# Proof of the Lonely Runner Conjecture

Babacar Gueye

Abstract
Consider k runners on a circular track of unit length. At t=0, all the runners are at the same position and start to run; the runners speeds are distincts. A runner is said to be lonely at time t, if he is at a distance of at least 1/k from every other. The lonely runner conjecture states that each runner is lonely at some times. It is said we not lost generality to assume that the runners have integer speeds. It is knew that the conjecture is proved until seven runners at 2008. Then consider here integer speeds and prove the conjecture in general.

## I) INTRODUCTION

En mathématiques et plus particulièrement dans l'étude de l'approximation diophantienne, la conjecture du coureur solitaire est une conjecture due à J. M. Wills en 1967. Les applications de cette conjecture balayent de nombreux domaines des mathématiques : problèmes d'obstruction de vue, calculs de nombres chromatiques, etc. Le nom pittoresque de cette conjecture a été proposé par L. Goddyn en 1998.
La conjecture :
Considérons $k$ coureurs sur une piste circulaire de longueur 1. Au temps $t = 0$, tous les coureurs sont à la mème position et commmencent à courir à des vitesses deux à deux distinctes. Un coureur est dit solitaire au temps t, s'il est à une distance d'au moins $\frac{1}{k}$ de tous les autres coureurs. La conjecture du coureur solitaire affirme que chaque coureur sera solitaire à certains moments.
C'est ce que nous allons démontrer ici.
Rappelons que cette conjecture a été démontré jusqu'au cas $k = 7$.
Propriétés :
A priori, les vitesses sont des réels, mais on peut se restreindre sans perte de généralité à des rationnels ou des entiers.
On va alors ici se restreindre au cas où les vitesses sont des entiers, et proposer une démonstration dans le cas général.

## II) PREUVE DE LA CONJECTURE

Soient $c_1, c_2, \cdots, c_k$ les $k \geq 4$ coureurs et $v_1, v_2, \cdots, v_k$, les vitesses respectives des coureurs, distinctes deux à deux et entiers naturels.
Prenons $c_{i_0}$, un des coureurs, de vitesse $v_{i_0}$.
$|v_{i_0} - v_i|$ est la vitesse de décalage entre $c_{i_0}$ et $c_i$ ($|x|$ est la valeur absolue de $x$). Ce décalage sur la piste circulaire est égal à $\frac{1}{k}$ pour la première fois à l'instant $\frac{\frac{1}{k}}{|v_{i_0}-v_i|} = \frac{1}{k|v_{i_0}-v_i|}$ et il reste supérieur à $\frac{1}{k}$ jusqu'à l'instant $\frac{1-\frac{1}{k}}{|v_{i_0}-v_i|} = \frac{k-1}{k|v_{i_0}-v_i|}$.
Donc les instants $\left[\frac{1}{k|v_{i_0}-v_i|}; \frac{k-1}{k|v_{i_0}-v_i|}\right]$ sont les premiers intervalles de temps où $c_{i_0}$ est à une distance $\geq \frac{1}{k}$ de $c_i$.
Ces intervalles de temps convenables, je veux dire où $c_{i_0}$ est à une dis-

tance $\geq \frac{1}{k}$ de $c_i$, sont périodiques de période $\frac{1}{|v_{i_0}-v_i|}$ car à chaque instant $\frac{n}{|v_{i_0}-v_i|}$, $n \in \mathbb{N}$ les coureurs $c_{i_0}$ et $c_i$ sont au même endroit sur la piste circulaire (En effet $|v_{i_0} \cdot \frac{n}{|v_{i_0}-v_i|} - v_i \cdot \frac{n}{|v_{i_0}-v_i|}| = n$).
Les intervalles de la forme $\left[\frac{1+nk}{k|v_{i_0}-v_i|}\,;\,\frac{k-1+nk}{k|v_{i_0}-v_i|}\right]$ sont alors des intervalles de temps où $c_{i_0}$ est à une distance $\geq \frac{1}{k}$ de $c_i$.
Un intervalle de temps où $c_{i_0}$ est à une distance $\geq \frac{1}{k}$ de chacun des $c_i$ est un intervalle non vide de la forme $\bigcap_{i\in I, n_i\in\mathbb{N}} \left[\frac{1+n_ik}{k|v_{i_0}-v_i|}\,;\,\frac{k-1+n_ik}{k|v_{i_0}-v_i|}\right]$ où les $n_i$ sont des entiers naturels et $I = [\![1,k]\!] \setminus \{i_0\}$.
Mais à l'instant $t = 1$ tous les $k$ coureurs se retrouvent au point de départ, chaque coureur $c_i$ aura fait $v_i$ tours, le même processus entre les instants 0 et 1 se répète entre les instants 1 et 2, entre les instants 2 et 3, etc
Ceci conduit si on veut à chercher les $n_i$ convenables, je veux dire tels que $\bigcap_{i\in I, n_i\in\mathbb{N}} \left[\frac{1+n_ik}{k|v_{i_0}-v_i|}\,;\,\frac{k-1+n_ik}{k|v_{i_0}-v_i|}\right]$ soit non vide, dans les intervalles $[\![0, |v_{i_0}-v_i|-1]\!]$.
On peut aussi alors pour démontrer la conjecture, se limiter à chercher un instant $t_{i_0}$ où $c_{i_0}$ est à une distance $\geq \frac{1}{k}$ de chacun des $c_i$, $i \in [\![1,k]\!] \setminus \{i_0\}$ dans l'intervalle de temps $[0; 1]$. C'est ce qu'on va faire dans la suite.

