §10), а точнее – *главные редкие лидеры* (ГРЛ), у которых в каноническом разложении *впервые* появляется очередное простое число [10, с.58÷62]. Приведем первые ГРЛ и значения функции Эйлера ($K_э$) для них:

$N_1 = 2^2 = 4$; $K_э = 4\cdot(1–2^{-1}) = 2$;
$N_2 = 2^2\cdot 3^2 = 36$; $K_э = 36\cdot(1–2^{-1})(1–3^{-1}) = 12$;
$N_3 = 2^2\cdot 3^2\cdot 5^2 = 900$; $K_э = 900\cdot(1–2^{-1})(1–3^{-1})(1–5^{-1}) = 240$;
$N_4 = 2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2 = 44100$; $K_э = 44100\cdot(1–2^{-1})(1–3^{-1})(1–5^{-1})(1–7^{-1}) = 10080$;

Ещё в 2002 г. автором были найдены (предположительно) все ГРЛ на Большом отрезке (от $N_1$ до $N_{21}$). В связи с этим для каждого $n$-го ГРЛ интересно рассмотреть отношение $N_n/K_э$, которое мы назовем *параметром Эйлера* ($П_n$), и которое выражается формулами:

$$П_n = [(1–2^{-1})(1–3^{-1})(1–5^{-1})(1–7^{-1})\cdot \ldots \cdot(1- P_n^{-1})]^{-1} \approx e^C\cdot\ln(P_n), \qquad (20.2)$$

где $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ – это порядковый номер простого числа ($P_n = 2, 3, 5, 7, \ldots$), $C$ – постоянная Эйлера, $e^C = 1{,}78107\ldots$ . Второе выражение непосредственно вытекает из теоремы Мертенса [35, с. 85].

С ростом ГРЛ (и соответствующего $P_n$) параметр Эйлера медленно растет: $П_1 = (1–2^{-1})^{-1} = 2$; $П_2 = [(1–2^{-1})(1–3^{-1})]^{-1} = 3$; $П_3 = 3{,}75$; $П_4 = 4{,}375$. В конце БО мы получим $П_{21} = 7{,}9335\ldots$ .

Для лидеров частых миров (см. §10), а точнее говоря, – для *главных частых лидеров* (ГЧЛ, см.[10, с.65÷70]) в конце БО мы, очевидно, получим $П_{33} = [(1–2^{-1})(1–3^{-1})\cdot \ldots \cdot(1–137^{-1})]^{-1} = 8{,}9149\ldots$

Заметим, что введённый нами параметр Эйлера напоминает *произведение Эйлера* (1737 г.) $П_э = \mathbf{\Pi}(1- P_n^{-s})^{-1}$, которое тождественно очень важной в теории чисел *дзета-функции* Римана $\zeta(s) = 1^{-s}+2^{-s}+3^{-s}$ $+4^{-s}+\ldots+ n^{-s}$ (где $n \to \infty$, $s = \sigma + i\cdot t$, $\sigma > 1$, $i = \sqrt{-1}$) [43, с.177].

# 21. ПРЕДЕЛЬНОЕ РАЗБИЕНИЕ ЧИСЛА

**Интервалы разбиения**. Все делители $d_1$, $d_2$, $d_3$, …, $d_i$, …, $d_T$ натурального числа $N$ (всегда $d_1 = 1$ и $d_T = N$) принадлежат отрезку [1; $N$]. В логарифмической шкале он преобразуется в отрезок [0; ln$N$], а все делители числа $N$ – в величины $y_i \equiv \ln d_i$, где $i = 1, 2, 3, \ldots, T$ – порядковый номер делителя; $T$ – *тип* числа $N$. Отрезок [0; ln$N$] мы всегда можем разбить ("нарезать") шагом $S$ на равные интервалы, т.е. в логарифмической шкале "длина" всех интервалов будет равна $S$:

$[0{\cdot}S;\ 1{\cdot}S)$; $[1{\cdot}S;\ 2{\cdot}S)$; $[2{\cdot}S;\ 3{\cdot}S)$; …$[(j–1){\cdot}S;\ j{\cdot}S)$;…, $[(n–1){\cdot}S;\ n{\cdot}S)$,

где $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ – это порядковый номер интервала разбиения (он никак не связан с номером $i$). Напомним, что по определению понятия "интервал" правые границы $j{\cdot}S$ исключаются из рассмотрения – об этом говорит круглая (а не квадратная) скобка справа. При этом *левая граница* $x_j \equiv (j-1){\cdot}S$ интервалов разбиения растет предельно просто – линейно: $0{\cdot}S$; $1{\cdot}S$; $2{\cdot}S$; $3{\cdot}S$; …; $n{\cdot}S$.

Заметим, что в обычной шкале мы получим следующие интервалы разбиения: $[e^{0\cdot S};\ e^{1\cdot S})$; $[e^{1\cdot S};\ e^{2\cdot S})$; $[e^{2\cdot S};\ e^{3\cdot S})$; …, где $e \equiv 2{,}718\ldots$.

Однако нас будет интересовать именно *логарифмическая* шкала, в которой гармония мира чисел будет видна лучше всего.

Наиболее «интересными» будут разбиения *тильдаобразных* (*лог-нормальных*) чисел $N$, т.е. чисел с большим количеством делителей $d_i$, которые на графике $\ln d_i = \mathrm{f}(i)$ образуют стройную *тильду* (см. рис. 26.1). Прежде всего это верхние лидеры (§10) и лидеры миров стедва (§12) с достаточно большим типом $T$. Однако всё сказанное нами (в т.ч. и ниже) о разбиениях справедливо, вообще говоря, для любого натурального числа $N$ и для любого шага разбиения $S$.

**Шаг разбиения** $S$ – это любое число (и не только целое) из диапазона: $S_t \le S \le \ln N$, где $S_t$ – *степ* числа $N$, т.е. столь малый шаг разбиения (вообще говоря, $S_t \ll 1$), что в любом $j$-ом интервале будет либо 0 делителей, либо один делитель (о степе см. чуть ниже).

Очевидно, что от шага $S$ зависит количество всех интервалов:

$$n \ge S^{-1}{\cdot}\ln N, \qquad (21.1)$$

где символ « ≥ » требует округления $n$ до бо́льшего целого числа.

Имеет смысл различать три случая в части разбиения:
малый шаг $S < 1$; нормальный шаг $S = 1$; крупный шаг $S > 1$.

**Предельное разбиение** натурального числа $N$ заключается в том, что в логарифмической шкале мы "нарезаем" отрезок длиной $\ln N$ на равные интервалы столь малым шагом $S$, чтобы в каждом из интервалов оказалось не более одного делителя числа $N$. При этом подавляющее большинство интервалов окажутся пустыми, т.е. без единого делителя. Сами интервалы разбиения выглядят следующим образом: $[e^{0\cdot s}; e^{1\cdot s})$; $[e^{1\cdot s}; e^{2\cdot s})$; …; $[e^{(j-1)\cdot s}; e^{j\cdot s})$; …, где $j = 1, 2, 3, \dots n$ – порядковый номер интервала, $e \equiv 2{,}718\dots$. Ясно, что в обычной шкале правая граница интервалов ($G_j$) быстро растет по экспоненте $G_j = \exp(j\cdot S)$, а количество ($n$) всех интервалов обратно пропорционально шагу разбиения: $n \geq S^{-1}\cdot\ln N$.

При уменьшении шага разбиения ($S << 1$) количество $k$ непустых интервалов (хотя бы с одним делителем) растет по закону

$$k \approx S^{-q}\cdot Q, \qquad (21.2)$$

где $q < 1$ и $Q > \ln N$. Причем при уменьшении шага $S$ до некого значения (при подходе шага $S$ к *степу* $S_t$, см. ниже) закон (21.2) словно «выключается» – количество $k$ практически перестает расти.

Пусть $T$ – это количество всех делителей числа $N$ (его тип). Предельное разбиение числа $N$ подразумевает, что существует такой шаг разбиения $S$, при котором $T$ интервалов будут содержать по одному делителю, а остальные ($n - T$) интервалов будут пустыми. В непустых интервалах (с одним делителем) правая граница $G_j$ окажется, вообще говоря, чуть больше соответствующего делителя $D_i$, то есть $G_j \approx D_i$, поэтому $j = S^{-1}\cdot\ln G_j \approx S^{-1}\cdot\ln D_i$. Значит, у логнормальных чисел $N$ номера $j$ непустых интервалов (как некая функция от $i$ – номеров делителей) также образуют логнормальное распределение (как и сами делители $D_i$). Иначе говоря, наибольшее количество непустых интервалов сконцентрировано вокруг значения $G_j \approx \ln\sqrt{N}$ – *логцентра* числа $N$ (его логарифмического центра).

**Степ числа** $N$. Для нахождения шага предельного разбиения надо знать, как ведет себя параметр $L_i$ – расстояние между соседними делителями ($D_i$ и $D_{i+1}$) числа $N$ в логарифмической шкале:

$$L_i \equiv \ln D_{i+1} - \ln D_i = \ln(D_{i+1}/D_i), \quad \text{где } i = 1, 2, 3, \dots, (T-1). \qquad (21.3)$$

Характерное распределение параметра $L_i$ у тильдаобразных чисел показано на примере верхнего лидера $N$=1081080, у которого $T$=256 делителей. Все 255 параметров $L_i$ образуют «воронку» (см. рис. 21.1), нижний срез которой ограничивают (по краям) малый делитель $D_{50}$ = 104 и большой делитель $D_{206}$ = 10296 с параметрами (две жирные точки) $L_{50} = \ln 105 - \ln 104 \approx 0{,}01$ и $L_{206} = \ln 10395 - \ln 10296 \approx 0{,}01$.

Именно на срезе воронки лежат наименьшие параметры $L_i$ числа $N$ (их может быть несколько), которые мы обозначим как $S_t$ и назовем *степом* $N$.

Степ $S_t$ (*step*) – это и есть наибольший шаг, обеспечивающий предельное разбиение числа $N$. Например, взяв для числа $N$=1081080 шаг разбиения $S$ = $S_t$ = 0,009569451 ≈ 0,01, мы получим $n$ =1453 интервала, причем только в 256 из них будет по одному делителю числа $N$, а остальные интервалы будут пустыми. Итак, предельное разбиение числа $N$ сводится к поиску степа $S_t$ данного числа.

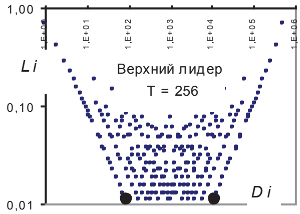

Рис.21.1. «Воронка» всех $L_i$

Добавим также, что для любого числа $N$ будем иметь

$$L_{\max} = L_1 \equiv \ln D_2 - \ln D_1 = \ln D_2 - \ln 1 = \ln D_2. \qquad (21.4)$$

Для *малых делителей* в части $L_i$ будет соблюдаться условие

$$L_i > D_i^{-1}\cdot(1- 2^{-1}\cdot D_i^{-1})\cdot(1+ 3^{-1}\cdot D_i^{-2})\cdot(1- 5^{-1}\cdot D_i^{-3})\cdot\ldots(?). \qquad (21.5)$$

Для *больших делителей* в части $L_i$ будет соблюдаться условие

$$L_i > D_i/N. \qquad (21.6)$$

В правой части (21.5) и (21.6) – уравнения «стенок» воронки.

**Степ-делители** – это первый малый делитель $d_{st}$ и последний большой делитель $D_{st}$ числа $N$, у которых параметр $L_i$ (жирные точки на рис.21.1) равен степу $S_t$. Очевидно, что само понятие о предельном разбиении числа $N$ реализуется только в непосредственной связи с отрезком [$d_{st}$; $D_{st}$], причем справедливо следующее:

$$D_{st} = N\cdot\exp(- S_t)/d_{st} \approx N/d_{st}\ . \qquad (21.7)$$

Для первых 144-х верхних лидеров частых миров, т.е. на отрезке [2; $10^{17}$ ] соблюдается соотношение (сектор всех значений $d_{st}$):

$$0{,}683\cdot N^{0{,}3374} \le d_{st} \le \sqrt{N}\ . \qquad (21.8)$$

Линию тренда всех 144-х значений $d_{st}$ можно записать в виде

$$d_{st} \approx 0{,}5\cdot N^{0{,}4488} \approx 0{,}5\cdot N^{\pi/7}. \qquad (21.9)$$

Формулы (21.7) ÷ (21.9) в конце Большого отрезка (БО) указывают такие, скажем, *первоисточники предельного разбиения* старшего верхнего лидера $N$: $(d_{st})_{\min} \sim 10^{20}$ и $(D_{st})_{\max} \sim 10^{40}$, а наиболее вероятные значение – это $d_{st} \sim 10^{27}$ и $D_{st} \sim 10^{34}$.

**Минимальный степ**. У произвольно взятого натурального числа $N$ его степ не может быть меньше некого значения $S_{t\,\min}$ – *минимального степа* (минимально возможного степа). Дело в том, что в середине каждой $i$-ой ступени Ствола (Пирамиды, см. рис. 11.1) находится число $N^* = i^2 + i$, у которого первый большой делитель всего лишь на единицу больше последнего малого делителя $d$, причем этот малый делитель численно равен номеру ступени Ствола ($d = i$). То есть в натуральном ряде есть бесконечное множество чисел $N^*$ (2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, …), у которых будут бесспорно, минимально возможные параметры $L_i \equiv \ln(d+1) - \ln d = \ln(1+1/d)$, поэтому

$$S_{t\,\min} \equiv L_i \equiv \ln(1+ i^{-1}), \quad \text{где} \quad i = (\sqrt{4 \cdot N+1} - 1)/2\,. \tag{21.10}$$

Для достаточно больших чисел $N$ справедливо следующее:

$$S_{t\,\min} \approx \ln(1+N^{-0,5}) \quad \text{или} \quad S_{t\,\min} \approx N^{-0,5}. \tag{21.11}$$

Вторая из формул (21.11) дает чуть большее значение, нежели точная формула (21.10), причем, abs(ОП) $\approx \exp(-\pi)\cdot N^{-1} \approx 0{,}0432\cdot N^{-1}$. Близость двух разных формул (21.11) отражают тот факт, что отрезок [1; 2] в логарифмической шкале почти эквивалентен отрезку [0; 1] в обычной шкале, поскольку с ростом $N$ «скорость» приближения к левой границе на обоих отрезках почти одинаковая. То есть число 0 и число 1 весьма похожи как некие точки отсчета двух бесконечных рядов (всех десятичных чисел, меньших единицы, и всех натуральных чисел больших единицы) (реф. 30, 42).

Итак, у произвольно взятого натурального числа $N$ его степ может находиться в диапазоне от $S_{t\,\min} \approx N^{-0,5}$ до $S_{t\,\max} = \ln N$ (см. ниже степ простого числа). Степ числа $N$=1, очевидно, равен нулю. У всех чисел $N$ из *простых миров* (где типы $T$ – простые числа, см.§16) степ ведет себя вполне закономерным (предсказуемым) образом.

**Степ простого числа** равен его логарифму, поскольку в данном случае $S_t \equiv \ln D_2 - \ln D_1 = \ln P_k - \ln 1 = \ln P_k$, где $P_k$ – это $k$-ое простое число, $k$ =1, 2, 3, … – порядковый номер простого числа в мире №2. То есть у любого простого числа предельное разбиение – это единственно возможное его разбиение.

Рассмотрим ряд простых чисел 2, 3, 5, …, $P_k$, …, $P_z$, для которого мы вправе записать: $k \sim P_k/\ln P_k$ и $P_k \sim k\cdot\ln k$ (§9). Найдем ответ на следующий любопытный вопрос: чему равна сумма степов ($\sum S_t$) у всех простых чисел данного отрезка? Очевидно,

$$\sum S_t \equiv \sum \ln P_k \sim \sum \ln(k\cdot\ln k) = \sum \ln k + \sum \ln\ln k, \tag{21.12}$$

$$\text{где} \quad \sum \ln k \equiv \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln z = \ln(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot z) = \ln(z!), \tag{21.13}$$

$$\sum \ln\ln k \equiv \ln\ln 1 + \ln\ln 2 + \ln\ln 3 + \ldots + \ln\ln z. \tag{21.14}$$

Ещё с 1730 г. известна замечательная формула Дж. Стирлинга

$$z! = \sqrt{2\cdot\pi\cdot z}\cdot z^{z}\cdot\exp(-z)\cdot\exp(\theta), \qquad \text{где } \theta \le (12\cdot z)^{-1}, \tag{21.15}$$

что позволяет преобразовать выражение (21.13) к виду ($z >>1$):

$$\sum \ln k \approx z\cdot(\ln z - 1) + \ln\sqrt{2\cdot\pi\cdot z} \quad \text{или} \quad \sum \ln k \sim z\cdot\ln z\,. \tag{21.16}$$

На отрезке [10; $10^9$] можно получить приблизительную оценку:

$$\sum \ln\ln k \approx z\cdot[1 - 2\cdot(\ln z)^{-2}]\cdot\ln\ln z \quad \text{или} \quad \sum \ln\ln k \sim z\cdot\ln\ln z\,. \tag{21.17}$$

Используя полученные формулы, в конце БО ($P_z \equiv 8\cdot 10^{60}$) мы получаем следующие цифры: $z \approx 5{,}7\cdot 10^{58}$; $\sum \ln k \approx 7{,}7\cdot 10^{60}$; $\sum \ln\ln k \approx 2{,}8\cdot 10^{59}$. Итак, сумма степов у всех простых чисел отрезка стремится к значению последнего простого числа на этом отрезке:

$$\sum S_t \sim z \cdot \ln z \,. \qquad (21.18)$$

**Степы внутри мира** №8 были рассмотрены у первых 100000 его чисел. У них максимально возможный степ возрастает по закону:

$$S_{t\,\max} \approx 0{,}1336 \cdot \ln N - 0{,}0334, \qquad (21.19)$$

но его, разумеется, можно принять только для грубых оценок. А вот $S_{t\,\min}$ строго следует закону (21.11). Заметим, что у 33,3% всех чисел имеем $S_t = \ln 2 = 0{,}6931$, и у 7,3% – $S_t = \ln(3/2) = 0{,}4054$, однако, на б*о*льших отрезках доля этих степов будет явно уменьшаться.

Очевидно, что внутри многих других миров можно выявить аналогичные закономерности. Причем на достаточно больших отрезках [1; $N$], вероятно, будет правильнее говорить о *логнормальном распределении* степов внутри миров (и в целом по натуральному ряду).

В мире №8 уже, скажем, число $N = 445711$ имеет степ $S_t = 1{,}688\ldots$, т.е. все интервалы разбиения данного $N$ с шагом $S_t$ содержат по одному делителю, хотя шаг разбиения заметно больше единицы. Если и в более старших мирах, где у чисел $N$ гораздо больше делителей, действует закон $S_{t\,\max} = \mathrm{f}(N)$ [его символизирует формула (21.19)], то это означает, что разбиение с шагом $S = 1$ приводит к построению колокола Гаусса (рис. 22.1) далеко не всегда, а только при соблюдении неких условий для данного конкретного мира.

**Степы верхних лидеров** $N$ чётных (частых) миров изменяются в диапазоне от $S_{t\,\min} \approx N^{-0,5}$ до максимально возможного значения

$$S_{t\,\max} \approx \exp[-0{,}3355 \cdot (\ln N)^{0,9682}]. \qquad (21.20)$$

Эта формула получена при рассмотрении 144-х верхних лидеров на отрезке [2; $10^{17}$] (§10). Формула (21.17) говорит о том, что в более старших мирах (с ростом $N$) закон роста $S_{t\,\max} = \mathrm{f}(N)$, но уже внутри каждого мира [см. формулу (21.19)], "стартует" с всё меньших значений $S_{t\,\max}$.

В конце БО формула (21.20) дает грубую оценку: $S_{t\,\max} \approx 3{,}5 \cdot 10^{-18}$. Т.е. в конце БО могут быть такие верхние лидеры $N$ (содержащие до $\sim 10^{12}$ делителей), у которых наименьшее количество интервалов *предельного* разбиения достигнет значения $n_{\min} \approx 4 \cdot 10^{19}$ [см. (21.2)]. Причем только $10^{12}/10^{19} \sim 10^{-7}$ часть всех интервалов будет содержать по одному делителю, а остальные интервалы будут пустыми.

Поскольку в конце БО имеем $S_{t\,\min} \approx 0{,}35 \cdot 10^{-30}$, то могут быть верхние лидеры $N$, у которых наибольшее количество интервалов предельного разбиения достигнет значения $n_{\max} \approx 4 \cdot 10^{32}$, но только $10^{12}/10^{32} \sim 10^{-20}$ часть из них будет содержать по одному делителю.

**Средний степ** отрезка [1; $N$] – это параметр $L_s$, найденный следующим образом: вычисляем степ $S_t$ у каждого числа отрезка, а затем складываем все степы и найденную сумму $\sum S_t$ делим на количество чисел на отрезке, то есть $L_s \equiv \sum S_t/N$.

На отрезке [10; $10^6$] параметр $L_s$ растет по закону (ОП = ±3%):

$$L_s \approx 0{,}7312 \cdot \ln\ln\ln N + 1{,}0241 \ . \qquad (21.21)$$

В конце БО по формуле (21.21) получаем $L_s \approx 2{,}19$. Однако имеет ли вообще хоть какой-то смысл параметр $L_s$?

## 22. ВЕРОЯТНОСТИ ПРИ РАЗБИЕНИИ

**Набор вероятностей**. При всяком разбиении отрезка [0; ln*N*] (т.е. отрезка [1; *N*] в логарифмической шкале) на *n* интервалов мы будем получать свой набор $K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n$ , где $K_j$ – это количество делителей числа *N* (точнее говоря, величин $x_i \equiv \ln d_i$), попавших в *j*-й интервал. Ясно, что $\sum K_j = T$, то есть сумма всех $K_j$ при любом разбиении будет равна количеству всех делителей у числа *N*.

Подвергнем разбиению шагом *S* = 2,4 тильдаобразное число $N_{123}$ = 1 010 824 870 255 200 ≈$10^{15}$, имеющее *T* =27648 делителей ($N_{123}$ – это 123-й верхний лидер частых миров, §10). После подсчета делителей (величин $x_i \equiv \ln d_i$) на каждом из *n*=15 интервалов мы получим набор: $K_1$=11, $K_2$=81, $K_3$ = 355, …, $K_8$ = 5326, …, $K_{13}$ = 152, $K_{14}$ = 26, $K_{15}$ = 2.

Каждому интервалу разбиения поставим в соответствие важный параметр $P_j \equiv K_j/T$ – вероятность появления делителя числа *N* в *j*-ом интервале при разбиении числа *N* шагом *S*. Так, при разбиении числа $N_{123}$ шагом *S* = 2,4 мы получим следующий *набор вероятностей*: $P_1$ = 0,0004; $P_2$ = 0,0029; $P_3$ = 0,0128; …, $P_8$ = 0,1926 (*max*); …, $P_{13}$ = 0,0055; $P_{14}$ = 0,009; $P_{15}$ = 0,0001. Очевидно, что сумма всех вероятностей $P_j$ при любом разбиении числа *N* равна единице: $\sum P_j$ = 1. На графике $P_j$ = f(*j*) указанный набор вероятностей образует характерный *колокол* (рис.22.1), который является следствием «тильдаобразности» числа $N_{123}$. Разумеется, если делители числа *N* на графике $\ln d_i$ = f(*i*) совсем не образуют тильды, то набор вероятностей $P_1$, $P_2$, $P_3$, …, $P_n$, получаемый при разбиении такого числа *N*, также не будет образовывать и колокола.

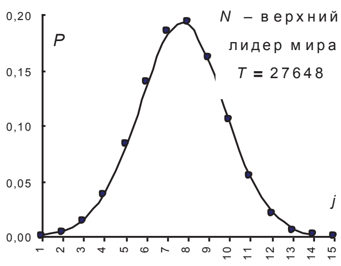

Рис.22.1. Кривая Гаусса («колокол»)

**Алгоритм ТВ**. Можно ли описать аналитически вероятности $P_1$, $P_2$, $P_3$, …, $P_n$, получаемые при разбиении тильдаобразного числа $N$? Оказывается, можно. Это позволяет сделать алгоритм, «подсказанный» нам *теорией вероятностей* (ТВ, см. [14, с. 39–45]), поэтому назовем его *алгоритм ТВ*:

1). Находим *середину* $m_j$ каждого $j$-го интервала разбиения:

$$m_j \equiv S/2 + (j - 1)\cdot S,= S\cdot(j - 0{,}5), \tag{22.1}$$

где $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ – это порядковый номер интервала разбиения;

$n = \mathrm{A}(S^{-1}\cdot\ln N) + 1$, функция “антье” (А) выделяет целую часть.

2). Находим *матожидание* $<M>$ по формуле (12.2) из [14]:

$$<M> = m_1\cdot P_1 + m_2\cdot P_2 + \ldots + m_n\cdot P_n = S\cdot(Z - 0{,}5), \tag{22.2}$$

$$\text{где}\quad Z \equiv 1\cdot P_1 + 2\cdot P_2 + 3\cdot P_3 + \ldots + n\cdot P_n. \tag{22.3}$$

$$<M> \approx 0{,}5\cdot\ln N \equiv \ln\sqrt{N}\,. \tag{22.4}$$

Формула (22.4) объясняется симметричностью самой *тильды* (см. рис. 26.1). Ось симметрии колокола вероятностей при разбиениях тильдаобразных чисел $N$ с шагом $S$ близким к единице просто «обязана» проходить посередине отрезка $[0; \ln N]$, то есть через точку $<M> = \ln\sqrt{\boldsymbol{N}}$. Формула (22.4) точнее всего срабатывает “слева” от нормального шага (при $S \le 1$), а “справа” (при $S > 1$) с ростом шага $S$ растет и относительная погрешность (ОП) выражения (22.4).

3). Находим *дисперсию* $D$ по формуле (12.3) из [14]:

$$D = (m_1 - <M>)^2\cdot P_1 + (m_2 - <M>)^2\cdot P_2 + \ldots + (m_n - <M>)^2\cdot P_n, \tag{22.5}$$

откуда, после ряда преобразований, окончательно получаем

$$D = (W - Z^2)\cdot S^2, \tag{22.6}$$

$$\text{где}\quad W \equiv 1^2\cdot P_1 + 2^2\cdot P_2 + 3^2\cdot P_3 + \ldots + j^2\cdot P_j + \ldots + n^2\cdot P_n\,, \tag{22.7}$$

и если $P_j = 0$, то $j^2\cdot P_j = 0$ (число $j \neq 0$ «исчезает бесследно»).

Некое приближение к параметру $W$ дает следующая формула

$$W \approx Z^2 + (2\cdot\pi)^{-1}\cdot(T/K)^2, \tag{22.8}$$

где $K$ – количество делителей числа $N$ на *центральном интервале* (ЦИ) разбиения, т.е. в интервале, где находится число $\sqrt{\boldsymbol{N}}$ (или $\ln\sqrt{\boldsymbol{N}}$ в логшкале). $K$ – это *керн* числа $N$ [14, с. 49]. Таким образом,

$$D \approx (2\cdot\pi)^{-1}\cdot(T\cdot S/K)^2, \tag{22.9}$$

причем эта формула дает, вообще говоря, завышенную дисперсию, а при крайне малых и слишком больших шагах $S$ (для данного $N$) – формула (22.9), как и само понятие “керн”, вырождается.

4). *Плотность вероятности* $\mathrm{f}(x_j)$ по формуле (12.12) из [14]:

$$f(x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \exp\left(-\frac{(x_j - <M>)^2}{2\cdot D}\right), \qquad (22.10)$$

где $x_j \equiv (j - 1)\cdot S$ – левая граница $j$-го интервала разбиения. Заметим, что $x_j$ и $x_i \equiv \ln d_i$ – это, вообще говоря, разные числа.

5). Находим набор вероятностей $P_1$, $P_2$, $P_3$, …, $P_j$ , …, $P_{n-1}$:

$$P_j \approx 0{,}5\cdot[f(x_j) + f(x_{j+1})]\cdot S. \qquad (22.11)$$

Иначе говоря, вероятность $P_j$ примерно равна площади под графиком плотности вероятности $f(x_j)$ на $j$-ом интервале. Нетрудно убедиться, что у данного числа $N$ при уменьшении шага разбиения $S$ сумма $\sum P_j \equiv P_1+P_2+P_3+\ldots+P_{n-1}$ устремляется к 1, т.е. $P_n \approx 1-\sum P_j$.

**Непрерывная случайная величина** (НСВ). Предположим, что дисперсия $D$ нам известна (в данном случае неважно, откуда), тогда алгоритм ТВ, действительно, позволяет найти набор вероятностей при разбиении любого натурального числа $N$>1 любым шагом $S$ (из допустимого диапазона, см. §21). Как это можно объяснить?

Здесь полезно вспомнить основные положения *теории вероятностей*, причем в части… именно НСВ [14, с. 44]. Очевидно, можно утверждать, что при разбиении числа $N$ ситуация такова, как если бы мы согласились со следующими *допущениями а-ля*-НСВ (подразумевающих существование «как бы» НСВ):

1). Появление делителей у числа $N$ – это некий *случайный* процесс, в котором задействованы две как бы *непрерывные* случайные величины $x$ и $y$. Эти две НСВ увязаны между собой следующим образом: $x = \ln y$ и $y = \exp(x)$. Величину $y$ "порождают" все делители $d_1$, $d_2$, $d_3$, …, $d_n$ числа $N$ (которые на самом деле – дискретны!).

2). Описание нашей НСВ $x$ (её вероятности $P_j$, матожидание $<x>$, дисперсия $D$) в принципе согласуется с формулами (12.11) из [14], характерными для всякой "настоящей" НСВ. Плотность вероятности нашей НСВ $x$ подчиняется закону Гаусса (22.10), т.е. нормальному распределению, см. формулу (12.12) в [14].

В "легкомысленных" на первый взгляд допущениях *а-ля*-НСВ, возможно, скрыт глубокий смысл. Его следует постигать, учитывая также допущения *а-ля*-ДСВ, о которых сказано ниже (§23).

**Закон роста дисперсии** $D = \varphi(S)$ у конкретного (одного) тильдаобразного числа $N$ был установлен на основании исследования трех наугад взятых верхних лидеров: $N_{67}$, $N_{123}$, $N_{144}$ (см. табл.22.1). У них были найдены все $T$ делителей, а затем в диапазоне шагов разбиения

$0{,}01 \le S \le 0{,}5 \cdot \ln N$ вычислялись матожидание $<M>$ [по формуле (22.2)] и дисперсия $D$ [по формулам (22.5), (22.6), (22.7)]. В итоге был найден следующий закон роста дисперсии:

$$D \approx a \cdot S^2 - b \cdot S + c. \qquad (22.12)$$

Таблица 22.1. Параметры параболы $D = \varphi(S)$

| Число $N$ | Тип $N$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $N_{144} \approx 10^{17}$ | 65536 | 0,0898 | 0,0306 | 26,9890 |
| $N_{123} \approx 10^{15}$ | 27648 | 0,0833 | 0,0002 | 22,6590 |
| $N_{67} \approx 2 \cdot 10^{9}$ | 1680 | 0,0805 | 0,0021 | 12,1040 |

То есть при увеличении шага разбиения $S$ дисперсия $D$ растет по параболе (см. рис.22.2, где, чем больше $N$, тем толще и выше линия). При малых шагах разбиения ($S \le 1$) дисперсия “замораживается”, стремясь к значению $c$ (линии на графике идут почти горизонтально). Относительная погрешность формулы (22.12), скажем, для $N_{123}$ с ростом шага разбиения также увеличивается: если при $S \le 1$ имеем ОП = ± 0,02%, то при $1 < S \le 8$ уже имеем ОП = ± 0,06%.

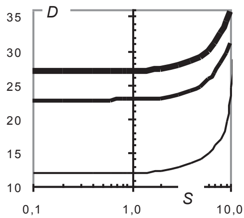

Рис.22.2. Рост дисперсии

Значение максимально возможной дисперсии $D_{max}$ вытекает из формулы (22.6) при $S = 0{,}5 \cdot \ln(N)$, когда имеем $P_1 = P_2 = 0{,}5$, поэтому:

$$D_{max} = (\ln N)^2/16 \,. \qquad (22.13)$$

При шаге $S = \ln N$ формула (22.6) выдает $D = 0$, т.е. можно считать, что этот предельно большой шаг $S$ приводит к вырождению дисперсии $D$.

