О петле времени и "дедушкином парадоксе"- 8
(фрагменты)

В.А. Касимов (E-mail: *quadrica-m@mail.ru*)

Разговор о *петле времени* (повторение эволюции), как и о самом понятии *времени* проще всего начать, рассматривая эволюцию простейших физических систем с двумя различимыми состояниями (например, маятника с состояниями в левом и правом положениях) и моделируя с достаточным приближением их поведение с помощь осциллятора, бесконечно воспроизводящим свои дискретные повторяющиеся состояния. Увеличение числа рассматриваемых промежуточных состояний осциллятора (маятника – вплоть до непрерывного представления) не меняет циклический характер эволюции маятника (петли времени). Дискретность же представления различимых состояний позволяет пересчитывать их и сопоставлять с изменениями других более сложных систем. *Так возникает возможность и наблюдения эволюции любой системы, и измерения времени часами.* Всё это основывается на использовании феномена *петли времени* осциллятора. (см. рис. 1.а)). Эволюция же осциллятора описывается в нашем случае сменой всего двух состояний – левым и правым положениями, которые "закольцовываются" до бесконечности. Подкачка энергии в маятник для предотвращения затухания эмпирически свидетельствует о связи времени с энергией. Вспомним теорему Нётер о сохранении энергии как следствие однородности времени.

На сегодняшний день известны две концепции пространственно-временных отношений: ньютоновская и лейбницевская: первая ведёт к субстанциональной концепции, вторая – к релятивистской.

Операциональное определение понятия времени

Лейбницевская концепция времени позволяет дать операциональное определение времени. Время – это линейно-упорядоченное 1-пространтво. Времен***о***й порядок становления фиксируется изменениями, происходящими в окружении. Измерение времени осуществляется с помощью пространственно-временных эталонов.

Известны два способа арифметизации (по А.Фридману) пространственно-временных отношений. Первый способ – с помощью независимого использования часов и линеек, второй способ – с помощью светового сигнала. Первый способ ведёт к классическому описанию механики с преобразованиями Галилея, второй – к релятивистскому описанию с преобразованиями Лоренца [5].

И первый, и второй способы используют для измерения свои эталоны, и они принципиально разные. Если первый использует измерение "натуральных" длин и промежутков времени (при заданных и так же разных эталонах), то второй использует свой и менее "натуральный" – скоростной (при заданной в качестве эталона скорости света $c = \text{const}$). Этот способ использует "симбиоз" длин и интервалов времени, объединяя их в единый стандарт[1)].

При галилеевском способе описания пространственно-временные отношения изначально разделены на пространственные и временн***ы***е ипостаси. При релятивистском же способе описания для интерпретации выводов и результатов возникает необходимость разделять пространственные отношения от временн***ы***х (факторизация). Появляется необходимость различения "настоящих" длин и интервалов времени от координатных. Возникают понятия *координатных* величин (см., например, [1], § 89, стр. 302). После Л.Д. Ландау [1] об этом же самом чётко заявил А.А . Логунов [6], § 22, стр. 153 и другие.

[1)] В силу соотношения $c = \lambda \cdot \nu = \text{const}$ – это единство двух характеристик (пространственной $-\lambda$ и временн***о***й $-\nu$) осцилляционного распространения электромагнитного поля.

Собственно, координатные величины и участвуют в дальнейшем во всех теоретических построениях, что и порождает массу парадоксов и проблеем и усугубляет их уже на математическом уровне при их реальной интерпретации (например, сокращение времени, сокращение длин).

Важное замечание. Прежде чем начинать математические манипуляции с координатным временем, строить проекты "машин времени" необходимо чётко уяснить связь понятия реального времени с координатной переменной t. Поскольку и СТО, и ОТО представляют координатные пространственно-временные переменные (x, y, z, ct), **далее мы будем работать именно с координатной переменной $\boldsymbol{t}$.**

Понятие времени и его измерения можно связать эмпирически с природным феноменом элементарной *"петли времени"*(см. рис. 1 (а)).

Введение концепции единого времени основывается на постулате возможности синхронизации часов, то есть возможности единовременного пересчёта дискретных состояний осцилляторов и сравнения с эволюциями сложных систем, что особенно проблематично для пространства общей теории относительности. Возможность же рассмотрения петель времени для сложных систем вызывает обоснованные сомнения в её реализации.

В классической физике пространство рассматривается как трёхмерная структура с декартовой геометрией, а время – как одномерная сущность линейно упорядочивающая точечные события, происходящие в пространстве. При этом пространственные и временные отношения совершенно независимы друг от друга. Единожды проведённая синхронизация часов, размещённых в различных точках пространство, сохраняется с "течением" времени.

В специальной теории относительности пространственно-временная структура рассматривается как единая четырёхмерная структура с псевдоевклидовой метрикой. Факт существования предельной скорости распространения сигналов (c) делит все пространственно-временные события на три группы – времениподобные, пространственноподобные и изотропные (ни первые, ни вторые). В этом существенное отличие представления пространственно-временных отношений в СТО от классического. Ни в классике, ни в СТО речь о феномене "петли времени" не может возникнуть в силу самого свойства времени как изначально упорядочивающего фактора.

Однако, уравнения Гильберта -Эйнштейна (ОТО)допускают решения с существованием петель времени в произвольных системах координат задающих четвёрку координат (x, y, z, t)[2)]. На рис. 1.b) представлен простейший вариант.

В описании пространственно-временных отношений квантовой механики доминируют вероятностно-операторные меры, поэтому говорить о регулярных петлях времени, мы думаем, преждевременно.

Ответ на вопрос: *Как не дать внуку "затянуть времениподобную петлю на шее достопочтенного дедушки"?* – оказывается, на первый взгляд, весьма простым: *"Выколоть" точку пересечения в петле времени их совместной эволюции.* Поскольку окрестность этой точки содержит бесконечное и непрерывное множество точек, на последующую эволюцию остального мира это не должно сильно повлиять. Возможность же "сшить" предыдущую эволюцию с кривой из времениподобной области даёт возможность учесть свободу выбора в точке ветвления при путешествии во времени (хотя бы в роли "тени" отца Гамлета, способного влиять, но на "реальную эволюцию"; см. рис. 2.b) .

[2)] Не всякая 4-система координат может быть реализована как физическая 4-система отсчёта в силу матема-тиеской абстрактности и произвольности координатных преобразований, допустимых в ОТО.

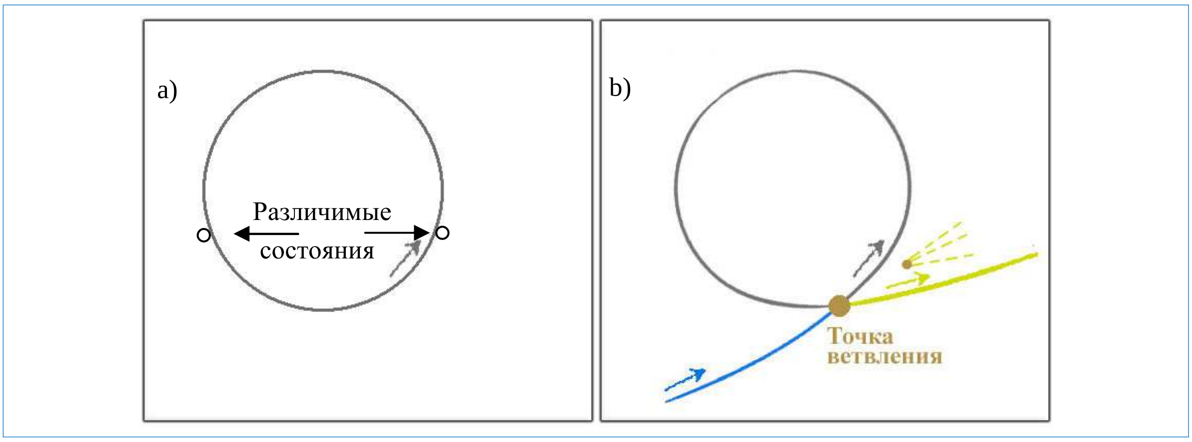

Рис. 1(a). Петля времени осциллятора; показаны два различных дискретных состояния. Красная стрелка указывает порядок становления бесконечной череды событий.

(b). Пример мировой линии с самопересечением. Стрелки указывает порядок становления событий вдоль мировой линии. (синий, красный, жёлтый). Показана точка самопересечения (красная). Движение в прядке, указанном цветными стрелками → → → (синий, красный, жёлтый) представляется допустимым. Однако порядок → → → при достижении точки ветвления приводит к парадоксу, одним из которых является "дедушкин парадокс".

Концептуальная структура пространства-времени в специальной теории относительности [1]. Лоренцевская локальность

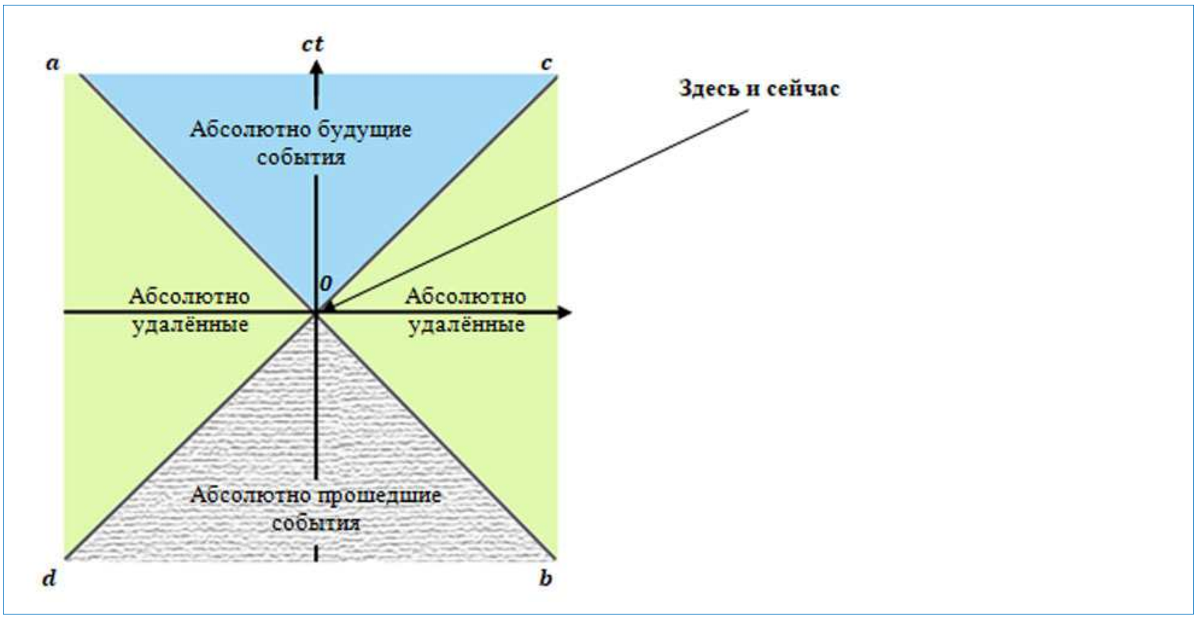

Рис. 2. Геометрия пространства-времени Минковского. Области точечных событий: времени-подобных – голубой цвет и пространственноподобных – жёлтый цвет; (a,b) и (c,d) – геоде-зические линии распространения светового сигнала (изотропные направления).

Для двух событий, принадлежащих времениподобной области, существует система отсчёта, в которой эти события происходят в одной точке; для пространственноподобных событий существует система отсчёта, в которой эти события происходят в одной точке.

Причинно-обусловленные события могут находиться внутри светового конуса и на его поверхности.

Будем рассматривать событие в точке O на рис. 2 в качестве начала отсчёта времени и пространственных координат, другими словами – в четырёхмерной системе координат, на осях которой откладываются x, y, z и t. Мировая точка события O будет началом координат.