Notons bien que dans cet intervalle de temps $[0\,;\,1]$, les intervalles $\left[0; \frac{1}{k|v_{i_0}-v_i|}\right[$, $\left]\frac{nk-1}{k|v_{i_0}-v_i|}\,;\,\frac{nk+1}{k|v_{i_0}-v_i|}\right[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\left]\frac{k|v_{i_0}-v_i|-1}{k|v_{i_0}-v_i|}\,;\,1\right]$ sont les instants où $c_{i_0}$ est à une distance $<$ à $\frac{1}{k}$ de $c_i$, $i \in [\![1,k]\!] \setminus \{i_0\}$.

Dans la suite, on reste dans l'intervalle de temps $[0\,;\,1]$, et pour alléger les notations, on pose $|v_{i_0} - v_i| = a_i$, $\forall i \in I = [\![1,k]\!] \setminus \{i_0\}$, $min_{i\in I}a_i$ est le minimum des $a_i$, $i$ décrivant $I$ et $max_{i\in I}a_i$ est le maximum des $a_i$, $i$ décrivant $I$.
Remarquons qu'il peut y avoir des pairs de $a_i$ $i \in I$ égaux, et constatons que si c'est le cas, l'étude se ramène à un nombre inférieur à $k$ coureurs. En effet, si par exemple $a_{i_1} = a_{i_2}$, $\{i_1,\, i_2\} \subset I$, alors les coureurs $c_{i_1}$ et $c_{i_2}$, $\{i_1,\, i_2\} \subset I$ sont à une distance $\geq \frac{1}{k}$ de $c_{i_0}$ aux mêmes moments, et donc dans l'étude on pourra se dispenser de $a_{i_1}$ ou bien de $a_{i_2}$.

On cherche alors dans $[0;\,1]$ un instant $t_{i_0}$ où $c_{i_0}$ est solitaire.

Soit $p$ un entier naturel, on s'intéresse aux valeurs de $\alpha$ tels que :
$\frac{1}{k\times min_{i\in I}a_i} \leq \frac{\alpha}{p} \leq \frac{k\times min_{i\in I}a_i-1}{k\times min_{i\in I}a_i}$.
Pour ces valeurs possibles de $\alpha$, $\frac{\alpha}{p}$ appartient à un intervalle de la forme $\left]\frac{n_ik-1}{ka_i}\,;\,\frac{n_ik+1}{ka_i}\right[$, $n_i \in [\![1, a_i-1]\!]$ si et seulement si, il existe $x \in ]-1\,;\,1[$ tel que :
$\frac{n_ik+x}{ka_i} = \frac{\alpha}{p} \Leftrightarrow x = \frac{(a_i\alpha-n_ip)k}{p}$, $n_i \in [\![1, a_i-1]\!]$.
On peut poser $p = ak+m$ avec $a$ entier naturel et $m$ entier naturel inférieur

ou égal à $k-1$ (la division euclidienne).
Alors $x \in ]-1\,;\,1[$ existe si et seulement si $\exists\, n_i \in [\![1, a_i - 1]\!]$ tel que $a_i\alpha - n_i p = 0\,\text{ou}\,\pm 1\,\text{ou}\,\pm 2 \cdots \text{ou}\,\pm a$ (ou plus simplement $|a_i\alpha - n_i p| \leq a$. On atteint $\pm a$ si $m \neq 0$).

