Les Bernoulli's

Méhdi Pascal

Janvier 2021

Abstract :

Bernoulli's number theory plays a very important role in all mathematics, we find them in number theory, arithmetic, analysis, and even topology. The aim of this paper is to give the proofs to the most fundamental theorems of these numbers, such as the Von Staudt-Clausen theorem, Adams' theorem, Kummer's congruence, Voronoï congruence, Ramanujan recurrences, and many other new formulas.

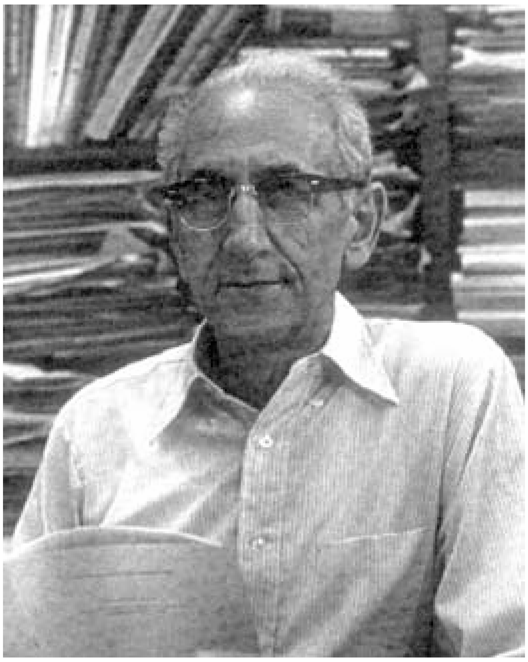
Résume :

La théorie des nombres de Bernoulli joue un rôle très important dans toutes les mathématiques, on les trouve en théorie des nombres, en arithmétique, en analyse, et même en topologie. Le but de ce papier est de donner les démonstrations aux théorèmes les plus fondamentales de ces nombres, tels que le théorème de Von Staudt-Clausen, le théorème d'Adams, la congruence de Kummer, la congruence de Voronoï, les récurrences de Ramanujan, et bien d'autres nouvelles formules.

Un grand merci à viXra

Les Bernoulli's
Méhdi Pascal
Janvier 2021

« Il s'agit ici des nombres de Jacques Bernoulli (1654-1705), et les polynômes de Daniel Bernoulli (1700-1782), le terme de « polynômes de Bernoulli » fut introduit par Joseph Ludwig Raabe en 1851. »
D'après une thèse de Zuber Maxime.



Leonard Carlitz, 1907-1999 Mathématicien américain.

Le mystère des nombres de Bernoulli, c'est qu'ils font appel à tous les mathématiciens de tous les temps, depuis Euclide jusqu à Carlitz.

À mon neveu Amine Ouzane

§1

Outils p-adique

Soit $s=a/b$ un rationnel sous sa forme réduit « i.e. $(a,b)=1$ », et soit p un nombre premier, on dit que s est un p-entier si $(b,p)=1$.

On note l'ensemble des p-entiers par $\mathbb{Z}p$, il est claire que $\mathbb{Z}p \subset \mathbb{Q}$, et de plus on a le théorème suivant :

<u>(1.1) Théorème :</u>

L'ensemble $\mathbb{Z}p$ des p-entiers est un anneau.

<u>Preuve :</u>

Il est évident que $\mathbb{Z}p \subset \mathbb{Q}$, soient a/b et c/d deux p-entiers, on a, $(a/b)+(c/d)=(ad+cb)/bd \in \mathbb{Z}p$, $(a/b)(c/d)=ac/bd \in \mathbb{Z}p$ et de plus $1 \in \mathbb{Z}p$, donc $\mathbb{Z}p$ est un anneau.

C.Q.F.D

<u>Notations :</u>

- On dit que $A \equiv B$ Modulo ($\mathbb{Z}p$), si et seulement si $A - B \in \mathbb{Z}p$.
- Soit $n>0$ un entier, on note $n\mathbb{Z}p$ l'ensemble de tous les p-entiers dont le numérateur appartient $n\mathbb{Z}$, dans ce cas on dit que $A \equiv B$ *Modulo* ($n\mathbb{Z}p$), ou tout simplement $A \equiv B$ *Modulo* (n) si et seulement si $A - B \in n\mathbb{Z}p$.

(1.2) : a/b est p-entier si et seulement si, $ord_p(a/b) = ord_p(a) - ord_p(b) \geq 0$.

Où $ord_p(a)$ désigne l'exposant de p dans a, c'est le plus grand entier k, tel que p^k divise a.

(1.3) : Pour tous n,m entiers, et p un premier quelconque,

1. $ord_p(nm) = ord_p(n) + ord_p(m)$.
2. $ord_p(n/m) = ord_p(n) - ord_p(m)$
3. $ord_p(n^m) = m.ord_p(n)$.
4. n divise m si et seulement si $\forall p \in \mathbb{P}$, $ord_p(n) \leq ord_p(m)$.

5. $ord_p(0) = +\infty$.
6. $\forall r \in \mathbb{Q}$, r est entier, si et seulement si $\forall p \in \mathbb{P}$, $ord_p(r) \geq 0$.
7. $(m,p)=1$ si et seulement si $ord_p(m)=0$.
8. $(m,n)=1$ si et seulement si pour tout nombre premier p, $ord_p(m)=0$ ou $ord_p(n)=0$.
9. le nombre des diviseurs de $n \in \mathbb{N}$ vaut à $\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1+ord_p(n)\right)$.

Cette dernière formule est due à Legendre, si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha 3}..[]..$, le développement du produit,

$$\left(1+p_1^1+p_1^2+..[]..+p_1^{\alpha_1}\right)\left(1+p_2^1+p_2^2+..[]..+p_2^{\alpha_2}\right)\left(1+p_3^1+p_3^2+..[]..+p_3^{\alpha_3}\right)..[]..$$

Donne tous les diviseur de n, donc le nombre des diviseur de n vaut à

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)..[]..$$

(1.4) La formule de Legendre:

$$ord_p(n!) = \sum_{j=1}^{+\infty}\left[\frac{n}{p^j}\right] = \frac{n-S_p(n)}{p-1}$$

Où$[n]$ désigne la partie entière de n, et $S_p(n)$ désigne la somme des chiffres de n dans la base p.

(1.5) Corollaire de la formule de Legendre :

$$ord_p(n!) < \frac{n}{p-1}.$$

(1.6) Une inégalité :

Soit p un nombre premier, et n un entier non nul, on a :

$$ord_p\left(\frac{p^n}{n}\right) = n - ord_p(n) > 0$$

Car sinon, n divise p^n, ce qui est impossible puisque $p^n = e^{\ln(p).n} >>> n$.

De même on a l'inégalité suivante :

(1.7) : $$ord_p\left(\frac{p^n}{n+1}\right) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Avec l'égalité dans l'unique cas où n=1 et p=2.

(1.8) La règle de H.Stevens :

Soient (a/b) et (c/d) deux p-*entiers*, alors,

$$(a/b) \equiv (c/d) Modulo(p) \text{ si } ad \equiv bc\ Modulo(p).$$

Voir [1].

(1.9) Le lemme de Bernd C.Kellner :

Soient a, c, c'et m des entiers positives avec $a|m$,

$$c\frac{m}{a} \equiv c'\frac{m}{a}\ Modulo(m) \text{ pour tout } c \equiv c'\ Modulo(a).$$

Voir [2].

(1.10) : $$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}p \subset \mathbb{Q}$$

<u>(1.11) La divisibilité :</u>

Soient *a* et *b* deux rationnels, *n* un entier non nul, avec *p* un nombre premier, on a,

$$a \equiv b \ Modulo(n\mathbb{Z}p) \ \text{si et seulement si,} \ \frac{a}{n} \equiv \frac{b}{n} \ Modulo(\mathbb{Z}p)$$

<u>Preuve :</u>

Posons $a = \frac{u}{v}$ et $b = \frac{r}{s}$.

<u>Premier sens :</u>

$a \equiv b \ Modulo(n\mathbb{Z}p)$ implique que $a - b = \frac{us - vr}{vs} \in n\mathbb{Z}p$, donc $us - vr = kn$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $(v, p) = (s, p) = 1$, donc $\frac{(us - vr)/n}{vs} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n} \in \mathbb{Z}p$.

<u>Second sens :</u>

$\frac{a}{n} \equiv \frac{b}{n} \ Modulo(\mathbb{Z}p)$ implique que $(n, p) = (v, p) = (s, p) = 1$, donc $a - b = \frac{us - vr}{vs} \in n\mathbb{Z}p$.

<u>(1.12) La compatibilité :</u>

Finalement il faut savoir que cette congruence dans $\mathbb{Z}p$ est compatible à celle dans $\mathbb{Z}$

Par exemple le petit théorème de Fermat, à savoir, pour tout entier *a* et tout nombre premier *p*, on a,

$$a\left(a^{p-1} - 1\right) \equiv 0 \ Modulo(p)$$

Ou encore $a\left(a^{p-1} - 1\right) \equiv 0 \ Modulo(p\mathbb{Z}p)$ puisque $p\mathbb{Z} \subset p\mathbb{Z}p$.

Soit *b* un autre entier non nul, on a,

$$\frac{a}{b}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{p-1} - 1\right)b^p = a\left(a^{p-1} - 1\right) - a\left(b^{p-1} - 1\right)$$

Si p ne divise pas b, alors $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}p$ et on a,

$$a\left(a^{p-1} - 1\right) - a\left(b^{p-1} - 1\right) \equiv 0 \ Modulo(p)$$

$$\&$$

$$b^p \not\equiv 0 \ Modulo(p)$$

Et donc,

$$\frac{a}{b}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{p-1} - 1\right) \equiv 0 \ Modulo(p)$$

Ou bien,

$$\frac{a}{b}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{p-1} - 1\right) \equiv 0 \ Modulo(p\mathbb{Z}p)$$

D'une manière générale, si une congruence est vraie dans $\mathbb{N}$ ou dans $\mathbb{Z}$, Alors elle est vraie dans $\mathbb{Z}p$, en topologie p-adique cette compatibilité s'exprime on disant que $\mathbb{Z}$ est denses dans $\mathbb{Z}p$.

Nous prenons comme exemple d'application la symétrie du triangle de Pascal, comme tout le monde sait que ce fabuleux triangle admet une symétrie horizontal, telle que, si l'indice d'une ligne du triangle est premier, alors tous les coefficients seront multiples de cet indice sauf les extrémités qui valent à l'unité.