Рассмотрим, в каком отношении к данному событию O находятся все остальные события-точки. Для наглядности будем рассматривать только одну пространственную координату x и время t, откладывая их на осях координат. Прямолинейное равномерное движение частицы, проходящей точку $x = 0$ при $t = 0$ изобразится прямой линией, проходящей точку O и наклонённой к оси t под углом, тангенс которого равен скорости частицы. Поскольку наибольшая скорость равна c, то существует наибольший угол, который может образовывать эта прямая с осью t. На рис.2 изображены две прямые, изображающие распространение двух сигналов со скоростью света в противоположных направлениях, проходящих через точку O (т.е. проходящих точку $x = 0$ при $t = 0$). Все линии, изображающие движения частиц, могут лежать только внутри области aOc и dOb. На прямых ab и cd, очевидно, $x = \pm ct$. Рассмотрим сначала события мировые точки которых лежат внутри области aOc. Легко сообразить, что во всех точках этой 1
области $c^2t^2 - x^2 > 0$. Другими словами, интервалы между любым событием этой области и событием O времениподобные[3)]. В этой области $t > 0$, т.е. все события этой области происходят после события O. Но два события, разделённые времениподобным интервалом, ни в какой системе отсчёта не могут происходить одновременно. Следовательно, нельзя выбрать и никакой системы отсчёта, где бы какое-нибудь из событий области aOc происходило до события O, т.е. когда было бы $t < 0$. Таким образом, все события области aOc являются будущими по отношению к O, и притом во всех системах отсчёта. Эту область можно поэтому назвать абсолютно будущей по отношению к событию O. бы $t < 0$. Таким образом, все события области aOc являются будущими по отношению к O, и притом во всех системах отсчёта. Эту область можно поэтому назвать абсолютно будущей по отношению к событию O.

Совершенно аналогично все события области bOd являются "абсолютно прошедшими" по отношению к O, т.е. события это области во всех системах отсчёта происходят до события O.

Наконец, рассмотрим ещё области dOa и cOb. Интервал между любым событием этой области и событием $O -$ пространственноподобный[4]. В любой системе отсчёта эти события происходят в разных местах пространствах. Поэтому эти области можно назвать "абсолютно удалёнными"по отношению к O. Понятия "одновременно", "раньше" и "позже" для этих событий, однако, относительны. Для всякого события этой области есть такие системы отсчёта, где оно происходит позже события O, системы, где оно происходит раньше O, и, наконец, одна система отсчёта где оно происходит одновременно с O.

Заметим, что если рассматривать все три пространственные координаты вместо одной, то вместо двух пересекающихся прямых на рис. 2 мы имели бы "конус" $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$ в четырёхмерной системе координат x, y, z, t, ось которого совпадает с осью t (этот конус называют *световым конусом*). Области "абсолютно будущего" и "абсолютно прошедшего" изображаются тогда соответственно двумя внутренними полостями конуса.

Два события могут быть причинно связанны друг с другом только в том случае, если интервал между ними времениподобный, что непосредственно следует из того, что никакое взаимодействие не может распространяться со скоростью, большей скорости света. Как мы только что видели, как раз для таких событий имеют абсолютный смысл понятие "раньше" и "позже", что является необходимым условием для того, чтобы имели смысл понятия причины и следствия.

В причинно-ориентируемом по времени пространстве (на рис. 2 причинное движение всегда направлено "вверх" — от прошлого к будущему, и внутри светового конуса), арифметизированном с помощью светового сигнала [5] пространстве-времени структура Минковского, представленная на рис. 2, инвариантна относительно преобразований Лоренца. А задача Коши, определяющая эволюцию системы (движение точечных частиц), формулируется как

[3)] Интервал ds называется времениподобным при выполнении условия $ds^2 > 0$, при этом невремениподобный интервал ($ds^2 \leq 0$) не является пространственноподобным.

[4)] Интервал ds называется пространственноподобным при выполнении условия $ds^2 < 0$, при этом непространственноподный интервал ($ds^2 \geq 0$) не является времениподобным.

задание начальных условий на пространственноподобной гиперповерхности. В пространстве Минковского эта задача вполне разрешима в рамках СТО в физических системах отсчёта.

Пространственно-временные изменения (движения) точечных систем описываются в присутствии полей. Причины возникновения самих полей описываются с помощью зарядов и токов (например, электромагнитные поля). Самое важное: *свойства пространственно-временных отношений − постоянны и сосуществуют совершенно независимо от самих движений, поскольку в формировании пространственно-временных свойств материя не участвует.*

Общая теория относительности

В отличие от первых двух случаев (классика и СТО) на свойства пространственно-временных отношений способны влиять уже сами движения, то есть сами движения способны "заказывать" для себя свойства пространства и времени. И это неудивительно, поскольку сама 4-геометрия ОТО определяется уже материей, то есть движущимися частицами и другими факторами, связанными с изменениями. Как утверждается в [3], в этом могут участвовать и активные наблюдатели, что авторы называют − "путешествием во времени". Для этого они "построили алгебру", позволяющую непротиворечиво "сшивать" некоторые выделенные листы пространственно-временной области (как сценарий эволюции).

Важную роль в представлении причинной структуры пространства-времени в ОТО, как видно из рис. 2, играет факт существования предельной скорости распространения сигналов (взаимодействий). Собственно, это обстоятельство и позволяет различать времениподобные (причинные) области, пространственноподобные и 0-области (световые − пограничные).

Для ОТО предыдущее рассмотрение пространственно-временной концепции справедливо лишь локально (пространство-время Минковского). Концептуальное же распространение пространственно-временных отношений в ОТО требует дальнейшего развития на основе исследования решений уравнений Гильберта-Эйнштейна, которые связывают масштабную геометрию мира с глобальным распределением материи. Эта масштабная геометрия дарит такое разнообразие пространственно-временных структур, которое современная физика до сих пор не может "переварить".

Далее. Представление уравнений ОТО допускает выбор достаточно произвольных координат и их достаточно произвольных преобразований. Это сильно затрудняет физическую интерпретацию получаемых результатов. Пользуясь свободой выбора координатных систем, достаточно представить себе преобразование − с должной интерпретацией, при котором времен**н*а***я координата x^0 переходит в пространственную $\tilde{x}^i$:

$$\begin{cases} \tilde{x}^i = x^0, \\ \tilde{x}^k = x^k \; (i \neq k). \end{cases} \tag{1}$$

Кроме этого, как уже указывалось ранее, не все 4-координатные системы могут быть представлены физически реализуемыми 4-системами отсчёта.

Задача Коши

Для того, чтобы понять трудности, возникающие в ОТО при интерпретации пространственно-временных отношений, рассмотрим постановку классической задачи Коши для относительно наглядной модели в евклидовом пространстве.

Задача Коши для линейного уравнения второго прядка относительно неизвестной функции $u(x)$, определённой в некоторой области D евклидова пространства $\mathbf{R}^n$. формулируется в самом общем случае как решение уравнения

$$\sum_{j,k=1}^{n} A_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} A_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0(x)u = f(x)$$

при

$$u|_{\Gamma} = \varphi_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial \lambda}|_{\Gamma} = \varphi_1(x).$$

Заданные на $\mathbf{\Gamma}$ функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ называются данными Коши, а $\mathbf{\Gamma}$ - гиперповерхностью Коши.

Основными конструктами при решении *задача Коши* являются – *данные Коши* и *гиперповерхность Коши.* В пространственно-временном аспекте задача Коши позволяет представить эволюцию физической системы.

Задача Коши в СТО

Для уравнений Максвелла задачу Коши можно сформулировать как одномоментное задание распределений зарядов и токов на пространственноподобной 3-гиповерповехности Коши. Здесь возникает влияние на постановки задачи Коши выбор инерциальной системы отсчёта. Однако преобразования Лоренца позволяют найти ковариантную форму пространственно-временной конфигурации поля в любой инерциальной системе отсчёта.

Если пространственно-временная структура СТО определена довольно чётко (см. рис. 2), то в случае ОТО это не так. Дело в том, что, хотя пространственно-временные отношения для достаточно гладких метрик локально лоренцевы, в глобальных масштабах это далеко не так.

Пространственно-временное многообразие общей теории относительности можно представить себе как поверхность, состоящую из бесконечно малых плоских "черепиц", нормальные вектора которых имеют различные направления. Эти направления могут плавно переходить друг в друга, образуя результирующие поверхности с самыми замысловатыми конфигурациями.

Описание таких пространственно-временных конфигураций требует введения совершенно новых понятий таких как горизонты Коши, горизонты видимости, горизонты причинности (предсказуемости) сингулярности (устранимые и неустранимые), хронологическое прошлое (будущее), причинное прошлое и т.д.

Поскольку не все 4-системы координат ОТО реализуемы как физические системы отсчёта, вполне естественно ожидать массу парадоксов, связанных с интерпретациями результатов их построений.

Невозможность физической реализуемости произвольной 4-системы координат и произвольность выбора 4-системы отсчёта – всё это приводит к тому, что области и горизонты видимости, причинности и предсказуемости будут иметь разное представление в различных системах отсчёта. Например.

Метрика Шварцшильда позволяет точно решить как частные задачи по изменению частоты и отклонению света при его распространении в гравитационном поле, так и другие, например, задачу о смещении перигелия Меркурия. Кроме того, используя эту метрику, можно предметно говорить и о пространственно-временных отношениях для тел находящихся в поле чёрных дыр и перейти к более общей метрике Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера.

Однако в центрально-симметрическом поле с метрикой Шварцшильда мы не можем выбрать, например, центр симметрии в качестве естественной точки начала координат. Эта метрика терпит особенность на сфере Шварцшильда, а внутри сферы Шварцшильда теряет физический смысл – исчезает целая область видимости в связи с нарушением сигнатуры метрического тензора. В результате мы теряем возможность описывать область, лежащую в пределах шварцшильдовского радиуса.

Однако существуют и другие метрики, например, метрика Леметра [5], в которых подобные особенности устраняются.

Горизонт Коши

Термин был введён Роджером Пенроузом и Стивеном Хокингом в 1966 году при анализе задачи Коши для уравнений гравитационного поля в общей теории относительности.

Горизонт Коши — поверхность, ограничивающая область *причинной* предсказуемости по начальным условиям, заданным на пространственноподобной трёхмерной поверхности — частичной поверхности Коши. Горизонт Коши является трёхмерной гиперповерхностью с нулевым геодезическим интервалом, то есть поверхностью, образованной траекториями световых лучей (эти траектории называются *генераторами горизонта*). Горизонт Коши ограничивает "область предсказуемости", так как на области, лежащие за горизонтом Коши, могут влиять события из областей, лежащих вне частичной поверхности Коши. В плоском пространстве Минковского (в специальной теории относительности) горизонт Коши существует только для ограниченных, то есть частичных поверхностей Коши; для глобальных поверхностей Коши, например, поверхности в инерциальной системе отсчёта, горизонт Коши не существует и "область предсказуемости" совпадает со всем пространственно-временным континуумом.

В случае общей теории относительности в некоторых случаях горизонт Коши может сохраняться и при расширении частичных поверхностей Коши, то есть в таких решениях невозможно построить глобальную поверхность Коши.

Горизонт Коши называется *компактно порождённым*, если все его генераторы, будучи прослеженными в прошлое, попадают в некоторое компактное множество[5)] и там остаются.

Примерами решений с горизонтами Коши являются заряженные или вращающиеся чёрные дыры, горизонт Коши в этих случаях скрыт под *горизонтом наблюдаемых событий*.

Глобально гиперболическое пространство-время

Пространство-время считается глобально гиперболическим тогда и только тогда, когда оно содержит поверхность Коши, а именно замкнутую, акаузальную поверхность, такую, что каждая нерастяжимая причинная кривая проходит через нее один раз (где "акаузальная" означает, что никакая причинная кривая не начинается и не заканчивается на этой поверхности).

Пространства-времена с нестандартными причинными свойствами

Доминирующая парадигма физики основывается на идее, что системы развиваются во времени в соответствии с динамическими законами, причем состояние в данный момент времени определяет всю историю системы.

Общая теория относительности бросает вызов этой точке зрения. Уравнения Гильберта-Эйнштейна, описывающие связь между геометрией пространства-времени и материей, допускают противоречивые решения, содержащие замкнутые временные кривые. Событие само по себе на такой кривой – присутствие как будущего, так и прошедшего, отрицает обычную формулировку динамики в соответствии с проблемой "начальных условий". Возникает вопрос, *возможен ли какой-то более общий тип динамики?*

Чтобы обобщить обычную динамику с начальными условиями, пространственно-временное многообразие представляется в виде N дискретных локальных областей – каждую со своей границей. В этих областях некие агенты могут выполнять произвольные операции, реализуя свою свободу выбора. В частности, каждый агент будет наблюдать за состоянием, приходящим из прошлой области, и готовить состояние для отправки в будущее. Ключевое предположение состоит в том, что действия агентов в областях *независимы* от соответствующей динамики, управляющей внешней средой области. Другими словами, агенты сохраняют свою свободу выбора для выполнения произвольных операций. Однако динамика системы, вместе с геометрией

---

[5]) Множество расположенное в метрическом пространстве X, называется компактным, если всякая последовательность элементов множества содержит сходящуюся подпоследовательность. Если пределы указанных последовательностей принадлежат то множество называется компактным в себе, если же эти пределы принадлежат пространству X, не принадлежа, быть может, множеству то называется компактным в пространстве X.