Rappelons que s'il existe dans $[\![1, p-1]\!]$ une valeur de $\alpha$ telle que $a_i\alpha - n_i p = j$, $n_i \in [\![1, a_i - 1]\!]$ et $j$ nombre entier, alors il en existe qu'une seule car en règle générale, les valeurs de $u$ et $v$ telles que $a_i u - vp = j$ sont périodiques de périodes respectivement $p$ et $a_i$.

1) Si il existe $p \leq k$, premier avec tous les $a_i$, $i \in I$.
On constate déjà que si on prend un entier $p$ premier avec tous les $a_i$, $i \in I$, il n'existe pas d'entier naturel $n_i$ tel que $\frac{n_i k}{k a_i} = \frac{\alpha}{p}$ où $\alpha$ est tel que $\frac{1}{k \times min_{i\in I} a_i} \leq \frac{\alpha}{p} \leq \frac{k \times min_{i\in I} a_i - 1}{k \times min_{i\in I} a_i}$.
En effet $\frac{n_i k}{k a_i} = \frac{\alpha}{p} \Leftrightarrow n_i p = a_i \alpha$, ce qui est impossible car $p$ premier avec $a_i$ et $\alpha \leq p-1$.
C'est-à-dire que $a_i\alpha - n_i p \neq 0$, $\forall i \in I$.
Si $p \leq k$, on a $\frac{1}{k \times min_{i\in I} a_i} \leq \frac{\alpha}{p} \leq \frac{k \times min_{i\in I} a_i - 1}{k \times min_{i\in I} a_i}$ pour tout $\alpha$ entier allant de 1 à $p-1$.
On a $\frac{|a_i\alpha - n_i p| k}{p} \geq 1$, $\forall i \in I$, car $a_i\alpha - n_i p \neq 0$, $\forall i \in I$ et $\frac{k}{p} \geq 1$, et ceci pour tout $\alpha$ allant de 1 à $p-1$. On ne trouve alors pas de valeur de $x \in ]-1;1[$ comme ci-dessus définie, et ceci quelque soit $a_i$, $i \in I$.
C'est dire que $\frac{\alpha}{p}$ est un instant où $c_{i_0}$ est solitaire pour tout $\alpha$ allant de 1 à $p-1$.
Donc pour $\alpha \in [\![1, p-1]\!]$, $t_{i_0} = \frac{\alpha}{p}$ convient.
**lemme** : Avec les notations précédentes, Si $p \leq k$, est un entier naturel premier avec tous les $a_i$, $i \in I$, alors pour tout $\alpha \in [\![1, p-1]\!]$, $\frac{\alpha}{p}$ est un instant où $c_{i_0}$ est solitaire.
**Remarque** : On peut étendre et montrer par le même raisonnement que si $p \leq k$ n'est diviseur d'aucun $a_i$, $i \in I$, $t_{i_0} = \frac{1}{p}$ convient.
En effet on a $a_i - n_i p \neq 0$, $\forall\, i \in I$.

2) Si les $v_i$ sont consécutifs, il suffit de prendre $t_{i_0} = \frac{1}{k}$ (les $a_i$ sont consécutifs avec $a_{i_0+1}$ ou $a_{i_0-1}$ égal 1)

3) Sinon :
Il existe au moins un $i_1$ tel que $a_{i_1+1}$ ou $a_{i_1-1}$ est supérieur strictement à $a_{i_1} + 1$ (suposons que ce soit $a_{i_1+1}$).
Soit $q$ un nombre entier naturel premier avec tous les $a_i$, $i \in I$. Alors on a $q > k$.
On prend dans chaque $a_i$, $i \in I \setminus \{i_1 + 1\}$ un facteur $q_i$, et $q_{i_1+1} = a_{i_1+1}$ et on pose $p = q \prod_{i\in I} q_i$.
On pose $p = ak + m$ avec $a \geq 1$ entier naturel et $m$ entier naturel inférieur

ou égal à $k-1$ (par la division euclidienne).