Согласно формуле (22.6) дисперсию определяют параметры $Z$ и $W$ (разумеется, помимо шага $S$). При $S \le 1$ имеют место равенства

$$Z \approx [g \cdot (S-1) + 1] \cdot Z_1/S \quad \text{и} \quad W \approx [G \cdot (S-1) + 1] \cdot W_1/S^2, \qquad (22.14)$$

где $Z_1$ и $W_1$ – это значения параметров $Z$ и $W$ при $S$=1; $g$ и $G$ – некие константы (для данного тильдаобразного числа $N$). Нетрудно убедиться, что выражения (22.14) при подстановки их в формулу (22.6), действительно, приводят строго к квадратному уравнению (22.12).

При $S > 1$ можно записать (с известной мерой условности):

$$Z \approx [q \cdot S - Q + 1] \cdot Z_1/S \quad \text{и} \quad W \approx [r \cdot S^R + 1] \cdot W_1/S^2, \qquad (22.15)$$

где $q$, $Q$, $r$, $R > 1$ – это также константы для данного числа $N$. Выражения (22.15) при подстановки их в формулу (22.6) приводят к уравнению, которое только *близко* к квадратному уравнению (22.12). Нахождение истинных законов изменения параметров $Z$ и $W$, скорее всего, окажется сложной, увлекательной и очень полезной задачей.

# 23. НОРМАЛЬНОЕ РАЗБИЕНИЕ ЧИСЛА

**Удивительная метаморфоза** происходит при разбиении тильда-образного числа $N$ шагом $S$=1 (т.е. *нормальным* шагом). Действуя согласно алгоритму ТВ (см. §22), мы получим следующее: $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_n) \approx 1$, то есть формула (22.10) превращается из закона Гаусса, характерного для *непрерывной* случайной величины (НСВ,) в *нормальное распределение* (распределение Лапласа-Гаусса, формула (12.9) в [14]), характерное для *дискретной* случайной величины (ДСВ). То есть, если в формулу (22.10) вместо аргумента $x_j$ (левая граница $j$-го интервала) подставить аргумент $m_j$ (середина $j$-го интервала), то получим *сразу* вероятность $P_j$ (рис.23.1):

$$P_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{\text{н}}}} \exp\left(-\frac{(m_j - \langle M\rangle)^2}{2 \cdot D_{\text{н}}}\right), \qquad (23.1)$$

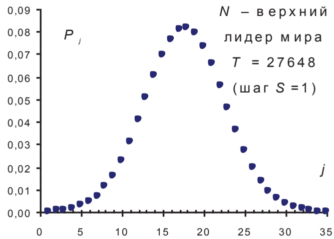

Рис.23.1. Нормальное распределение

где аргумент $m_j = S \cdot (j - 0{,}5)$; матожидание $\langle M\rangle = \ln\sqrt{N}$, а дисперсию $D_{\text{н}}$ считаем уже найденной (пока неважно каким образом). Буква «н», добавленная к обозначению дисперсии $D$, будет напоминать о том, что речь идет о *нормальной* дисперсии (шаг разбиения $S = 1$).

**Дискретная случайная величина** (ДСВ). Глядя на Пирамиду (см. рис. 11.1) мы понимаем, что появление всех делителей $d_1, d_2, \ldots d_i, \ldots, d_T$ у любого числа $N$ с типом $T$ – это строго *детерминированный* процесс, ибо все делители любого числа $N$ «зацементированы» раз и навсегда в теле Пирамиды (согласно простейшему алгоритму её построения). Причем вероятность появление делителя $d_i$ будет равна $1/d_i$, то есть, чем больше $d_i$, тем меньше вероятность его появления в качестве делителя (у любого числа $N$).

Однако давайте «забудем» столь очевидные истины и посмотрим на число $N$ под необычным (мягко говоря) углом зрения. Мы примем допущения, которые назовем *а-ля*-ДСВ (как бы ДСВ):

1). Появление делителей у числа $N$ – это некий *случайный* процесс, мы имеем ДСВ $Y$, принимающую значения $d_1, d_2, \ldots d_i, \ldots, d_T$.

2). Вероятность появление $d_i$ равна $P_i$=1/$T$, где $i$ =1, 2, 3, …, $T$, то есть появление любого делителя считаем… равновероятным!

3). «Сконструируем» ещё одну ДСВ $X$, принимающую $T$ значений $x_1 \equiv \ln d_1$, $x_2 \equiv \ln d_2$, … $x_i \equiv \ln d_i$, …, $x_T \equiv \ln d_T$, причем также с одинаковыми вероятностями $P_i = 1/T$. Очевидно, что ДСВ $X$ и $Y$ связаны между собой следующими равенствами: $X = \ln Y$ и $Y = \exp(X)$.

Итак, ДСВ $X$ имеет нормальное распределение, а поскольку $Y = \exp(X)$, то ДСВ $Y$, в свою очередь, имеет *логнормальное (логарифмически-нормальное) распределение*. Иначе говоря, мы приходим к выводу, что ***делители тильдаобразного числа N образуют логнормальное распределение***. К этому важному заключению я приходил и ранее: [10, с. 78]; [14, с. 43, 47]. См. также (реф. 12).

Поэтому все тильдаобразные числа $N$ (а верхние лидеры – самые “совершенные” из них) правильнее всего называть *логнормальными числами*. Можно сказать, что именно стройная тильда на графике $\ln d_i = f(i)$ (см. рис. 26.1) служит верным признаком логнормального распределения делителей $d_i$ у натурального числа $N$.

**Матожидание** для ДСВ $X$ равно (см. формулу (12.2) в [14]):

$$<M> \equiv \sum x_i \cdot P_i \equiv (\ln d_1 + \ln d_2 + \ldots + \ln d_T) \cdot P_i \equiv \ln(d_1 d_2 \ldots d_T)/T,$$

$$<M> = \ln\sqrt{N}, \qquad (23.2)$$

поскольку $d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \ldots d_T = N^{T/2}$ при любом $T$ (чётном и нечётном).

Таким образом, в части матожидания $<M>$ допущения *а-ля*-ДСВ приводят к уже известной нам формуле $<M> = \ln\sqrt{N}$.

А вот в части дисперсии $D$ допущения *а-ля*-ДСВ позволяют получить новое выражение, которое также можно будет подставлять в формулу (22.16) при разбиении числа $N$ шагом $S$=1. В связи с выводом формулы (23.2) для $<M>$, а также в плане «подготовки» к новой формуле для дисперсии $D$, мы введем два полезных понятия.

**Логул числа** $N$. Давно было подмечено, что в математических исследованиях редко фигурируют числа, больше, чем “*гугол*” ($10^{100}$) (реф. 40). В рамках ГТНЧ мир чисел также всячески “избегает” столь гигантских чисел. Например, выше мы убедились, что для нахождения $<M>$ необходимо знать не произведение всех делителей, а только его мизерную «тень» – *логарифм* произведения. А ведь уже у 16-го верхнего лидера $N_{16}$ = 5040 произведение всех его делителей ($T$ = 60) превосходит гугол: $d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \ldots d_{60} = (N_{16})^{60/2} \approx 10^{111}$. Однако мир чисел «требует» от нас для $<M>$ всего лишь $\ln 10^{111} \approx 256$.

Ещё один пример “уклонения” мира чисел от гугола содержится ниже, где мы будем по-новому вычислять дисперсию $D$. Для этого потребуется знать опять-таки только *логарифм* произведения всех *малых* делителей $\Pi \equiv d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot \ldots \cdot d_t$ у натурального числа $N$. А ведь само произведение $\Pi$ также очень быстро достигает гугола: уже у 27-го верхнего лидера $N_{27} = 110880$ ($T$ =144) имеем $П \approx 10^{123}$.

Для произведения малых делителей $N$ введем новый параметр:

$$G \equiv \ln(d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot \ldots \cdot d_t) \equiv \ln d_1 + \ln d_2 + \ln d_3 + \ldots + \ln d_t. \qquad (23.3)$$

Параметр $G$ – это *логул* числа $N$ (от слов «логарифм гугола»), где $t$ – порядковый номер последнего малого делителя числа $N$.

У верхних лидеров $N$ частых миров явно угадывается любопытная связь между типом $T$ и логулом $G$: количество всех делителей у верхнего лидера $N$ (его тип $T$), вероятно, устремляется к количеству простых чисел на интервале [1; $G$]. Об этом говорит формула

$$T \sim (1 + \lambda/\ln N) \cdot G/\ln G\ , \qquad (23.4)$$

где $\lambda = 31$ (что не бесспорно). На рабочем отрезке [6; $10^{15}$] всегда $T > G/\ln G$, а ОП формулы (23.4) равна: abs(ОП) $\approx 4{,}3374 \cdot (\ln N)^{-1{,}2582}$. В конце БО при $G = 10^{13}$ по формуле (23.4) получаем $T \sim 4 \cdot 10^{11}$, что выглядит правдоподобно, как и принятая оценка самого логула $G$ (по результатам экстраполяции рабочего отрезка).

**Билогул** (квадратный логул) – так мы будем называть параметр

$$G_2 \equiv (\ln d_1)^2 + (\ln d_2)^2 + (\ln d_3)^2 + \ldots + (\ln d_t)^2\ , \qquad (23.5)$$

«сконструированный» также из $t$ малых делителей числа $N$ и, вообще говоря, превосходящий логул $G$ того же числа $N$.

У верхних лидеров $N$ частых миров $T$ обнаруживается связь между параметрами $G_2$ и $G$ (что пригодится нам в дальнейшем):

$$2 \cdot (G_2 - G \cdot \ln N)/T \approx (\delta - 1)(\ln N)^2/4, \quad \text{где } \delta \approx 0{,}80118 \cdot (\ln N)^{-0{,}669243}. \quad (23.6)$$

Указанный параметр $\delta$ обеспечивает модуль ОП < 1% для формулы (23.6) на отрезке [60; $10^{15}$]. В конце БО получаем $\delta \approx 0{,}0293$.

**Нормальная дисперсия** $D_н$ (при $S$=1) для ДСВ $X$ в соответствии с ТВ, очевидно, будет равна (см. формулу (12.3) в [14]):

$$D_н \equiv \langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2 \equiv \sum x_i^2 \cdot P_i - (\sum x_i \cdot P_i)^2 \equiv \sum (\ln d_i)^2/T - (\sum \ln d_i)^2/T^2, \quad (23.7)$$

где $T$ – количество всех делителей у числа $N$; $i$ =1, 2, 3, …, $T$.

Из выражения (23.7) нетрудно получить окончательную формулу

$$D_н \equiv 2 \cdot (G_2 - G \cdot \ln N)/T + \nu \cdot (\ln N)^2/4\ , \qquad (23.8)$$

где $G$ и $G_2$ – логул и билогул любого натурального числа $N \geq 1$;
$T$ – количество всех делителей у числа $N$ (тип числа $N$);
$\nu = 1$, если $T$ – чётное число и $\nu = 1 + 1/T$, если $T$ – нечётное число.

На отрезке [6; $10^{15}$] у верхних лидеров частых миров, вообще говоря, $D_н < D$ [см. (22.5) алгоритма ТВ], причем abs(ОП) $\equiv$ abs($(D - D_н)/D_н$) $\leq (\ln N)^{-1{,}541}$ и уже при $N > 10^6$ имеем ОП< 1% (что неплохо).

Итак, благодаря допущению *а-ля*-ДСВ, при нормальном разбиении ($S$=1) числа $N$ мы можем найти его нормальную дисперсию $D_н$, зная только малые делители $d_1$, $d_2$, …, $d_t$ числа $N$. Подстановка такой дисперсии $D_н$ в формулу (23.1) приводит к нахождению всех нормальных вероятностей $P_j$. Ещё раз подчеркнем, что нормальную дисперсию $D_н$ можно найти для *любого* натурального числа $N \geq 1$.

**К-дисперсия** (керн-дисперсия, $D_{нк}$) – так будем называть дисперсию, найденную с помощью *керна* (см. §22). При нормальном разбиении числа $N$ для середины *центрального интервала* (ЦИ), вообще говоря, верно следующее: $m_j \approx 0{,}5\cdot\ln N = \langle M \rangle$, поэтому формула (23.1) примет вид: $P_{max} \approx (2\pi\cdot D_н)^{-1}$. Но, с другой стороны, $P_{max} \equiv K_1/T$, где $K_1$ – *нормальный* керн числа $N$ (т.е. керн при $S$=1). Таким образом, нормальная к-дисперсия любого числа $N$ будет равна

$$D_{нк} \approx (2\pi)^{-1}\cdot(T/K_1)^2. \qquad (23.9)$$

На отрезке [2; $10^{17}$] у верхних лидеров частых миров при $N > 10^9$ имеем $D_{нк} > D_н$, причем $\mathrm{abs}(ОП) \equiv \mathrm{abs}(D_н - D_{нк})/D_{нк} \leq 0{,}4\cdot(\ln N)^{-0,5}$.

У натуральных чисел $N$ с нулевым керном $K_1 = 0$ (а таких чисел $N$, вообще говоря, даже больше, чем с ненулевым керном, см. §22), согласно формуле (23.9) к-дисперсия – не имеет смысла. Или нам остается согласиться с тем, что существуют числа $N$, у которых керн $K_1$ … меньше единицы (?!). Например, у *простых чисел N* имеем

$$K_1 = (8/\pi)^{0,5}\cdot(\ln N)^{-1} \approx 1{,}5958\cdot(\ln N)^{-1}. \qquad (23.10)$$

Это следует из формул (23.9) и (23.11) (она получена чуть ниже).

**Замечание**. При разбиении числа $N$ шагом $S$ отличным от единицы (в разумных пределах, конечно) мы будем получать произвольный керн $K \approx S\cdot K_1$. Его формальная подстановка в формулу (23.9) приводит к выражению $D_к \approx (2\pi)^{-1}\cdot(T\cdot S/K)^2$, которое и было указано в алгоритме ТВ (в качестве некого грубого приближения, см. §22).

**Максимальная нормальная дисперсия**. Исследование нормальной дисперсии у всех чисел в начале натурального ряда позволяет утверждать, что $D_н$ простого числа $P$ является максимально возможной нормальной дисперсией для любого числа $N$ меньшего, чем $P$. Поэтому у простых чисел к символу $D_н$ добавим буквы «*max*», а из формулы (23.8) получаем (с учётом, что у простых чисел $G = G_2 = 0$) закон роста максимально возможной нормальной дисперсии:

$$D_{нmax} = (\ln N)^2/4 = (\ln\sqrt{N})^2 = \langle M \rangle^2 \,. \qquad (23.11)$$

Таким образом, в конце БО максимально возможная нормальная дисперсия у натуральных чисел вырастает до $D_{нmax} \approx 4916$.

Если рассмотреть отдельно числа $N$ только из редких миров (с нечетными типами $T$), то, оказывается, $D_{нmax}$ здесь будут определять числа из мира №3 (“заменители” простых чисел в редких мирах). У любого числа $N$ из мира №3 будут такие делители: 1, $N^{0,5}$, $N$. Поэтому из формулы (23.8) получаем выражение для редких миров:

$$D_{нmax} = (\ln N)^2/6\ . \qquad (23.12)$$

**Минимальная нормальная дисперсия**. Исследование нормальной дисперсии у всех чисел в начале натурального ряда позволяет утверждать, что $D_н$ у верхнего лидера $N$ из частых миров является минимально возможной нормальной дисперсией для любого числа на отрезке [1; $N$]. Из формулы (23.8) с учетом (23.6) получаем выражение для нормальной дисперсии верхних лидеров $N$ частых миров:

$$D_{нmin} \approx \delta\cdot(\ln N)^2/4\ , \qquad (23.13)$$

где параметр $\delta$ с ростом $N$ устремляется к нулю, но так, что дисперсии $D_{нmin}$ гарантирован медленный рост (без учета малых колебаний дисперсии). В конце БО, вероятно, $D_{нmin} \approx 137 \div 144$ (реф. 36).

Если рассмотреть отдельно числа $N$ только из редких миров, то, оказывается, $D_{нmin}$ здесь будут определять верхние лидеры редких миров. Для них можно записать формулу, аналогичную (23.13), где также возникнут проблемы с поиском закона убывания параметра $\delta$.

**Средняя нормальная дисперсия** $D_{нs}$ – это среднее арифметическое нормальных дисперсий у всех чисел отрезка [1; $N$]:

$$D_{нs} \equiv \sum D_н/N \approx (2 + 1/\ln N)^{-1}\cdot D_{нmax}. \qquad (23.14)$$

Иначе говоря, при $N\to\infty$ мы получаем $D_{нs} \to D_{нmax}/2$, где $D_{нmax}$ находим по формуле (23.11). Можно вычислять $D_{нs}$ раздельно: для всех чисел $N$ только из частых или только из редких миров. При этом формула (23.14) остается в силе, только в случае редких миров $D_{нmax}$ надо находить по формуле (23.12).

**Дисперсия в простых мирах** (разумеется, при $S$=1). Если номер мира – это любое простое число (т.е. $T$ = 2, 3, 5, 7, 11, …), то он называется *простым миром*. Поскольку любое $k$-ое число из простого мира $T$ имеет вид $N_k = (P_k)^{T-1}$, где $k$ = 1, 2, 3, … (натуральный ряд), а $P_1$=2, $P_2$=3, $P_3$=5, … (ряд простых чисел), то из формулы (23.8) получаем нормальную дисперсию числа $N$ из простого мира $T$:

$$D_н = [(T+1)/(T-1)]\cdot(\ln N)^2/12 \approx (\ln N)^2/12. \qquad (23.15)$$

Если номер мира – это удвоенное простое число ($T$ = 4, 6, 10, 14, 22, …) [10, с.51], то лидер такого мира имеет вид $N = 3\cdot2^{T/2-1}$ и его нормальная дисперсия также устремляется к виду $D_н = (\ln N)^2/12$.

## 24. ЭНТРОПИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

**Энтропия числа, отрезка**. С точки зрения ГТНЧ (её почти фантастических рефлекций) нет ничего странного в том, что безразмерное число $10^{90}$, выражающее энтропию современной Вселенной (гл. II, §20), можно обнаружить и в мире чисел. Например, в конце Большого отрезка (БО) как минимум два параметра Пирамиды делителей (§11), [14, с. 22] будут равны числу $10^{90}$ – это количество всех камней в Стволе ($K$) и сумма всех малых делителей ($M$), поскольку $K \approx M \approx (2/3)\cdot N^{3/2}$. Параметр $K$ – это, по сути дела, *площадь* Ствола, выраженная в планковских единицах (*эви*$^2$), что позволяет (?!) провести некую аналогию с энтропией Вселенной и черных дыр. Поскольку параметры $K$ и $M$ «отражают» энтропию Вселенной, то будем считать, что количество ($K$) всех камней в Стволе на отрезке [1; $N$] – это *энтропия отрезка* [1; $N$], а сумма малых делителей числа $N$ – это *энтропия числа N*. Причем энтропия отрезка [1; $N$] с ростом $N$ устремляется к сумме энтропий всех чисел данного отрезка (к сумме малых делителей у всех чисел данного отрезка).

**Энтропия верхних лидеров**. Пусть $m_2 \equiv d_1+d_2+d_3+\ldots+d_{T/2}$ – сумма малых делителей верхнего лидера $N$ чётного мира $T$, то есть $m_2$ – *энтропия* одного конкретного числа $N$ (индекс «2» напоминает, что это верхний лидер *чётного* мира). На отрезке [$10^8$; $10^{17}$] получаем:

$$m_2 \approx \exp[0{,}8622\cdot(\ln N)^{0{,}95}]. \qquad (24.1)$$

В конце БО эта формула дает $m_2 \sim 10^{40}$. Таким образом, энтропия $m_2$ старшего (наибольшего) верхнего лидера на БО примерно в $10^{50}$ раз меньше энтропии всего БО (равной $K \approx M \approx 10^{90}$, см. выше).

**Инфоэнтропия числа**. В статистической физике есть понятие «информационная энтропия» ($h$), которое тесно связанное с энтропией. Используя формулу (20.11) из гл.II [$h \equiv -(P_1\cdot\ln P_1 + P_2\cdot\ln P_2 + P_3\cdot\ln P_3 + \ldots + P_n\cdot\ln P_n)$] мы введем для мира чисел новое понятие – «*инфо*энтропия», которую также обозначим символом $h$ и также будем вычислять по приведенной формуле (учитывая все оговорки к ней и соглашение $0\cdot\ln0\equiv0$). Смысл вероятностей $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ в ГТНЧ будет пояснен чуть ниже, а смысл собственно *инфоэнтропии*, наверняка, имеет большое значение, во всяком случае, это весьма интересный параметр в мире чисел (особенно для рефлекций ГТНЧ).

Пусть натуральное число $N$ имеет $T$ делителей. Очевидно, мы всегда можем узнать сколько делителей числа $N$ будет находиться в следующих интервалах: $[e^{0\cdot s}; e^{1\cdot s})$; $[e^{1\cdot s}; e^{2\cdot s})$; $[e^{2\cdot s}; e^{3\cdot s})$; …, где $e = 2{,}718\ldots$ . Иначе говоря, мы всегда можем подвергнуть число $N$ *разбиению*, причем трех видов: мелкому ($C \le S < 1$), нормальному ($S = 1$) и крупному ($1 < S < \ln N$), где $S$ – шаг разбиения, $C$ – степ числа $N$ (§21). Пусть $K_j$ – это количество делителей числа $N$ в $j$-ом интервале, где $j = 1, 2, 3, \ldots n$ – порядковый номер интервала разбиения;

$n \ge S^{-1}\cdot\ln N$ – количество всех возможных интервалов.

При любом разбиении числа $N$ для каждого $j$-го интервала мы получим $P_j \equiv K_j/T$ – вероятность того, что наугад взятое число из $j$-го интервала окажется делителем числа $N$. Ясно, что при малом шаге разбиения $S$, в некоторых интервалах делителей не будет вовсе: при $K_j = 0$ получим пустой интервал с $P_j = 0$. Таким образом, любое разбиение любого числа $N$ порождает набор вероятностей $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ – именно их и будем подставлять в формулу (20.11) из гл.II.

При разбиении числа $N$ наибольшим шагом $S_{\max}$ ($S_{\max} \ge \ln N$) – инфоэнтропия будет равна нулю: $P_1 \equiv T/T = 1$, поэтому $h \equiv -1\cdot\ln 1 = 0$.

При разбиении числа $N$ наименьшим шагом $S_{\min} = C$ (равным *степу* $C$ числа $N$, см. §21) – инфоэнтропия будет максимальной. В самом деле, здесь мы получим $i = 1, 2, 3, \ldots T$ интервалов с одинаковыми вероятностями $P_i \equiv 1/T$, поэтому $h \equiv -T\cdot(1/T)\cdot\ln(1/T) = \ln T$. Таким образом, *максимальная* инфоэнтропия ($h_{\max}$) числа $N$ равна логарифму количества всех его делителей (его типа $T$):

$$h_{\max} = \ln T. \qquad (24.2)$$

**Максимальная инфоэнтропия отрезка** ($H_{\max}$) – это сумма максимальных инфоэнтропий $h_{\max}$ всех чисел на отрезке [1; $N$]:

$$H_{\max} \equiv \ln T_1 + \ln T_2 + \ldots + \ln T_N. \qquad (24.3)$$

В первом приближении $H_{\max}$ можно оценить по формуле:

$$H_{\max} \approx N\cdot(0{,}7405\cdot\ln\ln N + 0{,}2989). \qquad (24.4)$$

В конце БО получаем $H_{\max}/N \approx 3{,}959$ или $H_{\max} \sim 10^{61}$. Таким образом, во-первых, *инфо*энтропия БО примерно в $10^{29}$ раз меньше «просто» энтропии БО (равной $K \approx M \approx 10^{90}$, см. выше). Во-вторых, инфоэнтропия старшего верхнего лидера на БО [равная $h_{\max} = \ln(10^{12}) \approx 27$], примерно в $10^{60}$ раз меньше инфоэнтропии всего БО.

Заметим, что выражение $\ln\ln N$ в формуле (24.4), говорит о возможной связи параметра $H_{\max}$ с суммой *Гаусса-Мертенса* (7.3).

Что любопытно, ряд $T_1$, $T_2$, $T_3$, …, $T_N$, образованный из типов всех чисел отрезка [1; $N$], весьма далек от натурального ряда 1, 2, 3, …, $N$, однако, если вычислить сумму $S \equiv \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln N$ [см. формулу (21.13)], то она окажется достаточно близкой к $H_{\max}$:

$$S/H_{\max} \approx 0{,}3477 \cdot \ln N + 0{,}9888. \qquad (24.5)$$

В конце БО по формуле (24.5) получаем $S/H_{\max} < 50$.

**Максимально возможная инфоэнтропия** ($h_{2\max}$) у произвольного числа $N$ характеризуется весьма любопытным законом (см.§10):

$$h_{2\max} \equiv \ln(T_{\max}) \approx a \cdot (\ln N)^{2/3}, \qquad (24.6)$$

где $T_{\max}$ – максимально возможное количество делителей у числа $N$. Но закон $T_{\max} = \mathrm{f}(N)$ формируют верхние лидеры частых миров, поэтому $h_{2\max}$ – это их инфоэнтропия. В формуле (24.6) берём $a = 0{,}9631$ для отрезка $[1;\ 10^{22}]$ и $a = 1$ для отрезка $[10^{22};\ 10^{61}]$.

В конце БО по формуле (24.6) получаем $h_{2\max} \approx 25{,}3 \div 27{,}6$.

**Нормальная инфоэнтропия** ($h_{\text{Н}}$) числа $N$ – это инфоэнтропия, получаемая при разбиении этого числа шагом $S = 1$ (см. §23).

У числа $N$=1 (его тип $T$=1) единственный делитель, равный 1, лежит в первом интервале [1; $e$) и $P_1 \equiv K_1/T = 1/1 = 1$, поэтому для единицы получаем $h_{\text{Н}} \equiv -1 \cdot \ln 1 = 0$. У числа $N$=2 ($T$=2) оба делителя (1 и 2) также лежат в первом интервале [1; $e$) и $P_1 \equiv 2/2 = 1$, поэтому также $h_{\text{Н}} \equiv -1 \cdot \ln 1 = 0$. А вот у числа $N$=3 ($T$=2) делители (1 и 3) уже лежат в двух интервалах: [1; $e$) и [$e$; $e^2$), поэтому $P_1 \equiv ½$, $P_2 \equiv ½$ и $h_{\text{Н}} \equiv -(½ \cdot \ln ½ + ½ \cdot \ln ½) = \ln 2 = 0{,}6931\ldots$ Очевидно, у всех последующих *простых чисел* также получаем $h_{\text{Н}} = \ln 2 = 0{,}6931\ldots$ .

**Нормальная инфоэнтропия отрезка** ($H_{\text{Н}}$) – это сумма нормальных инфоэнтропий $h_{\text{Н}}$ всех чисел отрезка [1; $N$]. Закон роста $H_{\text{Н}}$:

$$H_{\text{Н}} \approx N \cdot (0{,}6801 \cdot \ln\ln N + 0{,}0621). \qquad (24.7)$$

В конце БО по формуле (24.7) получаем $H_{\text{Н}}/N \approx 3{,}424$. Таким образом, $H_{\max}/H_{\text{Н}} \approx 1{,}156$ или $H_{\max} \approx H_{\text{Н}}$, то есть максимальная инфоэнтропия отрезка [1; $N$] чуть больше его нормальной инфоэнтропии.

**Нормальная инфоэнтропия верхних лидеров** частых миров ($h_{2\text{Н}}$) была исследована на рабочем отрезке $[2;\ 10^{17}]$, где набирается $K$ = 144 верхних лидеров $N$. Закон роста $h_{2\text{Н}}$ имеет следующий вид

$$h_{2\text{Н}} \approx 0{,}7318 \cdot \ln\ln N + 0{,}4323. \qquad (24.8)$$

В конце БО по формуле (24.8) получаем $h_{2Н} \approx 4{,}05$. То есть $h_{2Н} \approx H_{max}/N$ и можно предположить, что нормальная инфоэнтропия $h_{2Н}$ верхнего лидера $N$ чётного мира устремляется к среднему арифметическому максимальных инфоэнтропий всех чисел отрезка $[1; N]$.

**Инфоэнтропия при разбиении** конкретного числа $N$ различными шагами $S$ изменяется интересным образом, если в качестве $N$ взять, скажем, верхний лидер чётного мира $T$. Для таких чисел $N$ закон изменения инфоэнтропии имеет вид:

$$h \approx h_Н - \ln S, \tag{24.9}$$

где $h_Н$ – нормальная инфоэнтропия числа $N$ (т.е. в данном случае $h_Н \equiv h_{2Н}$), для которого мы вычисляем инфоэнтропию $h$ (при конкретном шаге разбиения $S \neq 1$). Например, для верхнего лидера с типом $T$=10080 в диапазоне шагов разбиения $S = 0{,}01 \div 3$ модуль ОП формулы (24.9) не превысит 1%. Поскольку $h > 0$, то из формулы (24.9) получаем ограничение по её применимости: $S < \exp(h_Н)$. Однако при $N < 5{,}4 \cdot 10^{22}$ формула (24.9) перестает работать ещё раньше, так как существует участок локального роста инфоэнтропии (но об этом – чуть ниже).

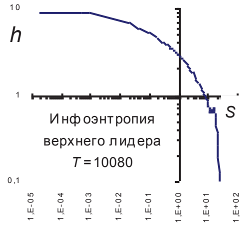


Рис.24.1 Инфоэнтропия

При уменьшении шага разбиения $S$ (влево от единицы, т.е. при $S$ <1) инфоэнтропия $h$ растет [всё более «отставая» от значений по формуле (24.9)], и при крайне малых шагах разбиения, близких к *степу* ($S \approx C$, см. §21), инфоэнтропия почти прекращает свой рост, «замораживаясь» у верхнего предела $h_{max} = \ln T$ (см. рис. 24.1).

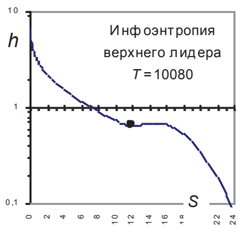


Рис.24.2. Инфоэнтропия

При увеличении шага разбиения $S$ (вправо от единицы) инфоэнтропия $h$ убывает [всё более превосходя значения по формуле (24.9)] и при некотором шаге $S^*$ инфоэнтропия достигает своего *локального минимума* (жирная точка на рис. 24.2). После этого, вплоть до шага $S_{Т/2} \equiv 0{,}5 \cdot \ln N$, начинается *локальный рост* инфоэнтропии. Нетрудно доказать, что для любого $N$ при шаге $S_{Т/2}$ будем иметь $h = \ln 2 = 0{,}6931\ldots$ – *локальный максимум* инфоэнтропии. При $S > S_{Т/2}$ инфоэнтропия вновь продолжает свое убывание, но уже катастрофически быстро (ось абсцисс на рис. 24.1 – логарифмическая, а на рис. 24.2 – линейная, поэтому разные "картинки").

Шаг локального минимума $S^*$ на $[10^9; 10^{17}]$ растет по закону

$$\boldsymbol{S^*} \approx (0{,}5 - 0{,}1964) \cdot \ln \boldsymbol{N} + 3{,}0546. \tag{24.10}$$

В конце БО по формуле (24.10) получаем $S^* \approx 45{,}63$ и $S_{Т/2} \approx 70{,}12$. После перехода от логарифмической шкалы к обычной, эти шаги разбиения будут равны $\exp(S^*) \approx 10^{20}$ и $\exp(S_{Т/2}) \approx 10^{30}$ (*эви*) (реф. 53).

## 25. ПСЕВДОРЯД НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

**Псевдоряд** натуральных чисел – так будем называть ряд натуральных чисел с какими-либо закономерными пробелами, т.е. когда отсутствие некоторых чисел (в традиционном «сплошном» натуральном ряде) обусловлено самим алгоритмом построения данного псевдоряда. Самые «интересные» для нас разновидности псевдорядов – это, скажем, все делители достаточно большого: тильдаобразного числа, верхнего лидера, *лидера плотности делителей* (ЛПД).

Представителем последнего, например, является число $N = 420$, имеющее 24 делителя: $d_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, \dots$ Число $N$=420 не является лидером мира №24 (это второе число с типом $T$=24), зато это первое число, «копирующее» (без пропусков) натуральный ряд в количестве семи первых чисел. Поэтому мы будем говорить, что число $N = 420$ – это ЛПД, имеющий семь *линейных делителей* ($ld$), т.е. у него параметр $ld = 7$. Про ЛПД много сказано в [14с. 33÷35], но нам сейчас важно знать, что если число $N$ – это ЛПД, то для его параметра верна такая оценка: $ld \sim \ln N$.