Намёк. На рис. 2 b) изображена геодезическая, точки которой могут представлять компактное множество на кривой с невыколотой точкой и компактное множество на пространстве (выколотая точка на кривой). Физически это может представлять собой конечное движение в первом и бесконечное движение по геодезической во втором случаях.

пространства-времени, ограничивает поведение системы за пределами областей в фоновом пространстве. Поэтому за пределами областей пространства-времени динамика является полностью детерминированной и фиксированной как только заданы соответствующие граничные условия для областей. При таком подходе эволюция должна определяться и результатами деятельности агентами внутри областей. *Таким образом, эволюция как обобщенная модель динамики, соединяет различные пространственно-временные области.* В [2,2[a]] этот метод назван "Кройкой и шитьём" пространств-времён [6)] при свободе (разумеется — ограниченной) активной деятельности агентов.

Как видно из рис.2, в делении пространственно-временных областей на времениподобные, пространственнодобные и 0-подобные области исключительную роль играет факт существования предельной скорости распространения взаимодействиё, которая связывается с локальной скоростью распространения света c. И здесь уравнения ОТО допускают решения, нарушающие глобально второй постулат СТО.

В [2[a]] разрабатывается концепция "лаза" , объединяющая "кротовую нору", "пузырь Алькубиерре" и аналогичные им средства сверхсветового перемещения. Предложен лаз - "труба Красникова", имеющий свою топологию (в отличие от кротовой норы) и не нуждающийся в тахионах[7)] (в отличие от пузыря Алькубиерре в той его версии, которая создаётся самим перемещающимся телом).

Кротовая нора или "червоточина" (wormhole) — гипотетическая топологическая особенность пространства-времени, представляющая собой в каждый момент времени "туннель" в пространстве/ *Пузырь Алькубьерре* — идея, основанная на решении уравнений Эйнштейна, предложенная мексиканским физиком-теоретиком Мигелем Алькубьерре, в которой космический аппарат может достичь сверхсветовой скорости. *Труба Красникова* — гипотетическое устройство для космических путешествий с искривлением пространства-времени. Труба Красникова является искривлением пространства-времени, которое может быть искусственно создано. Следует отметить, что все объекты в большей части имеют статус всего лишь математических решений уравнений Гильберта-Эйштейна.

Геометрическое введение [2[a]]

Пространства-времена

В классической общей теории относительности Вселенная описывается нерасширяемым пространством-временем (M, g), то есть гладким связным хаусдорфовым [8)] многообразием M с гладкой псевдоримановой *ориентированной во времени метрикой* g.

Ориентируемость во времени, грубо говоря, означает возможность однозначно и непрерывно разделить все непространственноподобные векторы, на два класса — "направленные в прошлое" и "направленные в будущее".

Для построения полномасштабной теории это описание дополняют постулатами, определяющими воздействие материи на геометрию (обычно это уравнения Эйнштейна) и геометрии на материю. Эти постулаты играют, хотя и важную, но вторичную роль в дальнейшем. Дело в том, что они (сравнительно) нефундаментальны. Можно, например, модифицировать

---

6) Устоявшийся английский термин — "cut-and-paste" method.

7) Тахионы — гипотетические частицы, двигающиеся со сверхсветовыми скоростями по пространственно-подобным геодезическим.

8) Топологическое пространство X называется хаусдорфовым, если любые две различных точки x, y, из X обладают непересекающимися окрестностями $U(x), V(x)$.

уравнения Эйнштейна (добавив, скажем, Λ-член), или ввести материальные поля, связанные с гравитацией неминимально. Свойства теории изменятся, но не радикально. А вот любое изменение в определении пространства-времени (например, допущение нехаусдорфовых многообразий, или вырожденных метрик) изменит теорию до неузнаваемости.

Пространство-время не обязательно описывает "всю" Вселенную. Нетрудно проверить, что всякая область[9)] пространства-времени тоже является пространством-временем. Обратное неверно: некоторые пространства-времена (например, пространство Минковского) не являются подмножествами каких-то больших.

Пространство-время $M' \neq M$ называется *расширением* пространства-времени M, если последнее является открытым собственным подмножеством M' или изометрично таковому. M *расширяемо*, если у него есть расширение и *нерасширяемо*, или максимально, в противном случае.

Область $M \subset M'$ является не просто пространством-временем, но пространством-временем, вложенным в M' *определенным образом*. И при обсуждении M часто бывают важны не только свойства, характеризующие его геометрию (такие свойства будут называться *внутренними*), но и свойства, зависящие от того, как оно вложено в M'. Имея это в виду, два пространства-времени не будут автоматически отождествлять только потому, что они изометричны.

Естественно интерпретировать расширение M, как пространство "большее" чем M, а адекватной моделью Вселенной считать только максимальные пространства. Отметим только, что, в действительности, расширяемое M имеет в общем случае бесконечно много максимальных расширений. Это приводит к вопросу: какое из $M^{\max}$ описывает всю Вселенную, если ее известной части соответствует M? Этот вопрос очень далёк от решения..

Локальная геодезическая структура

Любое пространство-время – просто, потому что на нём определена связность (не говоря уж о метрике) и имеет выделенный класс кривых – *геодезические*. Будучи естественным обобщением прямых линий, эти кривые играют важнейшую роль в псевдоримановой геометрии: всё остальное, включая причинную структуру, так или иначе определяется через них. Нагляднее всего геодезическая γ определяется, как кривая, касательный вектор к которой в каждой её точке получается из начального параллельным переносом вдоль γ.

Литературный термин "геодезическая" обычно применяется к параметрическому представлению геодезической $\lambda(\xi)$ с аффинным параметром ξ, тогда как остальные представления называют *предгеодезическими*.

Геодезическая $\gamma(\xi)$, на которой аффинный параметр ξ ограничен сверху некоторым ξ_0, называется *неполной* в направлении растущих ξ (то есть, например, неполной в будущем или неполной в прошлом). И она называется *продолжимой*[10)] в этом направлении, если существует геодезическая, для которой γ есть собственное подмножество. Непродолжимые геодезические будут иногда называться *максимальными* (хотя чаще геодезические называют максимальными только тогда, когда они непродолжимы в обе стороны).

В отличие от (не)продолжимости, (не)полнота — это атрибут геодезической как функции, а не как множества точек: как можно увидеть на примере пространства Мизнера, даже замкнутая геодезическая может быть неполной.

[9)] Мы иногда будем говорить о пространстве-времени не указывая явно метрику или многообразие, если они очевидны или несущественны.

[10)] Во избежание путаницы стоит учесть, что "продолжимая" и "продолженная" это не синонимы. В данном случае, скорее наоборот – антонимы.

Пространство-время M, в котором все максимальные геодезические полны, называется *геодезически полным*. Геодезически *не*полное пространство-время считается *сингулярным*; сингулярность называется *неустранимой*, если соответствующая геодезическая остается непродолжимой в любом расширении M.

Выпуклые множества

Важным свойством множеств пространства является их выпуклость. Так, например, выпуклость области пространства даёт возможность утверждать, что, если начальная и конечная точки геодезической находятся в области, то и вся геодезическая лежит в этой области.

Открытое множество O называется *выпуклым*, если оно является *нормальной окрестностью* [11] каждой своей точки. С любыми двумя точками x, y выпуклое множество O, очевидно, содержит также и (единственный в O) геодезический отрезок γ_{xy}, соединяющий их (отсюда и название). Обратное тоже верно: если в каком-то нормальном пространстве-времени любая пара точек может быть соединена единственной геодезической, то оно выпукло.

Открытое множество O называется *простым*, если оно выпукло, и его замыкание является компактным подмножеством некоторой другой нормальной окрестности. Очевидно любое выпуклое подмножество простого множества просто.

Из теоремы Уайтхеда, следует существование простой окрестности у любой точки любого пространства-времени. А поскольку окрестность точки сама по себе есть пространство-время (и поскольку любое её простое подмножество есть в то же время простое подмножество объемлющего пространства-времени), то простые окрестности образуют базу топологии любого пространства-времени. Топологию они, однако не образуют, потому, в частности, что объединение двух простых (выпуклых, нормальных) окрестностей может не быть само простым (выпуклым, нормальным).

Причинная структура

Всё обсуждавшееся в предыдущих параграфах равно применимо и к римановым, и к псевдоримановым многообразиям. Но в действительности последние обладают гораздо более богатой структурой, так как векторы, касательные к ним, неравноправны.

Ненулевой вектор v, касательный к M, называется *времениподобным* [*светоподобным*, *(не)пространственноподобным*], если $g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ отрицательно [соответственно, равно нулю, (не)положительно]

В каждом касательном к M пространстве (так как это, в сущности, пространство Минковского) непространственноподобные векторы образуют два конуса, границы которых порождены светоподобными векторами (ср. рис 2, 3). Конусы пересекаются только в общей вершине. Один из них называется *будущим*, другой – *прошлым*. Про образующие их векторы говорят, что они направлены в будущее и прошлое, соответственно. Деление (непространственноподобных) векторов на эти два класса можно произвести гладким образом (в определении пространства-времени соответствующее требование заложено в словах "ориентированное во времени").

Везде, где это важно, под словом "изометрия" мы будем понимать "изометрию, сохраняющую ориентацию во времени»", то есть отображающую вектор, направленный в будущее, в такой же.

---

[11] Область $N \leftrightharpoons exp_p\tilde{N}$ называется *нормальной окрестностью* p. Топологически нормальная окрестность есть просто шар с ограничением: exp_p на $\tilde{N}$ есть диффеоморфизм.

Рассмотрим какое-нибудь риманово многообразие (M, g^R). Пусть $\boldsymbol{v}$ — гладкое векторное поле на M, не имеющее нулей (оно, конечно, существует не на всяком M). Тогда мы можем построить пространство-время, задав на M *псевд*оримановy метрику

$$g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \leftrightharpoons g^R(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - 2\,\frac{g^R(\boldsymbol{a},\boldsymbol{v})g^R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})}{g^R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})},$$

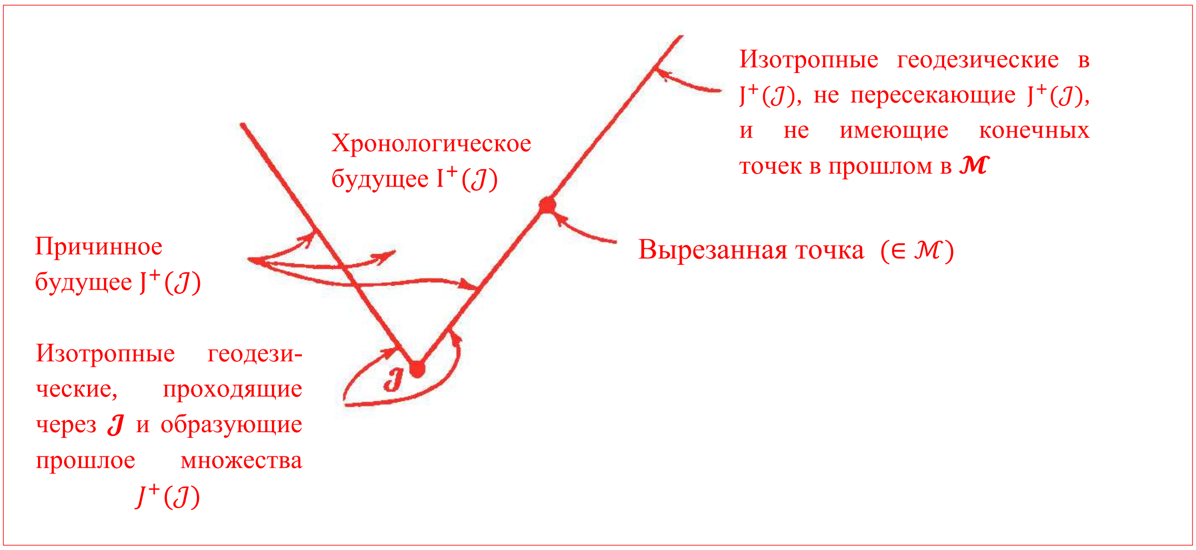

Рис. 3. При удалении из пространства Минковского одной точки причинное будущее $J^+(\mathcal{J})$ замкнутого множества $\mathcal{J}$ не обязательно замкнуто. Находящиеся за этой точкой части границы будущего J^+ могут быть образованы изотропными геодезическими сегментами, не имеющими в $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ конечным в точек в прошлом (рисунок воспроизведен из [2]).