1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1

Cette symétrie a pour conséquence le célèbre petit théorème de Fermat, mais le triangle de Pascal admet aussi une symétrie verticale telle que,

(1.13) : Pour tout entier n, et pour tout premier p, on a :

$$\binom{n}{p} \equiv \left[\frac{n}{p}\right] Modulo(p)$$

Preuve :

Par récurrence, on a si $n<p$ alors $\binom{n}{p} = \left[\frac{n}{p}\right] = 0$, donc la proposition est vraie pour les premiers valeurs, on suppose qu'elle reste vraie pour tous ordres jusqu'à n - 1, pour n on a,

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{n-p}\binom{n-1}{p} \equiv \frac{n}{n-p}\left[\frac{n-1}{p}\right] Modulo(p)$$

Si p divise n alors $n=kp$ est donc $\left[\frac{n}{p}\right] = k$ et $\left[\frac{n-1}{p}\right] = k-1$, et on a,

$$\frac{n}{n-p}\left[\frac{n-1}{p}\right] = \frac{kp}{p(k-1)}(k-1) = k \equiv \left[\frac{n}{p}\right] Modulo(p).$$

Si p ne divise pas n alors on a, $n=kp+r$ avec $1 \leq r < n$, donc $\left[\frac{n-1}{p}\right] = \left[\frac{n}{p}\right] = k$, et on a,

$\frac{n}{n-p}\left[\frac{n-1}{p}\right] = \frac{k^2 p + kr}{(k-1)p + r}$, la règle de Stevens montre qu'on a,

$$\frac{k^2 p + kr}{(k-1)p + r} \equiv k \ Modulo(p\mathbb{Z}p)$$

Donc $\frac{k^2 p + kr}{(k-1)p + r} \equiv \left[\frac{n}{p}\right] Modulo(p\mathbb{Z}p)$.

C.Q.F.D

[]

§2

Les polynômes d'Appell

Les polynômes d'Appell sont vraiment très importants, donc voici un résume sans démonstration, donc pour les démonstration et encore plus de détail voir [3].

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une progression quelconque, nous pouvons associer à cette progression un triangle dit le triangle d'Appell, par analogie au triangle de Pascal, tel que,

(2.1) :
$$[A_n]_{n\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0}a_0 & & & & \\ \binom{1}{0}a_1 & \binom{1}{1}a_0 & & & \\ \binom{2}{0}a_2 & \binom{2}{1}a_1 & \binom{2}{2}a_0 & & \\ & & ..[].. & & \\ \binom{n}{0}a_n & \binom{n}{1}a_{n-1} & ..[].. & \binom{n}{n-1}a_1 & \binom{n}{n}a_0 \end{pmatrix}$$

Si $a_0\neq 0$ alors le triangle est inversible tel que,

(2.2) :
$$[A_n].[A_n]^{-1} = [\delta ij] = [I_n]$$

Cette algèbre qu'on peut réaliser pour ces triangles se conserve lorsque on passe aux fonctions génératrices exponentielles, par exemple l'inverse du triangle de Pascal est le triangle de Pascal en damier, tel que,

(2.3) :
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & & ..[].. & & \\ 1 & n & ..[].. & n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & ..[].. & & \\ (-1)^n & (-1)^{n-1}n & ..[].. & -n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & ..[].. & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Donc pour le triangle de Pascal, la progression associée est a_n=1 pour tout entier n, dont la fonction génératrice est la fonction exponentielle, pour le Pascal en damier la progression associée est $b_n = (-1)^n$ dont la fonction génératrice est e^{-x}

Alors pour le triangle de Kronecker la progression associée est $c_n := \begin{cases} 1, \ pour \ n=0 \\ 0, \ Ailleur \end{cases}$ dont la fonction génératrice est l'unité, et on a,

(2.4) : $$e^x e^{-x} = 1$$

Et par analogie à la binôme de Newton, on peut associé à la progression $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de binôme dite les polynômes d'Appell, tel que,

(2.5) : $$A_n(x) = \sum_{t=0}^{n} \binom{n}{t} a_{n-t} x^t$$

Si on note par $g(x)$ la fonction génératrice exponentielle de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et par $G(x)$ la fonction génératrice de $A_n(t)$, alors on a :

(2.6) : $$G(x) = g(x) e^{xt}$$

(2.7) : $A_n(x)$ est un polynôme d'Appell si et seulement si $\begin{cases} \dfrac{d}{dx} A_n(x) = nA_{n-1}(x) \\ A_n(x) \ est \ de \ degré \ \le n \end{cases}$

Divers formules découle de cette Algèbre, par exemple :

(2.8) : $$A_n(x+y) = \sum_{t=0}^{n} \binom{n}{t} A_t(x) y^{n-t}$$

(2.9) : $$\Delta\left(A_n(x)\right) = A_n(x+1) - A_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} A_j(x)$$

(2.10) : $$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A_j(t) b_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j(t) a_{n-j}$$

Où a_n et b_n sont deux progressions quelconques, alors que $A_n(x)$ et $B_n(x)$ sont les polynômes d'Appell associés, cette dernière formule permet le mariage entre divers séquences des nombres, par exemple les fameux nombres de Fibonacci et les célèbres nombres de Bernoulli, telle que :

(2.11) : $$nF_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(F_{2n-2j+1} - F_{n-j+1}\right) b_j$$

[]

§3
La somme des puissances

L'histoire des nombres de Bernoulli à débuter avec les calculs sur les sommes des puissances, ces sommes peuvent êtres exprimer par deux manières différentes, la première est due premièrement à Johann Faulhaber, et puis à Jacques Bernoulli, telle que :

(3.1) : $$Sf(k,n)=1^k+2^k+3^K+..[]..+n^k$$

Cette somme est dite polynôme de Faulhaber.
La seconde est probablement due à Euler, telle que :

(3.2) : $$Sb(k,n)=0^k+1^k+2^k+3^K+..[]..+(n-1)^k$$

Avec $0^0=1$

On remarque que :

(3.3) : $$Sf(0,n)=Sb(0,n)=n$$

&

Pour tout k≥1, $Sb(k,n)=Sf(k,n)-n^k$

Les deux sommes sont des polynômes en n de degré k+1, et qui ne se différent que par le coefficient de degré k, en effet,
On a $Sf(1,n)$=1+2+3+..[]..+n, un petit Gauss nous permet d'écrire, 2$Sf(1,n)$=(1+n) +(2+n-1)+..[]..+(n+1)=n(n+1) donc $Sf(1,n)$ est bien un polynôme de degré 2, nous supposons que c'est vrai pour tout ordre jusqu'à k-1, alors pour l'ordre k, la formule du binôme nous permet d'écrire,

$$n^{k+1}-(n-1)^{k+1}=\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j+1}\binom{k+1}{j}n^{k+1-j}$$

Puis remplaçons n par toutes les valeurs qui lui sont inférieurs et non nulles, et nous sommons, on obtient pour les premiers membres, une somme télescopique, telle que,

$$\left(n^{k+1}-(n-1)^{k+1}\right)+\left((n-1)^{k+1}-(n-2)^{k+1}\right)+..[]..+\left(1^{k+1}-0\right)=n^{k+1}$$

Alors que pour les seconds membres, on obtient une double somme, qui n'est qu'une somme des sommes des puissances, tel que,

$$n^{k+1}=\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j+1}\binom{k+1}{j}\left(\sum_{t=1}^{n}t^{k+1-j}\right)$$

$$n^{k+1}=\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j+1}\binom{k+1}{j}Sf\left((k+1-j),n\right)$$

Donc,

(3.4) : $$\left(k+1\right)Sf(k,n)=n^{k+1}+\sum_{j=2}^{k+1}(-1)^{j}\binom{k+1}{j}Sf\left((k+1-j),n\right)$$

Que d'après l'hypothèse de récurrence il est bien un polynôme de degré k+1.
C.Q.F.D

Les premières valeurs :

$$1Sf(0,n)=n$$
$$2Sf(1,n)=n^2+n$$
$$3Sf(2,n)=n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$
$$4Sf(3,n)=n^4+2n^3+n^2$$
$$5Sf(4,n)=n^5+\frac{5}{2}n^4+\frac{5}{3}n^3-\frac{1}{6}n$$

..[]..

D'après André Joyal [4], Faulhaber est le premier a remarquer que les coefficients de ces polynômes admettant un plus grand commun diviseur, tels que :

$$1Sf(0,n)=1n$$
$$2Sf(1,n)=1n^2+\frac{1}{2}\binom{2}{1}n$$
$$3Sf(2,n)=1n^3+\frac{1}{2}\binom{3}{1}n^2+\frac{1}{6}n$$
$$4Sf(3,n)=1n^4+\frac{1}{2}\binom{4}{1}n^3+\frac{1}{6}\binom{4}{2}n^2+0\binom{4}{3}n$$
$$5Sf(4,n)=1n^5+\frac{1}{2}\binom{5}{1}n^4+\frac{1}{6}\binom{5}{2}n^3+0\binom{5}{3}n^2-\frac{1}{30}\binom{5}{4}n$$

..[]..

Mais Faulhaber n'a pas pue démontrer cette loi.
Pour une démonstration, je propose un prolongement à ces polynômes par l'ajoute d'un terme constant, d'une manière que le nouveau polynôme soit un polynôme d'Appell, tel que,

$$F_0(n)=1=f_0$$
$$F_1(n)=1Sf(0,n)+f_1=1n+\frac{1}{2}$$
$$F_2(n)=2Sf(1,n)+f_2=1n^2+\frac{1}{2}\binom{2}{1}n+\frac{1}{6}$$
$$F_3(n)=3Sf(2,n)+f_3=1n^3+\frac{1}{2}\binom{3}{1}n^2+\frac{1}{6}\binom{3}{2}n+0$$
$$F_4(n)=4Sf(3,n)+f_4=1n^4+\frac{1}{2}\binom{4}{1}n^3+\frac{1}{6}\binom{4}{2}n^2+0\binom{4}{3}n-\frac{1}{30}$$
$$F_5(n)=5Sf(4,n)+f_5=1n^5+\frac{1}{2}\binom{5}{1}n^4+\frac{1}{6}\binom{5}{2}n^3+0\binom{5}{3}n^2-\frac{1}{30}\binom{5}{4}n+f_5$$

..[]..

(3.5) : $$F_j(n)=jSf(j-1,n)+f_j$$

Ce prolongement à pour but d'obtenir une suite de polynôme d'Appell, dite polynômes d'Appell - Faulhaber, telle que :

(3.6) : $$\frac{d}{dn}F_j(n) = jF_{j-1}(n) \;\&\; degré(F_j(n))=j$$

Où n est prolongé à un réel.