Cherchons le nombre d'entiers naturels $\alpha$ tels que $\frac{1}{k\times min_{i\in I}a_i} \leq \frac{\alpha}{p} \leq \frac{k\times min_{i\in I}a_i-1}{k\times min_{i\in I}a_i}$, c'est-à-dire tels que $\frac{p}{k\times min_{i\in I}a_i} \leq \alpha \leq \frac{p(k\times min_{i\in I}a_i-1)}{k\times min_{i\in I}a_i}$.
L'intervalle $A = \left[\frac{p}{k\times min_{i\in I}a_i}\,;\,\frac{p(k\times min_{i\in I}a_i-1)}{k\times min_{i\in I}a_i}\right]$ est de longueur $L = \frac{p(k\times min_{i\in I}a_i-2)}{k\times min_{i\in I}a_i} = p - \frac{2p}{k\times min_{i\in I}a_i} = ak+m-\frac{2a}{min_{i\in I}a_i} - \frac{2m}{k\times min_{i\in I}a_i}$.
$\bullet$) Si $min_{i\in I}a_i = 1$.
$L = ak+m-2a-\frac{2m}{k} = (k-2)a+m-\frac{2m}{k}$.
Donc le nombre d'entiers naturels $\alpha$ cherché est $\geq$ à $(k-2)a$.
$\bullet$) Si $\min_{i\in I} a_i \geq 2$. $L \geq ak+m-a-\frac{m}{k} = (k-1)a+m-\frac{m}{k}$.
Donc le nombre d'entiers naturels $\alpha$ cherché est $\geq$ à $(k-1)a$.

a) Soit $min_{i\in I}a_i = 1$.
Alors $min_{i\in I}a_i - 1 = 0$. Il n'existe pas d'entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1 et inférieur ou égal à 0. Donc il n'existe pas un entier naturel $n$ convenable au sens que pour une valeur de $\alpha$, $\alpha\min_{i\in I} a_i - np = 0 \,\text{ou}\, \pm 1 \,\text{ou}\, \pm 2\cdots$ ou $\pm\, a$.
Pour les $k-2$ termes $a_i$, $i \in I$ restants, $\alpha a_i - n_i p$ prend au plus les valeurs $0$, $\pm q_i$, $\pm 2q_i, \cdots, \pm m_i q_i$ avec $m_i q_i \leq a$, c'est-à-dire $m_i$ entier $\leq \frac{a}{q_i}$.
Les $a_i$ étant deux à deux différents, les $q_i$ peuvent être choisis deux à deux différents.
Donc les $k-2$ termes $a_i$, $i\in I$ prennent au plus $k-2+2(\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\cdots+\frac{a}{i_1}+\frac{a}{a_{i_1+1}}+\frac{a}{i_1+2}+\cdots+\frac{a}{k-2})$ valeurs de $\alpha$ tels que $\alpha a_i - n_i p = 0 \,\text{ou}\, \pm 1 \,\text{ou}\, \pm 2\cdots$ ou $\pm\, a$.
On remarque qu'on a $2a\frac{(i_1+1)-a_{i_1+1}}{(i_1+1)a_{i_1+1}} < -1$.
Par ailleurs :
$k-2+2a(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k-2}) = k-2+2a(H_{k-2}-1)$, où $H_{k-2}$ est la $(k-2)$ième somme partielle de la série harmonique $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$.
On a que $H_{k-2} \leq 1+\ln(k-2)$ c'est-à-dire $H_{k-2}-1 \leq \ln(k-2)$, et donc $k-2+2a(H_{k-2}-1) \leq k-2+2a\ln(k-2)$.
Montrons que $k-2+2a\ln(k-2) < (k-2)a$ si $k\geq 4$.
On a $k-2+2a\ln(k-2) < (k-2)a \Leftrightarrow \frac{\ln(k-2)}{k-2} < \frac{a-1}{2a}$.
La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est décroissante sur $[e\,;+\infty[$ et la fonction $x\mapsto \frac{x-1}{2x}$ est croissante sur $]0\,;+\infty[$.
Si $k\geq 5$, on a alors $a \geq 2\times 3\times 4 = 24$ et donc $\frac{a-1}{2a} \geq \frac{23}{48}$. On a $\frac{\ln(3)}{3} < \frac{23}{48}$, alors pour tout $k \geq 5$, on a $\frac{\ln(k-2)}{k-2} \leq \frac{\ln(3)}{3} < \frac{23}{48} \leq \frac{a-1}{2a}$, c'est-à-dire $k-2+2a\ln(k-2) < (k-2)a$.
Si $k=4$, on a alors $a\geq 2\times 3 = 6$, et donc $\frac{a-1}{2a} \geq \frac{5}{12}$. On a $\frac{\ln(2)}{2} < \frac{5}{12}$, alors pour $k=4$, on a aussi $\frac{\ln(k-2)}{k-2} < \frac{a-1}{2a}$, c'est-à-dire $k-2+2a\ln(k-2) < (k-2)a$.
Et donc pour $k\geq 4$ :
$k-2+2a(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{i_1}+\frac{1}{a_{i_1+1}}+\frac{1}{i_1+2}+\cdots+\frac{1}{k-2})+1 < k-2+2a\ln(k-2) < (k-2)a$.