(заметим, что векторы v в этой псевдоримановой метрике стали времениподобными). И, наоборот, метрика

$$\tilde{g}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \leftrightharpoons g'(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - 2\,\frac{g'(\boldsymbol{a},\boldsymbol{v}')g'(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{b})}{g'(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{v}')},$$

определённая с помощью псевдоримановой метрики g' и времениподобного векторного поля $\boldsymbol{v}'$, будет римановой, то есть положительно определённой.

Оказывается, любое пространство-время может быть построено таким образом.

В любом пространстве-времени существует гладкое направленное в будущее поле времениподобных векторов.

Это предложение весьма важно. Во-первых, оно накладывает ограничения на возможную топологию пространства-времени. Во-вторых, как мы увидим на практике, введение вспомогательного времениподобного векторного поля часто бывает удобным техническим приёмом. Наконец, превращая пространство-время в риманово многообразие (с гладким векторным полем $\boldsymbol{v}$), мы получаем возможность использовать всю мощь такой чрезвычайно развитой теории, как риманова геометрия. К сожалению, полностью свести к ней лоренцевого случая невозможно, потому, в частности, что нет канонического способа выбрать $\boldsymbol{v}$.

Названия "прошлое" и "будущее" условны — в ОТО нет внутренней "стрелы времени»". Это порождает симметрию: любому определению или утверждению можно сопоставить "дуальное", полученное последовательной заменой слов "прошлое" ↔ "будущее". Ниже мы, как правило, будем формулировать только одно определение (утверждение) из пары, дуальное всегда подразумевается.

Кусочно-гладкая кривая $\lambda(\xi)$ называется (направленной в будущее) *времениподобной*, *непространственноподобной* или *светоподобной*, если таковыми являются все касательные к ней векторы $\partial\xi$.

"Постоянные" кривые, состоящие из единственной точки, считаются непространственноподобными, но не времениподобными.

Времениподобную кривую можно параметризовать *натуральным* параметром ξ, который определяется условием $g(\partial\xi\,,\partial\xi) = -1$. В общем случае, однако, для непространственноподобной кривой нет какого-то выделенного параметра и поэтому нет аналога полноты. С другой стороны, понятие продолжимости можно обобщить на непространственноподобные негеодезические кривые.

Когда определены непространственноподобные и времениподобные кривые, можно использовать это для выделения некоторых важных множеств, связанных с каждой точкой.

Пусть U — окрестность некоторой точки $p \in M$. Множество всех точек U, которые можно достичь из p по направленным в будущее времениподобным кривым, лежащим целиком в U, называется *хронологическим будущим* p *в* U и обозначается $I_U^+(p)$. Когда $U = M$, значок $_M$ обычно опускают и пишут просто $I^+(p)$. Для произвольного множества $P \subset M$ через $I_U^+(P)$ обозначают $\cup_{p\in P}\ I_U^+(p)$. Заменой в данном выше определении слова "времениподобным" на "непространственноподобным" получают определение причинного *будущего* p, которое обозначается $J_U^+(p)$. Определения хронологического и причинного прошлого точки p и множества P дуальны. Отношения $q \in I^+(p)$ и $r \in J^+(s)$ часто записывают, как, соответственно, $p \prec q$ и $s \preceq r$ (или, эквивалентно, $q \succ p$ и $r \succeq s$). Оба отношения очевидно транзитивны, а последнее в силу договоренности ещё и рефлективно.

Если $p \preceq q$ и $p \neq q$, то точки p и q называют *причинно связанными*.

Если никакие две точки множества S нельзя соединить времениподобной (непространственноподобной) кривой, то оно называется *ахрональным* (соответственно, *акаузальным*).

Ахрональную поверхность не следует путать с *пространственноподобной*. Последняя определяется, как (достаточно гладкая) поверхность такая, что все векторы касательные к ней пространственноподобны. А ахрональная поверхность не должна быть гладкой, но даже если касательные к ней векторы и существуют, они вполне могут оказаться светоподобными (а не пространственноподобными). Например, поверхность $t = x$ в пространстве Минковского ахрональна, но не пространственноподобна. И, наоборот, пространственноподобная поверхность может не быть ахрональной.

"Кройка и шитьё" пространств-времён

В [2[a]] предлагается один из удобных и наглядных способов описания пространств-времён. Метод заключается в представлении одного пространства-времени результатом "кройки и шитья" [12)], применённых к другому.

Склеивание пространств-времён

Пусть (N_1, g_1) и (N_2, g_2) – два пространства-времени такие, что некоторые их области $U_i \subsetneq N_i$, $i = 1{,}2$ связаны изометрией ψ, сохраняющей временную ориентацию. Тогда эти пространства-времена можно склеить по U или склеить изометрией ψ (см. рисунок 4), то есть образовать из них пространство

[12)] Устоявшийся английский термин — "cut-and-paste" method

$$M \leftrightharpoons N_1 \cup_\psi N_2,$$

отождествив каждую точку $p \in U_1$ с соответствующей точкой $\psi(p) \in U_2$. Любой $p \in N_i$ в так полученном пространстве M соответствует какая-то (одна) точка $\pi(p) \in M$. Определённую этим соответствием функцию π будем называть *естественной проекцией*. Её сужения на N_i будут обозначаться через π_i , а образы $\pi_i(Ni) = \pi(N_i)$ через M_i (именно образы, мы не отождествляем с M_i сами N_i. Таким образом,

$$M = M_1 \cup M_2$$

(отметим исчезновение значка ψ).

Естественная проекция π индуцирует на M и гладкость, и гладкую метрику (именно для совпадения метрик, индуцируемых π_1 и π_2, мы и требовали, чтобы ψ была изометрией), что превращает M в гладкое связное псевдориманово многообразие ориентированное (благодаря связности U_i) во времени. Оно, однако, не обязано быть пространством-временем: мы не знаем хаусдорфово ли оно.

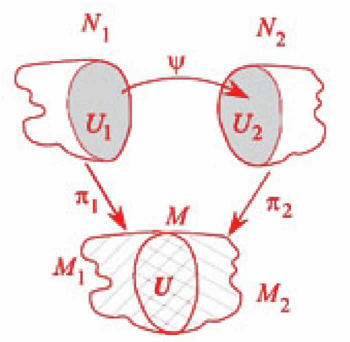

Рис. 4. M – результат приклеивания M_1 и M_2 изометрией ψ. Рисунок воспроизведён из [2[a]].

Ориентируемость по времени [2]

Концептуальное пространство-время называется *ориентируемым по времени*, если существует возможность задать непрерывно разделение непространственноподобных векторов на два класса, один из которых, по нашему выбору, назовём классом векторов, направленных в будущее, а другой – классом векторов, направленных в прошлое.

В некоторых типах пространства-времени задать такую ориентацию по времени невозможно. Примером служит пространство-время, построенное из пространства де Ситтера, отождествлением точек, получаемых отражением относительно начала пятимерного объемлющего пространства. В этом пространстве существуют замкнутые кривые, не гомотопные нулю, при обходе по которым направление времени меняется на обратное. Важным является тот факт, что пространства-времени де Ситтера 1-го и 2-го типов являются точными решениями уравнений Гильберта-Эйнштейна.

Из одной точки многообразия $\boldsymbol{M}$ к другой можно послать сигнал только в том случае, если эти точки могут быть соединены непространственноподобной геодезической.

Причинные кривые.

Принимая, что пространство-время ориентируемо по времени в указанном смысле, мы в каждой точке можем разделить непространственноподобные векторы на направленные в будущее и в прошлое. Тогда для множеств $\mathcal{J}$ и $\mathcal{U}$ можно определить *хронологическое будущее* $I^+(\mathcal{J},\mathcal{U})$ ***для*** *множества* $\mathcal{J}$ *относительно* $\mathcal{U}$ как множество всех точек в $\mathcal{U}$, любую из которых можно достичь из $\mathcal{J}$ по направлению в будущее времениподобной кривой в $\mathcal{U}$. (Под кривой мы всегда имеем в виду кривую ненулевой протяженности; одна точка не считается кривой. Таким образом,

$I^+(\mathcal{J}, \mathcal{U})$ не может содержать $\mathcal{J}$). $I^+(\mathcal{J}, \mathcal{M})$ будем обозначать $I^+(\mathcal{J})$; $I^+(\mathcal{J})$ является открытым множеством: если $p \in \boldsymbol{\mathcal{M}}$ можно достичь из $\mathcal{J}$ по направлению в будущее времениподобной кривой, то имеется малая окрестность p, которую тоже можно достичь по такой кривой.

Для этого определения существует дуальное, в котором "будущее" заменяется на "прошедшее" и $+$ на $-$; чтобы не повторяться, мы будем считать дуальные определения и результаты самоочевидными.

Обозначим через $J^+(\mathcal{J}, \mathcal{U})$ *причинное будущее множества* $\mathcal{J}$ *относительно* $\mathcal{U}$; оно определяется как объединение $\mathcal{J} \cap \mathcal{U}$ с множеством всех тех точек в $\mathcal{U}$, которых можно достичь из $\mathcal{J}$ по направлениям в будущее непространственноподобным кривым в $\mathcal{U}$. Непространственноподобная кривая между двумя точками, которая не является изотропной геодезической кривой, может быть деформирована времениподобную кривую между этими точками.

Причинная структура пространственно-временных отношений в ОТО гораздо более содержательна даже в сравнении с СТО (см. рис. 3). Например, процессы с "выколотыми" точками дают примеры бесконечных, но ограниченных процессов, а ОТО даёт возможность "существованию" таких процессов, которые отсутствуют в СТО. Кроме того, здесь возникают трудности с описанием коммуникаций между, порой, несвязанными даже сигналами областями.

Задача Коши в ОТО

Стандартная формулировка задачи Коши заключается в задании начальных условий и в решении уравнений, определяющих дальнейшую эволюцию.

Уравнения Гильберта-Эйнштейна допускают существование пространственноподобных, времениподобных и 0-подобных многообразий. Поэтому задачу Коши необходимо переформулировать как решение полевых уравнений с начальными данными на пространственноподобной 3-гиперповерхности.

Решение задачи Коши в пространстве, разбивающими Мир на причинно-связанные, независимые и несвязные события, связано с проблемами сигнализации между областями, их границами и точками. Но именно сигнализация и позволяет зафиксировать связь между областями и синхронизировать разноместные часы. И это есть реальная проблема "времени" и парадоксов со "временем".

Осмыслению и детализации проблем на основе методов дифференциальной геометрии посвящена работа авторов [2]

Обратимая динамика[13)] с замкнутыми времениподобными кривыми и свободой выбора [3]

Общая теории относительности предсказывает существование замкнутых времениподобных кривых, которые теоретически позволили бы наблюдателю "путешествовать назад во времени" и взаимодействовать со своим прошлым "я". В связи с этим возникает вопрос о том, может ли это привести к так называемому "дедушкиному парадоксу", в котором наблюдатель участвует во взаимодействии таким образом, что сможет предотвратить собственное "путешествие во времени". Предыдущие исследования предложили основу для детерминированной, обратимой динамики, совместимой с нетривиальными "путешествиями во времени", где наблюдатели в различных областях пространства-времени могут выполнять произвольные локальные операции без возникновения противоречий. Были полностью охарактеризованы сценарии с тремя областями, раскрывая только один тип процесса где наблюдатели могут убедиться, что оба находятся в прошлом и будущем друг друга. Авторы [3] распространили эту характеристику на произвольное число областей и показали, что существует несколько неравнозначных процессов, которые могут возникнуть только из-за нетривиальных "путешествий во времени". Это подтверждает мнение о том, что сложная динамика возможна и при наличии *замкнутых времениподобных кривых*, совместимых со свободным выбором локальных операций и свободных от несогласованности.

Доминирующая парадигма физики основывается на идее, что системы развиваются во времени в соответствии с динамическими законами, причем состояние в данный момент времени определяет всю историю системы.

Общая теория относительности бросает вызов этой точке зрения. Уравнения Эйнштейна, описывающие связь между геометрией пространства-времени и материей, допускают противоречивые решения, содержащие замкнутые временные кривые. Событие само по себе на такой кривой – присутствие как будущего, так и прошедшего, отрицает обычную формулировку динамики в соответствии с проблемой "начальных условий". Возникает вопрос, *возможен ли какой-то более общий тип динамики?*

Хотя вопрос о том, возможно ли существование замкнутых времениподобных кривых в нашей Вселенной, остается открытым, рассмотрение динамики вне обычного временн***о***го взгляда актуально и для других областей исследований. В теории, сочетающей квантовую физику с общей теорией относительности, предполагается, что пространство-время теряет свои классические свойства, что, возможно, приводит к неопределенным причинным структурам. В совершенно ином направлении было высказано и предположение, что квантовую физику можно свести к некоей "ретрокаузальной" классической динамике.