А у какого ЛПД его параметр $ld$ будет численно равен правой границе БО ($\sim 10^{61}$)? Очевидно, этим ЛПД будет некое число $N^* \sim \exp(10^{61}) \approx 10^Z$, где $Z \approx 0{,}434 \cdot 10^{61}$. Таким образом, “наш” натуральный ряд (в традиционном его понимании) – это *псевдоряд* чудовищно большого ЛПД, близкого к числу $N^*$.

А зачем нам вообще понадобилось понятие о псевдоряде? Эта идея «навеяна» физической гипотезой Смолина, поэтому сейчас самое время ознакомиться с ней (реф. 22), а потом читать дальше.

Пусть $N_n$ – это верхний лидер, имеющий чётный тип $T_n$ (т.е. имеющий $T_n$ делителей), где $n = 1, 2, 3, \dots$ – порядковый номер в общем ряду всех верхних лидеров частых миров. У каждого $N_n$ все $T_n$ его делителей – образуют псевдоряд, т.е. некий ряд целых чисел (выстроенных по возрастанию), у каждого из которых вычисляем *тип* (количество делителей у каждого делителя). Зная типы всех делителей, определяем количество *псевдоверхних лидеров* ($k_n$) – верхних лидеров внутри каждого $n$-го псевдоряда. Введем параметры:

$$F_n \equiv \ln\frac{N_n}{n}\,; \qquad f_n \equiv \ln\frac{T_n}{k_n}\,, \tag{25.1}$$

где $F_n$ – *усилие* по генерации $n$-го верхнего лидера в исходном ряде,

$f_n$ – *усилие* по генерации $n$-го псевдоверхнего лидера.

Отрезок натурального ряда [1; $N_n$] «порождает» $n$ верхних лидеров, а усилие $F_n$, “необходимое” для этого, растет близко к росту среднего типа $T_s$ (10.3), но, надо полагать, всегда $F_n < T_s$. Так, на отрезке [1; $10^{17}$] соотношение $(T_s - F_n)/T_s$ плавно убывает от 95% до 13%, и в конце Большого отрезка (БО), вероятно, будет около 5%.

У каждого верхнего лидера $N_n$ все $T_n$ его делителей (т.е. члены $n$-го псевдоряда) «порождают» $k_n$ псевдоверхних лидеров, причем усилие $f_n$, “необходимое” для этого, существенно меньше, чем $F_n$. Так, на отрезке [12; $10^{13}$] соотношение $f_n/F_n$ совершает хаотические колебания, линия тренда которых убывает от 0,22 до 0,19. В конце БО, по весьма грубой оценке, $f_n/F_n \approx$ 0,17÷0,05.

Таким образом, каждый $n$-й псевдоряд гораздо *легче* «порождает» своего верхнего лидера, чем это делает исходный верхний лидер $N_n$.

Очевидно, мы можем продолжить построение дочерних псевдорядов: возьмем число $N_n/2$ и, если оно целое (т.е. является делителем числа $N_n$), то найдем все его делители – получим $n$-й псевдоряд 2-го порядка (со своим усилием $f2$). Потом возьмем число $N_n/2/2$ и, если оно целое (т.е. является делителем числа $N_n/2$), то найдем все его делители – получим $n$-й псевдоряд 3-го порядка (с усилием $f3$) и т.д.

Проделав описанную процедуру над верхним лидером $N_n$ с типом $T_n$ = 10080, мы приходим к следующей гипотезе для многих верхних лидеров: у дочерних псевдорядов старших порядков усилие по генерации своих верхних лидеров, вообще говоря, убывает ($f_n > f2 > f3 > f4 >\ldots$). Получается, что дочерние псевдоряды *более приспособлены* к воспроизводству собственных верхних лидеров (реф. 22)?

**Энтропия псевдоряда** – это количество ($k$) всех камней в *псевдостволе* (по аналогии с энтропией натурального ряда, §24). Если псевдоряд порожден числом $N$ с чётным $T$, то такой псевдоряд составлен из малых ($d_1, d_2, \ldots, d_{T/2}$) и больших ($N/d_1, N/d_2, \ldots, N/d_{T/2}$) делителей числа $N$, а количество всех камней в псевдостволе равно:

$$k = \mathrm{A}(\sqrt{d_1}) + \mathrm{A}(\sqrt{d_2}) + \ldots + \mathrm{A}(\sqrt{N/d_1}) + \mathrm{A}(\sqrt{N/d_2}) + \ldots, \qquad (25.2)$$

где А – функция «антье». По сути дела, $k$ – это площадь псевдоствола, выраженная в планковских единицах (*эви*$^2$).

Для верхних лидеров частых миров на отрезке [$10^2$; $10^{17}$] имеем

$$k \approx \exp[0{,}9877\cdot(\ln N)^{0{,}8693}]. \qquad (25.3)$$

В конце БО, вероятно, получим $k \sim 10^{31}$ – энтропия псевдоряда, порожденного старшим верхним лидером на БО. Заметим, что это гораздо меньше суммы малых делителей ($m_2 \approx 10^{39}$) старшего верхнего лидера на БО. Таким образом, для псевдоряда не срабатывает правило, справедливое для “полноценного” натурального: $K \approx m^*$ – количество всех камней в Стволе на отрезке [1; $N$] близко к сумме малых делителей на этом же отрезке (§11) (реф. 22).

**Максимальная инфоэнтропия псевдоряда** ($H_{\max}$) – это сумма максимальных инфоэнтропий $h_{\max}$ всех его членов (см. §24):

$$H_{\max} \equiv \ln T_1 + \ln T_2 + \ldots + \ln T_T \approx \exp[1{,}1492\cdot(\ln N)^{0{,}6644}]. \qquad (25.4)$$

где $N$ – верхний лидер чётного мира $T$, породивший данный псевдоряд; $T_i$ – тип $i$-го делителя числа $N$ ($i$-го члена псевдоряда).

В конце БО по формуле (25.4) получаем $H_{\max} \sim 10^{13}$.

**Звериный псевдоряд**. Понятие о нём возникает из следующего вопроса: у какого верхнего лидера $N$=$10^Z$ из частых миров его тип достигнет значения $T \approx 8 \cdot 10^{60}$? Используя зависимости $T_{max} \approx$ f($N$) (см. формулы (124) и (132) в [10]) можно получить выражение:

$$T \sim \exp(1{,}5338 \cdot Z^{0{,}6954}), \qquad (25.5)$$

из которого получаем, что при $T \approx 8 \cdot 10^{60}$ будет Z $\approx$ 661. То есть когда показатель степени у верхнего лидера $N$=$10^Z$ будет близок к пресловутому *числу зверя* (666, см. [10, с.110],[49]), то количество всех его делителей ($T$) будет численно близко к правой границе БО.

Вот почему псевдоряд, порожденный таким верхним лидером мы назвали *звериным*. Его свойства могут оказаться любопытными, но одно очевидно – количество ($ld$) его первых делителей, в точности (без пропусков) “копирующих” натуральный ряд будет всего-навсего $ld \sim \ln N \sim \ln(10^{661}) \approx$ 1522 (первых натуральных чисел).

**Супербольшой псевдоряд**. Все $10^{61}$ чисел БО мы в принципе можем считать (и нет способа это проверить?)… первыми делителями супергигантского верхнего лидера $N_1 \sim \exp(10^{61})$ [заметим, что число $\exp(709) \equiv \boldsymbol{e}^{709} \approx 10^{308}$ – уже запредельное для компьютера, хотя показателю степени 709 ещё бесконечно далеко до числа $10^{61}$].

Об указанном числе $N_1$ можно сказать ещё следующее: порядковый номер этого верхнего лидера будет порядка $K_1 \sim 10^{81}$, а его тип $T_1 \sim \exp(10^{42})$. Именно столько ($T_1$) делителей и образуют *супербольшой псевдоряд*, а первые из этих делителей “копируют” БО (впервые среди $K_1$ верхних лидеров). Таким образом, рассматривая БО, мы вправе также думать, что имеем дело “всего лишь” с первыми делителями числа $N_1$, входящего в состав *Суперпирамиды* (см. рис. 11.1) – некого “отражения” возможной мульти-вселенной (реф. 21, 22).

## 26. БОГАТСТВО И БЕТА-ФУНКЦИЯ

**Богатство числа** $N$. Как-то великий Л. Эйлер посетовал на своих современников, что: “Из всех проблем, рассматриваемых в математике, нет таких, которые считались бы в настоящее время более бесплодными и лишенными предложений, чем проблемы, касающиеся *природы чисел и их делителей* ...». Сам Эйлер, безусловно, совершил прорыв в данном вопросе. Среди прочего он первым из математиков ввёл обозначение для *суммы всех делителей* натурального числа $N$, правда, он использовал символ $\int N$, а в настоящее время обычно используется символ «сигма»: $\sigma(N)$. Так, сумма всех делителей у числа $N$=21 будет равна $\sigma(21)=1+3+7+21=32$.

Очевидно, что для всех простых чисел ($P$) справедлива формула: $\sigma(P) = 1+P$. Для единицы получаем $\sigma(1) = 1$, а не 1+1, поэтому Эйлер замечает, что "…из последовательности простых чисел 1 должна быть исключена; 1 есть *начальное целое число*, ни простое, ни составное" (реф. 32). А вот 0 (нуль) делится на все числа, которых бесконечно много, поэтому, по мнению Эйлера, $\sigma(0)$ должно было бы быть *бесконечно большим числом*, однако сам Эйлер приводит пример того, что $\sigma(0)$ может принимать бесконечное число *конечных значений*, [14, с.29, 70]. И здесь следует особо подчеркнуть, что в начале натурального ряда скрыта некая тайна, поскольку, $\sigma(0)$ – далеко не нуль, а **1** – совершенно особое число (реф. 30, 32, 42).

Параметр $\sigma(N)$ был назван мной "*богатством*" ($S$) числа $N$. Поскольку, во-первых, некий термин явно напрашивался (вместо слов «сумма всех делителей»), а во-вторых, для целого ряда чисел $N$ распределение их богатства $S$ очень похоже на распределение… денежных доходов населения (реф. 47). О богатстве натуральных чисел много было сказано в книгах: [10, с. 64], [13, 46÷69], [14, с.25].

**Тильда** (испанский *tilde*, от латинского *titulus* – надпись) – знак в виде волнистой чёрточки (~). Этот знак обычно используют лингвисты и математики. Клавиатура любого компьютера непременно имеет клавишу с тильдой (под клавишей «Esc»).

Тильда «прижилась» в ГТНЧ с её первых шагов в 1997 г. Дело в том, что в натуральном ряде есть числа $N$, у которых относительно много целых делителей $d_i$. Но больше всего делителей – у *верхних лидеров* (§10), значение которых трудно переоценить в мире чисел. Если все делители верхнего лидера $N$ изобразить на графике $d_i = \varphi(i)$ с логарифмической шкалой по оси ординат (т.е. по вертикали откладываем $\ln d_i$, а по оси абсцисс $i$ =1, 2, 3, …, $T$), то получим волнистую линию в виде тильды с "приподнятым" правым краем (рис. 26.1). В таких случаях удобно говорить, что мы имеем дело с *тильдаобразным* числом $N$, у которого распределение делителей подчиняется некой *тильда-функции* или просто – *тильде*, т.е. функции $d_i = \varphi(i)$, формула которой нам пока не известна.

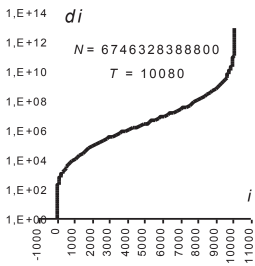

Рис. 26.1. Тильда числа $N$

**Бета-функция** (B, $\beta$ – бета, вторая буква греческого алфавита) или B-функция (Эйлера), эйлеров интеграл 1-го рода – это интеграл, вычисляющий площадь под графиком $y$ = f($x$) на отрезке [0; 1]:

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 \mathrm{f}(x)\,dx,\quad \text{где}\quad y=\mathrm{f}(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}. \qquad (26.1)$$

Согласно [43]: $p > 0$ и $q > 0$, хотя, вообще говоря, интеграл (26.1) вычисляется и при других значениях переменных $p$ и $q$. Великий Л. Эйлер ввел функцию (1) вероятно в 1730–31 г. Название «бета-функция» и обозначение $\mathrm{B}(p,q)$ ввёл Ж. Бине в 1839 г.

Оказывается, что при $p=q$ и $q>0$ бета-функция наилучшим образом описывает делители *тильдаобразных* чисел $N$ (скажем, начиная с $N\sim10^5$). При этом сама функция $y = \mathrm{f}(x)$ заметно упрощается:

$$y=\mathrm{f}(x)=(x-x^2)^{q-1}, \qquad (26.2)$$

принимая вид симметричного "корыта" (см. рис. 26.2, число $N$ указано ниже).

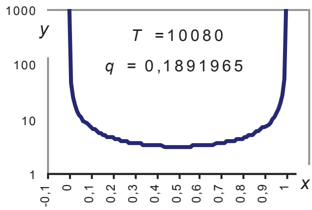


Рис.26.2. «Корыто» фукции $y$=f($x$)

**Алгоритм работы бета-функции** по описанию делителей тильдаобразного числа рассмотрим на примере верхнего лидера $N$ = 6 746 328 388 800 (пилотного числа), у которого нам известны (найдены):

$T$ = 10080 – тип числа $N$ (количество всех его делителей);

$d_н$, …, $d_к$ – делители $N$ из его *центрального интервала* (ЦИ, §22);

$K$ = 912 – *керн* числа $N$ (количество делителей на его ЦИ, см.§22);

$d_{T/2}$ – последний (старший) малый делитель числа $N$.

Алгоритм для $N$ с *чётным* $T$ выглядит следующим образом:

1). Разобьем отрезок интегрирования [0;1] на $T$ равных интервалов длиной $h=1/T$. Левая граница $i$-го интервала будет равна

$$x_i=(i-1)\cdot h=(i-1)\cdot T^{-1}, \quad \text{где} \quad i=1, 2, 3, \ldots, (T+1). \qquad (26.3)$$

То есть каждому порядковому номеру делителя $i$ = 1, 2, 3, …, $T$ мы ставим в соответствие число из отрезка [0; 1]: $x_i$ = 0, $1\cdot h$, $2\cdot h$, …, 1.

2). Найдем для каждого $x_i$ значение функции $y_i$ по формуле (26.2):

$$y_i=(x_i-x_i^2)^{q-1}=[(i-1)\cdot T^{-1}-(i-1)^2\cdot T^{-2}]^{q-1}. \qquad (26.4)$$

Параметр $q$ для начала можно взять, скажем, $q$ = 0,19. Именно из выражения (26.4) следует симметричность "корыта": см. $y_i$ при $i$=2 и $i$=$T$; при $i$=3 и $i$=$T$–1; и т.д. Вертикальная ось симметрии "корыта" (см. рис. 26.2) проходит через точку $i$=$T$/2+1, для которой нет пары.

3). Найдем площадь под "корытом" на каждом из интервалов:

$$S_i \approx (y_i+y_{i+1})\cdot h/2, \quad \text{где} \quad i=2, 3, \ldots, T \qquad (26.5)$$

Т.е. реальную площадь заменяем площадью трапеции высотой $h$.

4). Найдем всю площадь под "корытом" до $i$–го интервала:

$$B_i \approx S_2+S_3+S_4+\ldots+S_i \qquad (26.6)$$

Параметр $B_i$ – это некий эрзац (суррогат) бета-функции (26.1), т.к. последняя “суммирует” всегда до $i = T+1$. Однако для простоты изложения мы будем считать, что «работает» сама бета-функция.

5). Найдем у тильдаобразного числа $N$ некий *псевдо*параметр $Z$

$$Z = \left(\frac{\ln d_н}{B_н} + \ldots + \frac{\ln d_к}{B_к}\right)\cdot\frac{1}{K} \quad , \tag{26.7}$$

где индексы $н$, $н+1$, $н+2$, …, $к$ – это такие $i$, которые соответствуют всем делителям числа $N$ из его центрального интервала. Ясно, что Z – это среднее арифметическое всех отношений $\ln d_i/B_i$ на ЦИ, причем, по сути дела, $Z$ – функция параметра $q$ (для данного $N$).

6). Найдем $i$-й делитель числа $N$ через бета-функцию ($B_i$)

$$d_i{}^* = \exp(Z{\cdot}B_i)\ . \tag{26.8}$$

Выражение (26.8) мы будем называть *бета-экспонентой* числа $N$, поскольку это экспонента, у которой аргумент – это некий эрзац бета-функции ($B_i$) с псевдопараметром $Z$ и “скрытым” параметром $q$ (а также всем выше описанным алгоритмом). Бета-экспонента – это лучшее приближение к тильде (из всех известных мне на сегодня).

7). Изменяем параметр $q$ до тех пор, пока не получим равенства

$$\Delta \equiv d_{T/2} - d_i{}^* = 0, \tag{26.9}$$

где $i = T/2$. То есть устремляем к нулю разность ($\Delta$) между реальным последним малым делителем ($d_{T/2}$) и его приближением ($d_i{}^*$).

**Замечание**. Поиск $q$ (см. п.7 алгоритма) можно заметно ускорить, если считать, что $\Delta$ зависит линейно от $q$, то есть $\Delta = a + b{\cdot}q$. Тогда вместо п.7 вычисляем $\Delta_1$ и $\Delta_2$ при соответствующих, скажем, $q_1$=0,18 и $q_2$ =0,19, а затем находим явно улучшенное значение $q$:

$$q = -a/b, \quad \text{где} \quad b = (\Delta_1 - \Delta_2)/(q_1 - q_2), \quad a = \Delta_2 - b{\cdot}q_2. \tag{26.10}$$

Если при найденном $q$ снова $\Delta \neq 0$ (вообще говоря, “вгонять” $\Delta$ в нуль – не обязательно), то полагаем $q_1 = q$, а $q_2$ берем гораздо ближе к $q_1$ (чем делали прежде) и опять вычисляем по формулам (26.10).

Работая по указанному алгоритму, мы находим для пилотного числа $N$ параметры $q$ = 0,1891965 и $Z$ = 3,5731596, т.е. находим *бета-экспоненту* пилотного числа (см. рис. 26.1) (реф. 58).

**Погрешность бета-экспоненты** пилотного числа $N$ достаточно рассмотреть только для его малых делителей $d_i$ (т.к. большие делители – это $D_i = N/d_i$), причем с номерами $i \geq 28$. Ведь при $i$ =1, 2, 3, …, 28 делители просто “копируют” начало натурального ряда: $d_i = i$.

При $i = 29 \div 4340$ (до начала ЦИ у пилотного числа $N$) относительная погрешность (ОП), совершая хаотические колебания, в целом убывает от 58% до 0,5% по экспоненциальному закону:

$$ОП < E{\cdot}\exp(-G{\cdot}i)\ , \tag{26.11}$$

Для пилотного $N$ имеем $E = 0{,}6$ и $G = 0{,}00111$, а на ЦИ получаем максимально возможную точность: ОП = ± 0,5%. Кстати, не только сама бета-экспонента, но и её ОП *симметрична* относительно последнего малого делителя (см. рис.26.3).

При малых $i$ лучше, чем бета-экспонента, работает формула

$$d_i^* = \exp\{\exp[U\cdot(\ln i)^w]\}, \tag{26.12}$$

у которой для пилотного $N$ при $i = 29 \div 2026$ имеем ОП = ±6% ($U = 0{,}4681$; $w = 0{,}8063$). Вероятно, для малых $i$ можно подобрать и другие формулы, работающие лучше бета-экспоненты. Но только последняя способна *одним махом* описать *все* делители числа $N$. Делители $d_i^*$ у бета-экспоненты приводят даже к меньшим погрешностям при построении «колокола» *натурального разбиения* числа $N$, нежели когда мы используем формулу Лапласа-Гаусса [14, с. 47].

**Убывание параметра** $q$ у верхних лидеров $N$ частых миров не вызывает сомнения. После $N \sim 10^5$ бурные колебания параметра $q$ затихают и на отрезке $[10^{11};10^{15}]$ имеем $q=0{,}18\div0{,}21$ и линию тренда:

$$q \approx 0{,}2257 - 0{,}0012\cdot\ln \boldsymbol{N} \text{ (при } R^2=0{,}5194). \tag{26.13}$$

Т.е. с ростом $N$ параметр $q$ убывает, и в конце БО формула (26.13) дает $q \approx 0{,}0574$. Одновременно с этим растут параметры $Z$ и $B_{T/2}$:

$$Z \approx 1{,}4162 + 0{,}0733\cdot\ln N \quad \text{(при } R^2=0{,}9593\text{, см. гл.I §3)}, \tag{26.14}$$

$$B_{T/2} \approx 2{,}5054 + 0{,}0545\cdot\ln N \quad \text{(при } R^2=0{,}9099\text{, см. гл.I §3)}. \tag{26.15}$$

Если по данным формулам вычислить последний малый делитель в конце БО, то получим: $d_{T/2}^* = \exp(Z\cdot B_{T/2}) \approx \exp(11{,}69\cdot10{,}15) \approx 10^{51}$, что на 21 порядок (!) превосходит реальное значение $d_{T/2} \approx 10^{30}$. Значит, при $N >> 10^{15}$ формулы (26.14) и (26.15) приводят к колоссальному завышению, а формула (26.13), вероятно, – к занижению числового значения $q$. Параметр $q$, скорее всего, *асимптотически* устремляется к нулю, т.е. будет больше, чем по формуле (26.13).

**Закон распределения богатства** (ЗРБ) – это простая функция, которая, вообще говоря, также способна описать делители тильдаобразного числа $N$, но хуже, чем бета-экспонента. При этом ЗРБ как бы “распределяет” *богатство* числа $N$ (сумму всех его делителей) между делителями. Осознав «работу» эрзаца бета-функции ($B_i$), мы можем объяснить и “механизм” возникновения ЗРБ. Покажем это на примере всё того же пилотного числа $N$. Оказывается, для него можно записать следующее выражение (при $R^2=0{,}9999$, см. гл.I §3):

$$B_i^* \approx W - V\cdot[\ln(T/i)]^p, \tag{26.16}$$

где $W = 8{,}2187$; $V = 4{,}5025$; а $p = 0{,}271$ подбирался так, чтобы ОП у $B_i^*$ для большинства малых делителей ($i = 1576, \ldots, T/2$) лежала в диапазоне ±0,2% (или чтобы величина $R^2$ была ближе к 1).

С другой стороны, мы имеем формулу (26.8): $d_i^* = \exp(Z \cdot B_i)$, где $Z = 3{,}5731$. Поэтому, считая, что $B_i = B_i^*$, мы и получаем ЗРБ:

$$d_i^* = S \cdot \exp\left( -A \cdot \left( \ln \frac{T}{i} \right)^p \right), \tag{26.17}$$

где $S = \exp(Z \cdot W) \approx 5{,}6729 \cdot 10^{12}$; $A = Z \cdot V \approx 16{,}0881$; $i = 2, 3, \ldots, T$ (при $i > T/2$, конечно, лучше использовать малые делители: $D_i = N/d_i$). Вероятно, если для числа $N$ можно построить бета-экспоненту (26.8), то значит можно построить и его ЗРБ (26.17) (найти $S$, $A$, $p$).

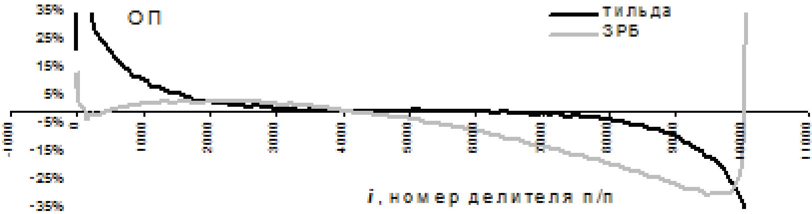


Рис.26.3. Относительная погрешность (ОП) бета-экспоненты (тильды) и ЗРБ у пилотного $N$

У 20% малых делителей $d_i^*$ имеем abs(ОП)<1% – это в случае ЗРБ, а в случае применения бета-экспоненты – у 40% малых делителей $d_i^*$. То есть ЗРБ – более грубый “инструмент” (см. рис. 26.3).

Сумма всех $d_i^*$, найденных по формуле (26.17), составляет 74% от *богатства* пилотного числа $N$, вот почему формулу (26.17) логично называть ЗРБ. Кроме того, формула (26.17) в ряде случаев может неплохо описывать распределение денежных доходов населения (реф. 47). Возможно, с этим ещё лучше справится бета-экспонента, но работать с ней гораздо сложнее, чем с ЗРБ.

**Замечание**: В предыдущих книгах, ещё не зная о возможностях бета-функции (бета-экспоненты), именно ЗРБ я и называл *тильда-функцией* (*тильдой*). Также будем поступать и впредь (например, в реф. 43, 46, 47, 48, 49, 58), всегда помня о том, что ЗРБ – это весьма грубое описание реально существующих закономерностей.

# Глава IV. **Р Е Ф Л Е К Ц И И**

О термине «***рефлекция***» сказано в гл. III §6. Рефлекции между собой почти не связаны, поэтому их можно рассматривать в любом порядке. «Размер» рефлекции не влияет на её зн*а*чимость (реф. 43).

## 1. ЧТО ТАКОЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ МИРЫ?

В физике есть целый ряд понятий и явлений, которые с полным правом можно трактовать как некий другой мир, «параллельный» нашему (миру, доступному нам в ощущениях). Например:
– свернутые (дополнительные циклические) измерения в ТС (§13);
– нуль-брана с другим пространством-временем (§19), (реф. 30);
– квинтэссенция (Λ-член) – загадочная материя (§10), (реф. 19);
– счастицы – частицы-суперпартнеры (§12), [3, с.119], [21, с.201];
– зеркальные частицы (§9), зеркальные партнеры у ПКЯ (§14);
– скрытая (темная) материя, составляющая 90% Вселенной (§9);
– антивещество (антиматерия, антимиры) (§9), (реф. 20);
– мулти-вселенные, в т.ч. Линде (реф.21) и Смолина (реф.22);
– кротовые норы и чёрные дыры во Вселенной (§15);
– зеркальные многообразия эквивалентных ПКЯ [3, с.171];
– зеркальная Вселенная в теории Б.М. Левина [10, с. 192].

**В мире чисел**, во-первых, есть некие «отражения» физической реальности, т.е. мир чисел (как часть мира Платона, см. §2) является «параллельным» физическому миру (об этом и рассказывается в *рефлекциях* ГТНЧ). Во-вторых, «внутри» числовой вселенной (в мире Платона) также можно выделить некие параллельные миры. Приведем несколько примеров, поясняющих данное утверждение:
– частые миры (с чётным типом *T*) и редкие (нечётные) миры (§10);
– мир чисел с данным типом *T* (он отличается от мира с другим *T*);
– пять классов натуральных чисел (в каждом свои законы?, см.§8);
– интервал (0; 1) и натуральные числа, больше 1 (реф. 30, 42);
– Пирамида делителей и обратная ей – белая Пирамида (реф. 42);
– разные по природе числа (действительные, комплексные, …) (§7);
– классическая теория чисел и алгебраическая геометрия [30, с.218];
– классическая теория чисел и теория функций [30, с.219]. Здесь имеется в виду аналогия между разными областями математики. Нерешенные проблемы, скажем, области *X* можно решить, изучая соответствующие проблемы области *Y*, если установить параллели между этими областями (согласно т.н. *философии параллелизма*).

## 2. СИНГУЛЯРНОСТЬ И РАСШИРЕНИЕ

Это условия, при которых зарождалась наша Вселенная (§17). Сингулярностью математики называют те точки, в которых функция или её производные обращаются в бесконечность. Особенно любопытными представляются сингулярности, возникающие по мере того, как процесс разворачивается во времени. В этом случае говорят о развитии процесса (или росте решения) *в режиме с обострением*. Нелинейный мир полон таких режимов (ударные волны, физика плазмы, демография, и т.д., в т.ч. "последние вопросы" – проблемы начала и конца Вселенной). Как "заглянуть" за момент обострения, как раскрыть его механизм? Это крайне сложный и пока не решенный учеными вопрос.

Под "расширением" в живой природе, вероятно, следует понимать тот факт, что существующие сейчас биологические виды *непрерывно* меняются, приспосабливаются друг к другу, т.е. происходит *коэволюция*. Без последней наша биосфера обречена на вымирание –это доказано в синергетике (в рамках "парадигмы сложности"). Вещество тела любого живого существа претерпевает постоянные изменения и обновления. Это справедливо, в частности, и для клеток головного мозга (реф.51), которые образуются (восстанавливаются) и после рождения (совсем недавно считалось, что это не так).

**В мире чисел** сингулярность и расширение – это условия "зарождения" натурального ряда. Подробно об этом сказано в §6.

## 3. О ДИСКРЕТНОСТИ ВСЕГО СУЩЕГО

На микроуровне мир дискретен. Но законы природы в современной физике сформулированы на языке дифференциальных уравнений, оперирующих с гладкими и непрерывными функциями. Поэтому теории, сформулированные на дискретном языке, наверняка, могли бы существенно повлиять на все естествознание. Заметим, что большинство интересных и важных задач мы не умеем решать без компьютера, а он оперирует именно дискретными сущностями.

Есть веские основания считать пространство дискретным – своеобразной решеткой с ребрами и узлами [23, с. 16]. О дискретности говорят и следующие факты: колебания струны в ТС допускают только *целое* количество волн; топологическое число струны – любое *целое* число; энергия колебания струн может иметь только *целые* значения. Масса элементарной частицы определяется энергией колебания внутренней струны этой частицы: внутренние струны более тяжелых частиц совершают более интенсивные колебания, струны легких частиц колеблются менее интенсивно. Чем больше амплитуда и чем короче длина волны, тем больше энергия.

**В мире чисел** все делители – это *целые* (дискретные) числа. В проблеме поиска некой функции $T_{max} = f(N)$ для описания верхних лидеров (в частых и редких мирах, см. §10,12) "виновата" дискретность натурального ряда. Возможно, что аналогичным образом и для реального пространства-времени именно его *дискретность* – первопричина главных проблем теоретической физики (см. гл.II §1).

## 4. УРОВНИ СЛОЖНОСТИ МАТЕРИИ

Суперструны – самый глубокий уровень материи с невообразимо сложной комбинаторикой всех состояний (§11, 12). Но стоит подняться на ступеньку выше, скажем, к кваркам и лептонам, как всё заметно упрощается (§4, 8). Следующая ступенька – протоны, нейтроны, ядра атомов – этот уровень материи изучен физиками ещё лучше (реф. 8, 9, 10), [10, с.167], [21], [34], [38].

**В мире чисел** целые делители, которые строят Пирамиду (§11), – образуют вполне доступный уровень сложности (его исследовать относительно легко). Но в рамках ГТНЧ можно открыть бесконечно много других уровней сложности. Например, у *простых чисел* (§9) можно рассматривать т.н. *орбиты* чисел – разность между последующим числом и данным числом (так, все числа-близнецы лежат на второй орбите). Исследовать орбиты чисел гораздо сложней, чем делители этих же чисел [10, с.33÷44], [14, с. 14]. Комбинаторика всех возможных значений здесь резко возрастает.

В ряде миров числа как бы объединяются в некие *серии* (как в мире №4, см.§16), для которых характерны общие закономерности.

## 5. ГДЕ «ЗАКОДИРОВАНЫ» ВСЕ ТАЙНЫ?

Молекула дезоксирибонуклеиновой кислоты (ДНК) – это носитель генетической информации, самая главная молекула в живой материи [10, с.199]. Основная масса ДНК сосредоточена в ядре клетки, причем всего-навсего $6{\cdot}10^{-12}$ г ДНК яйцеклетки ($10^{-16}$ часть веса всего организма) кодирует свойства всех белков человека. Также можно сказать, что яйцеклетка (будучи $10^{-14}$ частью всех клеток взрослого человека) кодирует свойства всего зрелого организма.

Условные размеры ФЧ (*кварков*, *лептонов*, см. §4), вероятно, составляют $10^{14}{\div}10^{16}$ *эви* (т.е. на 4÷2 порядка меньше аттометра – глубины проникновения физиков-экспериментаторов в микромир). Причем теория суперструн (ТС), по сути дела, утверждает, что именно на планковском размере (составляющем $10^{-14} \div 10^{-16}$ часть от условного размера ФЧ), “кодируются” все свойства ФЧ (§11).