En effet,

$$\frac{d}{dn}F_j(n) = \frac{d}{dn}\left(jSf(j-1,n)+f_j\right)$$

Donc il suffit de démontrer qu'on a :

$$\frac{d}{dn}\left(jSf(j-1,n)+f_j\right) = \frac{d}{dn}F_j(n) = jF_{j-1}(n) = j\left(\left(j-1\right)Sf(j-2,n)+f_{j-1}\right)$$

Ou bien que,

(3.7) : $$\frac{d}{dn}Sf(j-1,n) = \left(j-1\right)Sf(j-2,n)+C^{te}$$

Par récurrence c'est vrai pour les premières valeurs, on suppose que c'est vrai jusqu'à l'ordre j - 1, pour l'ordre j on a,

$$\left(j+1\right)Sf(j,n) = n^{j+1}+\sum_{t=2}^{j+1}(-1)^t\binom{j+1}{t}Sf\left(j+1-t,n\right)$$

$$Sf(j,n) = \frac{1}{j+1}n^{j+1}+\sum_{t=2}^{j+1}\frac{(-1)^t}{j+1}\binom{j+1}{t}Sf\left(j+1-t,n\right)$$

$$\frac{d}{dn}Sf(j,n) = n^j+\sum_{t=2}^{j+1}\frac{(-1)^t}{j+1}\binom{j+1}{t}\frac{d}{dn}Sf\left(j+1-t,n\right)$$

Application de (3.7), « *l'hypothèse de récurrence* »

$$\frac{d}{dn}Sf(j,n) = n^j+\sum_{t=2}^{j+1}\frac{(-1)^t}{j+1}\binom{j+1}{t}\left((j+1-t)Sf\left(j-t,n\right)+C_t^{te}\right)$$

$$\binom{j+1}{t}\frac{j+1-t}{j+1} = \binom{j}{t}$$

$$\frac{d}{dn}Sf(j,n) = n^j+\sum_{t=2}^{j+1}(-1)^t\binom{j}{t}\left(Sf\left(j-t,n\right)+C_t^{te}\right)$$

$$\frac{d}{dn}Sf(j,n) = \underbrace{n^j+\sum_{t=2}^{j}(-1)^t\binom{j}{t}Sf\left(j-t,n\right)}_{jSf(j-1,n)}+\underbrace{\sum_{t=2}^{j+1}(-1)^t\binom{j}{t}C_t^{te}}_{=C^{te}}$$

Il en résulte,

$$\frac{d}{dn}Sf(j,n) = jSf(j-1,n)+C^{te}$$

C.Q.F.D

Ces plus grands communs diviseurs s'appellent les nombres de Faulhaber, on les note par f_n, et puisque les polynômes d'Appell-Faulhaber sont des polynômes d'Appell, alors on a cette formule, dite formule de Faulhaber :

(3.8) :
$$jSf(j-1,n)=\sum_{t=0}^{j-1} f_t \binom{j}{t} n^{j-t}$$

Ou bien

(3.9) :
$$Sf(j,n)=\frac{1}{j+1}\sum_{t=0}^{j} f_t \binom{j+1}{t} n^{j-t+1}$$

On pose n=1 en (3.8) on obtient une relation de récurrence qui nous permet de calculer les premières valeurs, tel que,

(3.10) : Pour tout $j\geq 1$ on a, $j=\sum_{t=0}^{j-1}\binom{j}{t}f_t$

Ainsi les premières valeurs sont :

$f_0=1, f_1=1/2, f_2=1/6, f_4=f_8=-1/30, f_6=1/42, f_{10}=5/66, f_{12}=-691/2730$

Et pour tout k>0 $f_{2k+1}=0$

Mais on peut aussi introduire les fonctions génératrices, soit

(3.11) :
$$F(x)=\sum_{n\geq 0} f_n \frac{x^n}{n!}$$

La fonction génératrice exponentielle des nombres de Faulhaber.

On a aussi,

$$e^x=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} \ \& \ xe^x=\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{(n-1)!}$$

Le produit

$$e^xF(x)=\left(\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0}f_n\frac{x^n}{n!}\right)$$

S'obtient par la méthode de Cauchy, à savoir,

(3.12) : Pour deux séries ordinaires, on a formellement,

$$\left(\sum_{n\geq 0}a_nx^n\right)\left(\sum_{n\geq 0}b_nx^n\right)=\sum_{n\geq 0}c_nx^n$$

Avec,

$$c_n=\sum_{j=0}^{n}a_jb_{n-j}$$

On remplace a_n par $\frac{a_n}{n!}$, et b_n par $\frac{b_n}{n!}$, donc $c_n=\sum_{j=0}^{n}\frac{a_j}{j!}\frac{b_{n-j}}{(n-j)!}=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{n!}\binom{n}{j}a_jb_{n-j}$

Ainsi,

$$\left(\sum_{n\geq 0}a_n\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0}b_n\frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{n\geq 0}c_n\frac{x^n}{n!}$$

Avec,

$$c_n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a_jb_{n-j}$$

[]

Et donc,

$$e^x F(x) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} f_j\right)\frac{x^n}{n!}$$

Or,

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} f_j = \sum_{j=0}^{n-1} f_j\binom{n}{j} + f_n = n + f_n$$

Donc,

$$e^x F(x) = \sum_{n\geq 0}(n+f_n)\frac{x^n}{n!} = xe^x + F(x)$$

Ainsi on obtient la fonction génératrice de nombres de Faulhaber,

(3.13) : $$F(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$$

Jusqu'à là, on se demande où sont les nombres de Bernoulli ?!

Pour répondre à cette question il suffit de reprend tous ces calculs avec *Sb(j,n)* au lieu *Sf(j,n)*, et pour qu'il ne soit pas long, il suffit d'éclairer la différence, ce qu'est déjà fait en (3.3), à savoir,

$$Sf(0,n) = Sb(0,n) = n$$

&

Pour tout j≥1, $Sb(j,n) = Sf(j,n) - n^j$

Et toujours pour j≥1, on a,

$$jSb(j-1,n) = jSf(j-1,n) - jn^{j-1}$$

Donc le prolongement qui nous permet les polynômes d'Appell-Faulhaber, nous permet les polynômes de Bernoulli, tel que

(3.14) : $$B_j(n) = F_j(n) - jn^{j-1} = F_j(n) - 1\binom{j}{1}n^{j-1}$$

Comme les polynômes d'Appell-Faulhaber sont des polynômes d'Appell, alors il est de même pour les polynômes de Bernoulli, autant que polynômes d'Appell, ils ont presque la même progression associée, qui ne se diffère que par le second terme, tel que,

(3.15) : $$b_1 = -f_1 = -\frac{1}{2}$$

Et pour tout $n\neq 1$ $b_n = f_n$

Les nombres b_n qui font la progression associé aux polynômes de Bernoulli, sont dits aussi les nombres de Bernoulli, on peut les définir par intermédiaire des fonctions génératrices, soit $E(x)$ leur fonction génératrice telle que,

$$E(x) = \sum_{n\geq 0} b_n\frac{x^n}{n!} = \left(\sum_{n\geq 0} f_n\frac{x^n}{n!}\right) - x$$

Il est d'évidence qu'on a, $E(x) = F(x) - x$, donc,

(3.16) : $$E(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n\geq 0} b_n\frac{x^n}{n!}$$

Ainsi le nième nombre de Bernoulli vaut à la nième dérivé de $E(x)$ en x=0.

Notons que la fonction $E(x)$ n'est pas définie pour tout $x=2ik\pi$ avec k entier non nul, donc son développement de Taylor est valable dans un rayon de 2π.

Note :

Les nombres $x=2ik\pi$ avec k entier et $i^2=-1$ sont dites les pôles de la fonction $E(x)$, bien sûr $E(x)$ est prise comme une fonction complexe qui n'est même pas définie pour $x=0$ « $k=0$ », mais elle admet un prolongement par continuité en $x=0$. Donc le calcule des nombres de Bernoulli par intermédiaire de leur fonction génératrice n'est plus immédiate, voici les premiers valeurs :

- $b_0 = \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x-0}{e^x-e^0} = \left.\frac{dx}{de^x}\right|_{x=0} = \frac{1}{e^0} = 1$
- $\frac{dE(x)}{dx} = E(x) - \frac{xe^x}{\left(e^x-1\right)^2} = -\frac{xe^x-e^x+1}{e^{2x}-2e^x+1}$ et donc,

  $$b_1 = -\lim_{x\to x_0=0}\frac{(xe^x-x_0e^{x_0})-(e^x-e^{x_0})}{(e^{2x}-e^{2x_0})-2(e^x-e^{x_0})} = -\left.\frac{d(xe^x-e^x)/dx}{d(e^{2x}-2e^x)/dx}\right|_{x=0} = -\left.\frac{xe^x}{2(e^{2x}-e^x)}\right|_{x=0}$$

  $$b_1 = -\frac{1}{2}\left.E(x)\right|_{x=0} = -\frac{b_0}{2}$$
- Alors pour b_2, je ne vais pas calculer cette valeur, car vue :

  $$\frac{d^2E(x)}{dx^2} = \frac{2xe^{2x}}{(e^x-1)^3} - \frac{e^x(x+2)}{(e^x-1)^2}$$

Ce que je veux dire, est que l'introduction des fonctions génératrices n'a jamais était pour but de calculer les valeurs d'une séquence des nombres, c'est juste une méthode que Euler avait introduit pour démontrer quelques théorèmes, sinon ils vous faut toute une journée, dont vous risquer d'arriver à b_{10}.

[]

(3.17) :
$$\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}b_j = \begin{cases}1 \ si \ n=1\\ 0 \ si \ n>1\end{cases}$$

En effet,

$$e^x - 1 = \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\lambda_n\frac{x^n}{n!} \text{ , avec } \lambda_n = \begin{cases}0, & si \quad n=0\\ 1, & Ailleurs\end{cases}$$

$$(e^x-1)E(x) = \left(\sum_{n\geq 0}\lambda_n\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0}b_n\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}b_j\lambda_{n-j}\right)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}b_j\right)\frac{x^n}{n!}$$

Or (3.16) entraîne que l'on a,

$$(e^x-1)E(x) = x$$

$$(e^x-1)E(x) = 0 + 1\frac{x}{1!} + 0\frac{x^2}{2!} + 0\frac{x^3}{3!} + ..[]..$$

Et par identification des coefficients on a,

$$\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}b_j = \begin{cases}1 \ si \ n=1\\ 0 \ Ailleurs\end{cases}$$

C.Q.F.D

Cette formule nous permet de calculer par récurrence les valeurs des nombres de Bernoulli, mais par récurrence aussi il est aisé de prouver qu'ils sont tous des nombres rationnels.

Les premières valeurs :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$b(n)$	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{-1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$\frac{-1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$\frac{-691}{2730}$

Note :
Calculer ces nombres par cette récurrence n'est pas aussi une bonne idée, car au fur et à mesure qu'on avance dans cette récurrence le nombre des opérations devient important.
[]
La formule de Faulhaber (3.8) en terme des nombres de Bernoulli devient,

(3.18) :
$$jSb(j-1,n)=j\sum_{k=0}^{n-1}k^{j-1}=\sum_{t=0}^{j-1}\binom{j}{t}b_t n^{j-t}$$

Ou bien,

(3.19) :
$$\sum_{k=0}^{n-1}k^{j}=\frac{1}{j+1}\sum_{t=0}^{j}\binom{j+1}{t}b_t n^{j-t+1}$$

Un aspect arithmétique « *très important* » lié à ces sommes de puissances est le suivant :

(3.20) Théorème :

Soit p un nombre premier, on a pour tout entier n non nul,
$$\sum_{j=0}^{p-1}j^n \equiv \in_n(p) \;\; Modulo(p)$$

Où $\in_n(p)=\begin{cases}-1 & si \;\; p-1\,|\,n\\ 0 & Ailleurs\end{cases}$ est le symbole de Rado[1].

Preuve :

p - 1 divise n :

On applique le petit théorème de Fermat, tel que pour $0\le j\le p-1$, on a, $j^n\equiv 1 \;\; Modulo(p)$ donc $\sum_{j=0}^{p-1}j^n\equiv\sum_{j=1}^{p-1}j^n\equiv\sum_{j=1}^{p-1}1\equiv p-1\equiv -1 \;\; Modolo(p)$.

p - 1 ne divise pas n :

Soit g une racine primitive modulo p, c-à-d un générateur de $\mathbb{F}_p^*$, on sait que $g^k\equiv 1$ Modulo (p) si et seulement si $p-1|k$, comme g est un générateur de $\mathbb{F}_p^*$ alors l'ensemble $\{g,2g,\,..[]..\,,(p-1)g\}$ Modulo(p) est équivalente à $\{1,2,\,..[]..\,,p-1\}$.