C'est dire que pour $k \geq 4$, on a $k-2+2a(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{i_1}+\frac{1}{a_{i_1+1}}+\frac{1}{i_1+2}+\cdots+\frac{1}{k-2}) < (k-2)a-1$.

Sachant qu'on a un nombre inférieur à $k-2+2a(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{i_1}+\frac{1}{a_{i_1+1}}+\frac{1}{i_1+2}+\cdots+\frac{1}{k-2})$ valeurs de $\alpha$ telles qu'il existe $(a_i, n_i)$, $i \in I$ tel que $|\alpha a_i - n_i p| \leq a$, il existe alors au moins une valeur entière de $\alpha$, soit $\alpha_0$ telle que $|\alpha_0 a_i - n_i p| > a$, $\forall i \in I$. Et donc à l'instant $\frac{\alpha_0}{p}$, $c_{i_0}$ est solitaire. $t_{i_0} = \frac{\alpha_0}{p}$ convient.

b) Soit $min_{i\in I} a_i \geq 2$.
On a montré que le nombre de valeurs de $\alpha$ convenables est $\geq$ à $(k-1)a$.
On tient le même raisonnement que ci-dessus. On a aussi comme ci-dessus $k-1+2a\ln(k-1) < (k-1)a-1$ si $k \geq 4$.
En effet si $k \geq 4$, on a $a \geq 2\times3\times4 = 24$, et donc $\frac{\ln(k-1)}{k-1} \leq \frac{\ln(3)}{3} < \frac{23}{48} \leq \frac{a-1}{2a}$, d'après les remarques sur les deux fonctions définies ci-dessus.

Et alors pour tout $k \geq 4$, on a $\frac{\ln(k-1)}{k-1} < \frac{a-1}{2a}$, c'est-à-dire, $k-1+2a\ln(k-1) < (k-1)a$.
Sachant qu'on a un nombre inférieur à $k-1+2a(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{i_1}+\frac{1}{a_{i_1+1}}+\frac{1}{i_1+2}+\cdots+\frac{1}{k-1})$ valeurs de $\alpha$ telles qu'il existe $(a_i, n_i)$, $i \in I$ tel que $|\alpha a_i - n_i p| \leq a$, et $k-1+2a(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{i_1}+\frac{1}{a_{i_1+1}}+\frac{1}{i_1+2}+\cdots+\frac{1}{k-1}) < (k-1)a-1$ (même raisonnement que ci-haut), il existe alors au moins une valeur entière de $\alpha$, soit $\alpha_0$ telle que $|\alpha_0 a_i - n_i p| > a$, $\forall i \in I$, c'est-à-dire telle que $\frac{\alpha_0}{p}$ est un instant où $c_{i_0}$ est solitaire. $t_{i_0} = \frac{\alpha_0}{p}$ convient.
On a ainsi démontré que pour $k \geq 4$, pour $i_0 \in [\![1, k]\!]$, il existe $p \in \mathbb{N}$ et au moins un entier $\alpha_0 \in [\![1, p-1]\!]$ tels qu'aux instants $\frac{\alpha_0}{p}$, $\frac{\alpha_0}{p}+1$, $\frac{\alpha_0}{p}+2$, $\cdots$, $c_{i_0}$ est à une distance $\geq \frac{1}{k}$ de tous les autres coureurs. Par conséquent :

**Théorème** :
Considérons $k \geq 4$ coureurs sur une piste circulaire de longueur 1. Au temps $t = 0$, tous les coureurs sont à la même position et commencent à courir à des vitesses (entiers naturels) deux à deux distinctes.
Alors chaque coureur sera à une distance d'au moins $\frac{1}{k}$ de tous les autres coureurs à certains moments.

**Conséquence** : Pour tout nombre de coureurs $k$, la conjecture est vraie.
s

## III) EXEMPLE

Considérons le cas de $k = 8$ coureurs $c_1, c_2, \cdots, c_8$ de vitesses respectives $v_1 = 1$, $v_2 = 4$, $v_3 = 8$, $v_4 = 13$, $v_5 = 20$, $v_6 = 30$, $v_7 = 47$, $v_8 = 100$.