**В мире чисел** почти все формулы [функции $y = f(x)$] начинают “работать” (дают малую ОП), когда аргумент дорастает до значений $x = 10^{14} \div 10^{16}$. Отрезок $[0;\ 10^{16}]$ – это некий *фундамент* натурального ряда (дальше с этим рядом почти ничего “интересного” не происходит), причем $10^{-14} \div 10^{-16}$ часть фундамента (первые числа ряда) “кодирует” все бесконечные свойства натурального ряда.

Любопытно, что современные компьютеры дают возможность исследовать именно *фундамент* ряда (а дальше проблемы с вычислением резко возрастают). И если бы мир чисел мог “отражать” реальную структуру пространства-времени на размерах менее аттометра, то именно *теория чисел* подсказала бы ответы на самые фундаментальные вопросы физики (что пока больше похоже на фантастику). Причем «подсказки» мира чисел могут быть самыми неожиданными, скажем, в части… предельного КЗП (реф. 6).

## 6. ЗАГАДКА ПРЕДЕЛЬНОГО КЗП

В физике существует интересный вопрос – чему равен предельный *коэффициента заполнения пространства* (КЗП). Согласно оценкам ученых (1988 г.) предельный КЗП ≤ 77,84% [10, с.113]. Заметим, что укладка идеальных одинаковых шаров даст только КЗП = 74,05% – эту чисто геометрическую задачку решит и школьник.

**Мир чисел**, возможно, «подсказывает» искомое наукой значение: предельный КЗП ≤ 77,5568…%, что «улучшает» оценку ученых на 0,28% (и это очень много!). Поясню, как я пришел к такому «открытию». Дело в том, что максимально возможная доля мира №8 (при $N = 999994$) равна 22,4432…% (§16). Тогда на отрезке [1; 999994] минимально возможная доля всех остальных миров (без мира №8) будет равна 100 % – 22,4432 % = 77,5568 %, причем на бóльших отрезках $[1;\ N]$ указанные дóли недостижимы. После *эви*-конвертации (§6) числа $N$=999994 получаем, что это всё происходит в микромире при $\sim 10^{-38}$ сек, то есть на размере $\sim 10^{-29}$ м (что ниже глубины проникновения ученых в микромир). Полученные таким образом 77,5568 % мы и принимаем за… предельный КЗП.

## 7. СКОЛЬКО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ?

Согласно ТС элементарных частиц бесконечно много (§11). Из ТС следует, что за редким исключением это будут очень тяжелые частицы, которые обычно распадаются на более легкие частицы.

**В мире чисел** каждому «сорту» элементарных частиц можно (?!) сопоставить все числа $N$ с определенным *типом* $T$, т.е. с определенным количеством делителей (§10). В натуральном ряде количество разных типов (*миров*) – бесконечно много, однако, на БО их количество ограниченно: нечётных типов – 120000, а чётных – 687430 (числа спорные, но их порядок – вне сомнений [10, с.60, 76]).

При последовательном движении вдоль натурального ряда у достаточно больших чисел $N$ впервые возникающие типы $T$ *за редким исключением будут очень «тяжелыми»* (в конце БО – вплоть до $T \approx 10^{12}$). И, образно говоря, такие типы *«распадаются» на более «легкие»*, т.к. следующее число $N$ с большим типом $T$ появится «не скоро», а вот малые типы будут продолжать «сыпаться, как из рога изобилия» (например, простые числа, у которых тип $T = 2$).

Итак, суть данной рефлексии д.б. понятна. Осталось только (!) проверить, что в настоящее время во Вселенной количество «сортов» элементарных частиц примерно равно числу 120000 + 687430 !

## 8. РАДИУС АТОМНОГО ЯДРА

Атомное ядро – это почти сфера с радиусом $\boldsymbol{R \approx a \cdot A^{1/3}}$, где $A$ – число нуклонов в ядре (массовое число атома), $a \approx (1{,}1 \div 1{,}4) \cdot 10^{-15}$ м, что близко к радиусу действия ядерных сил. Т.е., концентрация нуклонов в ядре постоянна и равна $A/[(4/3) \cdot \pi \cdot R^3] \approx 1{,}4 \cdot 10^{44}$м$^{-3}$ (нуклонов в кубическом метре). Если принять, что радиус Вселенной равен $1{,}6 \cdot 10^{26}$м, а количество нуклонов в сфере такого радиуса – около $2 \cdot 10^{80}$, то получим, что средняя концентрация нуклонов во Вселенной ~12 нуклонов в кубическом метре, т. е. в $10^{43}$ раз меньше, чем в ядре атома (реф. 54). Ядерная материя (квантовая сверхтекучая жидкость) – чрезвычайно плотный вид материи ($10^{14}$г/см$^3$), причем плотность числа нуклонов в ядре почти постоянна в центральной части ядра и *экспоненциально* убывает на периферии.

**В мире чисел** есть необъяснимое «отражение» формулы для радиуса атомного ядра: $\boldsymbol{N \approx 1{,}817 \cdot M^{1/3}}$, где $M$ – «масса» всех камней (и черных – делителей, и белых – не делителей) в Пирамиде высотой $N$, т.е.

на отрезке [1; $N$] (§11), [10, с. 22]. Если число $N$ условно принять за диаметр шара, то концентрация «массы» $M$ в таком шаре будет постоянна и равна $M/(\pi \cdot N^3/6) = 1/\pi \approx 0{,}318$. Также см. (реф. 9).

## 9. ФОРМУЛА ДЛЯ ИЗОТОПОВ АТОМА

Атомные ядра с одинаковым числом протонов $Z$, но с различным числом нейтронов $N$, а значит и с различным массовым числом $A \equiv N+Z$, называют *изотопами*. Известно около 350 β-стабильных (β-нерадиоактивных) ядер, для которых $Z \approx A/(1{,}98+0{,}015 \cdot A^{2/3})$. Если в легких β-стабильных ядрах числа протонов и нейтронов в среднем одинаковы, то в тяжелых ядрах – нейтронов примерно в 1,6 раза больше, чем протонов (почти «золотое сечение»?, см. реф. 31).

**В мире чисел** угадываются некие “отражения” многих понятий ядерной физики. Так, и формулу для изотопов можно записать, скажем, в таком виде $Z \approx 0{,}5772 \cdot A^{0{,}9347} \approx C \cdot A^{\ln(8/\pi)}$, где $C$ – это *постоянная Эйлера* (ФМК, см. §10), что дает $ОП = \pm 5\%$ относительно формулы, принятой в ядерной физике. Также см. (реф. 8).

## 10. ПЛАНЕТАРНАЯ МОДЕЛЬ АТОМА

В квантовой механике для многоэлектронного атома *приближенно* можно рассматривать квантовые состояния отдельных электронов и характеризовать каждый из них совокупностью 4-х квантовых чисел: $n$, $l$, $m_l$, $m_s$ (где $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$; $l = 0, 1, 2, 3, \ldots, n{-}1$; $m_l = l, l-1, \ldots, -l$; $m_s = \pm 1/2$) [47, с.37]. При этом энергия электрона зависит только от чисел $n$ и $l$. Согласно *принципу Паули* любые два электрона в атоме должны отличаться хотя бы одним из 4-х квантовых чисел. При заданных $n$ и $l$ число различных состояний равно $2 \cdot (2 \cdot l+1)$ – числу комбинаций значений $m_l$ и $m_s$. Поэтому максимальное количество ($K_{max}$) электронов, которые могут занимать $n$-ую электронную “оболочку” (т.е. общее число различных состояний с заданным $n$) будет равно: $K_{max} = \sum 2 \cdot (2 \cdot l+1) = 2 \cdot n^2$. Иначе говоря, уровням, определяемым $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ соответствуют 2, 8, 18, 32, …, $2 \cdot n^2$ различных квантовых состояний (природа “ограничилась” цифрой 32, см. “Периодическую систему элементов Д.И. Менделеева”).

**В мире чисел** обратимся к Пирамиде (рис.11.1). Пусть $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$ – это номер её ступени, т.е. мы добавили гипотетическую нулевую ступень с единственным числом, скажем, – нуль. Итак, при $l = 0$ имеем $N = 0$; при $l = 1$

имеем $N = 1, 2, 3$ и т.д. Тогда количество натуральных чисел $N$, «расположенных» на $l$-й ступени будет равно $k = 2 \cdot l + 1$, а суммарное количество всех чисел на ступенях $l = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$ будет вычисляться по формуле $K = \sum(2 \cdot l+1) = n^2$. Причем эта формула для Пирамиды почти повторяет формулу из физики для $K_{max}$ (максимального количества электронов в $n$-й «оболочке» атома), которое оказывается в 2 раза большим (как если бы в физике атома мы рассмотрели только положительные квантовые числа $m_s = +1/2$).

## 11. ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

Ещё в 1827 г. Р. Броун первым заглянул в микромир, где царит хаос и вероятностные законы. И мы можем увидеть в микроскопе беспорядочные движениях малых (в несколько микрон и менее) частиц, взвешенных в жидкости, происходящих под действием толчков со стороны молекул жидкости. Эти частицы движутся независимо друг от друга и описывают сложные зигзагообразные траектории (блуждают). *Броуновское движение* не ослабевает со временем и не зависит от химических свойств среды. В результате «бомбардировки» молекулами броуновская частица меняет величину и направление своей скорости примерно $10^{14}$ раз в секунду. *Теория случайных блужданий* была построена А. Эйнштейном и составила предмет одной из трех статей 1905 г., определивших пути развития физики 20 века (две другие статьи посвящены теории относительности и теории световых квантов). Теория Эйнштейна гласит, что если частица в ходе блужданий (из стороны в сторону «прямолинейным шагом» $S$) пройдет суммарный путь $N$ (длина зигзагообразной траектории), то в итоге частица сместится из исходной точки на расстояние $i$:

$$i = \sqrt{N \cdot S} \quad . \qquad (11.1)$$

Теорию блужданий легко проверить. Так, в густом незнакомом лесу в пасмурную погоду вам вряд ли удастся выдержать прямолинейный отрезок $S$ более 25 м («шаг» блужданий). Пусть за пять часов зигзагообразных (скорее всего) блужданий вы прошли в лесу суммарный путь $N = 10$ км. Тогда вы сместитесь из исходной точки, вероятней всего, на $i = (10000 \cdot 25)^{0,5} = 500$ м. Вам остается только проверить это число «на местности», и чем больше таких проверок вы сделаете, тем ближе будет *средний* результат к 500 м.

Молекулу ДНК (реф. 5) постоянно «бомбардируют» окружающие молекулы воды, в итоге она свернута в полимерный клубок, постоянно меняющий форму. Характер *изгибных колебаний* в ДНК напоминает хаотичный путь броуновской частицы, причем размеры клубка ДНК описываются все той же формулой $i = (N{\cdot}S)^{1/2}$, где $N$ – длина молекулы, а $S \approx 10^{-7}$ м – определяется тем, насколько молекула ДНК сможет выпрямиться (т. е. жесткость двуспиральной ДНК).

**В мире чисел** (в Пирамиде делителей, см. §11) также «спрятана» формула (11.1), правда, здесь $S = 1$ (шаг «блужданий» по натуральному ряду) и мы получаем $i = \mathrm{A}(N^{1/2})$, где А – функция «антье» (целая часть $N^{1/2}$), $N$ – произвольное натуральное число, а $i$ – это номер ступени Ствола, на которой находится число $N$. Кроме того, максимально возможный *малый делитель* числа $N$, будет равен $d = \mathrm{A}(N^{1/2})$.

Заметим также, что из основных характеристик Пирамиды и Ствола можно сконструировать некие относительные параметры [10, с. 24]: $P^*/p^*$; $K/k$; $P/p$; $M^*/m^*$, у которых общая формула имеет вид $i=(N{\cdot}S)^{1/2}$, где величина $S$ в зависимости от конкретного параметра ($i$) изменяется в пределах от $\pi^4/256 \approx 0{,}38$ до $\pi^4/64 \approx 1{,}52$.

## 12. ДУАЛИЗМ В ФИЗИКЕ И МИРЕ ЧИСЕЛ

Физикам хорошо известен *дуализм корпускулярно-волновой*. Его суть: в основе квантовой теории лежит представление о том, что в поведении микрообъектов проявляются как корпускулярные, так и волновые черты. Так, свет, имеющий волновую природу, в ряде случаев обнаруживает сходство с потоком частиц (корпускул – фотонов). Согласно КМ всё, что осциллирует с частотой $\nu$, может существовать только в виде дискретных порций с массой $(h/2\pi)\cdot \nu/c^2$. Мир природы состоит из более тонких составляющих (суперструн?), а представления о “частице” и “волне” справедливы лишь частично.

Из учебников КМ известно, что именно наблюдатель «превращает» *волну*, $\Psi$-функцию, комплексную амплитуду в *частицу*. При этом говорят о *редукции* волнового пакета (R-процедуре), причем, возможно, с ней (а точнее, с объективной редукцией) связан феномен человеческого сознания (реф.51). R-процедура – это «больной ребенок» КМ, один из немногих процессов, по поводу которого физики «приговаривают» и ещё не умеют писать интересные содержательные формулы [23, с. 7, 225].

**В мире чисел** также обнаруживается некий дуализм: при разбиении тильдаобразного натурального числа $N$ шагом $S$=1 – число $N$ проявляет свойства *дискретной* случайной величины (ДСВ), а при разбиениях любым другим шагом ($S \neq 1$) – число $N$ проявляет свойства *непрерывной* случайной величины (НСВ) (§22, 23), [14, с.45].

## 13. ЗАКОН ОСТЫВАНИЯ ВСЕЛЕННОЙ

Этот закон приведен в §18 (формула 18.1). Если возраст Вселенной ($N$) выразить в *эви*, а энергию ($E \sim 10^{28}$ эВ) и температуру ($T \sim 10^{28}$ К) при «рождении» Вселенной принять равными единице, то получим закон *относительного* убывания $E$ ($T$):

$$E\,(T) \sim 8 \cdot \pi^{-2} \cdot N^{-0,5} \sim 0,811 \cdot N^{-0,5}. \qquad (13.1)$$

Любопытно, что аналогичной формулой выражается относительная флуктуация ($\xi$) внутренней энергии газа (в сосуде), состоящего из $N$ одноатомных молекул: $\xi \sim (2/3)^{0,5} \cdot N^{-0,5} \sim 0,816 \cdot N^{-0,5}$ [33, с. 128]. Точно также флуктуируют около своих средних значений такие макровеличины как: температура, давление, энтропия (при данном равновесном состоянии макроскопического объекта, скажем, сосуда с газом). Учитывая, что 1 см$^3$ газа при нормальном давлении содержит $N \sim 10^{19}$ молекул, то на практике мы пренебрегаем флуктуациями микровеличины $\xi$, рассматривая средние значения макровеличин в качестве истинных.

**В мире чисел** формула (13.1) – это ни что иное, как отношение суммы всех *малых* делителей (из Ствола) к сумме всех делителей в Пирамиде высотой $N$ (§11).

## 14. ЗАГАДКИ НЕОДНОРОДНОСТИ

В космических масштабах наша Вселенная состоит как бы из почти пустых ячеек пространства, в стенках («плоскостях») между которыми заключена бóльшая часть *скоплений* галактик (с характерным размером $\sim 10^{23}$ м). В центре таких скоплений плотность галактик в $10^3 \div 10^6$ раз (реф. 37) превышает среднюю плотность галактик во Вселенной. *Сверхскопления* галактик ($\sim 10^{24}$ м) – это чаще всего области пересечения стенок (т.е. «ребра» пространственных ячеек). Астрóномы насчитывают около 50 сверхскоплений (в крупнейшем из них – до 29 скоплений). К настоящему времени также обнаружена одна *цепочка сверхскоплений* ($\sim 3 \cdot 10^{25}$ м), вытянутая вдоль стенок пустых ячеек. Но на ещё бóльших масштабах Вселенная пока выглядит однородной, и, скорее всего, далее иерархия, в которой каждое последующее образование отделено от ему подобных все бóльшими промежутками пустого пространства, обрывается.

Любопытно, что выше описанные закономерности макрокосмоса проявляются и в микромире. Например, *кристалл* ограничен плоскостями, которые гуще всего усеяны узлами (это центры атомов кристалла), а эти плоскости пересекаются по ребрам, которые, в свою очередь, наиболее густо заселенными узлами [10, с. 234].

**В мире чисел** есть некие «отражения» космической неоднородности, например, *спираль Улама*, спирали миров [10, с. 25]. Некие “ячейки” и “стенки” можно поискать и в Пирамиде (§11). Мы рассмотрим только один пример подобной (и неудачной?) попытки.

Пусть $N$ – лидер частого мира (ЛЧМ). В Пирамиде он стоит на Ступени с номером $i$ =A($\sqrt{N}$). Введем параметр $X$, указывающий положение $N$ на «его» ступени $X \equiv (N - N_{н}+1)/(N_{к} - N_{н}+1)$, где $N_{н} = i^2$ – начало, а $N_{к} = i^2 + 2i$ – конец $i$-й ступени ($0 < X \leq 1$).

Вычислим $X$ у первых 4273 ЛЧМ (вплоть до $N$ ~$10^{22}$). У каждого ЛЧМ его $X$ попадет в один из 10 полуинтервалов (с правой границей $G$ = 0,1; 0,2; 0,3; …; 1). В итоге каждому $G$ будет соответствовать некое количество ($K_G$) ЛЧМ, попавших в данный полуинтервал (см. рис.14.1). Причем *линия тренда* ($K_G = 0{,}0897 + 0{,}0188 \cdot G$, при $R^2 = 0{,}7545$) указывает на то, что очередной ЛЧМ, вообще говоря, «предпочитает» появиться в конце ступени Ствола, нежели в её начале.

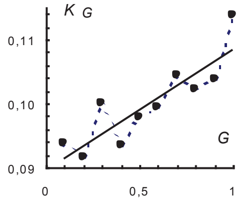

Рис.14.1. $K_G = f(G)$

## 15. ВРЕМЯ – НЕПОСТИЖИМАЯ ЗАГАДКА

Все основные уравнения физики *симметричны* во времени. Так, если «запустить» комету вокруг Солнца вдоль той же траектории в обратном направлении, то она пройдет точно по ней в полном соответствии с законами физики. Вся классическая механика, вместе с U-частью квантовой механики (КМ, §3), полностью обратима во времени, т.е. в них будущее и прошлое совершенно равноправны. А вот такого понятия, как «сейчас» (*настоящее*, когда мы действуем, момент «доступа» к Вселенной), согласно СТО (§2), на самом деле вообще не существует (для каждого наблюдателя «сейчас» своё). Всё это противоречит нашим субъективным ощущениям потока времени (перемещениям момента «сейчас») [10, с. 192].

Но в R-части КМ имеется физическая неэквивалентность обоих направлений времени [23, с. 311], и в принципе закон монотонного возрастания *энтропии* (§20) мог бы быть её макроскопическим выражением, но пока этот вопрос остается открытым. Возможно, что физической причиной возрастания энтропии и необратимости процессов во времени является неустойчивость динамических систем, однако при этом надо принять такую аксиому (Д.С. Чернавского): корреляции порядка «обратный гугол» ($10^{-100}$, см. реф. 40) и выше между случайными величинами д.б. признаны отсутствующими, даже если они возникают в аналитических расчетах.

Удивительно низкая энтропия, которая вокруг нас (сам человек – система с пренебрежительно малой энтропией), составляет наиболее загадочную сторону второго начала термодинамики (ВНТ). Не менее удивительны начальные условия, которые могли привести к возникновению нашей Вселенной в результате Большого взрыва: объем той части *фазового пространства* [23, с. 169, 299] возможных вселенных, в котором возникает реальность, близкая к нашей, с «правильным» ВНТ, составляет всего $1/e^A$, где $A = 10^{123}$ (почти невероятное событие, и логично предположить, что просто физики до сих пор не знают чего-то очень существенного) [23, с.10] (реф. 22).

Существует концепция *скрытого времени* (П.В. Куракина). Суть её в том, что время, прошедшее в данной точке есть количество поглощенных квантов энергии в этой точке. Но тогда мы можем ввести в теорию набор переменных, которые не являются физически наблюдаемыми величинами, а входят только в математический аппарат теории. Эти переменные эволюционируют в т.н. “внутреннем времени теории”, которое не тождественно физическому времени и является математическим понятием. При этом элементарные события (такие как поглощение фотона атомом) являются “точками сшивки” внутреннего времени и физического времени [23, с. 16].

Напомним, что согласно ОТО, чем сильнее поле тяготения, тем медленнее течет время. И если с тяготением Эйнштейн разобрался, то как объяснить некое ускорение времени, которое проявляется, скажем, во всё более *сокращающихся*: стадиях эволюции человека (стадиях антропогенеза) [10, с. 197]; эпох мировых цивилизаций на планете [10, с. 198]; эратем в геохронологии («биографии» Земли).

Рассмотрим пристальней последние. В биографии Земли можно выделить 5 эратем (палеозой, протерозой, и т.д.), которые тем короче, чем ближе к настоящему времени. Это видно по датировке начала эратем (в млрд. лет назад): 570, 1650, 2600, 3200, >3500 (геохронологическая шкала). А существует ли шкала скрытого времени, в которой все эратемы имеют одинаковую продолжительность?

**В рамках ГТНЧ** найдем такую шкалу *скрытого времени.*

Самые древние осадочные породы на Земле имеют возраст около $N^* =$ 3,8 млрд. лет или $2{,}22\cdot10^{60}$ *эви*. Разделим этот отрезок на 5 *одинаковых* интервалов шагом $S = 2{,}22\cdot10^{60}/5$. Левые границы этих интервалов (по оси абсцисс на графике $t = \ln N$): $N_k = N - S\cdot k$, где $N = 8\cdot10^{60}$ («сегодня»), $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$. Благодаря логарифмической функции $t = \ln N$ (см. §14) на оси ординат мы получим интервалы уже с *разной* длиной [$\Delta_k = \ln N_{k-1} - \ln N_k$ ; $L_k = (\Delta_k/\sum\Delta)\cdot N^*$]: $L_k$ = 668, 708, 754, 806, 865 или нарастающим итогом: 668, 1376, 2129, 2935, 3800, что напоминает нам… геохронологию.

Итак, параметр $t = \ln N$ – это физическое время (нам доступное, также см. реф. 16), а параметр $N$ – это скрытое время (математическое понятие). Какой бы отрезок времени $\Delta N \equiv 10^m$ (отображаемый в $\Delta t$) мы не брали (от зарождения Вселенной, когда было $N = 1$, $t = 0$) – в современную эпоху $\Delta N$ (став $\delta t$,) длится в $M$ раз короче, причем

$$M \equiv \Delta t/\delta t \approx 10^{61}\cdot\ln(10^m)\cdot\exp(-2{,}30258\cdot m) \quad . \qquad (15.1)$$

Зарождение Вселенной длилось несколько планковских времен (§17). Пусть этот миг составил 10 *эви*, однако, из формулы (15.1) следует, что первые 10 *эви* длились в $M{\sim}10^{60}$ раз дольше современных нам 10 *эви*. Первая секунда во Вселенной ($\Delta N = 10^{43}$ *эви* по оси абсцисс) отображалась в $\Delta t$ (по оси ординат), а вот современная нам секунда отображается в $\delta t$ и $M \equiv \Delta t/\delta t \approx 10^{20}$, т.е. сейчас секунда длится в $10^{20}$ раз дольше, чем самая первая секунда. А первый год во Вселенной длился в $M{\sim}10^{13}$ раз дольше, чем он длится теперь.

Заметим, что очень важный закон математики $K \sim N/\ln N$ (§9) в рамках ГТНЧ приобрёл следующую интерпретацию: при $N\to\infty$ количество ($K$) простых чисел на отрезке $[1; N]$ устремляется к отношению скрытого времен ($N$) и доступного нам времени ($\ln N$).

## 16. РАСШИРЕНИЕ ВСЕЛЕННОЙ

Расширение Вселенной – бесконечно, поскольку $\Lambda$-член больше нуля (§10, 16). Однако для многих ученых не очевидно, что расширение будет бесконечным, например, [3, с. 158], [23, с. 286].

В современной Вселенной, доминированной пылью (до $t \sim 10^6$ лет $\sim 10^{56}$ *эви* доминировало излучение), рост масштабного фактора ($R$) происходит по закону $R \sim t^{2/3}$ (§16), где $t$ – это возраст Вселенной.

**Мир чисел** «расширяется» (1, 1+1, 1+1+1, …) и, безусловно, до бесконечности. Причем в рамках ГТНЧ удавалось обнаружить некое «отражение» закона расширения Вселенной ($R \sim t^{2/3}$), например:

при $N > 10^{20}$ (*эви*) имеем $\ln(T_{\max}) \approx a\cdot(\ln N)^b$, где $a = 0{,}8200$ и $b = 0{,}7083$ (то есть $b \approx 2/3 = 0{,}666\ldots$ ). Значит, логарифм максимально возможного типа

($T_{max}$) в частых мирах – «отражает» масштабный фактор $R$, а параметр $\ln N$ – время $t$, прошедшее от зарождения Вселенной [14, с. 87, п.2, п.4, п.5], [10, с. 151], (реф. 15).

Другой пример: $h_{2max} \approx a\cdot(\ln N)^{2/3}$, т.е. инфоэнтропия ($h_{2max}$, см. §24) верхних лидеров $N$ частых миров – «отражает» масштабный фактор $R$, а параметр $\ln N$ – время $t$.

## 17. ЭПОХИ ВСЕЛЕННОЙ И МИР ЧИСЕЛ

Сравните начало эпох в эволюции Вселенной ($t$ в табл. 18.1, см. гл. II, §18) с началом *эпох стедва* ($N_n$, которое в табл. 13.1 выражено в *эви*, см. гл. III, §13). В указанных таблицах начало шести эпох практически совпадают между собой! В конце БО (т.е. в «настоящее время») параметры миров стедва кажутся нам чем-то «знакомыми», зн*а*чимыми: **8** эпох стедва; **32** простых числа ($P_1$, $P_2$, …, $P_{32}$ = **131**) в каноническом разложении **39**-го (наибольшего) лидера стедва $N_{39}$; **7** в качестве наибольшего показателя степени у первого простого числа $P_1$. Попытки «обнаружить» эпохи Вселенной в мире чисел я предпринимал и ранее [10, с.166], [14, с. 95].

## 18. ВСЕЛЕННАЯ В ДВА РАЗА СТАРШЕ?

При расширении Вселенной плотность *скрытой материи* (§9) остается почти постоянной, а не убывает как плотность обычного вещества [28, с. 45]. Причем, если 90% общей плотности Вселенной приходится на *скрытую материю* ($\Lambda$-член, см. §9), то возраст Вселенной оказывается больше почти в два раза [28, с. 69].

**В мире чисел** почти у каждого натурального числа $N$ существует *скрытая плотность* [14, с. 67] или, в новых терминах, *скрытый канон* (§17). Причем т.н. *плотность* скрытого канона с ростом $N$ будет оставаться почти неизменной [14, с.74 (п.8)]. Быть может, именно так мир чисел «отражает» плотность скрытой материи?

Можно говорить и о существовании *скрытых чисел*, порождаемых почти каждым натуральным числом. Например, число $N = 21 = 3^1\cdot 7^1$ порождает скрытое число $N^* = 2^0\cdot 5^0\cdot 11^0\cdot 13^0\cdot 17^0\cdot 19^0$ (нулевые степени всех простых чисел, меньших $N$ и не вошедших в «нормальное» *каноническое разложение* числа $N$, §9). Таким образом, любой отрезок натурального ряда (в т.ч. и БО) содержит в два раза больше чисел («отражение» того факта, что Вселенная в два раза старше?).

## 19. ЗАГАДОЧНЫЙ ВАКУУМ (Λ-ЧЛЕН)

Доказано, что Λ-член может интерпретироваться как энергия вакуума, причем *физический вакуум* – это одно из наиболее загадочных понятий в теоретической физике (§10) [3, с. 153].

В рамках космологии утверждается, что если Λ-член больше нуля (§10), то Вселенная расширяется неограниченно, а параметр Хаббла (§16) стремится к постоянной величине $H \sim \sqrt{\Lambda}$ [28, с.69].

**В мире чисел** также существует *числовой вакуум*, образованный *скрытыми единицами* – нулевыми степенями простых чисел в канонических разложениях *скрытых чисел*. Так, в (реф. 18) число $N^*$ имеет 6 скрытых единиц. Свойства числового (как и физического) вакуума м.б. весьма интересными [14, с. 74, п.10,б].

Что касается упомянутого из космологии факта $H \sim \sqrt{\Lambda}$, то в рамках ГТНЧ можно сконструировать некий параметр $H_n$, для которого также выполняется указанное соотношение [14, с.74, п.9].

Само значение Λ-члена «отражается» на БО? [14, с.73, п.2,9].

## 20. ИСЧЕЗАЮЩЕ РЕДКАЯ МАТЕРИЯ

Доля *антивещества* в галактиках меньше $10^{-15}$ (от концентрации вещества). Доля *зеркального вещества* в Земле меньше $10^{-24}$ (§9).

Любопытно, что в ряде случаев вычисления становятся поразительно лёгкими в зеркальном пространстве ПКЯ (§14).

**В мире чисел** исчезающе «редкой материей» являются, например, числа с нечетным типом $T$ (§10). В целом на БО доля таких чисел порядка $10^{-30}$, причем в ряде случаев нечетные (редкие) миры исследовать гораздо легче, чем чётные (частые) миры [10, с.58, 65].

Что ещё в мире чисел может "отражать" редкую материю?

## 21. МУЛЬТИ-ВСЕЛЕННАЯ ЛИНДЕ

В модели Вселенной А. Линде её размер после стадии инфляции равен $10^{968}$ м [28, с.113]. То есть, возможно, что наблюдаемая нами Вселенная – ничтожно малая часть «большой» Вселенной.

Более того, Линде предложил механизм многократных инфляционных расширений, который ведет к образованию *мульти-вселенной* – бесконечной паутины расширяющихся вселенных (в удаленных областях старых вселенных появляются ростки новых). Причем можно допустить, что физика в разных вселенных – разная, а число возможностей (вселенных) – бесконечно [3, с. 237].

**В мире чисел** можно задать следующий вопрос: у какого верхнего лидера $N$ впервые «наберется» $T \approx 10^{61}$ делителей? Очевидно, это будет число порядка $N \sim 10^{650}$, и все его делители можно рассматривать как некий псевдоряд (§25), скажем, псевдо БО. Правда, у него только первые ~1500 чисел [14, с.35] копируют начало натурального ряда, а далее начинаются всё более увеличивающиеся пропуски чисел (получаем некое «отражение» другой вселенной с иной физикой?). В рассмотренном примере верхний лидер $N \approx 10^x$ и его тип $T \approx 10^y$ связаны выражением $y \approx 0{,}6242 \cdot x^{0{,}7065}$, которое получено путем экстраполяции из формул (124) и (132) в книге [10]. Подобных псевдо БО бесконечно много. Также см. (реф. 22).

## 22. МУЛЬТИ-ВСЕЛЕННАЯ СМОЛИНА

Ли Смолин выдвинул любопытную гипотезу: он предположил, что чёрная дыра – это *семя* новой вселенной (§17) (реф. 21).

**В мире чисел** делители ЛПД (особых тильдаобразных чисел [14, с.35]) образуют псевдоряд, начало которого в "копирует" начало натурального ряда. В этом отношении ЛПД – "семя" натурального ряда, а такой ЛПД, как $N^* \sim 10^Z$, где $Z \approx 0{,}434 \cdot 10^{61}$, – это "семя", в точности (без пропусков) копирующее весь БО. Если допустить, что столь колоссальный ЛПД неким образом "отражает" черную дыру, то, как мы убедились в §25, мир чисел заметно ограничивает максимально возможную энтропию у такой черной дыры: $m_2 \approx M_2/10{,}5 \leq 10^{39}$ (энтропия старшего верхнего лидера на БО), что меньше энтропии Вселенной в $10^{51}$ раз (§20).

Кроме того, для псевдоряда ЛПД не срабатывает замечательное правило $K \approx M$ (ибо $k << m$, §25). Даже этого факта достаточно, чтобы считать псевдоряды «ущербными» по отношению к «полноценному» натуральному ряду. Поэтому (если поверить в реф. 22), чёрные дыры могут быть весьма «ущербными» вселенными по сравнению с нашей «полноценной» Вселенной.