On a,
$$(g^n-1)\sum_{j=0}^{p-1}j^n=\sum_{j=0}^{p-1}(jg)^n-\sum_{j=0}^{p-1}j^n\equiv\sum_{j=0}^{p-1}j^n-\sum_{j=0}^{p-1}j^n\equiv 0 \; Modulo(p)$$

Comme $(g^n-1)\neq 0 Modulo(p)$, donc $\sum_{j=0}^{p-1}j^n\equiv 0 \; Modulo(p)$.

C.Q.F.D

[1] Richard Rado (1906-1989) Mathématicien allemand.

§4
Les polynômes de Bernoulli

Les polynômes de Bernoulli peuvent être définie par plusieurs manières, une première définition, ce sont des polynômes d'Appell associés à la progression Bernoullienne, dite aussi les nombres de Bernoulli, et (2.5) nous permet d'écrire,

(4.1) : $$B_n(x)=\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}b_{n-t}x^t$$

C'est une suite de polynômes de degré n, tels que,

(4.2) : $$\frac{dB_n(x)}{dx}=nB_{n-1}(x)$$

Comme $E(x)=\dfrac{x}{e^x-1}=\sum_{n\geq 0}b_n\dfrac{x^n}{n!}$ est la fonction génératrice de la progression Bernoullienne, alors (2.6) nous permet de les définir par la fonction génératrice suivante :

(4.3) : $$\sum_{n\geq 0}B_n(t)\frac{x^n}{n!}=\frac{xe^{xt}}{e^x-1}$$

Comme on a vu, ces polynômes peuvent aussi être définie comme un prolongement à la somme des puissances, donc pour tout x entier positif, on a,

(4.4) : $$B_n(x)=nSb(n-1,x)+b_n=\left(n\sum_{j=0}^{x-1}j^{n-1}\right)+b_n$$

Ou bien,

(4.5) : $$\sum_{j=0}^{x-1}j^{n-1}=\frac{B_n(x)-B_n(0)}{n}$$

On a, $\Delta\left(B_n(x)\right)=B_n(x+1)-B_n(x)=n\left(\sum_{j=0}^{x}j^{n-1}-\sum_{j=0}^{x-1}j^{n-1}\right)$, donc,

(4.6) : $$B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}$$

&

(4.7) : $$\int_t^{t+1}B_n(x)dx=\left[\frac{B_{n+1}(x)}{n+1}\right]_t^{t+1}=t^n$$

Le théorème de la différence finie (2.9) nous permet d'écrire,

(4.8) : $$\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}B_j(x)=nx^{n-1}$$

On particulier pour $x=0$ on retrouve la récurrence qui nous permet de calculer les nombres de Bernoulli, à savoir,

$$\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}b_j=\begin{cases}1, & si\ n=1\\ 0, & si\ n>1\end{cases}$$

La formule de binôme conséquence de (2.8),

(4.9) : $$B_n(x+y)=\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}B_t(x)y^{n-t}$$

L'identité (2.10), à savoir,

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}A_j(t)b_{n-j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_j(t)a_{n-j}$$

Nous permet une infinité des formules pour les polynômes et les nombres de Bernoulli, dont voici quelques exemples que je donne sans démonstration, pour la démonstration voir [3].

(4.10) : $$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_j(t)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(t+1)^j b_{n-j}$$

Pour $t=-1$, « où il ne faut pas oublier que $0^0=1$ », on a,

(4.11) : $$b_n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_j(-1)$$

(4.12) : $$\forall n\in\mathbb{N}^*, n=\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\left(2^{n-j}-1\right)b_j$$

Nous substituions t par t-1 dans (4.10) et on obtient,

(4.13) : $$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_j(t-1)=B_n(t)$$

(4.14) : $$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}B_j(t)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(t-1)^j b_{n-j}$$

(4.15) : $$b_n+nb_{n-1}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(n+1-j)B_j(-1)$$

(4.16) : $$b_n+3nb_{n-1}+(n-1)nb_{n-2}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(n+1-j)^2B_j(-1)$$

(4.17) : $$b_n+7nb_{n-1}+6n(n-1)b_{n-2}+n(n-1)(n-2)b_{n-3}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(n+1-j)^3B_j(-1)$$

(4.18) : $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{2^{n+1-j}-2}{n+1-j}b_j=1$$

On redéfinie les nombres de Fibonacci avec une légère modification, telle que,

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}:=\begin{cases}f_0=f_1=1\\ \forall n\geq 2,\ f_n=f_{n-1}+f_{n-2}\end{cases}.$$

(4.19) : $$nf_{n-1}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(f_{2n-2j}-f_{n-j}\right)b_j$$

Parfois on a besoin de passer de la base canonique $\left(x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à la base Bernoullienne $\left(B_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour ça on a besoin des réciproques des nombres de Bernoulli, notons ces réciproques par $\left(\eta_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, et on a,

(4.20) : $$\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^{-1}=\frac{e^x-1}{x}=\sum_{n\geq 0}\eta_n\frac{x^n}{n!}$$

D'où

(4.21) : $$\eta_n=\frac{1}{n+1}$$

Ainsi,

(4.22) : $$x^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{B_{n-j}(x)}{j+1}$$

Pour une suite de polynôme d'Appell $A_n(x)$, on a,

(4.23) : $$A_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a_{n-j}x^j=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a_{n-j}\left(\sum_{t=0}^{j}\binom{j}{t}\frac{B_{j-t}(x)}{t+1}\right)$$

Ou bien,

$$A_n(x)=\sum_{t=0}^{n}\left(\sum_{j=t}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{j-t}\frac{a_{n-j}}{j-t+1}\right)B_k(x)$$

Notons par $I_n=\int_0^1 A_n(x)dx$, on a,

(4.24) : $$I_n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{a_{n-j}}{j+1}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a_{n-j}\eta_j$$

Ou bien symboliquement,

$$I_n=(a+\eta)^n$$

(4.25) : Soit $A_n(x)$ une suite de polynôme d'Appell, avec $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sa progression associée, $A_n(x)$ est l'unique suite des polynômes qui satisfaite les trois conditions suivantes :

- $A_0(x)=a_0$
- $\dfrac{dA_n(x)}{dx}=nA_{n-1}(x)$
- $I_n=\int_0^1 A_n(x)dx=\left(a+\eta\right)^n$

<u>Preuve :</u>

Les trois conditions sont conséquences du fait que $A_n(x)$ est une suite de polynôme d'Appell, pour l'unicité, soit $P_n(x)$ une autre suite de polynôme qui satisfaite ces trois conditions, par récurrence on démontre que $P_n(x)=A_n(x)$, c'est évident pour n=0, pour n>0 on a par hypothèse de récurrence,

$$\frac{dP_n(x)}{dx}=nP_{n-1}(x)=nA_{n-1}(x)=\frac{dA_n(x)}{dx}$$

Donc,

$$P_n(x)=A_n(x)+C^{te}$$

Et on a,

$$\int_0^1 P_n(x)dx = I_n = \int_0^1 \left(A_n(x) + C^{te}\right)dx = I_n + \left[C^{te}x\right]_0^1 = I_n + C^{te}$$

Donc, $C^{te} = 0$

C.Q.F.D

En vertu de cette unicité on a la proposition suivante :

(4.26) Proposition :

Soient $A_n(x)$ et $B_n(x)$ deux suites de polynôme d'Appell, notons par $I_n = \int_0^1 A_n(x)dx$ et $J_n = \int_0^1 B_n(x)dx$ alors on a,

$$I_n = J_n \text{ si et seulement si } A_n(x) = B_n(x).$$

(4.27) :

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$$

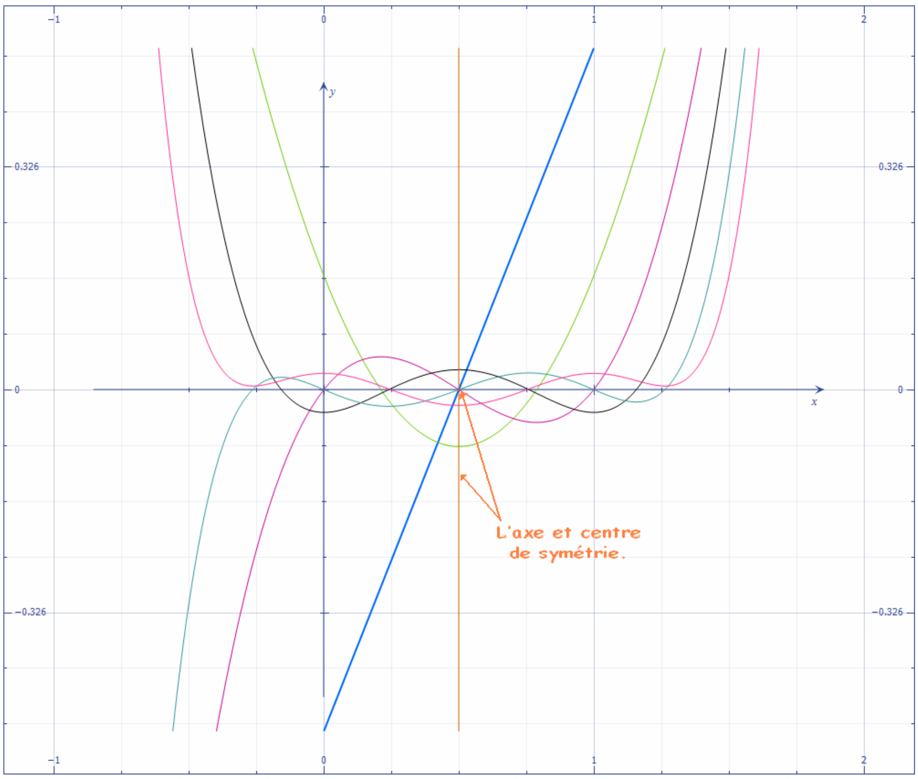
En effet,

$$\sum_{n\geq 0} B_n(1-x)\frac{t^n}{n!} = \frac{te^{t(1-x)}}{e^t - 1} = \frac{-te^{-tx}}{e^{-t}-1} = \sum_{n\geq 0} B_n(x)\frac{(-t)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n B_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

Et la formule s'obtient par l'identification des cœfficients.

C.Q.F.D

Cette formule montre que les zéros de ces polynômes sont symétriques par rapport à 1/2.



La formule de multiplication de Raabe

(4.28) :
$$B_n(qx)=q^{n-1}\sum_{j=0}^{q-1}B_n\left(x+\frac{j}{q}\right)$$
Ou bien
$$B_n(x)=q^{n-1}\sum_{j=0}^{q-1}B_n\left(\frac{x+j}{q}\right)$$
Valide pour tout entier $q\geq 1$.
Exemples :
$$B_n(x)=2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{x}{2}\right)+B_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$$
$$B_n(x)=3^{n-1}\left(B_n\left(\frac{x}{3}\right)+B_n\left(\frac{x+1}{3}\right)+B_n\left(\frac{x+2}{3}\right)\right)$$
Preuve :
On part de la fonction génératrice des polynômes de Bernoulli,
$$g(x,t)=\frac{xe^{xt}}{e^x-1}=\frac{xe^{xt}}{e^{qx}-1}\frac{e^{qx}-1}{e^x-1}$$
Le nombre $\frac{e^{qx}-1}{e^x-1}$ n'est qu'une somme de la suie géométrique $\sum_{j=0}^{q-1}e^{jx}$.
$$\begin{aligned}g(x,t)&=\frac{1}{q}\frac{qxe^{xt}}{e^{qx}-1}\sum_{j=0}^{q-1}e^{jx}\\&=\frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1}\frac{qxe^{x(t+j)}}{e^{qx}-1}\\&=\frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1}\frac{qxe^{qx\frac{(t+j)}{q}}}{e^{qx}-1}\\&=\frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1}g\left(qx,\frac{x+j}{q}\right)\end{aligned}$$
Et par identification des coefficients on a $B_n(x)=\frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1}q^nB_n\left(\frac{x+j}{q}\right)$.