Основная проблема, возникающая при отказе от обычной причинности – это так называемый дедушкин парадокс: путешественник во времени может убить своего собственного дедушку и тем самым предотвратить свое собственное рождение, что приводит к логической непоследовательности. Популярный подход утверждает, что дедушкин парадокс делает существование замкнутых времениподобных кривых несовместимым с классической физикой, в то время как соответствующие модификации квантовой физики могут восстановить согласованность. Общая черта предложений в рамках этого подхода заключается в том, что они постулируют радикальный отход от обычной физики даже в областях пространства-времени, лишенных петель времени, или в сценариях, где система "путешествий во времени" фактически не взаимодействует ни с чем в прошлом.

Другим подходом является так называемый "матричный формализм процессов", который берет за отправную точку локальную справедливость обычных законов физики и спрашивает,

---

13) Динамика, в конечном счете, определяет эволюцию системы во времени.

какой тип глобальных процессов совместим с этим предположением. Эта структура обеспечивает то, чтобы все операции, которые обычно были бы возможны в обычном пространстве-времени, все еще были доступны в локальных областях. Впервые, рассмотренный в квантовом контексте, этот подход был применен и к классической физике, с замечательным открытием классических процессов, которые несовместимы с любым причинным порядком между событиями.

В работе [4] в качестве возможной модели с замкнутыми времениподобными кривыми была предложена классическая детерминированная версия формализма. В этой модели рассматривается набор областей, которые не содержат никаких замкнутых времениподобных кривых, но могут быть пройдены ими. Агенты в областях получают классическое состояние от прошлой границы, выполняют над ним произвольную детерминированную операцию, а затем отправляют состояние системы через границу будущего. Динамика вне областей определяет состояние, которое каждый агент будет наблюдать в прошлом соответствующей области, как функции состояний, подготовленных другими агентами. Была найдена простая характеристика для всех процессов, включающих до трех областей; кроме того, было обнаружено, что для трех областей все некаузально упорядоченные процессы по существу эквивалентны.

В работе [3] авторы распространили характеристику детерминированных процессов на произвольное число областей и предложили простую интерпретацию при фиксации состояния на будущее всех областей, кроме двух. Оставшиеся две – должны быть причинно упорядочены, причем возможна только однонаправленная сигнализация. На явных примерах показано, что существуют неэквивалентные, некаузально упорядоченные четырехсторонние процессы, которые не могут быть сведены к трехсторонним. Результаты показывают, что **замкнутые времениподобные кривые совместимы не только с детерминизмом и локальным свободным выбором операций, но и с богатым и разнообразным диапазоном сценариев и динамических процессов**, *что и даёт ответ на поставленный вопрос в начале этого раздела о возможности построения более общего типа динамики.*

Детерминированные процессы

В обычной динамике *процесс* – это функция времени, которая отображает состояние системы с данного момента в состояние в будущем. С практической точки зрения мы можем рассматривать состояние в прошлом как "подготовку", а состояние в будущем – как результат "измерения" [14)]. Функциональная связь между подготовкой и измерением обычно диктуется динамическими уравнениями системы. Например, уравнения поля определяют поле на будущей *пространственноподобной* поверхности как функцию поля на прошлой пространственноподобной поверхности. В *глобально гиперболическом* пространстве-времени функциональная связь между подготовкой и измерением соответствует фиксированной детерминированной динамике после задания начальных условий на поверхности Коши.

Первые исследования динамики в присутствии замкнутых времениподобных кривых были сосредоточены на пространственно-временных аспектах, в которых можно было бы сохранить формулировку динамики как задачи с начальными условиями. Удивительно, но эти исследования показали, что все изученные случаи имели по крайней мере одно самосогласованное решение. Этот удивительный результат предполагает, что между существованием замкнутых времениподобных кривых и логической последовательностью может не быть никакого конфликта. Однако, если пространство-время пронизано замкнутыми времениподобными кривыми, то в общем случае невозможно найти пространственноподобную поверхность для задания глобальных начальных условий.

Трудности, связанные с установлением глобальных начальных условий в пространство-временах, пронизываемых замкнутыми времениподобными кривыми, ставят вопрос: существует ли более общее описание процесса, которое может дать динамику без глобальных начальных условий. Существование таких процессов может быть использовано для моделирования динамики, несовместимой с существованием поверхности Коши. Конечно, отсутствие поверхности Коши (и,

---

[14)] Некоторый намёк на динамическую алгебру квантовой механики.

следовательно, для неглобально гиперболического пространства-времени), сразу не подразумевает наличие замкнутых времениподобных кривых. Однако разработка и развитие такого обобщенного типа процесса в [4] обеспечивает основу для описания динамики, совместимой с нетривиальными "путешествиями во времени" в неглобально гиперболическом пространстве-времени.

Рассмотрим далее, как может быть построен такой обобщённый процесс, чтобы понять совместим ли он с пространством-временем, содержащим замкнутые времениподобные кривые (или, в общем смысле с нетривиальными "путешествиями во времени" в неглобально гиперболическом пространстве-времени), оставаясь согласованным со свободным выбором, локальностью и отсутствием дедушкиного парадокса.

Чтобы обобщить обычную характеристику процесса как функции с начальными условиями, пространственно-временное многообразие представляем в виде N дискретных локальных областей – каждую со своей границей. В этих областях некие агенты могут выполнять произвольные операции, реализуя свою свободу выбора. В частности, каждый агент будет наблюдать за состоянием, приходящим из прошлой области, и готовить состояние для отправки в будущее. Ключевое предположение состоит в том, что действия агентов в областях *независимы* от соответствующей динамики, управляющей внешней средой области. Другими словами, агенты сохраняют свою свободу выбора для выполнения произвольных операций. Однако динамика системы, вместе с геометрией пространства-времени, ограничивает поведение системы за пределами областей. Поэтому за пределами областей пространства-времени динамика является полностью детерминированной и фиксированной, как только заданы соответствующие граничные условия. При таком подходе процесс должен определять результаты измерений, выполняемых одним агентом, в зависимости от операций, выполняемых другими. *Таким образом, мы определяем процесс как обобщенную модель динамики, соединяющую различные пространственно-временные области.*

Будем предполагать, что области, в которых действуют агенты – связны, не пересекаются, а их границы можно разделить на два подмножества: одно – "прошлое" и другое – "будущее"), которые не содержат времениподобных частей. Это гарантирует то, что в свободном от замкнутых времениподобных петель пространстве-времени (или, более широко, в глобально гиперболическом пространстве-времени) каждая область находится либо в будущем, либо в прошлом, либо пространственноподобна к любой другой. Поэтому нарушение причинного порядка между областями может быть объяснено отсутствием причинного порядка в фоновом пространстве [15]. Кроме того, мы ограничимся локальными областями, которые не содержат замкнутых времениподобных кривых или в более общем плане, мы требуем, чтобы эти локальные области были неотличимы от локальных областей в глобально гиперболическом пространстве-времени. Мы также предполагаем, что любая времениподобная кривая, которая входит через прошлое (будущую границу), выходит через будущую границу (прошлую границу). Это позволяет просто охарактеризовать локальные операции в областях как функции от прошлых границ к будущим.

Помимо вышеприведенных условий, мы не делаем никаких дальнейших предположений о геометрии пространства-времени или причинной структуре, а также о динамике физической системы, на которую действуют агенты. Этот подход лишь абстрактно трактует функциональные отношения между степенями свободы и требует, чтобы локальные агенты сохраняли свободу выбора произвольных операций, не порождая никакой логической непоследовательности.

Наша цель состоит в том, чтобы понять, совместимы ли такие абстрактные ограничения с процессами, которые могут быть реализованы только через нетривиальные причинные отношения (причинные отношения, которые могут возникнуть только из-за нетривиальных "путешествий во

---

[15] Если бы мы рассматривали времениподобные границы, то можно было бы иметь времениподобные кривые, которые выходят из одной области, пересекают другую и затем возвращаются в исходную область, и все это в глобально гиперболическом пространстве-времени.

времени" в неглобально гиперболическом пространстве-времени). Под причинно-следственными связями между областями здесь понимается возможность агентов, действующих в областях, обмениваться между собой несветовыми сигналами. В глобально гиперболическом пространстве-времени (и при допущениях, которые мы сделали для локальных областей) сигнализация является односторонним отношением: если агент A может *сигнализировать* (влиять) агенту B, то B не может *сигнализировать* (влиять) A. Следовательно, любой процесс, в котором причинный ответ не определяет частичный порядок между областями, будет обусловлен *нетривиальным "путешествием во времени"* в неглобально гиперболическом пространстве-времени.

В соответствии с предыдущей литературой и для упрощения обсуждения ниже мы предполагаем, что замкнутые времениподобные кривые ответственны за нетривиальные причинно-следственные связи, такие, что локальные области не содержат их, но могут быть пройдены замкнутыми времениподобными кривыми. Однако эти нетривиальные причинно-следственные связи в принципе могли бы возникать и в других неглобально гиперболических пространство-временах без замкнутых времениподобных кривых — в не сильно каузальных пространство-временах.

Функция процесса

Будем рассматривать пространственно-временное многообразие, состоящее из отдельных областей[16]. Для того чтобы развить формализм классической детерминированной динамики локальных областей в присутствии замкнутых времениподобных кривых, границы этих локальных областей мы будем рассматривать как классические пространства состояний. Пространства состояний $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{X}_i$ описывают физические степени свободы, локализованные соответственно на прошлых и будущих границах локальной области i. Например, они могут соответствовать полю, определенному в фоновом пространстве-времени. В этом случае состояние в одном из классических пространств состояний, которые мы определили, было бы функцией на границе локальной области, описывающей пространственноподобную конфигурацию поля. Отдельные состояния будут обозначаться как $a_i \in \mathcal{A}_i$, $x_i \in \mathcal{X}_i$. Классическая детерминированная операция в локальной области будет обозначаться функцией $f_i\colon \mathcal{A}_i \to \mathcal{X}_i$ (рис. 4). Функция f преобразует входное состояние a_i из прошлой границы в выходное состояние x_i на будущей границе. Поэтому

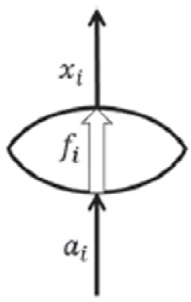

Рис.4. Локальная ограниченная область i пространства-времени с границей прошлого и будущего. Границы не содержат времениподобных фрагментов. Локальная операция в области представлена функцией f_i, которая отображает входное состояние a_i, содержащее физические степени свободы на прошлой границе, в выходное состояние x_i, содержащее физические степени свободы на будущей границе.

функция f_i отображает физические степени свободы на прошлых и будущих границах, соответственно. Функция f_i физически соответствует локальной операции, которую агент может выполнить над входным состоянием в определенной области пространства-времени. Поэтому, чтобы обеспечить свободу выбора операций, которые агент может выполнять в локальной области

[16] Правильнее было бы использовать термин *листы*, а не "области", поскольку термин "лист" несёт большую определённость в отношении своих границ, о топологии которых авторы ничего не говорят.

пространства-времени, мы не накладываем на функцию f_i никаких дополнительных условий, кроме требования, чтобы она удовлетворяла определению функции. В результате локальные функции f_i не обязательно должны быть обратимыми. Разрешение локальных операций выполняемых экспериментаторами – быть необратимыми функциями, представляет собой способность экспериментаторов удалять информацию, получая доступ к резервам, не включенным в физические степени свободы. Обозначим $\mathcal{D}_i := \{f_i: \mathcal{A}_i \to \mathcal{X}_i\}$ как множество всех возможных функций в области i. Чтобы ссылаться на набор объектов для всех областей, мы отбрасываем индекс. Например, множество всех возможных входных данных для N различных локальных областей будет обозначаться $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_1 \times \cdot \cdot \cdot \times \mathcal{A}_N$.

Мы будем использовать обозначение $\mathcal{A}_{\backslash i} = \mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_i - 1 \times \mathcal{A}_{i+1} \times \ldots \times \mathcal{A}_N$, $a_{\backslash i} = \{a_1, \ldots a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_N\}$, и т. д., чтобы обозначить коллекции с удаленной компонентой i. Соответствующее переупорядочение будет понято при объединении переменных, например в таких выражениях как $a = a_i \cup a_{\backslash i}, f(a) = f(a_i, a_{\backslash i})$ и так далее.