Энтропия Вселенной (§20) при её финальном коллапсе может выражаться числом ~$\exp(10^{121})$, которое можно обыграть в рамках ГТНЧ. Учитывая среднее время жизни протона ($\tau_p > 10^{80}$ *эви* – время распада всей материи), можно предположить, что от Большого взрыва до финального коллапса нашей Вселенной пройдет $10^{121}$ *эви*. В рамках ГТНЧ числа 1, 2, 3, …, $10^{121}$ – это первые делители супергигантского верхнего лидера $N_2 \sim \exp(10^{121})$, имеющего около $T_2 \sim \exp(10^{84})$ делителей (реф. 21). Порядковый номер такого верхнего лидера $N_2$ будет порядка $K_2 \sim 10^{161}$, т.е. столько будет верхних лидеров, делители которых «скопируют» БО (и далеко превзойдут его). Означает ли это, что к моменту коллапса нашей Вселенной в её чёрных дырах будут мириады других вселенных?

## 23. ГОЛОГРАФИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП

Этот принцип – базовая идея *теории суперструн*. Она состоит в том, что все физические явления во Вселенной можно закодировать уравнениями, относящимися лишь к граничной поверхности (§19).

**В математике** *интеграл Коши* [§18 формула (18.3)] позволяет выразить значение аналитической функции внутри области через её значения на границе этой области. Теорема Коши доминирует в классической теории чисел и, особенно, в теории простых чисел. Вероятно, случаи «срабатывания» интеграла Коши в мире чисел – это своеобразные иллюстрации фундаментальной связи "малых" чисел (в т.ч. обратных чисел, см. §7) с "большими" (натуральными) числами. Рассмотренные нами формулы теории разбиений и ряд Фарея отчасти поясняют данное утверждение (§18).

За время существования Вселенной её энтропия выросла от 1 до $10^{90}$ (§20). Последнее число фигурирует и в рамках ГТНЧ: количество всех камней в Стволе (Пирамиды) высотой $N$=$10^{61}$ равно числу $2{,}11\cdot10^{90}$ [14, с. 22]. Таким образом, площадь Пирамиды (двумерная поверхность) – «отражает» энтропию Вселенной? Ещё она «отражается» *массой* всех черных камней в Стволе, поскольку на БО сумма всех малых делителей у всех натуральных чисел равна ~ $10^{90}$ .

## 24. ТАЙНА ЧЕТЫРЕХ ИЗМЕРЕНИЙ

Виттен доказал, что пространственных измерений должно быть 10, однако, до сих пор никто не знает, почему именно 3 из них являются развернутыми и протяженными, а остальные 7 – это свернутые, дополнительные измерения (ДИ). Неизвестно также, почему у временн*о*го (11-го) измерения нет ни одного ДИ [3, с.139].

В конце 1980-х гг. Бранденбергер и Вафа предложили возможный фундаментальный принцип, объясняющий, почему расширилось именно 3 пространственных измерения [3, с.232] (реф. 27).

**В рамках ГТНЧ** (§19) параметры $X$, $Y$, $Z$ мы будем считать "отражением" трех пространственных координат (длины, ширины, высоты), а четвертый параметр $t$ – это «отражение» времени. Тогда, теорема Лагранжа может «отражать» четыре измерения реального пространства-времени, доступного человеку в его ощущениях. Так, при $t = 0$ число $N$ – это *квадрат длины вектора*, направленного из начала системы отсчета в точку с координатами ($X$, $Y$, $Z$).

## 25. ХАОС ВСЕЛЕННОЙ – ЭТО ИЛЛЮЗИЯ?

Кажется невероятным, но ничтожное событие (скажем, порхание бабочки под Вологдой) может привести к непредсказуемому катаклизму, к катастрофе (ужасному урагану под Москвой). Эту ситуацию называют «эффектом бабочки». Речь идет о так называемом *динамическом хаосе* – новой и бурно развивающейся науке, изучающей *хаотическое* поведение динамических систем, которые описываются полностью *детерминированными* уравнениями (не содержащими никаких случайностей). Эта наука оперирует такими нетривиальными понятиями, как бифуркации, фракталы, аттракторы, а также «математикой исключительно тяжелого типа» [10, с.99, 122, 126], [22]. Именно исследования по динамическому хаосу привели в 1975 г. Фейнгенбаума к открытию новых фундаментальных математических констант (ФМК): $F_1$ =4,669201 и $F_2$= 2,502907. Эти безразмерные числа – единственные ФМК, названные в честь человека в 20 веке. Великий физик Р. Фейнман как-то сказал Фейнгенбауму: «Ты знаешь, я завидую тебе»… [Журнал “Универсум”, №6-2004, с. 42].

Интересным представителем комплексных динамических систем является *множество Мандельброта* [10, с.122], [22]. Оно впечатляет своей сложностью, особенно учитывая, как это часто бывает в математике, удивительную простоту его определения: $f(z) = z^2 + c$ (реф. 28). Также удивительна, например, и простота Пирамиды делителей (§11), которая приводит к бесконечно сложной “внутренней” структуре натуральных чисел (их делителей). Множество Мандельброта – это не плод человеческого воображения, а открытие. Подобно горе Эверест, оно просто-напросто уже существовало “там вовне” (в мире Платона, см. §2). То же самое можно сказать и о Пирамиде делителей: мы просто натолкнулись на “творение Бога”. Структура Пирамиды дает гораздо больше того, что в неё было вложено мной изначально (в 1997 г.). Богатейший набор самых удивительных свойств мира чисел (и Пирамиды) уже существовал “там вовне” в самой структуре, которую мы шаг за шагом открывали.

Итак, мир может быть детерминистическим, но *невычислимым*, т.е. будущее может определяться прошлым, но только рассчитать его при этом будет в *принципе* невозможно. По мнению Пенроуза, если некая точная математическая схема и управляет структурой Вселенной, то она *должна* быть неалгоритмической (будущее не просчитывается). Но будущее поведение все равно будет детерминированным в каждый момент времени, начиная с Большого взрыва, даже если мы окажемся не в состоянии его вычислить. Вопрос о детерминизме отличен от вопроса о вычислимости, это – два совершенно разных вопроса [23, с.164]. Относительно *любой* детерминистской физической теории мы сможем спросить, вычислима она или нет. Наличие невычислимости – весьма общее явление для тех детерминистских законов, которые возникают в физике. Здесь невычислимость обусловлена просто тем, что из-за существования предела точности, с которой м.б. известно начальное состояние, будущее состояние в принципе не поддается точному расчету.

Заметим, что в реальных физических процессах на наномасштабах ($10^{-9}$ м ~ $10^{26}$ *эви*) система «не умеет» забывать начальное состояние (это т.н. *гамильтоновые* системы) [23, с. 12].

Для микромира характерна квантовая клаустрофобия, бурлящий хаос: энергия и импульс сильно флуктуируют (§3).

**В мире чисел** Пирамида делителей – детерминистский объект, поэтому «будущее» (делители больших чисел) в её рамках всегда полностью определяется «прошлым» (алгоритмом укладки камней в начале Пирамиды). Однако далеко не все задачи, возникающие в мире чисел вычислимы. Например, до сих пор не решена проблема, связанная с наличием бесконечного множества «близнецов» – пар простых чисел, отличающихся на «2» [14, с. 14, 99] (реф. 26).

В мире чисел можно говорить о бурлящем хаосе типов ($T$) на рассматриваемом отрезке натурального ряда (см. рис.10.1 в §10).

## 26. МИР ПОСТРОЕН НА ВЕРОЯТНОСТИ?

Миром правит Его Величество Случай [33]. Во всяком случае, на первый взгляд всё выглядит именно так. Это проявляется, например, в целом наборе общеизвестных фактов: *закон обратных квадратов* для двух фундаментальных взаимодействий (ЭЛМВ и ГРВ, см. §6); *экспоненциальность* большинства законов природы [10, с. 86]; повсеместное распространение *нормальных* и *логнормальных* распределений [8], [10], [14, с. 39÷45], (реф. 46, 47, 48); справедливость *закона Бенфорда* для большинства числовых массивов (реф. 59).

Само “устройство” человека, свойства его сенсорных систем продиктованы особенностью экспоненциального мира [10, с.203].

**В мире чисел,** несмотря на то, что делители всех натуральных чисел, казалось бы, раз и навсегда «зацементированы» в неизменной конструкции Пирамиды (§11), тем не менее, именно *теория вероятностей* лучше всего справляются с описанием распределения делителей у тильдаобразных чисел (§21, 22, 23), [14, с. 45÷54].

В мире чисел мы часто встречаемся и с *экспонентой*, которую так “любит” Его Величество Случай. Например, из формулы Дирихле (10.3) следует, что данный средний тип $T_s$ достигается в конце отрезка

[1; $N$] при $N \approx \exp(T_s - 2 \cdot C + 1)$. Другой пример касается ЛПД – это первое число $N$, у которого первые $d$ делителей «копируют» (без пропусков) натуральный ряд: 1, 2, 3, …, $d$. При $d = 2 \div 40$ для таких чисел получаем: $N \approx \exp(0{,}9572 \cdot d - 1{,}4316)$, см. [14, с. 35]. Вероятность того, что у произвольно взятого целого числа $N$ первые $d = 2 \div 40$ его делителей «скопирую» натуральный ряд оценивается как $P_d \approx 3{,}0121 \cdot \exp(-0{,}9485 \cdot d)$. Причем параметру $d$ "запрещено" принимать некоторые значения: 5, 9, 11, … (т.е. 5 появляется только при $d = 6$; 9 при $d = 10$; 11 при $d = 12$; и т.д.). Возможно, что $P_d$ можно найти и с помощью *теории вероятностей*. Ведь, если $P_m$ – это вероятность, с которой число $m$ встречается в качестве делителя у натуральных чисел, то: $P_1 = 1$; $P_2 = 1/2$; $P_3 = 1/3$; …, т.е. $P_m = 1/m$; (см. Пирамиду делителей на рис.11.1). А как рассуждать дальше, чтобы прийти к некому выражению для $P_d$?

*Лже-функции* в ГТНЧ – это также экспоненты (10.6), (12.2).

О вероятностном подходе в ГТНЧ также см. [14, с. 91, п.4; с.96].

Если допустить, что мир чисел, исключающий всякую случайность, "отражает" физическую реальность и при этом в ряде случаев описывается теорий вероятностей, то что нам тогда остается думать в части вероятностных законов Вселенной (реф.25)?

## 27. ВЫЧИСЛИМОСТЬ И МИР ПЛАТОНА

В теории струн количество ПКЯ слишком велико (§13), поэтому могут возникать вопросы о неалгоритмичности и невычислимости.

Неалгоритмическая математика весьма любопытна. Скажем, для решения системы из 9 (и выше) диофантовых уравнений никакого алгоритма не существует. Так же нет алгоритма, позволяющего определить, эквивалентны ли два произвольных 4-х мерных (и более) многообразия друг другу или нет (для 2-х измерений – алгоритм существует, а для 3-х измерений – алгоритм под вопросом). Р. Пенроуз считает, что свойство неалгоритмичности может иметь отношение к квантовой (дискретной) структуре пространства-времени, к вопросу о направленности и течение времени [23, с. 134, 300], (реф.15).

Термин "невычислимый" относится к некоторому классу математических действий, про которые известно (т.е. доказано математически), что они не поддаются вычислениям. Невычислимые процессы могут быть полностью *детерминистскими*. Эта особенность является диаметрально противоположной по отношению к свойству полной *случайности*, которое характерно для КМ (§3).

Волновое уравнение (Даламбера) описывает распространение волн в среде (в КМ это уравнение Шрёдингера; а, будучи одномерным, оно совпадает с уравнением колебаний идеальной упругой струны). При изучении *вычислимости* волнового уравнения было доказано, что даже, несмотря на *детерминистское* поведение решения этого уравнения, существуют начальные данные некого "особого" рода [они не относятся к "плавно (гладко) изменяющимся", т.е. не имеют второй производной], при которых однозначно рассчитать значения поля в более поздний момент времени – *невозможно*. Этот интригующий результат открывает практически неисследованную область знаний. Следует также заметить, что в рамках ОТО отсутствует ясность в вопросе о *детерминизме* [23, с. 34, 178, 198].

Как и многие другие математические идеи, особенно наиболее фундаментальные и красивые, идея вычислимости кажется овеществленной и объективно существующей в *платоновском* смысле (§2).

**В мире чисел** целый ряд решений (алгоритмов) в принципе может существовать: построение Пирамиды базиса (§9), нахождение всех чисел из данного мира (§16) и т.д. Однако на практике здесь уместней говорить о некой *псевдо*неалгоритмичности, *псевдо*невычислимости, ибо комбинаторные конфигурации быстро становятся настолько колоссальными, что обозреть их просто немыслимо.

## 28. ИСТИНА ПРОСТА И ИЗЯЩНА

*Доказательство* фундаментальных Истин требует от человека, вообще говоря, больших усилий, таланта, интеллекта, хотя сама *формулировка* Истин, как правило, поразительно проста и изящна. Например, в математике и физике – это предельно лаконичные и по-своему «красивые» формулы: $K \sim N/\ln N$; $E = m \cdot c^2$, и т.д. Здесь уместно вспомнить древнюю латинскую пословицу: «*Simplex sigilum veri*» («Простота – это признак истинности»), а также слова прозорливого Эйнштейна: «Наш опыт убеждает нас, что природа – это сочетание самых простых математических идей».

В части трудоемкости доказательства Истин скажем, например, что фундаментальный закон $K \sim N/\ln N$ (§9) «не сдавался» математикам свыше 150 лет; а нехитрая *теорема Ферма* (уравнение $x^n + y^n = z^n$

не имеет решений при $n>2$) потребовала около 350 лет, причем доказательство заняло 200 страниц и понять его полностью могут не более 10% специалистов по *теории чисел* [10, с. 117], [30].

Один из исследователей ТС однажды сказал пророческие слова: «Математическая структура *теории струн* столь прекрасна и имеет столько поразительных свойств, что, несомненно, должна указывать на что-то более глубокое» [3, с. 97]. Но то же самое можно сказать и о Пирамиде делителей (§11). Разве не заслуживает восхищения «внутренняя» гармония натурального ряда?! А его удивительные «отражения» (рефлекции) реального физического мира – неужели структура пространства-времени «зашифрована» в мире чисел?

## 29. ПРОЦЕСС ПОЗНАНИЯ – БЕСКОНЕЧЕН!

Значительное количество законов природы нельзя ограничить никакими рамками. Так полагают сейчас многие ученые. Отсутствие ограничивающих рамок следует из результатов Гёделя (гл. III §1). Даже «примитивная» ГТНЧ убеждает нас в том, что познать *все* законы мира чисел в принципе невозможно, ибо при движении «в даль» по натуральному ряду, возникают всё новые и новые взаимосвязи, отношения (которых в начале ряда не было и в помине). По аналогии с миром чисел можно предположить, что в момент рождения Вселенной всё сводилось к чему-то элементарному (как единица), а потом шло непрерывное усложнение. То есть Истина, как некий свод законов природа, может иметь свою «биографию» (с прошлым, настоящим, будущем), и познать её «до конца», скорее всего, невозможно в принципе.

**В мире чисел** законы (во всяком случае, их количество) также невозможно ограничить никакими рамками. Простая Пирамида делителей (§11) «генерирует» бесконечно много самых разных взаимосвязей между числами. Это видно даже на примере ГТНЧ, в рамках которой за 10 лет мне удалось «раскопать» довольно много любопытных фактов (хотя я и ограничивал себя Большим отрезком). Несмотря на всю наивность ГТНЧ (и особенно её рефлекций), я убежден, что в моей работе есть зерна Истины, которые ещё прорастут должным образом, когда за дело возьмутся профессионалы.

Сейчас большинство утверждений ГТНЧ не имеют общего (математически строго) доказательства, поэтому они, увы, не интересны профессиональным математикам. ГТНЧ без труда могут понять и физики, но у них пока не возник нужный интерес к миру чисел. Поэтому ГТНЧ, возникшая на стыке математики и физики, остается некой забавой одинокого (и весьма заурядного) разума. Междисциплинарный диалог – дело нелегкое. Вот что говорит по этому поводу профессиональный ученый: «Даже коллеги по цеху вас только вежливо выслушают, пожмут плечами и вернутся к своим прежним научным делам. Предрассудки *иного* научного цеха оказываются просто непреодолимы» [23, с. 5]. Даже высоко профессиональную ТС, возникшую на стыке ОТО и КМ, многие ученые пока игнорируют (гл. II §1), ну а про ГТНЧ в этом плане и говорить не приходится.

## 30. ПЛАНКОВСКАЯ ЭПОХА (0÷1 *эви*)

Прочитайте ещё раз об этой эпохе в §17, обращая особое внимание на гипотезу Бранденбергера-Вафа: когда мы мысленно обращаем историю Вселенной вспять, то сокращение её радиуса $R$ ниже значения *планковской длины* физически эквивалентно… увеличению радиуса $1/R$ [3, с. 232], т.е. Вселенная начинает расширяться и в нулевой момент времени имеет бесконечно большой размер (?). Также любопытна гипотеза Венециано-Гасперини, допускающая существование *доисторической* Вселенной.

Обязательно перечитайте и §19 в части *нуль-браны*: согласно М-теории на масштабах, меньше планковских существует таинственная область – нуль-брана, в которой совершенно иные понятия о пространстве-времени (быть может, их там нет вовсе?).

Планковская эпоха и нуль-брана (что бы это ни было), безусловно, связаны с «нашим» пространством-временем (реф. 42).

**В мире чисел** планковская эпоха – это отрезок от 0 до 1, «населенный» *обратными числами* (в т.ч. аликвотными дробями), про которые мне мало что известно (§7). Быть может, именно отрезок [0; 1] является неким “отражением” таинственной нуль-браны?

Здесь также уместно вспомнить особенности *логарифмической функции* на отрезке [0; 1], в т.ч. «равноправие» натуральных чисел $N$ и обратных к ним чисел $R = 1/N$ (§14). А поведение *функции базиса* ($K = N/\ln N$, см. §15) на отрезке [0; 1] – разве это не повод, чтобы задуматься об удивительных аналогиях с реальным миром?

Возможно, что параметр $t = \ln N$ – это физическое время (нам доступное), а параметр $N$ – это скрытое время (математическое понятие). Также см. (реф. 16, 15).

У Вселенной могла быть богатая *предыстория*: при $0 \le n \le 1$ (перед $N$) текло отрицательное время $-\infty < t \le 0$ (см. рис. 14.2). Или, быть может, всё иначе – Вселенная эволюционирует одновременно *в двух направлениях*:

вправо от 1 ($N$ растет) и влево от 1 ($n$ убывает). Причем обе области связаны друг с другом. Также см. (реф. 23).

## 31. «ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ» (0,618)

Два числа Фидия $(\sqrt{5}-1)/2$ = **0,618** и $(\sqrt{5}+1)/2$ = **1,618** символизируют т.н. «золотое сечение», которому многие придают таинственное значение [10, с. 90]. Но, по-моему, эти числа просто близки к неким величинам, которые по-настоящему зн*а*чимы в мире Платона (§2). Т.е. ощущение гармонии у нас возникает не от «применения» чисел Фидия, скажем, к архитектурным пропорциям, а из-за соответствия пропорций более глубоким природным закономерностям («зашифрованным» в мире чисел?). Природа «приучила» человека воспринимать такое соответствие как идеальную гармонию. Приведем некоторые фундаментальные величины из мира Платона:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $0{,}572 = \ln\sqrt{\pi}$ | (гл.I §3); | $1{,}522 = \pi^4/64$ | (реф. 11); |
| $0{,}577 = C$ | (гл.I §3); | $1{,}540 = \ln(F_1)$ | (гл.I §3); |
| $0{,}606 = \sqrt{1/e}$ | (гл.I §3); | $1{,}570 = \pi/2$ | (гл.I §3); |
| $0{,}607 = 6/\pi^2$ | (гл.III §11, 20); | $1{,}571 = 33/21$ | [10, с. 66]; |
| $0{,}636 = 2/\pi$ | [14, с.57]; | 1,6 | (реф. 9); |
| 0,655… | [14, с. 89]; | $1{,}63 \pm 0{,}01$ | [14, с. 26]; |
| $0{,}666 = 2/3$ | [14, с.22]; | $1{,}632 = \sqrt{24}/3$ | [14, с. 32]; |
| $0{,}683 = P$ | [14, с.45]; | $1{,}644 = \pi^2/6$ | [10, с. 137]; |
| $0{,}693 = h_H$ | (гл.III §24); | $1{,}648 = \sqrt{e}$ | [14, с. 26], (§18); |
| 0,665 | (реф. 32) | $1{,}781 = e^C$ | (гл.II §20). |

## 32. МАЛЫЕ ЧИСЛА (1, 2, 3, 4)

Покажем на примерах «любовь» природы к малым числам.

*Малое* количество ФФК ($G$, $h$, $c$, $e$, $m_p$) с точностью до порядка определяют важнейшие параметры (размер, массу, время жизни и т.д.) многих объектов во Вселенной (как правило, не более трех ФФК для конкретного параметра) [6, с. 52], [10, с.175], (реф. 39).

«Фактор» Больцмана [10, с. 176] оказывает предпочтение частицам *меньших* масс, поэтому, например, один из главных выводов науки нуклеосинтез гласит, что 99,9% всей массы вещества во Вселенной приходится на атомы водорода и гелия (*самые легкие* атомы). Вообще в природе *малые особи более распространены, чем крупные*. Особи – в самом широком понимании, а не только живые существа. Скажем, это не только членистоногие (насекомые, которые по числу видов составляют около 90% живых обитателей Земли), но и россыпь мелких камушек в груде щебня; и наименьший уровень энергии, который выбирает природа всякий раз при создании разнообразных кристаллических конфигураций [23, с. 373].

Именно благодаря повсеместному преобладанию *малых* особей в природе мы сплошь и рядом обнаруживаем *тильда-распределения* (реф. 46, 47, 48), а закон Бенфорда, так «любящий» *малые* числа (1, 2, 3, …), подтверждается буквально на каждом шагу (реф. 59).

*Малые* числа обычно воплощают собой некие начальные (граничные) условия. В реальном мире в зависимости от начального состояния сложных объектов (рождение Вселенной, эволюция биосферы, ряд экономических систем и т.д.) законы, по которым они будут развиваться, оказываются разными! Поэтому важность начальных условий (и *малых* чисел) просто невозможно переоценить.

**Замечание**. Ниже приводятся конкретные числа, подсмотренные в природе. Для каждого числа подборка начинается, вообще говоря, с фундаментальных параметров Вселенной, а заканчивается – спорными примерами (числа в них, скажем, м.б. попросту другими). Это замечание распространяется и на рефлекции 33÷39.

**Один** своеобразный танец струн (и ничего более) лежит в основе всего сущего в этом мире (§11); химический элемент с зарядом ядра атома равным **1** (водород) – это самый распространенный элемент во Вселенной; только **1** сперматозоид (из миллионов) оплодотворяет яйцеклетку человека; **1** ствол обычно у деревьев; **1** человек стоит во главе государства (и всякого мероприятия); в *пифагореизме* число **1** – это абсолютная и неделимая единичность (без неё нет других чисел), символизирующая единство бытия и мира; в знаменитом учении Лао-Цзы о Дао (якобы, лежащем в основе мира) говорится: «Дао рождает **1**, одно рождает 2, два рождает 3, а три – все существа».

**2** (или 3) кварка образуют любой из адронов; **2** символизирует полярность и во Вселенной («+» и «–» заряды, свет – тьма, женское – мужское, и т.д.); **2** (или 3, или 4) слоя атомов (молекул) – такой чаще всего бывает периодичность дальнего порядка в кристаллах; **2** пространственные конфигурации у тубулинов (реф. 51); **2** полимерные цепочки образуют ДНК; **2** класса образуют нуклеотиды (У, Ц и А, Г) в ДНК; **2** формы (В и Z) существования ДНК; ...

**2**-мя плитками Пенроуза можно замостить плоскость непериодическим образом. Трехмерные аналоги этих плиток могут служить основой для новой необычной формы материи – «квазикристаллов». Пока неизвестно, есть ли единственная плитка, способная покрыть всю плоскость непериодически [23, с. 30, 136], [10, с. 130, 232].

**3** семейства фундаментальных частиц (§4); **3** координаты (и не более) имеют пространства, в которых могут существовать устойчивые системы (это доказано); **3** элемента симметрии (её плоскость, ось, центр); **3**-мя путями образуются кристаллы (из расплава, раствора и пара); **3** цвета (красный, синий, зеленый) формируют любой другой цвет; **3** нуклеотида составляют кодон в ДНК; **3** форменных элемента в крови млекопитающихся (эритроциты, лейкоциты и кровяные пластинки); **3** вида мышечных волокон; **3**,5 – это отношение плодного периода человека к зародышеву (7 и 2 месяца); **3** составляющих солнечной атмосферы.

**4** силы в природе (§5); **4** сорта нуклеотидных звеньев в ДНК (А, Г, Т, Ц); **4** компоненты входят в ядро клетки; **4** компоненты входят в цитоплазму клетки; **4** фазы при непрямом делении клетки; **4** краски позволяют раскрасить любую карту [10, с. 121]; **4** типа галактик различают астр*о*номы; **4** периода в истории человечества (по Капице [16]); **4** вида тканей у человека; **4** письменные системы у человечества (алфавиты, логографические, …); в **4** ÷ 5 раз можно сократить тексты на любом языке (почти без потери информации).

Числа 1, 2, 3, 4 – «любимцы» всех мистических учений [10, с.98].

**В мире чисел:**

«**1**» – есть *начальное целое число*, ни простое, ни составное, т.к. у всякого простого числа ($P$) *богатство* равно: $\sigma(P) = 1+P$, а для единицы получаем $\sigma(1) = 1$, а не 1+1, поэтому Эйлер замечает, что “… из последовательности простых чисел 1 должна быть исключена» (§26). Однако иногда единицу можно считать и простым числом: [35, с.69], (реф. 42). *Канон* единицы, возможно, равен бесконечности (§17). Только у единицы тип $T$=1. Единица соединяет два мира чисел (обратных и натуральных, см. §14). Единица является точкой разрыва для *функции базиса* (§15). Единица – это “шаг” натурального ряда. Загадочная формула Эйлера $e^{i\pi}+1 = 0$ побуждает нас причислить 1 (равно как и 0) к ряду важнейших ФМК ($e$, $\pi$, $i$, …гл. I §3).

«**2**» – это единственное *четное простое число* и лидер первого мира *стедва* (§12). Орбита числа 2 равна общей орбите ($H$=1) натуральных чисел [10, с.33]. Число 2 символизирует полярность в ГТНЧ: четный – нечетный (тип); малый – большой (делитель); натуральное – обратное (число);… . Средняя кратность всех чисел из редких миров стремится к 2 (?) [10, с. 65]. Число 2 делит отрезок [1; $\boldsymbol{e}$] близко к пропорции «золотого сечения»: $(2–1)/(\boldsymbol{e}–1) \approx 0{,}582$.

**«3»** – открывает собой бесконечное количество четных орбит. Это первое из чисел Гаусса [10, с.97]. Число 3 делит отрезок [$\boldsymbol{e}$;$\boldsymbol{\pi}$] близко к пропорции «золотого сечения»: $(3–\boldsymbol{e})/(\boldsymbol{\pi}–\boldsymbol{e}) \approx 0{,}665$.

«**4**» – первое число, имеющее малый делитель (2), отличный от единицы; это второй мир *стедва* (§12).

*Малые* типы (*T*) в ГТНЧ, вообще говоря, преобладают [10, с.50].

Отдельного разговора заслуживают *числа Фейгенбаума* (гл. I, §3) (реф. 25). Весьма заманчиво было бы обнаружить их в рамках ГТНЧ, однако мои попытки оказались неудачными: [10, с. 99], [14, с. 63].

## 33. «МАГИЯ» ЧИСЛА 7±2

Именно так называется любопытная статья Дж. Миллера [10, с. 230], поэтому и мы объединим числа 5, 6, 7, 8, 9 в одной рефлекции.

**5** спинов м.б. у частиц в микромире (0, ½, 1, 2, 3/2, см. §12); **5** электрических зарядов м.б. у частиц в рамках СМ (§13); **5** (или 6) различных вариантов насчитывает М-теория (§12); **5** видов осевой симметрии в кристаллах; **5**-кратная симметрия в веществе [10, с. 236]; **5** способов расположения точек на плоскости в кристаллографии; **5** последовательностей звезд (их племен); **5** лагранжевых точек в системе Солнце-Юпитер-астероид; **5** главных зон Земли (ядро, мантия, кора, океан, атмосфера); **5** оболочек (геосфер) Земли; **5** функций крови; **5** функций эпителиальной ткани человека; **5** условий демократии в математической политологии Арроу [10, с. 223]…

**6** типов кварков; **6** топологических свойств пространства-времени; число Эйлера (сумма размерностей групп гомологий многообразия) для ПКЯ равно ±6 [3, с. 258]; **6** кристаллографических систем (триклинная, …); **6** уровней в биологической систематике (вид, род, …); **6** эратем в биографии Земли (геохронологии); **6** названий нот (целая, ½, 4-я, 8-я, 16-я, 32); **6** точек в шрифте Брайля (для слепых).

**7** дополнительных измерений в ТС; **7** «зарядов» у элементарных частиц; **7** базисных ячеек решеток в кристаллах; **7** «случайно» согласованных ФФК определили химический состав нашей Вселенной (и само наше существование) [6, с. 82]; **7** чисел «задают» Вселенную по И. Розенталю [10, с. 178]; **7** периодов и **8** групп в таблице Д.И. Менделеева (до **7** электронных оболочек м.б. в атоме); удельная энергия связи всех ядер в среднем в **7** раз больше массы покоя пары электрон-протон; в среднем существует **7** (?) разновидностей любого вещества в кристаллическом состоянии; …

**7** спектральных классов звезд; в **7** раз отличаются диаметры белых карликов; **7** зон можно выделить на Солнце (по физике происходящих процессов); **7** оболочек насчитывают ученые внутри Солнца; **7** нестационарных образований в солнечной атмосфере; **7** веществ составляют 99,75% фотосферы Солнца; …

**7** основных компонент в Солнечной системе (Солнце, 9 планет, астероиды,…); **7** – это среднее количество больших спутников у планет; **7** типов астероидов (соотношение их плотностей **7**:1); **7** люков Кирквуда в поясе астероидов; **7** колец у Сатурна (9 у Плутона); **7** слоев в атмосфере Земли; **7** материков на Земле; …

**Человек**: **7** видов (форм) клеток; **7** основных жизненных проявлений у клетки (размножение, …); **7** структурных уровней (атомный, молекулярный, клеточный, тканевый, отдельные органы, системы органов, целостный организм); **7** структур в микростроении кости человека; **7** сенсорных систем человека (зрительная, …); коэффициент энцефализации (EQ) человека равен **7** [10, с. 203]; **7** частей тела (голова, шея, туловище, по две ноги и руки); **7** пар ребер человека достигают его грудины; 7 близнецов (за один раз) родила женщина.

В среднем **7** «кусков» информации удерживает человек в оперативной памяти с одного раза (миллеровский кошелёк, [10, с. 230]). Удобнее всего думать не более, чем о **7** вещах (одновременно). **7** букв – такова (?) средняя длина слова в русском языке; с **7** букв (п, с, о, в, н, р) начинаются 60% русских слов; **7** групп знаков препинания во многих языках; **7** нотных гамм в музыке; **7** красок на палитре художника (это *min*); **7** цифр в номерах телефонов; **7** имеет отношение к зрительному и слуховому восприятию человека (трудно запомнить фразу, в которой более **7** лингвистических ветвей); **7** – «любимое» число в Библии [10, с. 219]; …

**Полезные классификации** должны содержать не более **7** категорий и это относится абсолютно к любым областям знаний: **7** суток в недели; **7** сигнальных систем в клетке растений; **7** областей искусства (в которых часто встречается семерка [10, с. 214]; **7** мировых цивилизаций [10, с. 198]; **7** основных причин краха Римской империи [10, с. 213]; **7** основных религий на планете;

**8** глюонов и **8** глюонных полей (§6); **8** магических чисел (число протонов или нейтронов); **8**÷10 фёдоровских групп для молекулярных кристаллов; **8**$\cdot R$ – радиус сферы в множестве Делоне [49, с. 645]; **8** бит – длина слова в информатике; в **8** раз плотность Земли (*max*) больше плотности Сатурна (*min*); **8** стадий происхождения человека (антропогенез); **8** костей в мозговом отделе черепа человека; **8** структурных единиц в скелете руки и ноги; от **8** главных причин умирают 99, 96% россиян [10, с.206]; **8** основных языковых семей на Земле; **8** главных источников энергии (нефть, уголь, …); …

**9** планет у Солнца; **9** колец у Урана; в **10** раз отличаются радиусы звезд главной последовательности; **9**-ти балльная шкала ветрового волнения на море; …

Итак, *почему природа отдает явное предпочтение числу* 7±2? Выше упомянутый Дж. Миллер не отвечает на этот вопрос. По-моему тайну этого феномена нам может подсказать… **мир чисел:**

1). В натуральном ряде на отрезке $[10^5; 10^{16}]$ преобладают числа $N$ из мира *стедва* №8 (§12, 13), у которых **8** делителей (или **7** правильных делителей, т.е. меньших самого $N$). Если указанный отрезок перевести в метры (в правомерности *такого* перевода кроется весь «изюм» ГТНЧ, §6), то мы получим $10^{-30} \div 10^{-19}$ м. То есть этот диапазон начинается в «пене» пространства-времени и доходит до размера кварков и лептонов (кирпичиков мироздания). Таким образом, числа $N$, имеющие 8 делителей, возможно, «отражают» наиболее фундаментальный уровень структуры пространства-времени.