Pour plus sur les formules de Raabe voir [5].
C.Q.F.D

Les polynômes de Bernoulli peuvent aussi êtres définies par l'unique suite des polynômes qui satisfaite les trois conditions suivantes :

(4.29) :
$$\begin{cases}i, & B_0(x)=1\\ ii, & \dfrac{dB_n(x)}{dx}=nB_{n-1}(x),\ pour\ tout\ n\geq 1\\ iii, & \int_0^1 B_n(x)dx=0,\ pour\ tout\ n\geq 1\end{cases}$$

Preuve :

Pour i et ii c'est déjà vu, on pose x = 0 dans (4.6) on obtient $B_n(0) = B_n(1)$ pour tout entier n>1, donc,

$$\int_0^1 B_n(x)dx = \frac{1}{n+1}\left(B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)\right) = 0$$

Pour l'unicité, c'est déjà vu en (4.25).

C.Q.F.D

Récurrences de Ramanujan

(4.30) : $$\sum_{r=0}^{n}\binom{6n+3}{6r}b_{6r} = 2n+1$$

(4.31) : $$\sum_{r=0}^{n}\binom{6n+5}{6r+2}b_{6r+2} = \frac{1}{3}(6n+5)$$

(4.32) : $$\sum_{r=0}^{n-1}\binom{6n+1}{6r+4}b_{6r+4} = -\frac{1}{6}(6n+1),\ n>0$$

Preuve :

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des nombres définie comme suivant :

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Et pour n>2 on a,

$$\lambda_n = \begin{cases} 0, & si\ n \equiv 0\ Modulo(6) \\ -n/6, & si\ n \equiv 1\ Modulo(6) \\ 0, & si\ n \equiv 2\ Modulo(6) \\ n/3, & si\ n \equiv 3\ Modulo(6) \\ -n/2, & si\ n \equiv 4\ Modulo(6) \\ n/3, & si\ n \equiv 5\ Modulo(6) \end{cases}$$

Soit $(L_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes d'Appell associée à $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et notons par $I_n = \int_0^1 L_n(x)dx$.

On a,

$$I_n = \int_0^1 L_n(x)dx = \left.\frac{\Delta\left(L_{n+1}(x)\right)}{n+1}\right|_{x=0}$$

Et par (2.9) on obtient,

$$I_n = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j}L_n(0)$$

$$I_n = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j}\lambda_n$$

Posons $n=6k+r$ avec $0\le r\le 5$, soit $a_r=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{n+1}{6j+r}\lambda_{6j+r}$, alors $I_n=\left(\sum_{r=0}^{5}a_r\right)+C_n$, où C_n est le terme correcteur, pour r = 1, on a λ_1=0 et non -1/6, donc pour une première correction on ajoute 1/6, d'autre part la somme $\sum_{r=0}^{5}a_r$ contient des termes additives qu'il faut les ôter, ainsi,

$$C_n=\frac{1}{6}-\frac{1}{n+1}\left(\binom{n+1}{6k+r+1}\lambda_{6k+r+1}+\underbrace{\binom{n+1}{6k+r+2}\lambda_{6k+r+2}+..[]..}_{=0}\right)$$

$$C_n=\frac{1}{6}-\frac{\lambda_{n+1}}{n+1}.$$

On remarque que λ_n s'écrie toujours sous forme de βn, en vertu on a,

$$a_r=\frac{\beta}{n+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{n+1}{6j+r}(6j+r)=\beta\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{6j+r-1}$$

Ainsi,

$$a_0=0q_5=0,\ a_1=-\frac{1}{6}\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{6j}=-\frac{1}{6}q_0,\ a_2=0q_1=0,\ a_3=\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{6j+2}=\frac{1}{3}q_2$$

$$a_4=-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{6j+3}=-\frac{1}{2}q_3,\ a_5=\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{6j+4}=\frac{1}{3}q_4$$

Notons $\omega=e^{i\pi/3}$, on a $\left(1+\omega^r\right)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\omega^{rj}=\sum_{m=0}^{5}q_m\omega^{rm}$ et donc on a,

$$\underbrace{\begin{pmatrix}(1+\omega^0)^n\\(1+\omega^1)^n\\(1+\omega^2)^n\\(1+\omega^3)^n\\(1+\omega^4)^n\\(1+\omega^5)^n\end{pmatrix}}_{Y}=\underbrace{\begin{pmatrix}\omega^0&\omega^0&\omega^0&\omega^0&\omega^0&\omega^0\\\omega^0&\omega^1&\omega^2&\omega^3&\omega^4&\omega^5\\\omega^0&\omega^2&\omega^4&\omega^0&\omega^2&\omega^4\\\omega^0&\omega^3&\omega^0&\omega^3&\omega^0&\omega^3\\\omega^0&\omega^4&\omega^2&\omega^0&\omega^4&\omega^2\\\omega^0&\omega^5&\omega^4&\omega^3&\omega^2&\omega^1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}q_0\\q_1\\q_2\\q_3\\q_4\\q_5\end{pmatrix}}_{X}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\overline{A}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}\omega^0&\omega^0&\omega^0&\omega^0&\omega^0&\omega^0\\\omega^0&\omega^5&\omega^4&\omega^3&\omega^2&\omega^1\\\omega^0&\omega^4&\omega^2&\omega^0&\omega^4&\omega^2\\\omega^0&\omega^3&\omega^0&\omega^3&\omega^0&\omega^3\\\omega^0&\omega^2&\omega^4&\omega^0&\omega^2&\omega^4\\\omega^0&\omega^1&\omega^2&\omega^3&\omega^4&\omega^5\end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^5 & \omega^4 & -1 & \omega^2 & \omega^1 \\ 1 & \omega^4 & \omega^2 & 1 & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & 1 & \omega^2 & \omega^4 \\ 1 & \omega^1 & \omega^2 & -1 & \omega^4 & \omega^5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n \\ (1+\omega)^n \\ \omega^n \\ 0 \\ \omega^{5n} \\ (1+\overline{\omega})^n \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2^n + (1+\omega)^n + \omega^n + \omega^{5n} + (1+\overline{\omega})^n \\ 2^n + \omega^5(1+\omega)^n + \omega^4\omega^n + \omega^2\omega^{5n} + \omega(1+\overline{\omega})^n \\ 2^n + \omega^4(1+\omega)^n + \omega^2\omega^n + \omega^4\omega^{5n} + \omega^2(1+\overline{\omega})^n \\ 2^n - (1+\omega)^n + \omega^n + \omega^{5n} - (1+\overline{\omega})^n \\ 2^n + \omega^2(1+\omega)^n + \omega^4\omega^n + \omega^2\omega^{5n} + \omega^4(1+\overline{\omega})^n \\ 2^n + \omega(1+\omega)^n + \omega^2\omega^n + \omega^4\omega^{5n} + \omega^5(1+\overline{\omega})^n \end{pmatrix}$$

Soit $s = \frac{-q_0}{6} + \frac{q_2}{3} - \frac{q_3}{2} + \frac{q_4}{3}$, on a

$$6s = \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)2^n + \left(-\frac{1}{6} + \frac{\omega^4}{3} - \frac{-1}{2} + \frac{\omega^2}{3}\right)(1+\omega)^n + \left(-\frac{1}{6} + \frac{\omega^2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{\omega^4}{3}\right)\omega^n$$

$$+\left(-\frac{1}{6} + \frac{\omega^4}{3} - \frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{3}\right)\omega^{5n} + \left(-\frac{1}{6} + \frac{\omega^2}{3} - \frac{-1}{2} + \frac{\omega^4}{3}\right)(1+\overline{\omega})^n$$

$$6s = -(\omega^n + \omega^{5n}) = -(\omega^r + \omega^{5r})$$

Donc,

$$s = -(\omega^r + \omega^{5r})/6$$

Ainsi,

$$I_n = \frac{-(\omega^r + \omega^{5r})}{6} + \frac{1}{6} - \frac{\lambda_{n+1}}{n+1}$$

Ainsi I_n ne dépend que de r et on a,

$$I_n = \begin{cases} 1, \ si\ n \equiv 3\ Modulo\ (6) \\ 0,\ Ailleurs \end{cases}$$

Soit $R_n(x)$ une suite de polynôme définie en base Bernoullienne comme suivant,

$$R_n(x) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}I_{n-j}B_j(x)$$

On a, $R_n(x)$ est une suite de polynôme d'Appell, en effet,

$$\frac{d}{dx}R_n(x) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}I_{n-j}jB_{j-1}(x) = \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}I_{n-j}jB_{j-1}(x)$$

Car $\frac{d}{dx}B_0(x) = 0$,

On fait un changement d'indice,

$$\frac{d}{dx}R_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j+1}I_{n-j-1}(j+1)B_j(x)$$

$$\text{Or, } n\binom{n-1}{j} = (j+1)\binom{n}{j+1}$$

$$\frac{d}{dx}R_n(x) = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}I_{n-1-j}B_j(x) = nR_{n-1}(x)$$

Donc $R_n(x)$ est une suite de polynôme d'Appell.

Notons par $J_n = \int_0^1 R_n(x)dx$, on a, $J_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} I_{n-j} \int_0^1 B_j(x)dx = I_n$, car comme on a vu $\int_0^1 B_n(x)dx = 0$ pour tout $n > 0$, mais pour $n = 0$ on a, $\int_0^1 B_0(x)dx = [x]_0^1 = 1$.