• Soit $v_{i_0} = v_1 = 1$.
On a alors $a_2 = 3$, $a_3 = 7$, $a_4 = 12 = 2^2 \times 3$, $a_5 = 19$, $a_6 = 29$, $a_7 = 46 = 2 \times 23$, $a_8 = 99 = 3^2 \times 11$.
$p = 5$ est un nombre entier $\leq k = 8$ et premier avec tous les $a_i$. Donc d'après le lemme $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, et $\frac{4}{5}$, sont des instants où $c_1$ est solitaire.
Vérifions pour $t_{i_0} = \frac{1}{5}$. On a, en notant $d_i$ la distance parcourue par $c_i$ sur la piste circulaire :
$d_1 = \frac{1}{5}$, $d_2 = \frac{4}{5}$, $d_3 = \frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5}$, $d_4 = \frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5}$, $d_5 = \frac{20}{5} = 4$, $d_6 = \frac{30}{5} = 6$, $d_7 = \frac{47}{5} = 9 + \frac{2}{5}$ et $d_8 = \frac{100}{5} = 20$.
On voit bien que $c_1$ est à une distance égale à $\frac{1}{5} > \frac{1}{8}$ des coureurs les plus proches.

• Soit $v_{i_0} = v_2 = 4$.
On a alors $a_1 = 3$, $a_3 = 2^2$, $a_4 = 3^2$, $a_5 = 2^4$, $a_6 = 2 \times 13$, $a_7 = 43$, $a_8 = 2^5 \times 3$.
Là aussi $p = 5$ est un nombre entier $\leq k = 8$ et premier avec tous les $a_i$. Donc d'après le lemme $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$, sont des instants où $c_2$ est solitaire.
Vérifions pour $t_{i_0} = \frac{1}{5}$. On a, en notant $d_i$ la distance parcourue par $c_i$ sur la piste circulaire :
$d_1 = \frac{1}{5}$, $d_2 = \frac{4}{5}$, $d_3 = \frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5}$, $d_4 = \frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5}$, $d_5 = \frac{20}{5} = 4$, $d_6 = \frac{30}{5} = 6$, $d_7 = \frac{47}{5} = 9 + \frac{2}{5}$ et $d_8 = \frac{100}{5} = 20$.
On voit bien que $c_2$ est à une distance égale à $\frac{1}{5} > \frac{1}{8}$ des coureurs les plus proches.

• Soit $v_{i_0} = v_3 = 8$.
On a alors $a_1 = 7$, $a_2 = 2^2$, $a_4 = 5$, $a_5 = 2^2 \times 3$, $a_6 = 2 \times 11$, $a_7 = 3 \times 13$, $a_8 = 2^2 \times 23$.
On ne trouve pas de nombre entier naturel $\leq 8$ et premier avec tous les $a_i$, mais 8 n'est diviseur d'aucun $a_i$, donc d'après la remarque ; à l'instant $t_{i_0} = \frac{1}{8}$, le coureur $c_3$ est solitaire. En effet, on a :
$d_1 = \frac{1}{8}, d_2 = \frac{4}{8}, d_3 = \frac{8}{8} = 1, d_4 = \frac{13}{8} = 1+\frac{5}{8}, d_5 = \frac{20}{8} = 2+\frac{4}{8}, d_6 = \frac{30}{8} = 3+\frac{6}{8}$, $d_7 = \frac{47}{8} = 6 + \frac{7}{8}$, $d_8 = \frac{100}{8} = 12 + \frac{4}{8}$
On voit bien que $c_3$ est à une distance égale à $\frac{1}{8}$ des coureurs les plus proches.