Одним из требований детерминированной структуры для локальных областей при наличии замкнутых времениподобных кривых является то, что структура должна быть способна предсказывать состояние на прошлой границе каждой локальной области. В присутствии замкнутых времениподобных кривых состояние на прошлой границе каждой локальной области может зависеть от всех локальных операций (в свободном пространстве-времени состояние на прошлой границе области будет зависеть только от операций в *её* прошлом).

Зависимость от локальных операций может быть описана функцией $\omega \equiv \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}: \mathcal{D} \to \mathcal{A}$, которая сопоставляет локальные операции, выполняемые в каждой области, с входным состоянием на прошлой границе каждой локальной области [4]. Далее функция ω будет означать *процесс*.

Функция ω останется общей, только будучи ограниченной слабой формой локальности. Локальность требует, чтобы как только состояние на границе области фиксировано, детали того, что происходит внутри области, не имели отношения к внешней динамике. Все уравнения локального поля, обычно используемые в физике, удовлетворяют этому требованию. Чтобы формализовать это требование локальности, для каждого процесса ω должна существовать дополнительная функция $w: \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ такая, что [17)]

$$\omega(f) = w(f(\omega(f))) \quad \forall f \in \mathcal{D}. \tag{1}$$

В дальнейшем мы будем называть функцию, удовлетворяющую приведенному выше условию согласованности, *функцией процесса* (рис.5). Функция процесса сопоставляет выходные состояния на будущих границах с входными состояниями на прошлых границах всех областей. В теории поля без наличия замкнутых времениподобных кривых, которая совместима с каузально упорядоченным пространством-временем, функция процесса описывала бы, как поле на будущей границе первой области сопоставляется с результирующим полем на прошлой границе второй локальной области, где вторая область находится в каузальном прошлом первой области.

[17)] В работе [4] детерминированные процессы определены через другое, но эквивалентное условие самосогласованности.

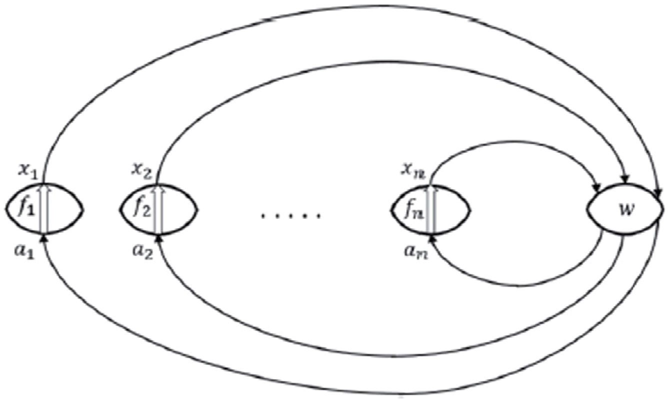

Рис.5. Функция процесса w может быть применена для моделирования взаимодействия различных локализованных пространственно-временных областей с замкнутыми времениподобными кривыми . Нетривиальная зависимость входных данных каждой области от выходных данных других областей подразумевает, что функция процесса может возникнуть только в присутствии замкнутых времениподобных кривых.

В присутствии замкнутых времениподобных кривых функция процесса представляет собой более общие ограничения на граничные конфигурации поля, которые теперь потенциально могут зависеть друг от друга. *Таким образом, функция процесса обобщает понятие динамики так, что она применяется к пространство-временам, которые содержат замкнутые времениподобные кривые, а также пространство-временам, в которых отсутствуют замкнутые времениподобные кривые. Функция процесса может быть использована для выявления причинно-следственных связей, которые могут возникнуть только в присутствии замкнутых времениподобных кривых, без какой-либо ссылки на решения уравнений поля Эйнштейна.* Это важно, поскольку позволяет определить, какие типы нетривиальных причинно-следственных связей возможны без развития логической непоследовательности такой, как дедушкин парадокс. Исследование причинно-следственных связей с формализмом функции процесса предоставляет многообещающую платформу для исследования того, могут ли эти нетривиальные причинно-следственные связи быть достигнуты в конкретных геометриях пространства-времени. Следовательно, рассмотрение причинно-следственных связей в формализме функции процесса обеспечит шаг в направлении решения вопроса о том, как замкнутые времениподобные кривые могут быть физически реализованы без какого-либо дедушкиного парадокса.

В работе [4] было показано, что *необходимым и достаточным условием для функции процесса является то, что $w \circ f$ имеет единственную фиксированную точку для каждой локальной операции f*:

$$\forall f \; \exists! \, a \text{ такое, что } w \circ f(a) = a. \tag{2}$$

Далее мы будем работать с функциями процесса, а не с процессами и использовать условие фиксированной точки (2) в качестве определяющего свойства.

Важным свойством функций процесса является то, что *наблюдатель в локальной области не может использовать её для передачи информации обратно себе*. Интуитивно это предотвращает парадоксы, такие как попытка агента "стирать" прошлое, чтобы избежать уже определенного события, тем самым устраняя мотивацию для себя предотвратить и свое прошлое "я". Формально это означает, что входные данные каждой локальной области не зависят от выходных данных той же самой области. Если мы рассматриваем единственную локальную область, то единственной функцией процесса для этой единственной локальной области, удовлетворяющей условию неподвижной точки (2), является константа: $w\,(x) = a$. Поэтому неспособность агента в

$$w_i(x) = w_i(x_{\setminus i}), \qquad (3)$$

локальной области взаимодействовать со своим прошлым является особенностью всех функций процесса. Таким образом, отсутствие дедушкиного парадокса является прямым результатом условия (2). Эта особенность функций процесса накладывает такое ограничение, что каждая компонента функции процесса w должна быть независима от выходных данных одной из той же области:

где $x_{\setminus i}$ − множество *выходов всех областей*, кроме i-ой области. Заметим, что из уравнения (3) следует, что функция процесса может быть описана в терминах набора функций $w_1: \mathcal{X}_{\setminus 1} \to \mathcal{A}_1, \ \dots \ w_n: \mathcal{X}_{\setminus n} \to \mathcal{A}_n$[18].

Прежде чем подробно остановиться на характеристиках функций процесса, мы должны сначала дать некоторые важные определения и рассмотреть важные свойства функций процесса.

Ещё раз об основных понятиях

Процесс и функция процесса

Процесс фиксирует переход (в общем случае − несинхронный [19]) с границ прошлого на границы будущего для всех областей с помощью преобразований $f_i: \mathcal{A}_i \to \mathcal{X}_i$

Функция процесса описывает обратное преобразование. Уточнение преобразования с помощью $w_1: \mathcal{X}_{\setminus 1} \to \mathcal{A}_1, \ \dots \ w_n: \mathcal{X}_{\setminus n} \to \mathcal{A}_n$ предотвращает нарушение принципа причинности.

Процесс ω и функция процесса w играют основную роль в развитии концепции времени как упорядочивающего фактора в присутствии активных агентов, наделяя динамику свойством некой "алгебры" по мнению авторов [3], то есть фактором, аналогичным временному в обычной динамике.

Редукция и редуцированная функция

Процедура редукции, представленная в [3], позволяет сокращать рассматриваемое число областей, не противоречащих условиям динамики, оставляя возможности работать с нетривиальными причинно-следственными связями и сформулировать общие свойства функции процесса w.

Редукция − сокращение числа рассматриваемых областей.

Редуцированная функция $w^{f_i}: \mathcal{X}_{\setminus i} \to \mathcal{A}_{\setminus i}$ описывает обратное по времени (преобразование с границ будущего на границы прошлого для всех областей, кроме i-ой, закрывая *выход* из i-ой области будущего (f_i − прямое по времени преобразование). Редуцированная функция также является функцией процесса, игнорируя выход в прошлое для i-ой области.

Выходная приведённая функция $w^{x_i}(x_{\setminus i})$ с исключением i-й области определяется набором функций: $w_1(x_{\setminus 1}), \dots w_{i-1}(x_{\setminus\{i-1\}}), w_{i+1}(x_{\setminus\{i+1\}}), \dots w_n(x_{\setminus n})$. Аналогичным образом определяется 2-выходная приведённая функция, например − $w^{x_{\setminus\{i,j\}}}$, в которой игнорируются (фиксируются неизменными) выходы в прошлое всех областей, кроме областей i и j.

Сигнализация

Уравнение (3) говорит, что наблюдатель в локальной области не может вернуться назад в прошлое и влиять на будущее. Это согласуется со следующим определением отсутствия *сигнализации*. При заданной функция процесса $w: \mathcal{X} \to \mathcal{A}$, говорят, что из области j не может быть послан сигнал в область i, если $w_i(x) = w_i(x_{\setminus j})$ и, в силу $w_i(x) = w_i(x_{\setminus i})$, $w_i(x) = w_i(x_{\setminus i}, x_{\setminus j})$. *Сигнализация определяется как отрицание этого определения.* Более точные определения см. ниже.

---

[18] В таком представлении очевиден запрет выходов из будущего любой области в прошлое.

[19] Поскольку авторы не упоминают об этом.

Редукция процессов

Определение 1. Рассмотрим функцию $w: \mathcal{X} \to \mathcal{A}$, такую, что для каждой области $(i = 1, \ldots, N)$ $w_i(x) = w_i(x_{\setminus i})$. В связи с частной локальной операцией $f_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{X}_i$ мы определяем *редуцированную функцию* $w^{f_i} : \mathcal{X}_{\setminus i} \to \mathcal{A}_{\setminus i}$ для остальных областей через композицию w с f_i:

$$w_j^{f_i}(x_{\setminus i}) := w_j\left(x_{\setminus i}, f_i\left(w_i(x_{\setminus i})\right)\right), \quad i \neq j \qquad (4)$$

Это определение важно для формализации интуиции о том, что, если мы фиксируем операцию для конкретной локальной области, то для остальных областей все еще должен существовать процесс. Определение редуцированной функции играет важную роль в исследовании свойств функций многостороннего процесса [*)].

Лемма 1. Пусть задана функция $w : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ такая, что для каждой области $i = 1, \ldots, N$, $w_i(x) = w_i(x_{\setminus i})$. Тогда имеем:

(a) если w − функция процесса, то w^{f_i} также является функцией процесса для каждой области i и операции f_i;

(b) если существует область i такая, что для каждой локальной операции f_i, w^{f_i} является функцией процесса, то w также является функцией процесса.

Следуя результату этой леммы, мы можем заключить, что w является функцией процесса тогда и только тогда, когда соответствующая редуцированная функция w^{f_i} также является функцией процесса.

Определение 1 может быть изменено для применения к процессу, в котором мы фиксируем *выход*[**)] *конкретной области* вместо фиксации результата конкретной локальной операции $\boldsymbol{f_i}$. Эти процессы представляют интерес, поскольку они соответствуют подмножеству редуцированных функций, где фиксированная операция f_i является константой. Константа является допустимым выбором функции, поскольку мы не требуем, чтобы она была обратимой.

Определение 2. Рассмотрим функцию $w : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$, такую, что для каждой области $i = 1, \ldots, N$, $w_i(x) = w_i(x_{\setminus i})$. Для выхода $x_i \in \mathcal{X}_i$ из конкретной области мы определяем *выходную редуцированную функцию* $w^{x_i} : \mathcal{X}_{\setminus i} \to \mathcal{A}_{\setminus i}$ на остальных областях, чтобы обозначить функцию, в которой мы зафиксировали выход в прошлое в i-й области:

$$w^{x_i}\left(x_{\setminus i}\right) := \begin{Bmatrix} w_1\left(x_{\setminus 1}\right), \ldots . w_{i-1}\left(x_{\setminus\{i-1\}}\right), \\ w_{i+1}\left(x_{\setminus\{i+1\}}\right), \ldots w_n\left(x_{\setminus n}\right) \end{Bmatrix}. \qquad (5)$$

Ясно, что выходная редуцированная функция также является редуцированной функцией в соответствии с определением 1, поскольку выходная редуцированная функция соответствует случаю, когда локальная операция в каждой области ограничена константой [*)]. Мы можем применить определение 2, чтобы обозначить $w^{x_{\setminus\{i,j\}}}$ как *выходную приведенную функцию*, в которой мы фиксировали выходы всех областей, кроме областей i и j.

Хотя определения 1 и 2 аналогичны, различие между редуцированной функцией и выходной редуцированной функцией имеет важное значение для характеристики функций многостороннего процесса.

[*)] Вносится определённость: само определение 1 позволяет "вычёркивать" $\boldsymbol{i}$-область из множества всех N областей, а соотношение (4) отличить i-область с возможностью выхода в прошлое; однако условие $j \neq i$ (левая часть равенства (4)) описывает только $(N-1)$ компонент.