De la proposition (4.26) en déduit que $R_n(x) = L_n(x)$, ainsi on a,

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} I_{n-j} B_j(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \lambda_{n-j} x^j$$

En particulier pour $x = 0$ on a,

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} I_{n-j} b_j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \lambda_{n-j} 0^j = \lambda_n 0^0 = \lambda_n$$

Ce qui nous permet 6 récurrences, dont deux sont complètement triviales, telles que

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{6n}{6r+3} B_{6r+3} = \sum_{r=0}^{n} \binom{6n+2}{6r+5} B_{6r+5} = 0$$

Triviales parce que c'est la somme des zéros qui donne un zéro.
Une récurrence triviale telle que,

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{6n+4}{6r+1} B_{6r+1} = \binom{6n+4}{1} B_1 = -\frac{6n+4}{2}$$

Et bien sûr les trois récurrences de Ramanujan, telles que,

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{6n+3}{6r} B_{6r} = 2n+1$$

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{6n+5}{6r+2} B_{6r+2} = \frac{1}{3}(6n+5)$$

$$\sum_{r=0}^{n-1} \binom{6n+1}{6r+4} B_{6r+4} = -\frac{1}{6}(6n+1),\ n > 0$$

C.Q.F.D

<u>Autres récurrences sans démos</u>

(4.33) : $$\sum_{j=0}^{n} \binom{4n}{4j} \frac{(-1)^j}{2^{2j}(2j+1)(4j+1)} b_{4n-4j} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(4n+1)}$$

(4.34) : $$\sum_{j=0}^{n} \binom{4n+2}{4n-4j+2} \frac{(-1)^j}{2^{2j}(2j+1)(4j+1)} b_{4n-4j+2} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}(4n+3)}$$

§5
Un peu des fonctions génératrices

Pour tout $|x|<2\pi$ on pose,

$$f(x)=E(x)+\frac{x}{2}=\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=\frac{x(e^x+1)}{2(e^x-1)}$$

Et on a,

f(x) est paire, et donc,

(5.1) : $b(1)=-1/2$

Et pour tout $n>0$, $b(2n+1)=0$

Remarquant que $f(x)$ n'est autre que $\frac{x}{2}\coth(\frac{x}{2})$, telle que,

(5.2) : $$\frac{x}{2}\coth(\frac{x}{2})=\sum_{n\geq 0}\frac{b_{2n}}{(2n)!}x^{2n}$$

Donc,

(5.3) : $$\sum_{n\geq 0}\frac{b_n}{n!}x^n=\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\sum_{n\geq 1}\frac{b_{2n}}{(2n)!}x^{2n}$$

Valable pour tout $|x|<2\pi$

On remplace $x/2$ par x dans (5.2), et on obtient pour tout $|x|<\pi$,

(5.4) : $$x\coth(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{2^{2n}b_{2n}}{(2n)!}x^{2n}$$

Et pour passer d'une fonction hyperbolique à une fonction trigonométrique, on change x par ix.

$$x\cot(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{2^{2n}b_{2n}}{(2n)!}(ix)^{2n}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{2^{2n}b_{2n}}{(2n)!}x^{2n}=1+\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{2^{2n}b_{2n}}{(2n)!}x^{2n}$$

(5.5) : $$\cot(x)=\frac{1}{x}+\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{2^{2n}b_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1}$$

$\tan(x)=\cot(x)-2\cot(2x)$ entraîne que l'on a pour tout $|x|<\frac{\pi}{2}$

(5.6) : $$\tan(x)=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}b_{2n}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}x^{2n-1}$$

Ou bien pour plus de précision,

$$\tan(x)=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}b_{2n}\frac{2^{2n-2}(2^{2n+1}-2)}{n}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sum_{n\geq 0}T_n\frac{x^n}{n!}$$

Où les T_n sont les nombres tangents, tels que :

(5.7) :
$$T_n=\begin{cases}0,\ si\ n=2k\\(-1)^{k+1}B_{2k}\dfrac{2^{2k-2}(2^{2k+1}-2)}{k}\in\mathbb{N}^*,\ si\ n=2k-1\ \&\ k\geq 1\end{cases}$$

Note :

« Certains auteurs définissent les nombres tangents comme les coefficients non nuls de la fonction tangente, dont le début de la liste est* 1, 2, 16, 272 *..[]..* *Alors que la définition que j'ai choisie contient des zéros, dont le début de la liste est* 0, 1, 0, 2 , 0, 16, 0, 272 *..[].. »

Une propriété vraiment curieuse de ces nombres, « les non nuls seulement » c'est qu'ils se terminent toujours par* 2 *et* 6*, « en alternance », abstraction faite pour le premier terme,* T(1)=1 *!?

Preuve de (5.7) :

En effet on prend les dérivées successives de tan(x), on pose tan(x)=t et $D^n(t)=\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\tan(x)\right)$, les premiers valeurs,

$$D^0(t)=t$$
$$D^1(t)=t^2+1$$
$$D^2(t)=2t^3+2t$$
$$D^3(t)=6t^4+8t^2+2$$
$$D^4(t)=24t^5+40t^3+16t$$
..[]..

On remarque que $D^n(t)$ est un polynôme de degré n+1, à coefficients entiers positives ou nulles, dont la parité est à l'inverse de la parité de n, et tel que,

$$D^{n+1}(t)=(t^2+1)\frac{d}{dt}D^n(t)$$

En effet,

$$D^{n+1}(t)=\frac{d}{dx}\left(D^n(t)\right)=\frac{d}{dt}\left(D^n(t)\right)\frac{dt}{dx}=(t^2+1)\frac{d}{dt}D^n(t)$$

Et donc par récurrence on peut démontrer que les coefficients sont des entiers positives, puisque d'un part la dérivé d'un polynôme à coefficients entiers positives est aussi un polynôme à coefficients entiers positives, et d'autre part, le produit de deux polynômes à coefficients entiers positives est aussi un polynôme à coefficients entiers positives.

Pour la parité on démontre que $D^n(-t)=(-1)^{n+1}D^n(t)$, alors par récurrence on suppose que c'est vrai pour tous ordres jusqu'à n, pour l'ordre n+1 on a,

$$D^{n+1}(-t)=\left((-t)^2+1\right)\frac{d}{d(-t)}\left(D^n(-t)\right)=(-1)(t^2+1)\frac{d}{dt}\left(D^n(-t)\right)$$
$$=(-1)^{n+2}(t^2+1)\frac{d}{dt}\left(D^n(t)\right)=(-1)^{n+2}D^{n+1}(t)$$

Cette parité montre que les coefficients de degré paire sont tous nuls, et donc $T_{2n}=0$.
C.Q.F.D

(5.8) :

$$b_n = \begin{cases} 1 & si\ n = 0 \\ \dfrac{-1}{2} & si\ n = 1 \\ (-1)^{(n/2)-1}|b_n| & si\ n\ est\ pair \\ 0 & si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

En effet les nombres tangents montre que $(-1)^{n-1}b_{2n}$ est toujours positive.
C.Q.F.D
[]

(6.1) Proposition :

Pour tout entier n, et pour tout p premier, on a,

$$pb_n \in \mathbb{Z}p$$

Preuve :

Par récurrence,

Soit p un nombre premier, on a,

$$pb_0 = p \in \mathbb{Z}p$$

$$pb_1 = \frac{-p}{2} \in \mathbb{Z}p$$

On suppose que c'est vraie pour tout ordre $k<n$, pour l'ordre n on a,

$$Sb(n,p) = \sum_{j=0}^{p-1} j^n = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j} b_j p^{n+1-j} \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}p$$

On a,

$$\binom{n+1}{j} = \frac{n+1}{n+1-j}\binom{n}{j}$$

$$pb_n = \sum_{j=0}^{p-1} j^n - \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\frac{p^{n-j}}{n+1-j} pb_j$$

Il suffit de prouver que le terme $\binom{n}{j}\frac{p^{n-j}}{n+1-j} pb_j \in \mathbb{Z}p$, et on a,

- $pb_j \in \mathbb{Z}p$, par hypothèse de récurrence,
- $\binom{n}{j} \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}p$
- $ord_p\left(\frac{p^{n-j}}{n-j+1}\right) \geq 0$, donc $\frac{p^{n-j}}{n-j+1} \in \mathbb{Z}p$, voir (1.7).

C.Q.F.D

Note :

Cette proposition montre tout simplement que le dénominateur de pb_n est sans facteur carré.

(6.2) Proposition :

$$pb_n \equiv \begin{cases} -1 \ Modulo(p\mathbb{Z}p), si \ (p-1) \mid n. \\ 0 \quad Modulo(p\mathbb{Z}p), si \ (p-1) \nmid n. \end{cases}$$

Preuve :

De la preuve précédente, la formule $pb_n = \sum_{j=0}^{p-1} j^n - \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\frac{p^{n-j}}{n+1-j} pb_j$, peut être traduite à la suivante :

$$pb_n \equiv \sum_{j=0}^{p-1} j^n \ Modulo(\mathbb{Z}p)$$

Et la proposition se résulte de (3.20).
C.Q.F.D

(6.3) Théorème de Von Staudt-Clausen :

$$b_n + \sum_{\substack{p,premier\\ p-1|n}} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}$$

Preuve :
Soit q un nombre premier, d'après la proposition (6.1), $qb_n \in \mathbb{Z}p$ et on cherche à montrer que

$b_n + \sum_{\substack{p,premier\\ p-1|n}} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}q$ pour tout q premier.

On note souvent $b_n = \dfrac{N}{D}$.

- Si $q-1 \nmid n$ alors on a,

D'un part $qb_n \equiv 0 Modulo(q\mathbb{Z}q)$ Donc $b_n \in \mathbb{Z}q$, car $qb_n = q\dfrac{N}{D} \in q\mathbb{Z}q \subset \mathbb{Z}q$ donc $(q,D)=1$.

D'autre part $\sum_{\substack{p,premier\\ p-1|n}} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}q$, d'où $b_n + \sum_{\substack{p,premier\\ p-1|n}} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}q$.

- Si $q-1 | n$ alors on a,

D'un part $qb_n \equiv -1 \ Modulo(q\mathbb{Z}q)$ donc $b_n \equiv \dfrac{-1}{q} Modulo(\mathbb{Z}q)$.

D'autre part $\sum_{\substack{p,premier\\ p-1|n}} \frac{1}{p} \equiv \frac{1}{q} Modulo(\mathbb{Z}q)$, car $\dfrac{1}{q}$ est l'un des termes de la somme $\sum_{\substack{p,premier\\ p-1|n}} \frac{1}{p}$

Donc $b_n + \sum_{\substack{p,premier\\ p-1|n}} \frac{1}{p} \equiv \frac{1}{q} - \frac{1}{q} \equiv 0 \ Modulo(\mathbb{Z}q)$, d'où $b_n + \sum_{\substack{p,premier\\ p-1|n}} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}q$

$b_n + \sum_{\substack{p,premier\\ p-1|n}} \frac{1}{p}$ est q-entier pour tout q premier, donc son dénominateur est égale à 1.

C.Q.F.D

(6.4) Corollaire :

$$b_n = \frac{Num(n)}{\prod_{\substack{p,\ premier\\ p-1|n}} p}.$$

Preuve :
Le théorème (6.3) montre qu'il existe un entier relative z tel que,

$$b_n = z + \sum_{\substack{p,premier\\ p-1|n}} \frac{1}{p}$$

Notons par $\omega = \{p, premier\ tel\ que\ p-1 | n\}$, soit $Card(\omega)$=k tel que, $\omega = \{p_1, p_2, ..[].., p_k\}$, alors on a,

$$b_n = z + \frac{\sum_{1 \le i_1 < i_2 <..[]..< i_{k-1} \le k} p_{i_1} p_{i_2} ..[]..p_{i_{k-1}}}{\prod_{j=1}^{k} p_j}$$

$$b_n = \frac{z\prod_{j=1}^{k} p_j + \sum_{1 \le i_1 < i_2 <..[]..< i_{k-1} \le k} p_{i_1} p_{i_2} ..[]..p_{i_{k-1}}}{\prod_{j=1}^{k} p_j}$$

Comme l'entier $\sum_{1 \le i_1 < i_2 <..[]..< i_{k-1} \le k} p_{i_1} p_{i_2} ..[]..p_{i_{k-1}}$ est premier avec $\prod_{j=1}^{k} p_j$, alors cette écriture est la fraction réduite de b_n.
C.Q.F.D

Notons par :
(6.5) :
$$Z_n = \prod_{\substack{p,\, premier \\ p-1 | n-1}} p$$

On a,

(6.6) : Z_n divise $x^n - x$ pour tout entier x.