• Soit $v_{i_0} = v_4 = 13$.
On a alors $a_1 = 2^2 \times 3$, $a_2 = 3^2$, $a_3 = 5$, $a_5 = 7$, $a_6 = 17$, $a_7 = 2 \times 17$, $a_8 = 3 \times 29$.
Là aussi on ne trouve pas de nombre entier naturel $\leq 8$ et premier avec tous les $a_i$, mais 8 n'est diviseur d'aucun $a_i$, donc d'après la remarque, à l'instant $t_{i_0} = \frac{1}{8}$, le coureur $c_4$ est solitaire. En effet, on a :
$d_1 = \frac{1}{8}, d_2 = \frac{4}{8}, d_3 = \frac{8}{8} = 1, d_4 = \frac{13}{8} = 1+\frac{5}{8}, d_5 = \frac{20}{8} = 2+\frac{4}{8}, d_6 = \frac{30}{8} = 3+\frac{6}{8}$, $d_7 = \frac{47}{8} = 6 + \frac{7}{8}$, $d_8 = \frac{100}{8} = 12 + \frac{4}{8}$
On voit bien que $c_4$ est à une distance égale à $\frac{1}{8}$ des coureurs les plus proches.

• Soit $v_{i_0} = v_5 = 20$.
On a alors $a_1 = 19$, $a_2 = 2^4$, $a_3 = 2^2 \times 3$, $a_4 = 7$, $a_6 = 2 \times 5$, $a_7 = 3^3$, $a_8 = 2^4 \times 5$.
Dans ce cas on ne peut pas utiliser le lemme, ni la remarque. $q = 11$ est un nombre entier naturel premier avec tous le $a_i$.
On pose alors $p = 11 \times \prod_{i\in I} q_i = 11 \times 19 \times 2 \times 3 \times 7 \times 5 \times 3^2 \times 2^2 = 1580040$.
$min_{i\in I} a_i = 7$.
$\frac{1}{8\times 7} \leq \frac{\alpha}{1580040} \leq \frac{8\times 7-1}{8\times 7} \Leftrightarrow 28215 \leq \alpha \leq 1551825$.
$\frac{p}{k} = a = \frac{1580040}{8} = 197505$. On a $max_{i\in I} a_i = a_8 = 2^4 \times 5$ et $28215 \times max_{i\in I} a_i - p = 28215 \times 2^4 \times 5 - 1580040 = -677160 < -a = -197505$. Donc $28215 \times a_i - n_i p < -a, \forall i \in I$ (c'est-à-dire $|28215 \times a_i - n_i p| > a, \forall i \in I$).
On a ainsi trouvé que $\alpha_0 = 28215$ est une valeur convenable, au sens qu'à l'instant $t_{i_0} = \frac{\alpha_0}{p} = \frac{28215}{1580040} = \frac{1}{56}$ le coureur $c_5$ est solitaire.
En effet on a :
$d_1 = \frac{1}{56}$, $d_2 = \frac{4}{56}$, $d_3 = \frac{8}{56}$, $d_4 = \frac{13}{56}$, $d_5 = \frac{20}{56}$, $d_6 = \frac{30}{56}$, $d_7 = \frac{47}{56}$, $d_8 = \frac{100}{56} = 1 + \frac{44}{56}$.
On voit bien que $c_4$ est le coureur le plus proche de $c_5$ et il est à une distance égale à $\frac{1}{8}$ de $c_5$.

• Soit $v_{i_0} = v_6 = 30$.
On a alors $a_1 = 29$, $a_2 = 2 \times 13$, $a_3 = 2 \times 11$, $a_4 = 17$, $a_5 = 2 \times 5$, $a_7 = 17$, $a_8 = 2 \times 5 \times 7$.
$p = 3$ est un nombre entier $\leq k = 8$ et premier avec tous les $a_i$. Donc d'après le lemme $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ sont des instants où $c_6$ est solitaire.
Vérifions pour $t_{i_0} = \frac{2}{3}$. On a :
$d_1 = \frac{2}{3}$, $d_2 = \frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$, $d_3 = \frac{16}{3} = 5 + \frac{1}{3}$, $d_4 = \frac{26}{3} = 8 + \frac{2}{3}$, $d_5 = \frac{40}{3} = 13 + \frac{1}{3}$, $d_6 = \frac{60}{3} = 20$, $d_7 = \frac{94}{3} = 31 + \frac{1}{3}$ et $d_8 = \frac{200}{3} = 66 + \frac{2}{3}$.
On voit bien que $c_6$ est à une distance égale à $\frac{1}{3} > \frac{1}{8}$ des autres coureurs.