[**)] Предотвращает возврат состояний из будущего в прошлое *(как результата преобразований f_i)*.

Сигнализация

Чтобы понять, как различные направления в различных листах пространства-времени сигнализируют друг другу, мы должны определить, что значит для одного наблюдателя сигнализировать другому наблюдателю.

Уравнение (3) говорит, что наблюдатель в локальной области не может подать сигнал своему собственному прошлому. Это согласуется со следующим определением отсутствия сигнализации.

Определение 3. При заданной функция процесса $w : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$, говорят, что из области j не может быть послан сигнал в область i, если

$$w_i(x_j, x_{\setminus j}) = w_i(x_j', x_{\setminus j}) \;\; \forall\, x \in \mathcal{X}, x_j' \in \mathcal{X}_j',$$

который мы можем сократить как $w_i(x) = w_i(x_{\setminus j})$. Мы определяем *сигнализацию* как отрицание определения 3.

Сигнализация полезна для установления того – совместим ли процесс с данной причинной структурой, поскольку *область может сигнализировать только областям в своем будущем*. Это определение сигнализации согласуется с целью построения структуры таким образом, что в пространстве-времени без замкнутых времениподобных кривых сигнализация между областями определяет отношение частичного порядка. Однако наличие замкнутых времениподобных кривых автоматически не допускает произвольной сигнализации, поскольку условие согласованности (2) накладывает сильные ограничения на функцию процесса.

Как мы покажем ниже, удобно характеризовать функции процесса в терминах более утонченного понятия сигнализации. В общем случае возможность передачи сигнала из одной области в другую может зависеть от выходов всех остальных областей. Это полезно зафиксировать следующим образом:

Определение 4. Для данных двух областей i и j, функции процесса $w : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$, а также выходного состояния $\tilde{x}_{\setminus i,j} \in \mathcal{X}_{\setminus i,j}$, мы говорим, что j не может сигнализировать i на $\tilde{x}_{\setminus i,j}$, если

$$w_i^{\tilde{x}_{\setminus i,j}}(x_j) = w_i^{\tilde{x}_{\setminus i,j}}(x_j') \forall\, x_j, x_j' \in \mathcal{X}_j'.$$

Например, для некоторых функций процесса w могут существовать $x_{\setminus\{i,j\}} \in \mathcal{X}_{\setminus\{i,j\}}$ такие, что каждая из компонент $w_i^{x_{\setminus\{i,j\}}}$ и $w_j^{x_{\setminus\{i,j\}}}$ является константой. В этих случаях ни одна область не может подать сигнал другой. Однако может существовать и другой выбор выходов $x'_{\setminus\{i,j\}} \in \mathcal{X}_{\setminus\{i,j\}}$, так что сигнализация происходит между областями i и j.

Теперь у нас есть структура, которая описывает общую детерминированную динамику в присутствии замкнутых времениподобных петель. *Эта структура характеризуется функцией процесса w, которая сопоставляет выходные состояния на будущей границе каждой локальной области с входными состояниями на прошлой границе каждой локальной области.* Условие (2) допускает свободу выбора операций, выполняемых наблюдателем в каждой области. Условие (3) гарантирует отсутствие парадокса, возникающего в результате операций, выполняемых в присутствии замкнутых времениподобных петель.

Свойства функции процесса позволяют какому-либо агенту влиять из будущего на прошлое. Выходы из будущего одной области в прошлое другой регламентируются возможностями процессов.

Чтобы глубже понять коммуникацию между наблюдателями в присутствии замкнутых времениподобных петель, мы должны понять свойства функции процесса w, которая опишет, как эти наблюдатели могут общаться. Далее представлены остальные результаты [3].

Характеристика функций процесса

Наиболее простыми и интуитивно понятными функциями процесса являются каузально упорядоченные функции. Например, рассмотрим трех наблюдателей в трех различных областях, которые мы обозначаем областями 1, 2 и 3, соответственно. Если существует причинный порядок между этими областями такой, что $1 \prec 2 \prec 3$, то функция процесса задается формулой $w_1(x) = a$ (constant), $w_2(x) = w_2(x_1)$ и $w_3(x) = w_3(x_1, x_2)$. Для таких причинно упорядоченных функций процесса выполняется условие (2). Однако эти тривиальные, причинно-упорядоченные функции процесса совместимы без наличия замкнутых времениподобных кривых. Общность функции процесса позволяет моделировать пространство-время и без причинно-следственного порядка, например ‒ нетривиальные причинно-следственные связи, возникающие из-за наличия замкнутых времениподобных кривых. Нас интересует ‒ существуют ли нетривиальные функции процесса в присутствии замкнутых времениподобных кривых. Существование нетривиальных функций процесса добавило бы поддержку аргументу того, что замкнутые времениподобные кривые могут существовать без нарушения локальности или возникновения дедушкиного парадокса. Это происходит потому, что условия (2) и (3) ограничивают функции процесса в том, чтобы избежать таких несоответствий. Чтобы ответить ‒ существуют ли нетривиальные функции процесса в присутствии замкнутых времениподобных кривых, мы должны получить характеристику функций процесса для произвольного числа областей. Другими словами, мы хотим найти способ определить ‒ удовлетворяет ли общая функция $w: \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ условию неподвижной точки (2).

Авторы [4] охарактеризовали технологические функции с числом областей до трех *). Для одной области условие (3) требует, чтобы функция процесса была постоянной: $w(x) = a \ \forall x$.

Двухсторонние функции процесса характеризуются тремя условиями:

(a) $w_1(x_1, x_2) = w_1(x_2)$,
(b) $w_2(x_1, x_2) = w_2(x_1)$,
(c) по крайней мере одна из $w_1(x_2)$ или $w_2(x_1)$ постоянна.

Очевидно, что (a) и (b) вытекают из условия (3), а (c) ‒ из условия (2). В результате функции двухсторонних процессов допускают только одностороннюю передачу сигналов.

Чтобы охарактеризовать трехсторонние функции процесса, мы должны рассмотреть три различные области, которые мы обозначаем 1, 2 и 3. Эта функция процесса имеет три компоненты $a_1 = w_1(x_2, x_3)$, $a_2 = w_2(x_1, x_3)$и $a_3 = w_3(x_1, x_2)$. Авторы рассматривают характеристики функций трехстороннего процесса, где выходная переменная одной области "переключает' направление передачи сигналов между двумя другими областями.

Теорема 1 (функции трехстороннего процесса).

Три функции

$$w_1: \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3 \to \mathcal{A}_1, \qquad w_2: \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_3 \to \mathcal{A}_2, \qquad w_3: \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \to \mathcal{A}_3$$

определяют функцию процесса тогда и только тогда, когда каждая из выходных приведенных функций

$$w^{x_3}(x_1, x_2) := \{w_1(x_2, x_3), w_2(x_1, x_3)\}, \tag{8}$$
$$w^{x_1}(x_2, x_3) := \{w_2(x_1, x_3), w_3(x_1, x_2)\}, \tag{9}$$
$$w^{x_2}(x_1, x_3) := \{w_1(x_2, x_3), w_3(x_1, x_2)\} \tag{10}$$

есть функция двухстороннего процесса для каждого $w_1: \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3 \to \mathcal{A}_1$, $w_2: \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_3 \to \mathcal{A}_2$, $w_3: \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \to \mathcal{A}_3$, соответственно.

Свойства, определенные в теореме 1, говорят, что для каждого фиксированного выхода одной из областей возможна не более, чем односторонняя сигнализация между двумя другими областями. Наша цель ‒ доказать аналогичную характеристику функций многостороннего процесса в терминах условной сигнализации.

Характеристика функций многостороннего процесса

Теперь мы готовы доказать наш основной результат: дать характеристику произвольных многосторонних функций процесса, обобщающая теорему 1. На самом деле существует два различных (но эквивалентных) способа обобщения теоремы 1: учитывая N-частичную функцию процесса, можно проверить, являются ли все (N-1)-частичные функции, полученные путем фиксации одного выхода, допустимыми функциями процесса. В качестве альтернативы можно зафиксировать все выходы, кроме двух, и проверить, являются ли оставшиеся две области не более чем с односторонней сигнализацией. Начнем с первого обобщения.

Теорема 2 (N-частичная функция процесса) $P[N]$:

N функций $w_1: \mathcal{X}_{\backslash 1} \to \mathcal{A}_1$, $w_2: \mathcal{X}_{\backslash 2} \to \mathcal{A}_2, \ldots$, $w_N: \mathcal{X}_{\backslash N} \to \mathcal{A}_N$, определяют функцию процесса w, тогда и только тогда, если для каждого $x_i \in \mathcal{X}_i$ выходом редуцированной функцией w^{x_i} является функция (N-1)-листного процесса для всех $i \in 1, 2, \ldots, N$.

Теорема 2 может быть применена в качестве простой основы для проверки того, действительно ли многосторонняя функция является допустимой функцией процесса. Как мы увидим позже, проще применить теорему 2 для проверки допустимой многосторонней функции процесса, чем проверить, что выполняется условие (2). Потенциал применения теоремы 2 в качестве метода проверки правильности многосторонних функций процесса можно легко увидеть, заметив, что теорема 2 подразумевает, что фиксация выходов всех областей, кроме 2, сводит оставшуюся выходную редуцированную функцию процесса к двухсторонней функции.

Следствие 1. N функций $w_1: \mathcal{X}_{\backslash 1} \to \mathcal{A}_1$, $w_2: \mathcal{X}_{\backslash 2} \to \mathcal{A}_2, \ldots$, $w_N: \mathcal{X}_{\backslash N} \to \mathcal{A}_N$ определяют функцию процесса W, если и только если, $w^{x\backslash\{l,j\}}$ является двухсторонней функцией процесса для всех $l, j \in 1, 2, 3, \ldots, N, l \neq j$ и $N \geq 3$.

Следствие 1 явно демонстрирует условие того, что фиксация выходных данных всех областей, кроме двух произвольно выбранных $l, j \in 1, 2, \ldots, N$ определяет направление передачи сигналов между областями l и j, и, следовательно, оставшаяся выходная редуцированная функция процесса является двухсторонней функцией процесса

$$w^{x\backslash\{l,j\}}(x_l, x\ j) := \left\{w_l\left(x_j\ , x_{\backslash\{l,j\}}\right), w_j\left(x_l, x_{\backslash\{l,j\}}\right)\right\},$$

где, по крайней мере, одна из двухкомпонентных функций $w_l^{x_{\backslash\{l,j\}}}$ и $w_j^{x_{\backslash\{l,j\}}}$ является константой. Валидность многосторонней функции процесса можно проверить, убедившись в том, что для всех $l, j \in 1, 2, 3, \ldots, N$ $w^{x\backslash\{l,j\}}$ является валидной двухсторонней функцией процесса.

Теорема 2 и последующее следствие 1 показывают, что многосторонние функции процесса могут быть, в лучшем случае, условно односторонними сигналами между любой парой областей. Другими словами, фиксация выходных данных всех областей, кроме двух, позволяет осуществлять не более чем одностороннюю сигнализацию между двумя оставшимися областями.

Примеры

Приведенные выше характеристики функций процесса позволяют рассмотреть конкретные примеры, которые не могут иметь места в обычном, причинно-упорядоченном пространстве-времени. Пример такой функции процесса в трех пространственно-временных областях впервые был представлен в [Baumeler Д and Wolf S 2016]. Эта функция трёхстороннего процесса может быть легко расширена до функции четырехстороннего процесса путем добавления четвертого листа либо в прошлом, либо в будущем других трех листов. Однако наличие четвертого листа в процессе функционирования не требует наличия замкнутых времениподобных кривых. В случае, когда четвертый лист находится в будущем трех других листов, это просто соответствует четвертой области, где причинный порядок существует от трех других листов к четвертому листу. В результате возникает значительная мотивация для нахождения функций четырехстороннего процесса, несовместимых с причинным порядком между любыми подмножествами листов (это аналогично "подлинно многосторонним непричинным корреляциям", изучаемым для квантовых процессов [Abbott A A,Wechs J, Costa F and Branciard C 2017]).

Здесь мы приводим примеры таких функций четырехстороннего процесса. Рассмотрим четыре листа в локальных областях пространства-времени в присутствии замкнутых времениподобных кривых. В этом анализе мы упрощаем классические пространства состояний

Таблица 1. Входы области 3 и области 4 (обозначаются соответственно a_3 и a_4) для всех возможных комбинаций выходов области 1 и области 2 (обозначаются соответственно x_1 и x_2). Отображаемая сигнальная структура верна независимо от того, какие две области мы выбираем для фиксации выходов, вследствие симметрии между различными компонентами уравнения (12).