<u>Preuve :</u>
Il est facile d'obtenir la formule suivante :
$$(x^n - x) = (x^m - x)\sum_{j=1}^{q} x^{(n-1)-j(m-1)} + R(x)$$
Avec,
$$n-1 = q(m-1) + r \ \ \& \ \ R(x) = x^{r+1} - x$$
Donc si m - 1 divise n - 1 alors x^m - x divise x^n - x, si de plus m est un nombre premier, alors m divise x^m - x, donc m divise x^n - x.
C.Q.F.D
Notons par :
(6.7) :
$$\Delta_n^+(x) = (x+1)^n - x^n$$
$$\Delta_n^-(x) = x^n - (x-1)^n$$
$$\sigma_n(x) = (x+1)^n + (x-1)^n - 2x^n$$
On a,
(6.8) :
$$\Delta_n^+(x) \equiv \Delta_n^-(x) \equiv 1 \ Modulo(Z_n)$$
$$\sigma_n(x) \equiv 0 \ Modulo(Z_n)$$
<u>Preuve :</u>
On a,
$$\Delta_n^+(x) = (x+1)^n - x^n = \left((x+1)^n - (x+1)\right) - \left(x^n - x\right) + 1$$
De même $\Delta_n^-(x) = x^n - (x-1)^n = \left(x^n - x\right) - \left((x-1)^n - (x-1)\right) + 1$

Or d'après (6.6), on a :

$$\left((x+1)^n-(x+1)\right)\equiv 0\ Modulo(Z_n)$$

Et $\left(x^n-x\right)\equiv 0\ Modulo(Z_n)$

Donc, $\Delta_n^+(x)\equiv 1\ Modulo(Z_n)$

De même, $\Delta_n^-(x)\equiv 1\ Modulo(Z_n)$

Et finalement, $\sigma_n(x)\equiv \Delta_n^+(x)-\Delta_n^-(x)\equiv 1-1\equiv 0\ Modulo(Z_n)$

Nous pouvons récrire (6.4) de la manière suivante :

(6.9) : $$b_n=\frac{A_n}{Z_{n+1}},\ A_n\in\mathbb{Z}\ \text{ et }\ Z_n=\prod_{\substack{p,\,premier\\ p-1|n-1}} p\,.$$

Z_n est le plus grand diviseur de Fermat, pour plus sur les diviseurs de Fermat voir [6].

(6.10) Lemme :

Soit p un nombre premier tel que p - 1 ne divise pas $2n$, alors on a :

$$p\,|\,x^{2n+1}-x \text{ si et seulement si } x\equiv(-1,0\ ou\ 1)Modulo\ (p)$$

Preuve :

Le fait que p - 1 ne divise pas $2n$, montre que p ne divise pas $x^{2n+1}-x$ pour tout entier x.

On pose $x = kp+r$ avec $k\in\mathbb{N}$ et $0\le r\le p$-1 et on a,

$$x^{2n+1}-x=(kp+r)^{2n+1}-(kp+r)$$

$$=\left((kp)^{2n+1}-kp\right)+\left(r^{2n+1}-r\right)+\sum_{j=1}^{2n}\binom{2n+1}{j}(kp)^{2n+1-j}\,r^j$$

Comme r est un résidu, alors $p\,|\,r^{2n+1}-r\Rightarrow r(r^{2n}-1)=0$

Donc, r = - 1,0 ou 1

Pour l'autre sens c'est évidant.

C.Q.F.D

(6.11) Théorème "J.C.Adams" :

Soit $p\ge3$ un nombre premier, si p - 1 ne divise pas $2n$, et que p^m divise $2n$, pour un entier m, alors p^m divise le numérateur de b_{2n}.

Preuve :

On part de (5.6) à savoir,

$$\tan(x)=\sum_{n\ge1}(-1)^{n+1}b_{2n}\frac{2^{2n-2}(2^{2n+1}-2)}{n}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sum_{n\ge0}T_n\frac{x^n}{n!}$$

Notons par $b_{2n}=\dfrac{A_{2n}}{Z_{2n+1}}$, donc,

$$\tan(x)=\sum_{n\ge1}(-1)^{n+1}A_{2n}\frac{2^{2n-2}}{n}\frac{(2^{2n+1}-2)}{Z_{2n+1}}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sum_{n\ge0}T_n\frac{x^n}{n!}$$

Comme on a vu, les nombres tangents sont des entiers positive, tel que,

$$(-1)^{n+1} A_{2n} \frac{2^{2n-1}}{2n} \frac{(2^{2n+1}-2)}{Z_{2n+1}} \in \mathbb{N}^*$$

Or, (6.8) à savoir $\sigma_n(x) \equiv 0 \; Modulo(Z_n)$ montre que $N = \dfrac{(2^{2n+1}-2)}{Z_{2n+1}}$ est un entier, donc,

$$(-1)^{n+1} \frac{A_{2n} 2^{2n-1} N}{2n} \in \mathbb{N}^*$$

Soit $p \geq 3$ un nombre premier, si p-1 ne divise pas $2n$, et que p^m divise $2n$, pour un entier m quelconque, alors p^m ne divise pas 2^{2n-1} car $ord_p(2^{2n-1}) = 0$, et p^m ne divise pas $(2^{2n+1}-2)$ donc ne divise pas N, car vue le lemme (6.10), donc p^m divise le numérateur de A_{2n}.

C.Q.F.D *Sauf erreur.*

[]

<u>(6.12) Corollaire :</u>

$$dénominateur\left(\frac{b_n}{n}\right) = \prod_{\substack{p,\, premier \\ p-1|n}} p^{1+ord_p(n)}$$

C'est une conséquence de théorème de Von Staudt-Clausen et de théorème d'Adams.

Ceci preuve aussi que l'on a,

(6.13) :

Soit p un nombre premier, si p - 1 ne divise pas n, alors $\dfrac{b_n}{n} \in \mathbb{Z}p$.

Mais plus généralement, on a,

(6.14) :

Soit a un p-entier avec p est premier, si p - 1 ne divise pas n, alors $\dfrac{B_n(a)}{n} \in \mathbb{Z}p$.

<u>Preuve :</u>

Puisque $\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{Z}p$, il suffit de faire une récurrence pour tout a entier,

Pour a=0, on a,

$$\frac{B_n(0)}{n} = \frac{b_n}{n} \in \mathbb{Z}p.$$

Et la proposition (4.4), à savoir,

$$\frac{B_n(a+1)}{n} = \frac{B_n(a)}{n} + a^{n-1}$$

Etablit la récurrence.

C.Q.F.D

<u>(6.15) Théorème « Congruence de Kummer » :</u>

Soient : p un nombre premier, t et n deux entiers tels que $t \leq n$ - 1. Si p - 1 ne divise pas n, alors on a,

$$\sum_{j=0}^{t} (-1)^j \binom{t}{j} \frac{b_{n+j(p-1)}}{n+j(p-1)} \equiv 0 \; Modulo(p^t \mathbb{Z}p)$$

On particulier on a,

$$\frac{b_{n+p-1}}{n+p-1} \equiv \frac{b_n}{n}\ Modulo(p\mathbb{Z}p).$$

Preuve :

Le petit théorème de Fermat montre que pour tout premier p, que l'on a,

$$(l^{p-1}-1) \equiv 0\ Modulo(p\mathbb{Z}p)$$

Valable pour tout entier l tel que $(l,p)=1$, soit $t>0$ un entier, alors d'évidence on a,

$$(l^{p-1}-1)^t \equiv 0\ Modulo(p^t\mathbb{Z}p)$$

Ou encore,

$$l^{n-1}(l^{p-1}-1)^t \equiv 0\ Modulo(p^t\mathbb{Z}p)$$

Valable pour tout entier l.

L'application de la formule de binôme, entraîne,

$$\sum_{j=0}^{t}(-1)^{t-j}\binom{t}{j}l^{n-1+j(p-1)} \equiv 0\ Modulo(p^t\mathbb{Z}p)$$

Si t est pair, alors $(-1)^{t-j}=(-1)^j$, sinon on multiple la congruence par (- 1), donc,

$$\sum_{j=0}^{t}(-1)^{j}\binom{t}{j}l^{n-1+j(p-1)} \equiv 0\ Modulo(p^t\mathbb{Z}p)$$

On applique cette formule pour tout l, depuis l=0 jusqu'à l = N- 1, «N est entier quelconque », et nous sommons,

$$\sum_{l=0}^{N-1}\left(\sum_{j=0}^{t}(-1)^{j}\binom{t}{j}l^{n-1+j(p-1)}\right) \equiv \sum_{l=0}^{N-1}0\ Modulo(p^t\mathbb{Z}p)$$

$$\sum_{j=0}^{t}(-1)^{j}\binom{t}{j}\left(\sum_{l=0}^{N-1}l^{n-1+j(p-1)}\right) \equiv 0\ Modulo(p^t\mathbb{Z}p)$$

$$\sum_{j=0}^{t}(-1)^{j}\binom{t}{j}\left(\frac{B_{n+j(p-1)}(N)-b_{n+j(p-1)}}{n+j(p-1)}\right) \equiv 0\ Modulo(p^t\mathbb{Z}p)$$

Donc il existe une constante $0 \le c \le p-1$ telle que,

$$R(N) := \sum_{j=0}^{t}(-1)^{j}\binom{t}{j}\left(\frac{B_{n+j(p-1)}(N)}{n+j(p-1)}\right) \equiv \sum_{j=0}^{t}(-1)^{j}\binom{t}{j}\left(\frac{b_{n+j(p-1)}}{n+j(p-1)}\right) \equiv \mathrm{c}\ Modulo(p^t\mathbb{Z}p)$$

Valable pour tout entier N, donc valable pour tout p-entier a, tel que,

$$R(a) \equiv c\ Modulo(p^t\mathbb{Z}p)$$

La formule de multiplication de Raabe (4.28) pour x=1, donne l'égalité suivante :

$$R(q) = \sum_{j=0}^{t}(-1)^{j}\binom{t}{j}\left(q^{n-1}\sum_{k=0}^{q-1}\frac{B_{n+j(p-1)}\left(1+\frac{k}{q}\right)}{n+j(p-1)}\right)$$

Ou bien,

$$R(q)=q^{n-1}\sum_{k=0}^{q-1}\left(\sum_{j=0}^{t}(-1)^j\binom{t}{j}\frac{B_{n+j(p-1)}\left(1+\frac{k}{q}\right)}{n+j(p-1)}\right)$$

Si $(p,q)=1$, alors $a=1+\frac{k}{q}\in\mathbb{Z}p$ pour tout $k=0,1..[]..q-1$, et $q^{p-1}\equiv 1\ Modulo(p\mathbb{Z}p)$.