2). Число 7±2 является «меткой» конца Большого отрезка (БО), т.е. «меткой» эпохи существования человечества (см. чуть ниже).

3). Мир №8 в некотором смысле – *аномальный* (см. §10).

В дополнение к сказанному можно привести следующие факты:

**5** классов натуральных чисел (§8); **5** чисел Гаусса (3, 5, 17, 257, 65537) [10, с. 97]; **5** – таков *канон* большинства натуральных чисел на БО (§17); **5**÷7 (или более?) ФМК в математике (см. гл.I §3); …

**Число 7±2 – это «метка» конца БО:** наибольший тип ($T_{max}$) в частых мирах почти в **8** раз превосходит $T_{max}$ в редких мирах [10, с.69]; **8** эпох у миров *стедва* (§12, 13); кратность ГРЛ = **7,8,** а кратность ГЧЛ ≈ **8,6** [10, с.64,70]; ЛЧМ в **5,7** раза больше, чем ЛРМ [10, с.76]; *канон* БО в **5,9** раза больше самого БО (§17); в редких мирах $\Pi_{21} \approx$ **7,9**, а в частых мирах $\Pi_{33} \approx$ **8,9** (§20); сумма Гаусса-Мертенса $S_1 \approx$ **5,2** (§7); **5** эонов (у нижних пауз) [10, с.72]; …

## 34. ДЮЖИНА (ЧИСЛО 12)

Это число выделяют некоторые энтузиасты-исследователи тайн мироздания (к их когорте относится и ваш покорный слуга) [32]. Если отбросить мистику, то можно упомянуть следующие факты:

**12** – это максимально возможное число измерений (11 пространственных + время, см. §12); **12** фундаментальных частиц (§4); число **12** связано с условием существования планет [10, с. 185]; **12** эпох Вселенной (§18); **12** пар оснований в витке ДНК; **12** пар ребер у человека; **12** месяцев в году; **12** часов; **12**-ти балльная шкала землетрясений; дюжина (**12** штук) в счете предметов; и т.д.

**В мире чисел** мы сталкиваемся с *дюжиной* классов (§8). Про число 12 также см. [14, с. 77, п.5].

## 35. ЧИСЛА 16, 32, 64, 128, 256, 512…

«Выделяет» ли природа эти числа (миры *стедва*, §12)? Приводимые ниже примеры – лишь слабый намек на утвердительный ответ.

**14** решеток Браве (в кристаллографии); **15** – это «ПТС» сильного взаимодействия [6, с.35], [10, с.174]; **16** (и более?) ФФК можно насчитать в физике; **16** грамматических правил в языке эсперанто; **17** видов важнейшего минерального сырья на Земле; **14** периодов в жизни мужчины [10, с. 205]; **15** религий внутри христианства; ...

**20** канонических аминокислот в структуре белка; **23** хромосомы в сперматозоиде; **21** фраунгоферова линия в спектре Солнца; **21** тип в биологической систематике; **23** видимых звездных величин в шкале у астр*о*номов; **21** стиль в пластическом искусстве; **21** группа инструментов в симфоническом оркестре; **21** основная структурная единица во Вселенной [10, с. 182]; …

**32** варианта расположения атомов вокруг узла решетки (см. кристаллографию); **29** скоплений галактик в крупнейшем из сверхскоплений; **26** костей в стопе ноги и **27** костей в кисти руки человека; **32** зуба у человека; **32** краски на палитре художника (это *max*); **33** основных языка мира; до **33** букв содержат большинство алфавитов; **33**÷34 позвонка в позвоночнике человека; **33** термина указывают темп в музыке; **33** зн*а*чимых религии на планете; **39** спутников у Юпитера (это *max*); **46** хромосом в структуре ДНК; ...

**64** кодона (см. ДНК); свыше **60** типов молекул в межзвездной среде; **50** сверхскоплений галактик (д.б. около 64?); **64** символа в языке Брайля для слепых; **77** классов в биологической систематике; **64** клетки на шахматной доске; ...

**128** – верхний предел числа протонов в ядре атома [10, с. 170]; ученые ищут уже **118**-й химический элемент (д.б. «стабильным»); **128** – этому (?) равно *отношение* (*max*/*min*) величины периодов повторяемости (в нанометрах) в большинстве кристаллов; периоды элементарных ячеек в биологических кристаллах (у вирусов) в среднем в **128** (?) раз превышают периоды в простейших кристаллах (*max* – в 400 раз); **83** химических элемента распространены в земной коре; ~ **90** электронов (в электронном облаке) в самых тяжелых атомах; ~ **100** больших спутников планет в солнечной системе; ~ **100** отношение поперечника Галактики к её толщине; в **102** раза Плутон дальше от Солнца, чем Меркурий; **120** наций и народностей было в СССР (в 1979 г.); …

**230** фёдоровских групп (в кристаллографии); ~ **250** нуклонов в ядре самых тяжелых атомов; **200** иероглифов хватает для повседневного общения; ~ **200** наименований музыкальных инструментов; ~ **200** музыкальных форм (симфония,…); ~ **200** денежных единиц на планете (1994 г.); **206** костей в теле человека (85 парных и 36 непарных); **176** территориальных единиц было в СССР (1982 г.); **400**÷**600** мышц в теле человека; ...

**В рамках ГТНЧ** числа 16, 32, 64, 128, 256, 512, …– это т.н. *миры стедва* (§12). Именно такое количество делителей у натуральных чисел преобладает на том или ином отрезке натурального ряда (у каждого мира стедва – свой «звездный» отрезок). Кроме этого указанные числа (или близкие к ним) в ГТНЧ могут иметь и другую «расшифровку», например, приведенную в [10, с.138].

## 36. КОНСТАНТА СВЯЗИ (ЧИСЛО 137)

137,035… – это *постоянная тонкой структуры* ($\alpha$), важнейшая ФФК, причем *безразмерная*. Именно поэтому энтузиасты-исследователи «обнаруживают» заветное число 137 (или $1/\alpha = 0{,}007297\ldots$) где только возможно. Например, одна из гипотез ГТНЧ гласит: в конце БО минимальная нормальная дисперсия ($D_{\text{н}min}$) у верхних ЛЧМ дорастает до значения $D_{\text{н}min} = \alpha$ (§23), [14, с. 81].

В конце БО *удельный вес* простых чисел равен $Z \sim 0{,}007$, а *доля* простых чисел $K/N \sim 1/\ln N \approx 0{,}007$ (§9), что также напоминает нам о константе связи $1/\alpha = 0{,}007$. У суммы *кратностей* ($\sum K$) в 4-х измерениях в конце БО м.б. коэффициент $\alpha \approx 0{,}007$ (§19).

Другие примеры моих изысканий в части $\alpha$ (или $1/\alpha$) в мире чисел смотри в книгах: [14, с.27], [10, с.37, 40].

## 37. ДИАПАЗОН ЧИСЕЛ $10^5 \div 10^6$

Есть пример, когда число $10^5$ объявляют «вселенской безразмерной константой» [32, с.273]. Однако, по-моему, следует вести речь о диапазоне $\sim 10^5 \div 10^6$, который угадывается в следующих фактах:

Массы элементарных частиц – до $1{,}75 \cdot \mathbf{10^5}$ масс электрона.

«ПТС» слабого взаимодействия $\sim \mathbf{10^{-5}}$ [6, с. 35], [10, с. 174].

Характерная масса сверхскопления галактик в $\mathbf{10^5}$ раз превышает массу типичной галактики. В центре скоплений галактик их плотность в среднем в $\sim\mathbf{10^5}$ раз превышает среднюю плотность галактик во Вселенной (реф.14). В Галактике $\sim 2 \cdot \mathbf{10^4}$ звездных скоплений. В шаровом скоплении $\mathbf{10^5} \div \mathbf{10^7}$ звезд. На одну звезду-сверхгиганта приходится $\mathbf{10^4}$ звезд-субкарликов. Диаметры звезд-сверхгигантов превосходят диаметры белых карликов (4000÷28000 км) в $\sim \mathbf{10^5}$ и более раз. Температура на поверхности белых карликов м.б. в $\mathbf{10^5}$ раз, больше температуры фонового излучения (2,7 К). До ближайшей к нам звезды (α Центавра) в $2{,}7 \cdot \mathbf{10^5}$ раз дальше, чем от Земли до Солнца. Масса Солнца в $3{,}3 \cdot \mathbf{10^5}$ раза больше массы Земли. Средняя плотность Солнца в $\mathbf{10^5}$ раз меньше плотности его ядра. Температура солнечной короны в $\sim\mathbf{10^6}$ раз больше температуры фонового излучения. В солнечной системе $\sim 5 \cdot \mathbf{10^4}$ астероидов. Масса Юпитера (*max* у планет) в $\mathbf{10^5}$ раз больше чем у Плутона (*min* у планет). Пояс Койпера-Эджворта содержит ~ $7 \cdot \mathbf{10^4}$ крупных небесных тел (поперечником свыше 100 км). …

Характерное время жизни типичной звезды ($\sim 10^{15}$ сек) в $2{,}5 \cdot \mathbf{10^5}$ раз больше времени жизни человека. У человека $4{,}2 \cdot \mathbf{10^4}$ генов. Промежутки между кусками генов в ДНК – это до $2 \cdot \mathbf{10^4}$ пар оснований. Длина ДНК в $\mathbf{10^6}$ раз больше ядра клетки (но «хитрая» природа втиснула-таки ДНК в ядро!). Морула человека состоит из ~ $\mathbf{10^5}$ клеток. Наибольший размер клетки (155 мм – яйцо страуса) в $\mathbf{10^6}$ раз больше минимальной клетки (в $10^{-7}$ м – бактерии). До $\mathbf{10^4}$ атомов содержат биологические кристаллы, а их длина в $\mathbf{10^5}$ и более раз превышает поперечный размер. Самые большие биологические кристаллы в $\mathbf{10^6}$ раз больше минимального расстояния (0,2 нм) между соседними узлами в простейших кристаллах…

Скорость света в $2{,}5 \cdot \mathbf{10^6}$ раз больше скорости проведения импульса в нервном волокне человека. Длина мышечных волокон человека в $100 \div \mathbf{10^4}$ раз больше их диаметра. Наибольший рост человека в $4{,}6 \cdot \mathbf{10^4}$ раза больше размера сперматозоида (0,05 мм)…

Внутри ядра Земли обнаружена (в 2003 г.) таинственная сфера, объем которой в $\mathbf{10^4}$ раза меньше объема всей планеты. Землю населяют $3 \cdot \mathbf{10^6}$ видов живых организмов (86% – из класса насекомых). Типичный город на планете – это порядка $\mathbf{10^5}$ человек…

В русском языке ~ $\mathbf{10^5}$ (?) пословиц и поговорок (В.И. Даль собрал "только" ~ 30 тысяч), а количество слов ~ $2 \cdot \mathbf{10^5}$ (по Далю). В английском языке ~ $7{,}5 \cdot \mathbf{10^5}$ слов (в 3 раза больше, чем в русском)…

**В мире чисел** на БО: около $6{,}9 \cdot \mathbf{10^5}$ различных *частых миров* (ЛЧМ) и $1{,}2 \cdot \mathbf{10^5}$ *редких миров* (ЛРМ) [10, с.60, 76]. Количество скоплений ЛЧМ (между ЛРМ) – порядка $\mathbf{10^5}$ [10, с. 56].

## 38. ПАРАМЕТР ВСЕЛЕННОЙ ($\sim 10^9$)

Во Вселенной на каждый протон и электрон приходится ~ $\mathbf{10^9}$ фотонов (и ~ $\mathbf{10^9}$ нейтрино, встречаются столь же часто, как и фотоны) – это один из основных космологических параметров (см. §18).

Кроме того, в природе есть целый ряд других примеров числа $10^9$ (возможно, некоторые из них «стремятся» к числу $10^{11}$?, реф.39):

Диаметр звезд-сверхгигантов больше диаметра нейтронных звезд (~15 км) в $\mathbf{10^7}$ и более раз. Время жизни (1÷300 суток) *пятен* на Солнце (самых грандиозных его образований) в $\mathbf{10^7}$ и более раз превышает время «мгновенных» вспышек. Пылинки межзвездной пыли расположены друг от друга на расстоянии ~ $\mathbf{10^9}$ их минимальных размеров ($10^{-7}$ м). Суммарная длина (2 м) всех молекул ДНК в одной клетке человека в ~ $\mathbf{10^9}$ раз больше диаметра ДНК. Частота колебаний ДНК $\mathbf{10^9}$ раз в сек (с учетом реф. 54) [10, с. 199].

Число атомов в элементарной ячейке кристаллов (в т.ч. биологических) – до $\mathbf{10^9}$ (у вируса). За 70 лет сердце человека делает ~ $3 \cdot \mathbf{10^9}$ ударов.

**В мире чисел** при рассмотрении всего БО любопытно знать, какой тип $T$ наиболее вероятен у ЛЧМ и ЛРМ? Вероятно, это тип $T = 10^7 \div 10^9$ у ЛРМ и $T = 10^8 \div 10^9$ у ЛЧМ (см. §10), [10, с.149].

## 39. «ПЛАНКА» НАШЕЙ ЭПОХИ ($Z \approx 10^{12}$)

В окружающем нас мире существует красивое и, вероятно, случайное совпадение: *число звезд в типичной галактике приблизительно равно числу галактик в наблюдаемой Вселенной*. И если это число обозначить символом $Z$, то мы вправе записать $Z = 10^{11} \div 10^{12}$. Причем Z является таковым лишь потому, что две важнейшие физические константы связи (КС) увязаны соотношением: $\alpha_G \sim \alpha^{20}$. Ниже приводятся рассуждения, которые поясняют сказанное [6, с. 95].

Максимальная масса галактики ($M_{max}$) оценивается по формуле:

$$M_{max} \sim \alpha^5 \cdot \alpha_G^{-1/2} \cdot (m_p/m_e)^{1/2} \cdot M_*, \text{ причем } M_* \sim \alpha_G^{-3/2} \cdot m_p, \quad (39.1)$$

где $M_*$ – масса типичной звезды (например, нашего Солнца);
$\alpha \equiv 0{,}5(4\pi 10^{-7}) \cdot c \cdot e^2/h \approx 137^{-1}$ – постоянная тонкой структуры (ПТС); $\alpha_G \equiv G \cdot m_p^2/(ch/2\pi)$ – гравитационная “ПТС”, см. [6, с. 66], [10, с. 174];
$G$ – гравитационная постоянная (это не ФФК, а КС, см. [14, с. 83]);
$m_p$, $m_e$, $c$, $e$, $h$ – масса покоя протона, масса покоя электрона, скорость света в вакууме, заряд электрона, постоянная Планка (пять ФФК).

Из формулы (39.1) нетрудно получить, что максимально возможная масса галактики во Вселенной составляет $10^{11} \div 10^{12}$ масс ($M_*$) типичной звезды. Иначе говоря, самые большие галактики во Вселенной (такие, например, как наша Галактика) содержат до $10^{12}$ звезд.

Если принять, что масса типичной галактики $M \sim (m_e/m_p)^{1/2} \cdot M_{max}$, то количество ($K$) всех галактик во Вселенной составляет:

$$K \sim \alpha^{-5} \sim 10^{10} \div 10^{11}. \quad (39.2)$$

Поскольку обе КС ($\alpha_G$ и $\alpha$) генерируются динамическим способом (изменяясь во времени, хотя и очень медленно), то их числовые значения, и значение «нашего» $Z = 10^{11} \div 10^{12}$ – это, в некотором роде, числовая “*планка*” современной нам эпохи в биографии Вселенной. Вот почему мы выбрали символ $Z$ – это *последняя* буква латинского алфавита (все предыдущие буквы “прошли”, “остались ниже”).

Любопытно, что в природе «планку» нашей эпохи (число $Z$) можно обнаружить в разных «ипостасях». Приведем ряд примеров:

Постоянная слабого взаимодействия ($g_w$), по-видимому, случайно связана с постоянной гравитации $G$ следующим соотношением: $[G \cdot m_e^2 /(ch/2\pi)]^{1/4} \approx g_w \cdot m_e^2 \cdot c/(h/2\pi)^3 \sim \mathbf{10^{-11}}$ [6, с. 81].

Согласно ТС максимально возможный размер замкнутых струн, вероятно, в **$10^{11}$** раз превосходит размер типичной струны (§11).

Спустя **$10^{10}$** *эви* от Начала во Вселенной установилось важнейшее соотношение плотностей излучения и вещества – $10^9$:1 (§18) реф. 38.

Масса самой тяжелой ФЧ (*t*-кварка) почти в **$10^{11}$** раз превосходит массу самой легкой ФЧ (электронного нейтрино) (§4).

На один атом тантала (*min* распространенность во Вселенной) приходится ~ **$10^{12}$** атомов водорода (см. *нуклеосинтез* в [47, с.472]).

Объем атома в **$10^{12}$** раз превышает объем ядра атома [34, с. 46].

Характерный размер ($10^7$ м) твердых планет (как Земля, [6, с. 66]) в **$10^{12}$** раз превышает средний размер пылинки ($10^{-5}$ м) [41]. Масса Солнца **$10^{12}$** раз больше массы всех микрометеоритов вокруг него…

В облаке Оорта (вокруг солнечной системы) ~**$10^{11}$** кометных ядер.

Плотность нейтронных звезд в **$10^{14}$** раз больше плотности Земли.

Пик интенсивности реликтового излучения приходится на частоту ~ **$10^{11}$** колебаний в секунду (с учетом реф. 54).

На Земле насчитывается до **$10^{12}$** типов органических молекул (кирпичиков живой материи), правда, только 50 из них участвуют в фундаментальных процессах жизнедеятельности [27]. Голубой кит (30 м) почти в **$10^{11}$** раз больше, чем вироида (мельчайший живой объект на Земле)…

Длина спирали ДНК у человека ~ **$10^{10}$** звеньев. Вероятность образования «креста» (роль которого – загадка) перед удвоением ДНК в ~ **$10^{15}$** раз больше, чем в линейной молекуле. Максимальная дневная выработка сперматозоидов (у лошади и свиньи) ~ **$10^{10}$** штук (у человека ~ **$10^8$**). Среднее расстояние от Земли до Солнца в **$10^{11}$** раз превышает средний рост человека…

Мозг человека содержит ~ **$10^{12}$** клеток (сотая часть клеток всего тела). Ёмкость «долговременной» человеческой памяти порядка **$10^{11}$** бит информации (70 лет можно “грузить” в память по 60 бит/сек, но природа почему-то надежно “прячет” от нас большинство воспоминаний). В крови женщины около **$7 \cdot 10^{11}$** кровяных пластинок, а у мужчины – **$1{,}4 \cdot 10^{12}$**. В лимфе человека ~**$10^{11}$** лимфоцитов. Интенсивность звука, воспринимаемого ухом, может меняться в **$10^{11}$** раз. Минимальная продолжительность жизни (1–2 дня) – у клеток кишечного эпителия, **$7 \cdot 10^{10}$** этих клеток ежедневно погибает…

Количество всех людей, когда-либо живших на Земле, быстро приближается к **$10^{11}$** человек. Согласно теории С. Капицы в 2005 г. скорость роста населения уже достигла своего максимума, а дальше

– смена форм и параметров развития человечества, причем ничего подобного на Земле ещё не было [16], [10, с. 210]. Количество всех *видов* живых существ, когда-либо живших на Земле ~ **$5{\cdot}10^8$** (м.б. биологи на порядок недооценивают их количество?)…

Состояние самых богатых людей планеты – Б. Гейтса и прочих олигархов (в т.ч. российских) – устремляется к сумме в **$10^{11}$** долларов. Это предельный *коэффициент расслоения общества* (реф. 47), [10, с. 220]. Самая дорогая картина в мире – «Мона Лиза» Леонардо да Винчи оценена в **$10^{10}$** центов (100 млн. долларов, 1962 г.).

Мощность наиб*о*льшей водородной бомбы, созданной человеком (100 мегатонн в тротиловом эквиваленте), в **$10^{12}$** раз превышает мощность обычной ручной осколочной гранаты (0,3÷1,2 кг) [41].

Физический предел миниатюризации полупроводниковых устройств в **$10^{11}$** раз больше *аттометра* ($10^{-18}$ м).

Радиоволны: отношение гипервысоких частот ($6{\cdot}10^{12}$ Гц) к крайне низким частотам (3÷30 Гц) равно числу **$10^{12}$** [45, т.4, с. 213].

**В мире чисел** обнаружено пока два «отражения» числа $10^{11}{\div}10^{12}$, но это *очень интересные факты*, которые будоражат воображение:

В конце БО максимально возможное количество делителей ($T_{max}$) у чисел в частых мирах равно $T_{max}$ ≈ **$7{\cdot}10^{11}$**, а в редких мирах $T_{max}$ ≈ **$8{,}3{\cdot}10^{10}$**, т.е. в 8,4 раза меньше (§12), [10, с.63, 69], [14, с. 19].

Всякое натуральное число м.б. представлено в виде суммы не более чем 800000 *простых чисел* [10, с.31]. А сумма первых 800000 простых чисел (т.е. наименьшая из всех *таких* сумм) равна ~ **$10^{12}$**.

## 40. БОЛЬШИЕ ЧИСЛА (ГУГОЛ И Т.Д.)

Их немало в теоретической физике и космологии. Например: во Вселенной около $3{\cdot}10^{79}$ протонов и электронов; электрон не теряет своего заряда, по крайней мере, за $5{\cdot}10^{21}$лет (~$10^{72}$*эви*); распад всей материи во Вселенной может произойти через $10^{31\pm2}$ лет (~$10^{80}$ *эви*) (§5); энтропия современной Вселенной ~$10^{90}$ (§20); и т.д.

Любопытно, что в физических теориях наравне с привычными коэффициентами типа 2π или 4π часто встречается некое *большое число*, якобы равное ~ $10^{40}$ [10, с. 177], [6, с. 96]. Однако я и раньше [10, с. 179] высказывал мысль, что «магией» обладает, скорее всего, число $8{\cdot}10^{60}$ – количество планковских времен (*эви*) в возрасте Вселенной (и длина БО в ГТНЧ, см. §6). А поскольку $(8\cdot10^{60})^{2/3} = 4\cdot10^{40}$, то «магию» ошибочно (?) приписывают числу $\sim 10^{40}$.

**В математических исследованиях**, как подметил один выдающийся математик, крайне редко фигурировали числа, бо́льшие, чем $10^{100}$ и он даже присвоил такому числу название “*гугол*” [23, с.10]. Однако и в “чистой” математике встречаются огромные числа. Например, в классической теории чисел известна *постоянная Виноградова*, равная числу $B \approx e^{24154953}$ [10, с. 32]; но «самое большое число, которое когда-либо служило какой-нибудь цели в математике» (по словам Харди, [14, с. 12]) – это *число Скьюса*, равное $N_c = 10^A$, где $A=10^B$ и $B=10^{34}$. Число Скьюса связано с *функцией базиса* (§9, 15), а если для этого сверхбольшого числа вычислить сумму *Гаусса-Мертенса* (7.3), то получим “всего-навсего” порядка $2{,}3\cdot10^{34}$.

**В рамках ГТНЧ** (в пределах БО) мир чисел тоже иногда как бы “уходит” от больших величин, скажем, за счет логарифмической функции (*логул, билогул* в §23). Однако всё равно на БО больших чисел никак не меньше, чем в реальном физическом мире. Это, например, параметры Пирамиды в конце БО [14, с. 22], или, скажем, количество всех *разбиений* числа $N$ в конце БО (§18, 25)

## 41. ТАЙНЫ БЕСКОНЕЧНОСТЕЙ (∞)

При объединение ОТО и КМ появляется бессмыслица – вероятность некоторых процессов равна… *бесконечности* (∞). Бесконечные результаты сигнализируют о том, что теория используется за пределами области своей применимости (§3).

**В мире чисел** мы также сталкиваемся с подобного рода бесконечностями и бессмыслицей. Например, функция базиса $K = N/\ln N$ (при $N\to1$) и логарифмическая функция $t = \ln N$ (при $N\to0$) устремляются к бесконечности (§14,15). Но в рамках ГТНЧ эти простые факты порождают почти фантастические гипотезы (реф. 30, 42).

## 42. ЕДИНСТВО БОЛЬШОГО И МАЛОГО

Согласно теории суперструн (ТС) космический коллапс может предстать космическим расширением! (§14), (реф. 30). Законы Большого и Малого должны сливаться вместе в согласованное целое (д.б. единая физическая теория) [3, с. 248]. ТС допускает, что *черные дыры* могут быть гигантскими элементарными частицами (§15).

Общеизвестна гипотеза Маркова о том, что исчезающе малый *фридмон* с планковской массой $\sim10^{-8}$ кг (почти ничто) может заключать в себе… бесконечно большую вселенную [20], [10, с.187].

В настоящее время установлено, что горловина, соединяющая почти замкнутое пространство и обычное бесконечное пространство (нашу Вселенную), с точки зрения наблюдателя в обычном пространстве представляет собой «черную дыру». Но наблюдателю внутри полузамкнутого пространства последняя представляется целой вселенной с большими размерами [28, с. 221]. А наша Вселенная с высокой степенью точности плоская, т.е. *бесконечная*. Может быть, конечно, что она и замкнутая, но только этот размер заметно больше видимой части Вселенной (то, что мы в принципе можем увидеть, существенно меньше, чем полный объем Вселенной).

А. Гус и А. Линде в результате исследований выяснили даже тот факт, что вселенную, по-видимому, можно создать искусственно (в т.ч. в лаборатории), в нашем почти плоском мире. И всё это благодаря тому, что возможно изменение свойств вакуума нашего пространства, а значит, и изменение физических свойств окружающего мира [28, с. 222].

**В мире чисел** единица и бесконечность почти «соприкасаются». Так, если считать, что $N = 1$ – это первое *простое число* (что, в принципе, делать не запрещается [35, с. 69]), то его порядковый номер ($K$) мы должны считать… бесконечно большим ($\infty$)! Это следует из *функции базиса* ($K \sim N/\ln N$, см. §15), т.к. при $N$=1 эта функция принимает вид $K \sim 1/\ln 1 = 1/0$, то есть $K \to \infty$ (?!).

Нуль (0) делится на любое число (кроме 0), поэтому его *богатство* $\sigma(0)$ должно быть *бесконечно большим числом*, однако ещё Эйлер привёл пример того, что $\sigma(0)$ может принимать бесконечное число *конечных значений* [14, с.29]. Возможно, что и *канон* у $N$=1 также имеет бесконечно много значений (§17), (реф. 32).

Некой условной иллюстрацией «соприкосновения» 1 и $\infty$ является, скажем, *белая Пирамида*. К данному понятию нас приводят следующие рассуждения. Посмотрите на Пирамиду (рис. 11.1). На самой её вершине находится число $N$=1 – черный камень с символом «1». А к нему справа примыкает… белый камень с символом «$\infty$». Правда, последний просто не показан, как не показана вся перевернутая вниз вершиной *белая Пирамида* (белое поле на рис. 11.1). То есть белая Пирамида – это перевернутая на 180° *копия* нашей Пирамиды (последний камень которой обозначен символом «$\infty$»). Таким образом, единица нашей Пирамиды, безусловно «соприкасается» с бесконечностью перевернутой белой Пирамиды.

Из формулы Дирихле (10.3) следует: $T_1+T_2+\ldots+T_N \sim N\cdot\ln N$, т.е. сумма типов у всех чисел отрезка (скажем, на БО – это $1{,}12\cdot10^{63}$) определяет собой *простое число* ($P\sim N\cdot\ln N$), с порядковым номером, равным правой границе данного отрезка (на БО – это $N = 8\cdot10^{60}$).

Если натуральный ряд символизирует нашу Вселенную (структуру «нашего» пространства-времени), то отрезок [0; 1] – это некий образ загадочной потусторонней вселенной (реф. 30). Причем оба эти мира тесно *связаны между собой*. Эту мысль иллюстрирует, например, “уловки” Эйлера при выводе формулы для *богатства* любого натурального числа – $\sigma(N)$. Эти “уловки” заключались в использовании исчисления бесконечно *малых* величин из отрезка [0; 1], хотя в итоге мы получаем богатство сколь угодно *большого* натурального числа $N$ [13, с. 51], [14, с. 28]. Другой пример – *ряд Фарея* из отрезка [0; 1], который является неотъемлемой частью в доказательстве *тождества Радемахера* (§18). Также см. (реф. 23).

## 43. БЕТА-ФУНКЦИЯ В ГТНЧ

Теория суперструн была «порождена» *бета-функцией* (§11), которая одним махом описала все свойства частиц, участвующих в сильном взаимодействии (самом «мощном» из известных, см.§5).

**В мире чисел** самыми «мощными» являются т.н. тильдаобразные числа, а особенно – верхние лидеры $N$ частых миров, т.к. у них больше всего делителей (среди чисел отрезка [1; $N$]). Примечательно, что именно бета-функция лучше всего (и также «одним махом») описывает распределение делителей у тильдаобразных чисел (§26).

**Важное замечание**. Эта весьма краткая рефлекция, но при этом – одна из самых интересных. То есть «размер» рефлекции никак не влияет, скажем, на вероятность её реализации в мире Платона (§2).

## 44. ЧИСЛА-СУПЕРПАРНЕРЫ?

Все частицы в природе, возможно, существуют парами. Однако на современных ускорителях этого пока не проверить, т.к. *частицы-суперпарнеры* д.б. в тысячу и более раз тяжелее протона (§12).

**В мире чисел** также можно говорить о *числах-суперпарнерах* – это *их* делители («белые камни») они образуют «белую» Пирамиду (реф. 42). Причем эти числа имеют бесконечно много делителей (?).

## 45. ВСЕЛЕНСКАЯ «НЕСПРАВЕДЛИВОСТЬ»

Она проявляется в огромных «диспропорциях», например:

При слиянии 3-х кварков 95% их массы переходит в энергию. Керн в центре протона (он в несколько раз меньше самого протона) содержит львиную долю вещества протона (остальное – мезонная “шуба”); примерно также устроен нейтрон. В ядре атома ($10^{-12}$ часть объема атома) сконцентрировано 99,9% всей массы атома. На долю водорода и гелия приходится 99,9% вещества во Вселенной. Скрытая материя (§9) в короне Галактике (которую мы пока даже не знаем, как наблюдать) содержит 92,2% всей массы Галактики. Семь веществ в фотосфере Солнца составляют 99,75% её химического состава. Масса Солнца – это 99,87% массы всей солнечной системы. Только от 8 главных причин умирают 99, 96% россиян [10, с.206]. Всего 0,25% американцев держат в своих руках 82% совокупного капитала США (в России эта цифра ещё больше!, см. реф. 47).

**В мире чисел** мы обнаруживаем аналогичные «диспропорции», причина которых кроется в самой «архитектуре» Пирамиды (§11).

Только семь миров (8,5% всех миров) содержат 85,440% (88,766%) всех чисел отрезка [1; 520000] (см. табл.10.1). Семь плотностей (18%) «вбирают в себя» 93,32% от количества всех *богатств* отрезка [1; 25200], [14, с. 27]. Подобные процентные соотношения будут наблюдаться и на бо́льших отрезках, в том числе и для БО.

Доля ($Q$) *обычной плотности* для первых простых чисел (2, 3, 5, …) существенно больше (в терминах книги [14, с. 70]).