• Soit $v_{i_0} = v_7 = 47$.
On a alors $a_1 = 2 \times 23$, $a_2 = 43$, $a_3 = 3 \times 13$, $a_4 = 2 \times 17$, $a_5 = 3^3$, $a_6 = 17$, $a_8 = 53$.
Là aussi $p = 5$ est un nombre entier $\leq k = 8$ et premier avec tous les $a_i$. Donc d'après le lemme $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$ sont des instants où $c_7$ est solitaire.
Vérifions pour $t_{i_0} = \frac{3}{5}$. On a :
$d_1 = \frac{3}{5}$, $d_2 = \frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5}$, $d_3 = \frac{24}{5} = 4 + \frac{4}{5}$, $d_4 = \frac{39}{5} = 7 + \frac{4}{5}$, $d_5 = \frac{60}{5} = 12$, $d_6 = \frac{90}{5} = 18$, $d_7 = \frac{141}{5} = 28 + \frac{1}{5}$ et $d_8 = \frac{300}{5} = 60$.
On voit bien que $c_7$ est à une distance égale à $\frac{1}{5} > \frac{1}{8}$ des coureurs les plus proches.

• Soit $v_{i_0} = v_8 = 100$.
On a alors $a_1 = 3^2 \times 11$, $a_2 = 2^5 \times 3$, $a_3 = 2^2 \times 23$, $a_4 = 3 \times 29$, $a_5 = 2^4 \times 5$, $a_6 = 2 \times 5 \times 7$, $a_7 = 53$.

Dans ce cas on ne peut pas utiliser le lemme, ni la remarque. $q = 13$ est un nombre entier naturel premier avec tous les $a_i$.
On pose alors $p = 13\times(\prod_{i\in I} q_i) = 13\times(11\times 2\times 2^2\times 3\times 5\times 7\times 53) = 6366360$.
$min_{i\in I} a_i = 53$.
$\frac{1}{8\times 53} \leq \frac{\alpha}{6366360} \leq \frac{8\times 53-1}{8\times 53} \Leftrightarrow 15015 \leq \alpha \leq 6351345$.
$\frac{p}{k} = a = \frac{6366360}{8} = 795795$. On a $\max_{i\in I} a_i = a_1 = 3^2 \times 11$ et $15015 \times max_{i\in I} a_i - p = 15015 \times 3^2 \times 11 - 6366360 = -4879875 < -a = -795795$.
Donc $15015\times a_i - n_i p < -a$, $\forall i \in I$ (c'est-à-dire $|15015\times a_i - n_i p| > a$, $\forall i \in I$). On a ainsi trouvé que $\alpha_0 = 15015$ est une valeur convenable, au sens qu'à l'instant $t_{i_0} = \frac{\alpha_0}{p} = \frac{15015}{6366360} = \frac{1}{424}$ le coureur $c_8$ est solitaire.
En effet on a :
$d_1 = \frac{1}{424}$, $d_2 = \frac{4}{424}$, $d_3 = \frac{8}{424}$, $d_4 = \frac{13}{424}$, $d_5 = \frac{20}{424}$, $d_6 = \frac{30}{424}$, $d_7 = \frac{47}{424}$, $d_8 = \frac{100}{424}$.
On voit bien que $c_7$ est le coureur le plus proche de $c_8$ et il est à une distance égale à $\frac{1}{8}$ de $c_8$.
En fait on peut voir qu'on a le résultat plus général suivant. Avec les notations ci-dessus prises :
"Si $\frac{max_{i\in I} a_i}{min_{i\in I} a_i} \leq k - 1 - \frac{k\times max_{i\in I} a_i}{p}$, la première valeur de $\alpha$, soit $\alpha_0$ est convenable, au sens que $t_{i_0} = \frac{\alpha_0}{p}$ est un instant où $c_{i_0}$ est solitaire.
Et si $\frac{p}{k\times min_{i\in I} a_i}$ est entier, et est donc la première valeur de $\alpha$, il suffit que $\frac{max_{i\in I} a_i}{min_{i\in I} a_i} \leq k - 1$ pour que $\frac{\frac{p}{k\times min_{i\in I} a_i}}{p} = \frac{1}{k\times min_{i\in I} a_i}$ soit un instant où $c_{i_0}$ est solitaire."

Auteur : Babacar Gueye
Professeur contractuel de mathématiques au lycée de Sébikhotane
e-mail :gbabacar155@yahoo.fr
Tel :221 77 651 49 09

........................................................................................................................................

Références :
- Les notes ont été partiellement prises dans WIKIPEDIA.
- Pour de plus amples informations sur la conjecture du coureur solitaire, on peut consulter la page WIKIPEDIA qu'on retrouve en tapant dans google "la conjecture du coureur solitaire".
- WIKIPEDIA, taper "la série harmonique".