La proposition (6.14) nous permet d'écrire,

$$R(q)\equiv q^{n-1}\sum_{k=0}^{q-1}R\left(1+\frac{k}{q}\right)Modulo(p^t\mathbb{Z}p)$$

Qui s'exprime,

$$c\equiv q^{n-1}\sum_{k=0}^{q-1}c\ Modulo(p^t\mathbb{Z}p)$$

Ou encore,

$$c(q^n-1)\equiv 0\ Modulo(p^t\mathbb{Z}p)$$

Le choix de q comme un élément primitive de $\mathbb{F}_p^*$, conduit à la congruence de Kummer, puisque $p-1$ ne divise pas n alors $(q^n-1)\neq 0\ Modulo(p\mathbb{Z}p)$ donc $(q^n-1)\neq 0\ Modulo(p^t\mathbb{Z}p)$, ainsi $c\equiv 0\ Modulo(p^t\mathbb{Z}p)$ d'où :

$$c\equiv\sum_{j=0}^{t}(-1)^j\binom{t}{j}\frac{b_{n+j(p-1)}}{n+j(p-1)}\equiv 0\ Modulo(p^t\mathbb{Z}p)$$

C.Q.F.D
[]

Apres le théorème de Von Staudt-Clausen, les mathématiciens notent souvent les nombres de Bernoulli par,

(6.16) : $$b_{2n}=\frac{N_{2n}}{D_{2n}}\ \text{Avec}\ D_{2n}=\prod_{\substack{p,premier\\ p-1|2n}}p$$

Moi je préfère la notation suivante,

(6.17) : $$b_n=s_n\frac{A_nK_n}{Z_{n+1}}$$

Avec, s_n est la fonction signe, elle peut prend l'une des trois valeurs, -1, 0 ou 1, on a quand même quels que propriétés, par exemple, si deux nombres de Bernoulli ont le même dénominateur alors ils ont le même signe, sauf certainement le cas où n est impair, car là le signe est partout nul sauf pour n=1 où $s(1)$=-1.

A_n est le terme d'Adams, pour un entier m quelconque, et un entier premier p, on a :

$$p^m\mid A_n\Leftrightarrow\begin{cases}p^m\mid n\\ p-1\nmid n\end{cases}$$

K_n est le terme de Kummer, soit p un nombre premier, si $p\mid K_n$, alors $p\mid K_{(n+N(p-1))}$ pour tout entier N>0.

Z_n est le plus grand diviseur de Fermat, on a $Z_n = D_{n-1} = \prod_{\substack{p,\, premier \\ p-1|n-1}} p$.

Pour plus sur Z_n voir [6].

Exemple : $$b_{28} = -\frac{7\cdot 362903\cdot 9349}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 29}$$

$$s_{28} = -1,\ A_{28} = 7,\ K_{28} = 362903\cdot 9349,\ D_{28} = Z_{29} = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 29$$

[]

J'aimerai qu'on examine les sommes des puissances, voici les premières valeurs :

$$S_k(n) = Sb(k,n) = 0^k + 1^k + 2^k + 3^K + ..[].. + (n-1)^k$$

$$S_k(n) = \frac{B_{k+1}(n) - b_{k+1}}{k+1}$$

On notera les nombres de Bernoulli par $b_n = \frac{A_n}{Z_{n+1}}$, avec $(A_n, Z_{n+1}) = 1$ & $Z_n > 0$, à savoir que $Z_{2n} = 2$ pour tout n>0.

$$S_0(n) = n \qquad "b_0 = 1"$$

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad "b_1 = \frac{-1}{2}"$$

$$S_2(n) = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \qquad "b_2 = \frac{1}{6}"$$

$$S_3(n) = \frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n-1)^2}{4} \qquad "b_3 = \frac{0}{2}"$$

$$S_4(n) = \frac{6n^5 - 15n^4 + 10n^3 - n}{30} = \frac{n(n-1)(2n-1)(3n^2 - 3n - 1)}{30} \qquad "b_4 = \frac{-1}{30}"$$

$$S_5(n) = \frac{2n^6 - 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12} = \frac{n^2(n-1)^2(2n^2 - 2n - 1)}{12} \qquad "b_5 = \frac{0}{2}"$$

..[]..

On remarque que n divise toujours $S_k(n)$, que n^2 divise $S_{2k+1}(n)$ pour tout k>0, et que le dénominateur de $S_{2k}(n)$ vaut à Z_{2k+1}, mais sur tout que l'on a,

<u>(6.18) Proposition :</u>

$$\frac{S_k(n)}{n} \equiv b_k \ Modulo(n)$$

<u>Preuve :</u>

On a,

$$\frac{S_k(n)}{n} = \frac{B_{k+1}(n) - b_{k+1}}{n(k+1)} = \frac{1}{n(k+1)}\left(\left(\sum_{t=0}^{k+1}\binom{k+1}{t} b_{k+1-t} n^t\right) - b_{k+1}\right)$$

$$\frac{S_k(n)}{n} = \frac{1}{(k+1)}\sum_{t=1}^{k+1}\binom{k+1}{t} b_{k+1-t} n^{t-1}$$

Donc,

$$\left.\frac{S_k(n)}{n}\right|_{n=0} = b_k = \frac{A_k}{Z_{k+1}}$$

Puisque le terme constant de $\frac{S_k(n)}{n}$ est b_k, alors

$$\frac{S_k(n)}{n} \equiv b_k \equiv \frac{A_k}{Z_{k+1}} Modulo(n)$$

C.Q.F.D

(6.19) Proposition :

$$Z_{k+1}S_k(n) \equiv nA_k \ Modulo(n^2)$$

Preuve :

De la proposition (6.18) et la règle de Stevens, « (1.8) »

$$\frac{Z_{k+1}S_k(n)}{n} \equiv A_k \ Modulo(n)$$

Il suffit de multiplier par n pour obtenir la proposition.

C.Q.F.D

(6.20) Théorème de Voronoï :

Soient a, m et n des entiers tels que (a,n)=1 et $m \geq 2$ est paire, notons par $b_m = \frac{A_m}{Z_{m+1}}$ le mième nombre de Bernoulli, alors on a,

$$(a^m - 1)A_m \equiv mZ_{m+1}\sum_{j=1}^{n-1}(ja)^{m-1}\left[\frac{ja}{n}\right] Modulo(n)$$

Preuve :

(6.21) Lemme :

Si $a \equiv bn\ Modulo(n^2)$ et $b \equiv c\ Modulo(n)$ alors $a \equiv cn\ Modulo(n^2)$.

En effet, ils existent deux entiers k et l tels que, $a=kn^2+bn$ et $b=ln+c$, donc $a=(k+l)n^2+nc$, donc $a \equiv cn\ Modulo(n^2)$.

Soit $I = \{1,2,..[]..,n-1\}$, et $j \in I$, soit $ja = q_j n + r_j$ où les r_j sont des résidus, il est claire que $r_j \in I$, et que $q_j = \left[\frac{ja}{n}\right]$, et on a,

$$j^m a^m = \left(q_j n + r_j\right)^m = \sum_{t=0}^{m}\binom{m}{t} q_j^{m-t} n^{m-t} r_j^t = \underbrace{n\left(\sum_{t=0}^{m-2}\binom{m}{t} q_j^{m-t} n^{m-t-1} r_j^t\right)}_{\equiv 0\ Modulo(n)} + mq_j n r_j^{m-1} + r_j^m$$

Donc,

$$j^m a^m \equiv r_j^m + mq_j n r_j^{m-1}\ Modulo(n^2)$$

Or,

$$r_j \equiv ja\ Modulo(n)$$

Donc,

$$j^m a^m \equiv r_j^m + ma^{m-1}nq_j j^{m-1}\ Modulo(n^2)$$

Une somme sur I,

$$S_m(n)a^m \equiv S_m(n) + ma^{m-1}n\sum_{j=1}^{n-1} q_j j^{m-1} Modulo(n^2)$$

$$S_m(n)(a^m - 1) \equiv mn\sum_{j=1}^{n-1} a^{m-1} j^{m-1}\left[\frac{ja}{n}\right] Modulo(n^2)$$

Une multiplication par Z_{m+1}

$$Z_{m+1}S_m(n)(a^m - 1) \equiv mnZ_{m+1}\sum_{j=1}^{n-1} a^{m-1} j^{m-1}\left[\frac{ja}{n}\right] Modulo(n^2)$$

En applique (6.19)

$$nA_m(a^m - 1) \equiv mnZ_{m+1}\sum_{j=1}^{n-1} a^{m-1} j^{m-1}\left[\frac{ja}{n}\right] Modulo(n^2)$$

D'où :

$$A_m(a^m - 1) \equiv mZ_{m+1}\sum_{j=1}^{n-1} a^{m-1} j^{m-1}\left[\frac{ja}{n}\right] Modulo(n)$$

C.Q.F.D
[]

La moitié de cette démonstration de la congruence de Voronoï est due à monsieur Tagashi Agoh, voir [9]*, il y avait une étape où j'avais du mal à comprendre, donc je me suis débrouillé avec le reste, en vertu de ça, l'erreur est bien entendu.*
Pour la congruence de Kummer, j'ai inspiré ma démonstration de celle de monsieur Maxim Zuber, voir [10]*, la démonstration de monsieur Zuber est seulement pour le cas t*=1*, moi j'ai généralisé cette démo.*
S'il y a quelque chose qui me dérange dans ce papier, c'est alors la preuve du théorème d'Adams, car je ne suis pas sur que j'ai bien démontré le lemme (6.10)*.*
Pour la démonstration des récurrences de Ramanujan, j'ai obtenu de l'aide dans le forum de Les mathématique.net, voir [11]*, donc un grand merci à ce forum, et sur tout à Monsieur JLT.*

Et comme un dernier théorème à propos les nombres et les polynômes de Bernoulli je propose le suivant :

Un dernier théorème :

Il existe une infinité des formules pour les nombres et les polynômes de Bernoulli.

Preuve :
Suivez l'identité (2.10).

Fin.

Méhdi Pascal
Janvier 2021
MehdiPascal38@gmail.com

Références

[1] : Harlan R.Stevens, *Bernoulli numbers and Kummer's criterion*.
The Pennsylvania State University, University Park, PA 16802 April 1984.
https://www.fq.math.ca/Scanned/24-2/stevens.pdf

[2] : Bernd C. Kellner, *The Equivalence of Giuga's and Agoh's Conjectures*, July 2003.
La page de l'auteur, http://www.bernoulli.org/
Le document est disponible sur arXiv.

[3] : Méhdi Pascal, *Algèbre d'Appell*. https://vixra.org/abs/1906.0373

[4] : A. Joyal, *Les nombres de Bernoulli*, pour le camp mathématique, Juillet 2003.

[5] : Méhdi Pascal, *Sur Les Formules de Multiplication de Raabe* (*On Raabe's Multiplication Formulas*) https://vixra.org/abs/2011.0051

[6] : Méhdi Pascal, *On Fermat's Dividers* (*Sur Les Diviseurs de Fermat*).
https://vixra.org/abs/2011.0191

[7] : Gaëtan Bisson, *Autour des nombres et des polynômes de Bernoulli*.
https://gaati.org/bisson/tea/bernoulli.pdf

[8] : Paul Emile Appell, *Sur une classe de polynôme*s. Avril 1880.
www.numdam.org/article/ASENS_1880_2_9__119_0.pdf

[9] : Takashi Agoh, *Voronoï type congruences and its applications*. 2008.
Department of Mathematics, Tokyo University of Science, Noda, Chiba 278-8510, Japan.
https://www.ejpam.com/index.php/ejpam/article/view/109/30

[10] : Maxime Zuber, *Propriétés p-adiques de polynômes classiques*. Thèse, Université de Neuchatel, 1992. http://doc.rero.ch/record/4334

[11] : Le forum de « *les-mathématiques.net* ».
http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?5,2143284

[12] : Wikipedia . https://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_number

[13] : *Eric Weisstein*, http://mathworld.wolfram.com/BernoulliNumber.html