## 46. ТИЛЬДЫ – СПЛОШЬ И РЯДОМ!

Тильды (тильда-распределение) или, строго говоря, *логарифмически нормальные* (логнормальные) распределения – встречаются в природе повсеместно, однако на это, похоже, никто не обращал особого внимания широкой публики. Теоретическое обоснование исключительной роли нормального распределения дают *предельные теоремы* теории вероятностей [14, с. 39÷45]. Качественно соответствующий результат может быть объяснен следующим образом. Нормальное распределение служит хорошим *приближением* каждый раз, когда рассматриваемая *случайная* величина представляет собой сумму большого числа *независимых случайных* величин (подчиняющихся *каким угодно* законам распределения), причем максимальная из которых мала по сравнению со всей суммой. И чем большее количество случайных величин суммируется, тем точнее нормальное распределение приближается к реальному распределению в природе.

О широчайшем распространении нормальных и логнормальных распределений много сказано в моих книгах:[8], [9], [10, с.77, 143, 219÷226)], [13], [14, с.23, 98, 103]. Итак, будем считать доказанным тот факт, что природа «любит» *нормальные* распределения, ибо природа построена на вероятностных законах (реф.26). Его Величество Случай и приводят либо к распределению Лапласа-Гаусса, либо к функции Гаусса, причем это происходит столь часто и повсеместно, что такие распределения были названы *нормальными* [14, с. 42]. Их символизирует колокол Гаусса (рис.23.1), под вершиной которого (на горизонтальной оси) расположены величины, которые чаще всего будут появляться в данном случайном процессе. Так, если исследовать рост мужчин в достаточно большой и *случайной* выборке, то под вершиной колокола окажется 168 см – самый распространенный (т.н. средний) рост мужчины в России, а нисходящие края колокола будут соответствовать росту карликов и гигантов (которых мало).

Поскольку большинство людей математику не жалуют, то вместо терминов *теории вероятностей* (матожидание, дисперсия, колокол Гаусса, …[14, с.39÷45]) понимающие люди в разговоре используют уточняющие фразы: «как правило», «чаще всего», и т.д. Например, мы скажем, что рост мужчин, *как правило*, будет равен 168 см.

Если рост людей может отличаться в 5 раз (скажем, от 50 до 250 см), то, например, денежные состояния самых богатых людей планеты в $10^{11}$ раз больше "капиталов" бедняков. Причем богатство в обществе также подчиняется *нормальному* распределению, но уже в *логарифмической* шкале (реф.47). Это пример т.н. логнормального распределения или тильдаобразного (*тильды* – в терминах автора).

Тильды в природе – сплошь и рядом, а причина всё та же – наш мир построен на вероятности. Тильда-распределение *случайных* величин, скажем, денежных доходов населения – есть следствие суммирования ("конкуренции") большого числа *независимых случайных* факторов. Особенность любой тильды – там нет смысла (глупо) оперировать понятием "среднее арифметическое", т.к. мы работаем в логарифмической шкале. Поэтому средний доход россиян – это фикция, правда, весьма удобная для правящей элиты (реф. 47).

***Замечание***: при чтении моих рефлекций (в части общих утверждений) следует мысленно добавлять слова: «как правило», «чаще всего», и т.д. Их изобилие в тексте просто мешало бы чтению, но и полное их забвение будет искажать смысл того, что я имел в виду.

**В мире чисел** логнормальные распределения также весьма распространены. Наиболее ярко это проявляется в распределении делителей у верхних лидеров, лидеров миров стедва, ЛПД и прочих т.н. *тильдаобразных* чисел (§22, 23, 26). Логнормальные распределения возникают в мире чисел и в целом ряде других случаев, скажем, при изучении спектра миров, канонических разложений и т.д. (§18, 21), [8, с. 18], [10, с. 50, 82]. См. также (реф. 47, 48, 58).

## 47. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БОГАТСТВА

В данном случае под *богатством* будем понимать денежные доходы населения России (в $ – долларах США). В наших якобы «свободных» средствах массовой информации (СМИ) практически нет данных о доходах самых богатых россиян, вся статистика о доходах обрывается на уровне, скажем, 100$ в месяц. Поэтому ещё в 2002 г. я применил свою *тильду* (закон распределения богатства – ЗРБ, см. §26), чтобы разобраться с доходами в России [11], [12].

Было принято 7 гипотез (каждую из которых можно обосновать):

1). Доходы распределены *логнормально*, т.е. по тильде (ЗРБ):

$$D_n = S\cdot\exp\{-A\cdot[\ln(K/n)]^p\}\ , \qquad (47.1)$$

где $n = 1, 2, 3, ..., (K–1)$ – порядковый номер группы населения (всё население – $N$ человек, в каждой группе по $N/K$ человек);

$S$ – суммарный доход всех $K$ групп (долларов в месяц);

$D_n$ – доход $n$-й группы (общий доход всех людей в группе);

$A$ и $p$ – некие числа (влияют на характер распределения);

$D_K = S – (D_1+D_2+D_3+...+D_{K–1})$ – доход в $K$-ой группе (супербогачи).

2). Доход $K$-ой группы (супербогачей) в 2 раза больше дохода предыдущей группы, т.е. $D_K/D_{K–1} \equiv 2$ (см. 2-й делитель в мире чисел).

3). Всё население ($N$=144,9 млн. чел.) делим на $K$=10000 групп.

4). Средний курс доллара США в 2000 г. был равен 28,11 руб.

5). Доля беднейшего населения – 32%, т.е. в группах с номерами $n = 1, 2, 3, …, 3200$ (у $3200\cdot14490 \approx 46,4$ млн. человек) среднедушевой месячный доход был менее 43 $ в месяц на одного человека.

6). У 10% самых богатых россиян (в группах $n = 9001\div10000$, т.е. у 14,49 млн. человек) доход составлял 4875 $ в месяц на 1 человека.

7). Считаем, что средняя российская семья состоит из 3-х человек, причем из них работает только один человек – глава семейства.

Работа с нашей тильдой сводится к нехитрым манипуляциям:

1). В программе “Excel” создаем таблицу: колонку с $n$=1, 2, 3, …, 10000 (строк), а рядом – колонку, куда «зашиваем» формулу (47.1) для $D_n$ (функция аргумента $n$ и параметров $S$, $K$, $A$, $p$). А затем ищем вариант с такими $S$, $A$, $p$, при которых соблюдаются наши 7 гипотез.

2). Задаемся суммарным доходом, скажем, $S = 10^{11}$ \$ (из СМИ).

3). Присваиваем параметру $A$ некое значение (скажем, $A$=10) и начинаем подбирать параметр $p$ так, чтобы наша тильда удовлетворяла 2-й гипотезе, т. е. чтобы $D_{10000}/D_{9999} = 2$.

4). При найденном $p$ корректируем (изменяем) значение $S$ до тех пор, пока не станет выполняться 6-я гипотеза.

5). Повторяя пункты 3 и 4 (перебирая $S$, $A$, $p$), мы видим, что с ростом параметра $A$ величина $S$ плавно убывает, что облегчает нам “попадание” в 5-ю гипотезу ($D_{3200}/14490 \approx 43$ \$/мес. на 1 человека).

Действуя указанным образом, мы находим тильду: $S$ = 90.090.000.000 (\$); $A$=11,7; $p$=0,12606. На рис. 47.1 тильда показана сплошной линией, а пунктиры – это «коридор» прочих вариантов (они не стыкуются с 7-ю гипотезами).

Из найденной нами тильды можно сделать следующие ***выводы***:

1). Среднедушевой доход был равен $S/N \approx 622$ (!) \$/мес, однако, он был недоступен 86% (!!) населения. Таким образом, *среднедушевой доход – очень «выгодный» показатель* для правительства, он хорошо скрывает позорную нищету основной массы россиян.

Для сравнения: в Швейцарии («богаче» всех в Европе) – 2080 \$/мес. на человека, а в Молдове – в 100 раз меньше (самые «бедные» в Европе). В США около 63% населения имеют свыше 700 \$/мес. на человека, а в России 63% населения имеют свыше 52 \$/мес. на человека (в 13 раз меньше).

2). *Коэффициенты расслоения общества* $K_{20} = 194$ и $K_{10} = 549$ оказались в 23÷39 раз (!) больше, чем указывают СМИ ($K_{20} \approx 8$, $K_{10} \approx 14$). Поясним: $K_{20}$ ($K_{10}$)

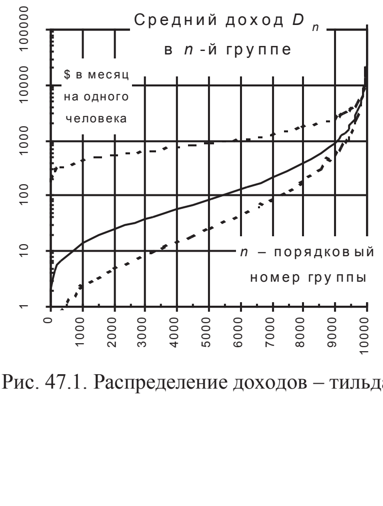

Рис. 47.1. Распределение доходов – тильда

– это отношение суммарных доходов 20% (10%) самых богатых россиян к доходам 20% (10%) самых бедных.

3). Только 5% россиян можно отнести к «*среднему классу*» по европейской мерке (от 2000 $ в месяц на одного человека в семье).

4). В России около 1,6 млн. *богатых* людей. Условно говоря (см. гипотезу 7), это главы семей, в которых доход свыше 3000 $/мес. на человека. *Очень богатых* было около 937 тысяч человек (это главы семей, в которых доход свыше 5000 $/мес. на человека). *Богатых по мировым меркам* было около 420 тысяч человек (это главы семей, в которых доход свыше 10000 $/мес. на каждого человека в семье).

5). Долларовых миллионеров-россиян (в т.ч. бывших россиян) – свыше *100 тысяч человек*. Такую оценку тильда выдала ещё в конце 2002 г., когда СМИ говорили буквально о 524 миллионерах. А в июне 2005 г. журнал «Форбс» объявил, что долларовых миллионеров-россиян около 88 тыс. человек (0,06% населения России, а в США число миллионеров – 0,60% всего населения). Таким образом, «Форбс» подтвердил правильность моих оценок (моей тильды).

В заключение заметим, что только 0,25% американцев сосредотачивают в своих руках 82% совокупного капитала США, и можно не сомневаться, что в России эта цифра ещё больше! Т.е. деньги, как и прочая материя во Вселенной, имеют тенденцию скапливаться в определенных местах (реф. 43, 45, 46, 48). Поскольку именно деньги образуют главную шкалу человеческих ценностей, то, можно сказать, что мы недалеко ушли от мира неживой («*неразумной*»!) природы, где *логнормальные распределения* – это обычная норма.

В настоящее время учеными достоверно установлено, что в мире все больше становится разрыв между богатыми и бедными, между знающими и незнающими. При этом не следует отождествлять размер богатства с *умом* человека (реф. 48, 49), т. к. чаще всего огромное богатство коррелирует[1] с наиболее дьявольскими сторонами человеческой души. В «Библии» сказано: «*… удобнее верблюду пройти сквозь игольные уши, нежели богатому войти в Царство Божие*» (Евангелие от Матфея, гл.19, стих 24). То есть даже «Библия» вынуждена признать очевидную закономерность: большое богатство, вообще говоря, таит за собой и большие грехи.

[1] *Корреляция* – вероятностная зависимость, не имеющая, вообще говоря, строго функционального характера, т. е. она возникает тогда, когда один из признаков зависит не только от данного второго признака, но и от целого ряда случайных факторов.

**В мире чисел** логнормальные распределения встречаются столь же часто, как и в реальном физическом мире. Самый простой и яркий пример – это распределение делителей у верхних лидеров и прочих тильдаобразных чисел, которых в натуральном ряде – бесконечно много! (§26), [14, с. 23, 47].

## 48. ПЛАНЕТА «СЕРЫХ» ЛИЧНОСТЕЙ

Таблица 48.1. Распределение **IQ**

| Доля людей,% | Г.Айзенк | Тильда |
|---|---|---|
| 0 ÷ 3,5 | 1 ÷ 70 | 72 ÷ 82 |
| 3,6 ÷ 10,5 | 71 ÷ 80 | 83 ÷ 86 |
| 10,6 ÷ 25,0 | 81 ÷ 90 | 87 ÷ 91 |
| 25,1 ÷ 75,0 | 91 ÷ 110 | 92 ÷ 109 |
| 75,1 ÷ 89,5 | 111 ÷ 120 | 110 ÷ 121 |
| 89,6 ÷ 96,5 | 121 ÷ 130 | 122 ÷ 138 |
| 96,6 ÷ 99,5 | 131 ÷ 140 | 139 ÷ 171 |
| 99,6 ÷ 100 | 141 ÷ ? | 172 ÷ 260 |

Термин *коэффициент интеллектуальности* (IQ) введен психологами в 1911 г. За сто лет они разработали множество разных IQ-тестов, в которых за ограниченное время требуется, как правило, ответить на ряд вопросов. Ответы оцениваются по определенной шкале, и в итоге получают IQ испытуемого человека. По-моему, IQ оценивает наличный уровень *банальных гуманитарных* знаний и навыков, а не «мощность» интеллекта, т.е. IQ-тесты *примитивны*, но, за неимением лучшего, мы будем считать, что величина IQ, действительно, что-то говорит об уровне интеллекта человека.

Г. Айзенк в книге «Классические IQ тесты» приводит распределение IQ в обществе (в его большой случайной выборке, см. табл. 48.1). По Айзенку: около 3,5% всех людей – это идиоты (IQ<25), имбецилы (IQ=25–50) и слабоумные (IQ=50÷70); ок. 7% – глупые люди (IQ=70÷80); ок. 79% – нормальные люди (IQ = 80÷120); ок. 10% – «продвинутые» (IQ=120÷140); ок. 0,5% – очень умные (IQ>140).

Примечательно, что данные Айзенка хорошо «моделируются» тильда-функцией (тильдой, а точнее – ЗРБ, см. §26):

$$IQ_n = S\cdot\exp\{-A\cdot[\ln(K/\boldsymbol{n})]^p\}\ , \qquad (48.1)$$

где $0< n <0{,}9999$ – доля населения, у которого IQ < $IQ_n$ (после вычислений умножаем $n$ на 100 и получаем долю в %); $S$=1000000; $K$=1; $A$=9,27; $p$=0,0125 – формальные параметры, «подгоняющие» тильду под данные Айзенка. Так, при $n$=0,75 получим $IQ_n \approx 109$, т.е. у 75% людей их IQ не превосходит значения IQ=109.

При $n$ = 0,9999 получаем $IQ_{max} \approx 260$ (планка для «умников», коих 0,01%). Если $n$ брать равномерным шагом (я брал 0,0001), то среднее значение – это $IQ_{ср}$ =102, причем $IQ_n$=102 при $n \approx 0{,}6$, т.е. у 60% людей IQ меньше среднего (*большинство – весьма посредственны*). Любопытно, что тильда «не хочет» опускаться ниже IQ = 72.

«Срабатывание» тильды позволяет утверждать, что интеллект в обществе распределен *логнормально*. Ведь тильда – это грубая, но «удобная» модель реального (логнормального) распределения (см. §26). Именно в силу последнего очень умных, «ярких» людей (как и полных идиотов) – исчезающе мало, а подавляющее большинство в обществе (свыше 90%?) имеет очень скромный IQ. Про таких людей говорят – «серая» личность. Нашу планету можно назвать не только планетой *насекомых* (около 90% всех видов живых существ), но и планетой «серых» личностей. Впрочем, так и должно быть (для природы *это норма*, см. реф. 32, 45), а удручает лишь то, что «серыми» личностями, как правило, оказываются и первые лица государств, и правящие элиты, решающие судьбы миллионов людей. В этом заключается феномен власти и больших денег.

Поскольку человечество "генерирует" буквально одни тильды, то это, увы, сближает его с *неодушевленной* материей, которая вообще ничего "не знает", кроме вездесущей тильды (реф.46). И хотя каждый из нас считает себя достаточно разумным, тем не менее, плоды нашей совместной деятельности практически не отличить от действия природной стихии (у которой нет никакого *разума*?).

Скажем, не будь ни богатых, ни бедных (при всеобщем материальном и духовном благополучии), то это бы радикально выделило человечество на фоне "неразумной" ("мертвой") материи. Однако апологеты рыночной экономики, именно такое всеобщее равенство приравнивают к смерти общества (но я настаиваю – *неразумного* общества). Упомянутое выше равенство требует от общества колоссально четкой организации, т.е. предельно низкой *энтропии* (§20), а процесс её уменьшения (борьба с хаосом, с его вероятностными закономерностями) – идет в разрез с общей тенденцией во Вселенной. Но разве именно *это* не являлось бы проявлением силы *разума* и не было бы достойно уважения («продвинутых» инопланетян)?

Идеи социализма и коммунизма – очень сильные, ибо человек *интуитивно* чувствует их "справедливость" (как и «Библии»). А сам Ленин был весьма талантливым и успешным политиком с мощнейшим гуманитарным умом (почитайте его философские труды). Ленин – редкое исключение в череде негодяев и бездарностей, руководивших нашей страной. Сила ленинских мыслей в их *очевидной* правоте (например: земля, её недра и богатства, крупнейшие фабрики и заводы – всё это должно принадлежать всему обществу, а не отдельным людям!). И недаром нынешняя российская элита, обворовавшая свой народ, смертельно *боится* всякого упоминания о Ленине. Хотя, по сути дела, благодаря именно *его* идеям наши олигархи и стали таковыми, ведь все их миллиарды – это пот и кровь 70-летнего труда всего *советского* народа. И почему, скажем, Чубайс (с мозгами вороватого бухгалтера) возглавляет (!)… всю *энергетику* страны – технически сложную, мощную и потенциально очень *богатую* (и в этом вся «хитрость») отрасль, в которой, кстати, предостаточно самых классных руководителей-профессионалов!

Да, советская экономика страдала рядом болезней, но в этом были виноваты и партийные боссы (Горбачев, Ельцин, Кравчук, Назарбаев, Алиев, и т.д.), которых заботила только личная карьера. Теперь большинство из советской номенклатуры (их дети и родственники) стали… миллионерами. А настоящих реформ пока не было, только – подлое предательство Ельцина и правящей элиты “на местах”, наглое оболванивание народа (СМИ) и чудовищное по масштабам *разграбление* богатейшей страны (которое далеко не закончено).

О какой разумности общества можно говорить, если мегаполисы уже забиты “по горло” автотранспортом, тупиковыми проблемами коммунального хозяйства, жилищного строительства, экологии и т.д., а в это же время почти все русские деревни и села вымерли от… ненужности (бизнесу, увы, они пока не интересны). Можно долго перечислять глупости и несуразицы, царящие в нашей стране и на планете в целом, которые говорят о *неразумности* общества (реф. 48). Вот почему СМИ так легко манипулируют нашим обществом.

И нет ничего странного в том, что даже, несмотря на сталинские репрессии, романтика *свободы человеческого духа* была реальностью именно в советские годы, а нынешние пресловутые “свободы демократического общества” – это лживые фальшивки банального *капитализма*. Его гнилая суть и жестокие нравы были верно угаданы и описаны Лениным (и другими «классиками») более ста лет назад. Теперь россияне убеждаются в правоте ленинского учения «на собственной шкуре». Впрочем, СМИ легко убедили нас, что мы якобы *сами* выбрали столь тернистый путь… (реф. 56, 57).

## 49. МОЩЬ ИНТЕЛЛЕКТА У ГЕНИЕВ

Сразу оговорюсь, что для меня *гений* – это Эйлер, Гаусс, Ландау, Виттен и им подобные люди (см. стр. 186). Их отличает, во-первых, – мощнейший аналитический ум, сверхплодотворно проникающий в мир Платона (§2), а, во-вторых, – феноменальная память, удерживающая огромные объемы информации (это врожденное и крайне редкое свойство мозга, причем им могут обладать даже глупые люди [10, с. 207]). А теперь спрашивается – во сколько раз *такой* гений умнее, скажем, идиота? Если верить IQ-тестам, то всего лишь в 10÷20 раз (реф. 48), что мне представляется явной чепухой.

Я предлагаю ввести новый коэффициент «мощности» интеллекта (скажем, IS), и воспользоваться “подсказкой” мира чисел (см. $T_{min}$, $T_s$, $T_{max}$ в конце БО, §10). Будем считать, что у первичного разума IS =1÷2, у «среднего» человека IS =140, а у гения (см. выше) IS может быть *на несколько порядков больше*, вплоть до IS ~ $\mathbf{10^5}$ (реф. 37). Предельно возможное значение IS ~ $\mathbf{10^{12}}$ (реф. 39) мы зарезервируем для *Сверхразума* (реф. 52) Распределение IS в обществе (его «спектр»), по-моему, д.б. аналогичен спектру из мира чисел (§10).

## 50. ИНТУИЦИИ ВЕРИТЬ НЕЛЬЗЯ!

Велика роль интуиции и в обыденной жизни, и в математике (§1). Но всегда следует помнить, что наша интуиция часто заставляет нас делать неверные заключения. Примеры «провала» нашей интуиции: карточная игра “солитер” [10, с. 86]; апор*ия* про Ахиллеса [10, с.132]; теорема Гудстейна [23, с.32]; много интересных примеров в части нашей интуиции в *теории вероятностей* [14, с. 39].

В теории чисел нельзя быть уверенным в фактах без доказательства (§5). Поразительным примером этого служит теорема Литтлвуда, который в 1912 г. доказал, что гипотеза $\pi(x) < \mathrm{li}\,x$ ложна и что существует бесконечное множество значений $x$, для которых знак неравенства должен быть заменен на обратный (>). Однако это происходит не раньше, чем мы приблизимся к числу Скьюса [14, с.12] [35, с. 29] (реф. 40).

## 51. ГЛАВНАЯ ТАЙНА РАБОТЫ МОЗГА

«Физика мозга» принципиально отличается от принципов работы компьютера. Так, мозг решает задачи, которые компьютеру не под силу. Говоря о «невычислимости сознания», мы имеем в виду, что компьютер никогда не обучится «пониманию», «озарению», творчеству» (до тех пор, пока мы не сможем отличить, кто отвечает нам из соседней комнаты на *любые* вопросы – человек или компьютер).

В нервной клетке (нейроне) обнаружены структуры – *микротрубочки цитоскелета* (МТЦ), которые могли бы отвечать за «невычислимость сознания» (реф. 27). МТЦ имеет диаметр около 25 нм ($2{,}5\cdot10^{-8}$ м ~ $10^{27}$ *эви*) и состоит из молекул – димеров *тубулинов*, которые могут находиться, по крайней мере, в 2-х пространственных конфигурациях (зависящих от конфигураций соседних молекул). В 1970 г. было доказано, что МАЦ в принципе способны к вычислениям (м.б. клеточными автоматами), а позже Р. Фейнман показал, что и в *гамильтоновых* (реф. 25) клеточных автоматах могут производиться сколь угодно сложные вычисления.

Большая совокупность тубулинов ($10^9$, т.е. 1000 нейронов) может в течение некоторого времени ($t$) развиваться по законам квантовой механики: скажем, $x = 1, 2, 3, \ldots, T$ тубулинов последовательно (друг за другом) "входят" в квантовую когерентную суперпозицию. А затем эта совокупность претерпевает "мгновенную" объективную *редукцию* (основа концепции Пенроуза) и переходит в классическое состояние ("обнуляясь": $x = 0$). Именно эта редукция и отвечает за момент "невычислимого осознания" (это коррелирует с понятием *инсайта* – внезапного усмотрения сути проблемной ситуации).

Количество редукций у человека м.б., скажем, $1{,}85\cdot10^8$ в сек. (у червя не чаще 2 раз в сек.), т.е. продолжительность одной редукции $t_1 \approx 5{,}41\cdot10^{-9}$ сек. $\approx 10^{35}$ *эви* (за это время свет проходит 1,62 м – характерный рост человека!). Любопытно также, что график [23, с.13] зависимости $t = f(x)$ напоминает *тильду* (рис. 26.1), у которой время $t$ есть логарифм некого *скрытого времени* $N$, т.е. $t = \ln N$ (реф. 15).

## 52. ГИПОТЕЗА О «СВЕРХРАЗУМЕ»

В природе обращает на себя внимание некая числовая «планка» нашей эпохи $Z$~$10^{11}\div10^{12}$. Целый ряд её проявлений указан в (реф. 39), причем только «продолжая» этот ряд – мы получим любопытную гипотезу: *«Сверхразум» в* **$10^{12}$** *раз мощнее первичного разума*. Обладателем последнего можно считать… устрицу, «интеллект» которой (IQ = 2, журнал «Наука и жизнь» №8, 2001). «Разум» устрицы почти в 70 раз уступает интеллекту самых умных людей (IQ >140; у идиотов IQ<25, у нормальных людей IQ = 80÷120, см. [12, с. 54]).

**В мире чисел** в конце БО (т.е. «в настоящее время») имеем: минимальный тип $T_{min} = 2$ (у простых чисел); средний тип $T_s \approx 140$; максимальный тип $T_{max} \approx 10^{12}$ (§10). Разработчики IQ-тестов в 1911 г., разумеется, не знали ГТНЧ, поэтому совпадение чисел 2 и 140 – удивительная случайность (реф. 48). Однако далее сама собой напрашивается гипотеза: у «Сверхразума» IQ ~ $\mathbf{10^{12}}$ (реф. 39).

Данная гипотеза подразумевает, что разум – явление широко распространенное во Вселенной, причем преобладает весьма заурядный разум (скажем, как у фауны на Земле) [14, с. 101]. Высокий разум, на несколько порядков превышающий человеческий, – встречается редко, ну а «сверхразум» – уникален, возможно, это нечто из *мира Платона* (§2). Но Бог, Аллах, Будда и т.п. к этому непричастны.

## 53. ЖИЗНЬ – ЯВЛЕНИЕ ЗАУРЯДНОЕ

Сразу оговорюсь, что данная гипотеза возникает в рамках ГТНЧ (её рефлекций), а у официальной науки однозначного ответа здесь нет (они – прямо противоположные друг другу). Я и раньше много говорил о заурядности жизни [10, с.184, 197, 210,], [14, с. 96, 101], а в данной книге появились новые факты. Например, в конце БО диапазон реализации *предельных разбиений* ($10^{27}$÷$10^{34}$ *эви*, §21) у верхних лидеров соответствует размерам $10^{-8}$÷$10^{-1}$ м, которые наиболее характерны для органических молекул и живых клеток на Земле.

**В мире чисел** в конце БО у наибольшего верхнего лидера $N$ частых миров диапазон шагов разбиения ($S^*\approx10^{20}$ *эви*) < $S$ < ($S_{T/2}\approx10^{30}$ *эви*) от локального минимума до локального максимума инфоэнтропии $h$ соответствует диапазону: от размеров протонов и нейтронов до характерного размера живых клеток на Земле (§24).

## 54. ВСЕЛЕНСКАЯ ШКАЛА ВРЕМЕНИ

«Наш» *год* ($\sim3\cdot10^7$ сек ~ $6\cdot10^{50}$ *эви*) – это время оборота Земли вокруг Солнца и, казалось бы, год имеет значение только для землян. Но «наш» год м.б. значимой мерой времени и для инопланетных цивилизаций, ибо возраст Вселенной ~$10^{10}$ лет или почти $\mathbf{10^{11}}$ – а это ключевое число в рефлекции 39, которая весьма любопытна. Кроме того, за год свет проходит путь ~$10^{16}$ м, а галактики (кирпичики Вселенной) больше этого размера в ~$\mathbf{10^5}$ раз (реф. 37).

«Наша» *секунда* также м.б. значима во вселенском масштабе, т.к., например, концентрация нуклонов в ядре атома превышает среднюю концентрацию нуклонов во Вселенной в ~ $10^{43}$ раза (реф. 45), а 1 сек ~ $10^{43}$ *эви* (§6). Любопытно также, что количество всех *редукций* (реф. 51) в жизни человека (за 70 лет) равно количеству секунд в возрасте Вселенной ($4{,}1\cdot10^{17}$).

## 55. ПЕРВЫЕ ТРИ МИНУТЫ

Наша Вселенная была сотворена (буквально из ничего?) за первые *три минуты* ($10^{45}$ *эви*) (§18, эпоха нуклеосинтеза).

Любопытно, что *три минуты* – это и в жизни человека весьма важное время. Например, именно *три минуты* (в среднем) длится половой акт, короткий перекур; звучит песня, притча, анекдот, байка; продолжается раунд в боксе, затяжной прыжок с парашютом (почти предельный по времени), спуск на эскалаторе метро; и т.д.

**В мире чисел** на отрезке [1; $10^{45}$] (за «3 минуты», §6) формируется Большой отрезок (со всеми его характерными параметрами). А далее на отрезке [$10^{45}$; $10^{61}$], можно сказать, что ничего «интересного» уже не происходит (основные параметры БО едва изменяются).

## 56. КУМИРЫ, КОТОРЫХ МЫ СОЗДАЕМ

Наши помыслы и поступки, вообще говоря, носят случайный, непредсказуемый характер (особенно для стороннего наблюдателя). Умей мы выразить их числом и мерой, то, наверняка, получили бы некие нормальные и логнормальные распределения (реф. 46).

Например, я чаще всего веду себя как меланхолик, но в отдельные моменты меня можно принять и за сангвиника, и за холерика, и за флегматика. Ведь указанные четыре типа – весьма условны, между ними – масса промежуточных состояний и настроений, которые, будучи выражены числом, образуют колокол Гаусса (в части оценки моего характера). Причем этот колокол (рис. 23.1) будет видоизменяться во времени (с годами наш характер и мы сами меняемся).

То же самое можно сказать и о моем сознании: как правило, в моей голове бродят самые банальные мысли, но иногда они могут быть совсем низкими, постыдными, а иногда – заоблачно высокими. Т.е. здесь явно требуется логарифмическая шкала с перепадом в несколько порядков (реф. 49). Кстати говоря, логнормальная картина моего сознания (мышления) позволяет думать, что моё детище (ГТНЧ, §6) в целом – тривиально, однако там есть «примесь» не только откровенно глупых утверждений, но и любопытных мыслей (именно такая возможность меня и вдохновляла на труд).

Итак, я очень разный, а мои человеческие качества можно описать неким набором нормальных и логнормальных распределений, комбинация которых в каждый конкретный момент времени и есть моё эфемерное «я». Думаю, что большинство людей мне подобны.

Вот почему каждый из нас в какие-то моменты свой жизни был добрым и злым, благородным и подлым, мудрым и глупым, и т.д. И всё это в логарифмической шкале (порой с сильнейшим накалом страстей, как, скажем, в любви и ненависти!) при непрерывном изменении во времени (иногда в «противофазе» с близкими людьми).

Исходя из выше сказанного, не мог, например, Пушкин писать только гениальные стихи, а Эйнштейн – высказывать только гениальные мысли. Да, их отдельные творения выглядят шедеврами, но зачем «молиться» над *каждой* их строчкой? Даже *гении* (реф. 49), бывают посредственны, говорят глупости и совершают непристойные поступки – это неотъемлемое свойство *любого* человека. Просто гениям от природы *иногда* дано подняться на такие вершины духа, куда большинству из нас тропа закрыта навсегда.

Легко доказать, что в «раскрутке» очередного кумира (вспомните хотя бы А. Солженицына, И. Бродского, М. Горбачева) – всегда заинтересованы вполне конкретные лица (силы, стоящие за ними). Иначе как объяснить, что, например, к 300-летию Санкт-Петербурга в его центре был установлен памятник Меншикову (главному казнокраду петровской эпохи), а не Леонарду Эйлеру – *гениальному* математику, 31 год работавшему в Санкт-Петербурге и там же похороненному [А кто из нас вообще помнит об Эйлере? Кстати, 4 апреля 2007 г. ему исполняется 300 лет]. При этом в городе вот-вот будет установлен памятник А. Собчаку, а всё дело в том, что просто есть богатые и влиятельные люди, у которых свои корыстные интересы.

Процесс создания кумиров аналогичен культивированию религии в умах людей – всё это очень полезные «фишки», позволяющие манипулировать обществом. Просвещать свой народ, особенно в части естественных и точных наук, – очень опасное мероприятие, т.к. у многих людей придет понимание того, как мы далеко от Истины.

Ещё Лев Толстой писал (о других «классиках» общеизвестного учения лучше промолчим), что сила правительства основана *на невежестве* народа, что правительство знает об этом, и потому будет всегда бороться против просвещения. Вот почему СМИ старательно насаждают оболванивающую «массовую культуру» и прочие «прелести» буржуазного общества (реф. 47, 48, 57).

## 57. ПРИОРИТЕТ ТОЧНЫХ ЗНАНИЙ

Природа *едина*, ей неведома наша обширная классификация наук, поэтому я пользуюсь термином «знание», под которым понимаю, прежде всего, математику и физику, у которой самые глубокие (фундаментальные) теории сводятся опять же к… математике. Если знания не опираются на математику, то их следует отнести к игре нашего разума, уводящей нас в сторону от Истины. Термин «точные» говорит только о том, что данные знания направлены по единственно верному пути. Только такие знания позволяют человеку уже сегодня достигнуть Марса (как пример, *бесспорных* достижений разума). А вот для «науки» философия Марс – недосягаем, несмотря на изощренную игру мысли философов и предельное мастерство по части жонглирования словами. Наш разговорный язык, а тем более метафоричный язык искусства – это, увы, детский лепет по сравнению с фантастически мощным языком математики, красота которого раскрывается только в процессе напряженной работы ума.

«Настоящий» IQ (реф. 49) должен весомо учитывать *точные знания* каждого человека, поскольку только такие знания адекватно описывают окружающий мир (см. слова Бэкона и др. на стр. 4). Но к чему же пришло общество в наши дни? Оказывается, что математику попросту вытесняют из школьного образования, она первый (!) кандидат на уничтожение среди прочих точных наук. Зато ставится вопрос об изучении в школе… «Закона Божьего» (вот вам и 21 век!).

Телевидение (ТВ) – это самое мощное СМИ. Фактически, именно ТВ развалило нашу супердержаву за пять лет безмозглой «перестройки» (зато Горбачев стал Нобелевским лауреатом, а партноменклатура вкусила первые шальные деньги). Учитывая низкий уровень интеллекта «народных масс» (реф. 48), СМИ и дальше будут самым надежным гарантом процветания и безнаказанности правящей элиты, действующей, как правило, в сугубо корыстных целях.

Даже ТВ-канал «Культура» – это поток самых банальных, пошлых «истин» и «тонких» признаний в личной преданности Президенту. Самые «продвинутые» из передач («Ап*о*криф» и т.д.) – это апофеоз блестящего словоблудия *гуманитарной* публики. Артисты (профессиональные притворщики!) – стали главными оракулами наших дней, и каждый второй из них уже написал свои мемуары. Хотя «познание» самого себя – это далеко не познание окружающего мира, особенно если вы понятия не имеете о точных знаниях.

Парадокс в том, что человек, не знающий даже *азов* точных наук (и ещё бравирующий этим!) – у нас может считаться вполне культурным человеком. А вот, скажем, меня – «технаря», допускающего ошибки в русском языке (и весьма сомнительные вольности в мыслях), наверняка, не примут в компанию «культурных» людей.

Можно перечитать многое из классической литературы, можно объездить почти все страны мира и выучить несколько языков, но при этом остаться человеком, который так и не познал «скрытых пружин», управляющих миром (и даже нашими мыслями [23]).

Вообще, поражает тот факт, что в век научно-технического прогресса СМИ оккупируют гуманитарии, т.е., вообще говоря, *невежественные* (по словам Бэкона) люди, хорошо подвешенный язык которых, увы, никогда не заменит хороших мозгов. По-моему, в прежние времена *лучшие* журналисты, артисты, пародисты, писатели (не говоря уже о директорах заводов) – это были люди с *высшим техническим* образованием. Именно оно заметно развивает настоящую «гибкость» ума и расширяет кругозор (даже нерадивого студента).

## 58. О ФОРМЕ ЦЕРКОВНОГО КУПОЛА

На рис. 57.1 изображена *тильда* (чёрная линия) верхнего лидера, имеющего тип $T = 10080$ (§26). Причем вместе с тильдой показано и её зеркальное отражение. Цель такого рисунка, показать, что *тильда причастна к характерной форме купола* церковных построек в русском зодчестве (моя гипотеза). В отличие от банальной точки зрения – мол, купола повторяют форму шлема, луковицы, груши и т.п., высказанная гипотеза подразумевает некую тайну. Так, наши предки могли кое-что слышать о могуществе *мира чисел*, ведь ещё 2,5 тыс. лет назад мудрейший Пифагор учил: «Бог – это число. Самое мудрое – число. Числу же все подобно» (см. стр. 4). Пифагор общался со жрецами в Египте, а те могли хранить крупицы великих знаний погибшей цивилизации (Атлантиды?)[1].

[1] В 2029 г. в 36 тыс. км от Земли пронесётся глыба-метеороид с поперечником 320 м. Такое бывает раз в тысячелетие. Огромный астероид упал на полуостров Юкатан 65 млн. лет назад (оставив кратер ∅ 180 км), тогда же вымерло 2/3 животных на Земле, в т.ч. все динозавры.

Теперь наука сто*и*т (или *снова* сто*и*т?) на пороге Больших знаний и именно *бета-функция*, «породившая» теорию суперструн (§11), лучше всего подошла и к описанию мира чисел (верхних лидеров, §26, реф. 43). Поэтому именно *бета-функция* должна быть удостоена чести «выстраивать» купола божественных храмов! Вообще ГТНЧ способна во многом «обогатить» традиционные религии (а среди её служителей есть и математики [10, с. 181]). Все рефлексии ГТНЧ, по сути дела, создают некую *новую религию* (в числовом формате) и *новую философию* (без её традиционного жонглирования одними лишь словами).

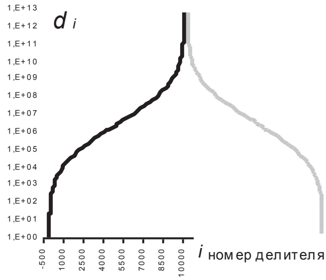

Рис. 57.1. Тильда строит купол?

## 59. ЗАКОН БЕНФОРДА

Об этом законе я случайно прочитал в 1982 г. (скучая на работе) в журнале “Техника молодёжи” (№10 за 1979 г., стр. 59). В небольшой заметке в конце журнала говорилось буквально следующее.

В 1938 году американский физик Ф. Бенфорд открыл “закон аномальных чисел”. Начальный толчок его поискам дали библиотечные таблицы логарифмов. Бенфорд заметил, что первые несколько страниц захватаны больше, чем следующие за ними, в то время как последние страницы почти совсем чисты. “Почему студенты и инженеры чаще пользуются первыми страницами таблиц логарифмов, чем последними? – подумал Бенфорд. – Потому что им чаще приходится иметь дело с числами, начинающимися с цифры 1, чем с цифры 2; с цифры 2, чем с цифры 3; и т.д. А логарифмы каких чисел чаще всего приходится искать в таблицах? Очевидно – тех чисел, которые находятся в специальных (всевозможных) справочниках”.

Бенфорд исследовал около 20 таблиц, среди которых были данные о площади поверхности 335 рек, удельной теплоемкости и молекулярном весе тысяч химических соединений и даже номера домов первых 342 лиц, указанных в биографическом справочнике американских ученных. Проанализировав около 20 тысяч содержавшихся в таблицах чисел, Бенфорд установил удивительную закономерность. Казалось бы, все девять цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (из которых состоит любое мыслимое число) равноправны, и вероятность появления каждой из них в начале числа должна составлять 1/9=0,111... . Точнее говоря, не в начале числа, а в качестве первой значащей цифры числа (понятие о *первой значащей цифре* проще всего пояснить на примере, так, у совершенно разных чисел 0,0123; 0,1456; 1,789; 1957 – первая значащая цифра равна 1). Однако, обработав таблицы, Бенфорд получил, что вероятность появления в качестве *первой значащей цифры* единицы, оказалась почти втрое больше, чем вытекает из равновероятного распределения! А вероятность появления первой значащей цифры 9 составляет всего 0,047 – почти в 2,4 раза меньше, чем 1/9 = 0,111. Короче говоря, если таблицы логарифмов разместить на 9 страницах, то первая страница окажется почти в семь раз грязнее, чем последняя!

В итоге проделанной работы Бенфорд установил *эмпирический* "закон аномальных чисел": вероятность ($P_i$) того, что у некого случайного числа (скажем, указанного в некой таблице) первая значащая цифра будет равна $i$, определяется по формуле

$$P_i = \log(1 + i^{-1}), \qquad \text{где } i = 1, 2, 3, ..., 9. \qquad (59.1)$$

Слово "аномальные" в названии закона появилось потому, что одни таблицы находились в лучшем соответствии с формулой, чем другие. Площади рек и случайные номера домов давали лучшее совпадение, а таблицы квадратных корней или удельной теплоемкости – худшее. Поэтому Бенфорд решил, что открытый им закон приложим только к таким – аномальным – числам, между которыми не угадывается никаких связывающих их закономерностей. Вот какой красивый (лаконичностью) закон на протяжении сотен лет являлся миру в виде захватанных первых страниц справочников!

Закон Бенфорда поразил меня своей красотой и загадочностью. С тех пор я никогда его не забывал, а осенью 1985 г. наконец сам догадался о причине возникновения этого закона и даже смог вывести формулу (59.1) *аналитически*. Странно, что столь простые рассуждения не пришли в голову Бенфорду. Ниже я приведу общую схему нахождения вероятностей распределения ($P_i$) первой значащей цифры $i$, вообще говоря, *у любой* непрерывной функции $y = f(x)$.

Пусть даны значения некой функции $y = f(x)$ на отрезке $[y_n; y_k]$, где $y_n = 10^n$; $y_k = 10^k$; $n$, $k$ – любые натуральные числа, причем $k>n$. Первая значащая цифра $i$ у всякой десятичной дроби (по оси ординат) будет оставаться неизменной, если рассматривать такие отрезки (проверьте это на конкретных числовых примерах, всё просто):

$$[y_{ij}; y_{i+1,j}], \qquad \text{где } y_{ij} = i\cdot 10^{n+j-1}; \qquad y_{i+1,j} = (i+1)\cdot 10^{n+j-1};$$

и для каждого $i$ =1, 2, 3, …, 9 берём $j$ =1, 2, 3, …($k$–$n$). Будем считать, что количество значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[y_{ij}; y_{i+1,j}]$ в точности равно количеству значений аргумента $x$ на отрезке $[x_{ij}; x_{i+1,j}]$ по оси абсцисс, причем появление любого (по значению) аргумента $x$ на отрезке $[x_n; x_k]$ – равновероятно, и $y_n = f(x_n)$; $y_k = f(x_k)$. Тогда

$$P_i = \Sigma\,[f^{-1}(y_{i+1,j}) - f^{-1}(y_{i,j})]\;/\;[\,f^{-1}(y_k) - f^{-1}(y_n)]\;, \qquad (59.2)$$

где $f^{-1}$ – функция, *обратная* функции $f$, а суммирование производится по $j$=1, 2, 3, …($k$–$n$) (для каждого $i$=1, 2, 3, …, 9).

Если в качестве функции $y = f(x)$ взять любую *показательную функцию* $y = b{\cdot}a^{cx}$, то после её «обработки» по указанной схеме мы получим формулу Бенфорда (59.1). Для показательной функции вероятность $Pi$ не зависит ни от выбора интервала рассматриваемых значений функции $y = f(x)$, ни от параметров показательной функции ($b$, $a$, $c$). Таким образом, слово “аномальные” в законе Бенфорда просто лишнее, и, например, для таблиц квадратных корней ($y$=$x^{1/2}$) вероятность $Pi$ с увеличением $i$ даже растет, а не убывает, как того требует формула (59.1).

Таблица 59.1. Закон Бенфорда

| $i$ | Вероятность $Pi$ | | |
|---|---|---|---|
| | у Бенфорда | | число |
| | формула | факт. | $N$ |
| 1 | 0,301 | 0,306 | 0,296 |
| 2 | 0,176 | 0,185 | 0,181 |
| 3 | 0,125 | 0,124 | 0,125 |
| 4 | 0,097 | 0,094 | 0,093 |
| 5 | 0,079 | 0,080 | 0,079 |
| 6 | 0,067 | 0,064 | 0,069 |
| 7 | 0,058 | 0,051 | 0,060 |
| 8 | 0,051 | 0,049 | 0,046 |
| 9 | 0,046 | 0,047 | 0,051 |

Поскольку любая *экспоненциальная функция* – это частный случай показательной функции (у которой $a \equiv \boldsymbol{e}$ = 2,718...), и т. к. большинство природных явлений описывается именно *экспонентами* [10, с. 86], то нет ничего таинственного в закономерности распределения первых значащих цифр, на которую впервые обратил внимание Бенфорд. Кроме того, целый ряд других функций после их подстановки в формулу (59.2) – выдают вероятности $Pi$ , весьма близкие к закону Бенфорда. Например, функция $y = f(x)$ = tg($b{\cdot}x$) при любом $b$ на отрезке от $y_n$=$10^{-3}$ до $y_k$=$10^3$ “порождает” $P_i$, которые, практически, совпадают с вероятностями Бенфорда (59.1).

Что касается “никаких связывающих закономерностей” между площадями поверхности рек или номерами домов (а по сути – длины улиц, на которых стоят дома) и т. п., то можно смело утверждать, что числа, количественно описывающие самые разнообразные физические объекты, подчиняются *тильда-распределениям* (*логнормальным* *распределениям*) (реф. 46). А тильда-распределение – это *псевдоэкспонента*, т.к. центральную часть любой тильды (большинство её значений) можно описать некой экспонентой (на рис. 26.1 это почти прямая линия в центральной части графика).

Доказательством того, что тильда-распределения, наравне с экспонентами, могут приводить к вероятностям Бенфорда, являются данные табл. 59.1, где показаны вероятности появления ($P_i$) первой значащей цифры $i$ у всех 216-ти делителей числа $N$ = 655200 с "классической" тильдой. Хорошо видно, что эти вероятности близки к значениям, полученным по формуле (59.1), и к статистическим (фактическим) данным, полученным Бенфордом (реф. 26, 46).

---

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Девять лет назад (в декабре 1996 г.) мне пришла в голову мысль рассмотреть все делители некого большого целого числа $N$ на компьютере (делителей оказалось много, а используя их, я научился строить графики в программе "Excel"). Тогда я впервые увидел *тильду* (рис. 26.1) на экране ПК. Причем почти сразу родилось название "тильда" и алгоритм поиска её параметров [14, с. 23÷24]. А когда чуть позже убедился, что для тильды прекрасно соблюдается закон Бенфорда (реф. 59) – то я уже не сомневался, что открыл нечто любопытное. Так родилась *графическая теория натуральных чисел* (ГТНЧ, позже – *космология чисел* или *виртуальная космология*)…

Если сравнить мою вторую книгу[1] "Закон распределения богатства" (конец 1997 г.) и нынешнюю книгу (девятую по счёту), то будет наглядно видно, что за 9 лет моя ГТНЧ явно "подросла". Причем вся ГТНЧ – это плод работы *одинокого разума*[2], практически изолированного от общества. Ведь профессиональным математикам и физикам разговаривать со мной не интересно, а мне, в свою очередь, вообще говоря, трудно общаться с себе подобными энтузиастами-"исследователями", т.к. каждый из нас "зациклен" сугубо на своей теме (и со стороны выглядит довольно комично – это и ко мне относится). Тем не менее, почти все мои "труды" проданы[3] "Домом книги". Значит, ГТНЧ *кому-то нужна* и это – единственная награда для меня, ибо я

---

[1] Первую «ГТНЧ» [7] книжный магазин у меня не взял, т.к. мой издатель "забыл" поставить т. н. выходные данные (по ГОСТу они должны быть указаны на всякой книге).

[2] Поэтому все мои книги также м.б. интересны, скажем, специалистам по *психиатрии*.

[3] Мероприятие хлопотное и заведомо *убыточное*. Если не верите, то попробуйте сами *продать* книги, «напичканные» *формулами* и Вашими мыслями (какими бы они не были).

не отношусь к тем редким людям, которые могут спокойно работать “на полку” без малейшего признания общества.

Мне всегда не хватало понимания близкого человека, возможно, именно поэтому так потянуло писать книги, ведь при этом словно ведёшь диалог с кем-то всепонимающим (а по сути – с компьютером). Почему-то у нас не получается вникнуть во внутренний мир даже родного человека (или не интересно, или мы «заняты», или нас туда «не пускают», и т.д.). Так все мы и сосуществуем рядом – вот вам ещё пример самых настоящих *параллельных миров*! (реф.1).

Ну а что касается математики (настоящей), то её в ГТНЧ – “кот наплакал” (хотя есть ряд любопытных *моих* формул и *гипотез*). Главное мое “ноу-хау” – это *рефлекции* (гл. III §6), которые (как я надеюсь) порождают интерес к миру чисел, будоражат наше воображение и фантазию. Хотя сами рефлекции врят ли непосредственно (“в лоб”, напрямую) объясняют окружающий мир, зато они, вообще говоря, способны подтолкнуть Вашу мысль в новом направлении. А последствия могут оказаться неожиданными, особенно если Вам не безразличен загадочный путь к Истине…

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Бернатосян С. Г.* Воровство и обман в науке. СПб.: Эрудит, 1998.
2. *Галочкин А. И. и др.* Введение в теорию чисел. М.: Издательство МГУ, 1995.
3. *Грин Брайн*. Элегантная Вселенная…. М.: Едиториал УРСС, 2004.
4. *Дагаев М. М. и др.* Астрономия. М.: Просвещение, 1983.
5. *Девис П.* Пространство и время в современ. картине Вселенной. М.: Мир, 1979.
6. *Девис П.* Случайная вселенная. М.: Мир, 1985.
7. *Исаев А. В.* Графическая теория натуральных чисел. СПб: ВМВ, 1997.
8. *Исаев А. В.* Закон распределения богатства. Санкт-Петербург: ЛИСС, 1998.
9. *Исаев А. В.* Параллельные миры… С-Петербург: Всемирная литература, 2001.
10. *Исаев А. В.* Параллельные миры II … . Санкт-Петербург: ЛИСС, 2002.
11. *Исаев А. В.* Тайны российской статистики …. Санкт-Петербург: ЛИСС, 2002.
12. *Исаев А. В.* Тайны статистики …. Санкт-Петербург: ЛИСС, 2003.
13. *Исаев А. В.* Леонард Эйлер и космология чисел …. С-Петербург: ЛИСС, 2003.
14. *Исаев А. В.* «Зеркало» Вселенной. Санкт-Петербург: ЛИСС, 2004.
15. *Ичас М.* О природе живого: механизмы и смысл. М.: Мир, 1994.
16. *Капица С. П.* Общая теория роста человечества. М.: Наука, 1999.
17. *Картер П., Хайфилд Р*. Эйнштейн. Частная жизнь. М.: ЗАХАРОВ, 1998.
18. *Конобеев Ю., Павлинчук В., Работнов Н. и др.* Физики шутят. М.: Мир, 1993.
19. *Ландау-Дробанцева К*. Академик Ландау. Как мы жили. М.: ЗАХАРОВ, 2000.
20. *Марков М. А.* Избранные труды: в 2 т. Т.II Гравитация… М.: Наука, 2001.
21. *Окунь Л. Б.* Физика элементарных частиц. М.: Едиториал УРСС, 2005.
22. *Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х.* Красота фракталов… М.: Мир, 1993.
23. *Пенроуз Роджер*. Новый ум короля…. М.: Едиториал УРСС, 2005.
24. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975.

25. *Пуанкаре А*. О науке. М.: Наука, 1983.
26. *Рассел Б*. История западной философии. Сибирское университет. изд-во, 2003.
27. *Саган К*. Космос: Эволюция Вселенной, жизни и цивилизации. Амфора, 2004.
28. *Сажин М. В*. Современная космология в популярном излож-и. М.: УРСС, 2002.
29. *Силк Дж*. Большой взрыв (рождение и эволюция Вселенной). М.: Мир, 1982.
30. *Сингх С*. Великая теорема Ферма. М.: МЦНМО, 2000.
31. *Стройк Д. Я*. Краткий очерк истории математики. М. : Наука, 1984.
32. *Сухонос С. И*. Масштабная гармония Вселенной. М.: Новый Центр, 2002.
33. *Тарасов Л. В*. Мир, построенный на вероятности. М.: Просвещение, 1984.
34. *Уилкинсон Д. и др*. Фундаментальная структура материи. М.: Мир, 1984.
35. *Харди Г*. Двенадцать лекций о Рамануджане. М.: Институт КИ, 2002.
36. *Хлопов М.Ю*. Основы космомикрофизики. М.: Едиториал УРСС, 2004.
37. *Хокинг С*. Краткая история времени. Санкт-Петербург: Амфора, 2001.
38. *Чирков Ю. Г*. Охота за кварками. М.: Мол. гвардия, 1985.
39. *Шкловский И. С*. Звезды: их рождение, жизнь и смерть. М.: Наука, 1984.
40. *Шкловский И. С*. Вселенная, жизнь, разум. М.: Наука, 1987.
41. Большая Советская Энциклопедия. (В 30 томах). М.: Сов. энциклопедия, 1978.
42. Гиннесс. Большая книга знаний. Назрань: Издательство АСТ, 1999.
43. Математический энциклопедический словарь. М.: Б. росс. энциклопедия, 1995.
44. Политехнический словарь. М.: Советская энциклопедия, 1977.
45. Физическая энциклопедия. М.: Большая Российская энциклопедия, 1998.
46. Физические величины. Справочное издание. М.: Энергоатомиздат, 1991.
47. Физический энциклопедический словарь. М.: Сов. энциклопедия, 1984.
48. Энциклопедия для детей. Т. 8. Астрономия. М.: Аванта+, 1999.
49. Энциклопедия для детей. Т.11. Математика. М.: Аванта+, 1999.

## ИМЕНА, УКАЗАННЫЕ В КНИГЕ

**Аштекар** Абхей из универс. Пенсильвании (метод новых переменных) (гл. II §1)
**Бекенштейн** Якоб – американский физик-теоретик (гл. II §11) [3, с. 217-220]
**Бенфорд** Ф. – американский физик, открывший очень красивый закон (реф. 59)
**Бойаи** Янош (1802–60) – венгер. математик, творец неевклид. геометрии (гл. III §1)
**Больцман** Л. (1844–1906) – австр. физик, один из “отцов” статистич. физики (§20)
**Борель** Ф.Э.Ж. (1871–1956) – франц. математик (математ. анализ, теория функций)
**Браве** Огюст (1811–63) – франц. кристаллограф (теория пространствен. решёток)
**Бродский** И.А. (1940–96) – рус. поэт, в 1972 г. эмигрир. в США (навсегда) (реф.56)
**Броун** Б.Р. (1773–1858) – англ. ботаник, открыл т.н. броуновское движение (реф.11)
**Бэкон** Роджер (ок. 1214–92) – знаменитый англ. философ и естествоиспытатель
**Бюффон** Ж. (1707–88) – франц. ученый (задачи на геометрич. вероятности)
**Ван-Дер-Ваальс** (1837–1923) – нидерландский физик (Нобелевская премия 1910 г.)
**Вейль** А. (р.1906) – франц. математик (один из основателей группы Н. Бурбаки)
**Венециано** Габриэле – физик-«струнник», ввёл бета-функцию в ТС (гл. II §11)
**Винер** Н. (1894–1964) – американский ученый, считается “отцом” кибернетики
**Виноградов** И.М. (1891–1983) – советский математик (классическая теория чисел)
**Виттен** Эдвард – *гениальный* физик, «наследник титула Эйнштейна» [3, с. 181]
**Гаусс** Карл Фридрих (1777–1855) – *гениальный* немецкий математик, астроном

**Г*е*йзенберг** В. (1901–76) – немец. физик-теоретик, один из «отцов» КМ (гл. II §3)
**Гейтс** Билл (р. 1955) – американец, самый богатый человек в мире (реф. 39)
**Гёдель** Курт (1906–78) – австрийский логик, математик, философ
**Г*о*льдбах** Х. (1690–1764) – нем. математик, знаменит одной гипотезой [10, с.31].
**Горбачев** М.С. (р.1931) – бездарно правил страной (СССР) в 1985–91 гг. (реф. 56)
**Грин** Брайан – английский физик, блестящий популяризатор теории суперструн [3]
**Гус** (Гут) Алан – американский физик, автор теории инфляции (1979г.) (гл. II §16)
**Даль** В.И. (1801–72) – рус. писатель, лексикограф, этнограф, врач, друг Пушкина
**Дирихле** П. Г. Л. (1805–59) – немецкий математик, механик, отчасти физик
**Евкл*и*д** (н.III в. до н.э.) – древнегреч. математик, автор 1-го трактата по математике
**Зельд*о*вич** Я.Б. (1914–87) – советский теоретик-ядерщик, астрофизик, космолог
**Калаби** Эудженио – америк. математик из университета штата Пенсильвания
**Калуца** Теодор – польский математик из Кенигсбергского университета (1919 г.)
**К*а*нтор** Георг (1845–1918) – немец. математик (теория множеств, бесконечности)
**Кап*и*ца** С. П. – русский физик, писатель, популяризатор точных наук [16]
**Капрекар** Д. – индийский математик, в 70-е годы XX в. открыл ФМК [10, с. 106]
**Кард*а*но** Джероламо (1501–76) – итальянский математик, философ и врач
**Карн*о*** Сади (1796–1832) – франц. физик и инж., один из «отцов» термодинамики
**К*а*тал*а*н** Э.Ш. (1814–94) – бельгийский математик (его последовательность, §7)
**Клапейр*о*н** Б. (1799–1864) – франц. физик и инженер, 10 лет работал в Петербурге
**Кл*а*узиус** Р. (1822–88) – немец. физик, один из «отцов» термодинамики (гл. II §20)
**Клейн** Оскар – шведский математик (в 1926 г. уточнил и развил идеи Калуцы Т.)
**Конн** Ален (р. 1947) – француз. математик (разраб. некоммутативную геометрию).
**Кош*и*** О. Л. (1789–1857) – французский математик (матем. анализ, матем. физика)
**Кр*о*некер** Л. (1823–91) – знаменитый нем. математик, сторонник «арифметизации»
**Кул*о*н** Ш.О. (1736–1806) – франц. инженер и физик, "отец" электростатики
**Куракин** П.В. – автор концепции скрытого времени (реф. 15)
**Лагранж** Ж.-Л. (1736–1813) – известный французский математик, механик
**Ланд*а*у** Лев Дав.(1908–68) – *гениальный* советский физик-теоретик (Ноб. пр. 1962)
**Лао-Цзы** (579–499 гг. до н. э.) – мудрейший китайский философ
**Л*е*вин** Б.М. – русский физик, автор теории о зеркальной Вселенной [10, с. 192]
**Леж*а*ндр** А. М. (1752–1833) – известный французский математик (гл. III §19)
**Л*е*нин** В.И. (1870–1924) – создатель 1-го в мире социалистического государства
**Леонардо да Винчи** (1452–1519) – итальянский художник, ученый, инженер
**Ли** Цзундао (р.1926) – китайский физик-теоретик (Ноб. премия 1957 г.) (гл. II §9)
**Линде** А.Д. – талантливый русский физик, после перестройки работает в США
**Л*и*тлвуд** Дж. И. (1885–1977) – английский математик (теория чисел, ряды, и т.д.)
**Лобач*е*вский** Н.И. (1792–1856) – рус. математик (творец неевклидовой геометрии)
**М*а*ксвелл** Д.К. (1831–79) – анг. физик, «отец» классич. электродинамики (гл. II §5)
**Мандельбр*о*т** Б.Б. (р. 1924) – амер. математик (создатель фрактальной геометрии)
**М*а*рков** М. А. (1908 –94) – советский физик-теоретик (труды по КЭД, космологии)
**Маскер*о*ни** Л. (1750–1800) – известный итальянский математик
**Менделеев** Д.И.(1834–1907) – рус. химик (периодический закон хим. элементов)
**М*е*ншиков** А.Д. (1673–1729) – главный казнокрад в петровскую эпоху (реф.56)
**Мерсенн** М. (1588–1648) – франц. ученый, монах (создал прообраз… «Интернета»)
**Нернст** В. (1864–1941) – нем. физикохимик (3-е нач. термодинамики) (гл. II §20)

**Ньютон** Исаак (1643–1727) – великий англ. математик, механик, астроном и физик

**Паули** В. (1900–58) – швейцарский физик-теоретик, один из «отцов» КМ (гл. II §3)

**Пеано** Д. (1858–1932) – итальянский математик (автор знаменитой кривой Пеано)

**Пенроуз** Роджер – английский математик, физик-теоретик, философ, писатель [23]

**Пифагор** (ок. 570–500 гг. до н.э.) – древнегреч. философ, основатель пифагореизма

**Планк** Макс (1858–1947) – немецкий физик, один из «отцов» КМ (гл. II §3)

**Платон** (ок. 427–347 до н.э.) – древнегреческий философ и педагог (гл. III §2)

**Пуанкаре** Ж. А. (1854–1912) – *гениальный* франц. математик, астроном, философ

**Пушкин** А.С. (1799–1837) – гениальный русский поэт, писатель (реф. 56)

**Рамануджан** С. (1887–1920) – индийский математик-самородок (гл. III §5)

**Рассел** Бертран (1872–1970) – английский математик, логик, философ, писатель

**Риман** Г.Ф. (1826–66) – немецкий математик (разработал риманову геометрию)

**Сахаров** А.Д.(1921–89) – рус. физик («отец» водородной бомбы и… диссидент)

**Слоун** Н. – составитель “Справочника по целочисл. последовательностям” (1973 г.)

**Смолин** Ли – из университета Пенсильвании, автор интересной гипотезы (реф. 22)

**Собчак** А.А. (1937–?) – «стёр» с карты Ленинград (его мэр в 1991–96 гг.) (реф. 56)

**Солженицын** А.И. (р.1918) – рус. писатель, самый успешный диссидент (реф.56)

**Стеклов** В.А. (1863–1926) – великий русс. математик, историк, философ, писатель

**Стирлинг** Дж. (1692–1770) – известный шотландский математик (гл. III §21)

**Стройк** Д. Я. (1894–?) – американский математик (труды по истории математики)

**Сцилард** Л. (1898–1964) – венг. физик (связь энтропии и информации) (гл.II §20)

**Теэтет** Афинский (ок.410–369 до н.э.) – древнегреческий математик (гл. III §7)

**Толстой** Лев Николаевич (1829–1910) – великий русский писатель (реф. 56)

**Фёдоров** Е.С. (1853–1919) – русский ученый, основоположник кристаллографии

**Фейнгенбаум** Митчелл Джей (р. 1944 г.) – американский математик (реф. 25)

**Фейнман** Р.Ф. (1918–88) – амер. физик-теоретик, один из «отцов» КМ (гл. II §3)

**Ферма** П. (1601–1665) – французский математик (автор двух знаменитых теорем)

**Фибоначчи** (Леонардо Пизанский) (1180–1240) – знаменитый итал. математик

**Фридман** А.А. (1888–1925) – русский математик, геофизик, космолог (гл. II §16)

**Хаббл** Эдвин Пауэлл (1889–1953) – известный американский астроном (гл. II §16)

**Харди** Г. Х. (1877–1947) – английский математик (теория чисел, теория функций)

**Харкевич** А.А. (1904–65) – советский академик (труды по теории информации)

**Хокинг** Стивен (р. 1941) – английский астрофизик (“кассандра” нашего времени)

**Цвикки** Фриц (1898–1974) – швейцарский астроном (скрытая материя) (гл. II §9)

**Чебышев** П. Л. (1821–94) – великий русский математик, механик (гл. III §20)

**Чернавский** Д.С. – автор аксиомы в части «обратного гугола» (реф. 15)

**Шварц** М. (р.1932) – американский физик (Нобелевская премия 1988 г.) (гл. II §9)

**Шеннон** К.Э. (р.1916) – американский математик и инженер (теория информации)

**Шрёдингер** Э. (1887–1961) – австр. физик-теоретик, один из создателей КМ

**Эйлер** Леонард (1707–83) – *гениальный* швейцарский математик (ок. 900 работ!)

**Эйнштейн** Альберт (1879–1955) – физик-теоретик, завершил создание СТО и ОТО

**Эпикур** (342–270 до н.э.) – древнегреческий философ, создатель эпикуреизма

**Эренфест** Пауль (1880–1933) – физик-теоретик, 5 лет работал в Петербурге

**Якоби** Карл Густав Якоб (1804–51) – знаменитый немецкий математик

**Янг** (р.1922) – китайский физик-теоретик (теория калибровочных полей) (гл. II §9)

**Яу** Шинтан (р.1949) – американский математик (дифф. уравнения)