Выход области 1 (x_1)	Выход области 2 (x_2)	Вход области 3 (a_3)	Вход области 4 (a_4)	Направление сигнализации
0	0	0	x_3	3 $\Longrightarrow$ 4
0	1	$x_4 \oplus 1$	0	4 $\Longrightarrow$ 3
1	0	0	0	Нет сигнализации
1	1	0	0	Нет сигнализации

*) Многосторонность функции ≡ возможности в установлении отношений между листами области для многолистностой области.

$\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{X}_i$ до бинарных пространств состояний. Физическим примером того, что могут представлять собой эти двоичные переменные, является то, что 0 или 1 могут соответствовать существованию или несуществованию частицы на границе области пространства-времени. Как уже говорилось ранее, мы не рассматриваем какое-либо конкретное пространство-время или динамические законы, а просто исследуем, какие процессы логически возможны.

Определим входные $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{0,1\}$ и выходные $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$ переменные; определим оператор двоичного сложения $a \oplus b: a, b \in \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ как

$$a \oplus b = \begin{cases} 0, & a = b, \\ 1, & a \neq b, \end{cases} \qquad (11)$$

Используя приведенную выше нотацию, определяем функцию четырех-стороннего процесса $w: (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (a_1, a_2, a_3, a_4)$ как

$$\begin{aligned} a_1 &= x_4(x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1) \\ a_2 &= x_1(x_4 \oplus 1)(x_3 \oplus 1) \\ a_3 &= x_2(x_1 \oplus 1)(x_4 \oplus 1) \\ a_4 &= x_3(x_2 \oplus 1)(x_1 \oplus 1) \end{aligned} \qquad (12)$$

Применяя теорему 2, либо следствие 1, можно проверить, что это − допустимая функция процесса. Уравнение (12) определяет функцию процесса, в которой вход каждой области нетривиально зависит от выхода остальных трех областей. В этом процессе выход двух областей задает направление передачи сигналов между двумя другими областями. Например, в таблице 1 показаны результирующие входные данные областей 3 и 4 для всех возможных комбинаций выходных данных областей 1 и 2.

Ясно, что, в зависимости от выбора выходов для наблюдателя в области 1 и другого наблюдателя в области 2, связь между областями 3 и 4 может либо отсутствовать (ни одна из областей не может сигнализировать другой), либо, самое большее − иметь одностороннюю сигнализацию. В результате уравнение (12) характеризуется условной сигнализацией. Например, если выходы областей 1 и 2 выбраны равными $x_1 = 1, x_2 = 0$, соответственно, то ни один из наблюдателей в областях 3 и 4 не может сигнализировать другому. Однако если выходные данные области 1 и области 2 выбраны равными $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, соответственно, то наблюдатель в области 3 может подать сигнал наблюдателю в области 4. Принципиально важно то, что существуют такие комбинации выходов, что каждый наблюдатель может подать сигнал любому наблюдателю в другой области.

Анализ передачи сигналов между областями в функции выходного редуцированного процесса показывает, что когда мы рассматриваем подмножество, состоящее только из двух областей, между этими двумя областями может быть, самое большее − только односторонняя передача сигналов. Это гарантирует, что наше предположение о локальности и отсутствии дедушкиного парадокса удовлетворяется, что мы формализовали в условии (2). Однако мы подчеркиваем, что в наших четырехсторонних примерах каждая область может сигнализировать любой другой о некотором значении выходных данных остальных областей. Это невозможно в пространстве-времени без замкнутых времениподобных кривых. В самом деле, в отсутствии замкнутых времениподобных кривых была бы одна область, которая находится либо в причинном прошлом, либо в пространстве, как от каждой из других областей. В этом случае ни одна другая область не сможет подать ему сигнал, независимо от выхода других областей.

В работе [Baumeler Д and Wolf S 2016] было обнаружено, что вплоть до переклейки листов или входов/выходов существует только одна нетривиальная функция трехстороннего процесса с двоичными входами и выходами, совместимая с наличием замкнутых времениподобных кривых и несовместимая с любым причинным порядком. Другими словами, все нетривиальные трехсторонние функции, совместимые с наличием замкнутых времениподобных кривых, эквивалентны после повторной маркировки листов или состояний *). Однако это не относится к функциям четырехстороннего процесса. Существует много функций четырехстороннего процесса, которые не связаны друг с другом путем переименования листов или состояний. Примером нетривиальной четырехсторонней функции процесса, не связанной с приведенной в уравнении (12) вплоть до переклейки, является

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2(x_3 \oplus x4) \\ a_2 &= x_3(x_4(x_1 \oplus 1) \oplus 1) \\ a_3 &= x_4(x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) \\ a_4 &= x_1(x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1). \end{aligned} \qquad (13)$$

Нетрудно заметить, что сигнальная структура между четырьмя компонентами уравнения (13) отличается от сигнальной структуры между четырьмя компонентами уравнения (12). Например, если мы зафиксируем выходы областей 2 и 3 − либо $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ или $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, то наблюдатель в области 4 может подать сигнал наблюдателю в области 1. В результате уравнение (13) создаёт сценарий, в котором существуют два различных варианта выходных данных для двух компонент функции процесса, которые приводят к одному и тому же направлению сигнализации (область 4 ⇒ область 1). Этот сценарий не содержит каких-либо вариантов для выходных данных двух различных компонент функции процесса, описываемых уравнением (12).

Мы показали, что существуют различные нетривиальные четырёхсторонние функции процесса, которые совместимы с наличием замкнутых времениподобных кривых и несовместимы с любым причинным порядком. Численный поиск других функций четырёхстороннего процесса, удовлетворяющих теореме 2, выявил большое количество неэквивалентных функций четырёхстороннего процесса. В настоящей работе мы представили два примера таких функций процесса. По сравнению с функциями трёхстороннего процесса, функции четырёхстороннего процесса позволяют обеспечить большее разнообразие способов взаимодействия различных областей без причинно-следственного порядка в присутствии замкнутых времениподобных кривых.

.

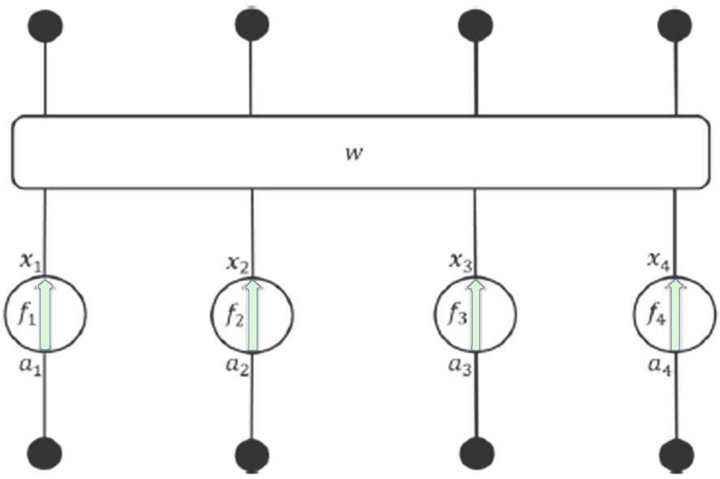

Рис. 6. Пространственная диаграмма физической реализации функции акаузального процесса. Примером может служить пространство-время червоточины, аналогичная эталону [Echeverria F, Klinkhammer G and Thorne K S 1991]: метрика Минковского везде, за исключением восьми цилиндрических областей ("устья" червоточин, появляющиеся в виде сфер в пространственном разрезе, которые на рисунке изображены кругами чёрного цвета), которые идентифицируются попарно. Временная задержка между устьями приводит к тому, что мировая линия, входящая в верхнее устье, выходит из соответствующего нижнего устья в более раннее время в координатах Минковского, образуя замкнутую времениподобную кривую. Чуть выше каждого из нижних устьев находится локальная область, обозначенная $i = 1,\ldots,4$, где агент может либо получить ($a_i = 1$), либо не получить ($a_i = 0$) бильярдный шар вдоль заданной мировой линии (на рисунке показана проекция мировых линий на временной срез, содержащий локальные области). Затем агенты могут выбрать, отправлять или не отправлять бильярдный шар из местной области. Это вмешательство представлено функцией f_i, в то время как выход $x_i = 1, 0$. В пространстве между областями и верхними устьями находится "бильярдный шар-компьютер" [Fredkin E and Toffoli T 1982], реализующий функцию процесса w. Свойства функции процесса гарантируют, что для каждого выбора локальных операций существует уникальное решение для наличия или отсутствия шара в каждой точке рассматриваемых мировых линий.

---

*) Это не совсем верно за пределами пространств двоичных состояний (например, в примере непрерывных переменных, представленном в [4], не может быть повторно помечено как трёхбитовая функция). Однако теорема 1 подразумевает, что все непричинно упорядоченные функции трехстороннего процесса имеют одну и ту же причинную структуру в том смысле, что выходное пространство каждого листа может быть разделено на два подмножества, причем состояния внутри каждого подмножества соответствуют фиксированному направлению передачи сигналов между двумя другими листами.

Конечно, один из главных вопросов заключается в том, что могут ли найденные нами абстрактные примеры быть реализованы как конкретные физические системы в некоторой соответствующей геометрии пространства-времени. Хотя полный ответ выходит за рамки данной работы, всегда можно построить упрощенную модель, реализующую любую функцию процесса. Действительно, в работе [Baumeler Д, Costa F, Ralph T C, Wolf S and Zych M 2019] было показано, что каждая функция процесса может быть расширена до обратимой, возможно, добавляя дополнительные области и степени свободы. Это, в свою очередь, означает, что существуют обратимые физические процессы, реализующие данную функцию. Ярким примером вычислений является "модель бильярдного шара" [Fredkin E and Toffoli T 1982]. В этой модели 0 (1) представляет собой отсутствие (присутствие) бильярдного шара. Посредством соответствующих столкновений, которые могут включать отражающие стенки или дополнительные шары, можно реализовать любое функциональное отношение между начальным и конечным состояниями. Чтобы превратить это в модель перемещения во времени, достаточно встроить вычисления в пространство-время с замкнутыми времениподобными кривыми, так что выход вычисления отобразится идентично входу соответствующих локальных областей, которые сами находятся в прошлом области столкновения. Пример с четырьмя червоточинами, основанный на пространствах-временах в ссылке [Echeverria F, Klinkhammer G and Thorne K S 1991], показан на рис.6

Если динамика вне четырех локальных областей на рис. 6 определяется аказуальными функциями процесса, такими как уравнение (12) или уравнение (13), то агенты могут взаимодействовать друг с другом, одновременно проверяя, находятся ли они в прошлом, настоящем и будущем по отношению друг к другу. Поскольку эти функции удовлетворяют условию самосогласованности (2), они гарантируют, что для каждого выбора локальных операций существует согласованное решение. Таким образом, агенты могут сигнализировать друг другу без причинного порядка и без какой-либо логической непоследовательности. Остается открытым вопрос, насколько типична эта ситуация и каковы пространства-времени и физические системы, для которых возможны нетривиальные, самосогласованные путешествия во времени.

Выводы

Разработана характеристика детерминированных процессов в присутствии *замкнутых времениподобных петель* (CTC) для произвольного числа локализованных областей. Наши доказательства показали, что нетривиальное перемещение во времени между несколькими областями согласуется с отсутствием логического парадокса до тех пор, пока выходы всех областей, кроме двух, фиксированы и возможна не более, чем односторонняя сигнализация.

Наиболее значительным результатом нашей работы является открытие четких нетривиальных функций четырехстороннего процесса, совместимых с наличием CTC. Это показывает, что когда несколько локальных областей взаимодействуют друг с другом в присутствии CTC, существует широкий спектр коммуникационных сценариев, которые все еще позволяют свободу выбора для наблюдателей в каждой области без развития логической непоследовательности, таких как дедушкин парадокс. Диапазон различных сценариев коммуникации, которые согласуются с наличием CTC, доказывает, что способ, которым CTC позволяют нескольким наблюдателям в различных областях общаться, не слишком ограничен конфликтом между локальностью, свободой выбора и логической последовательностью. В результате мы продемонстрировали, что существует целый ряд сценариев, в которых несколько наблюдателей могут общаться без причинного порядка в классической структуре. Наши результаты получены в абстрактной структуре, которая не зависит от деталей динамики или геометрии пространства-времени. Чтобы найти подлинные физические сценарии, реализующие аказуальные процессы, которые мы обнаружили необходимы дальнейшие исследования.

Работа [3] знаменательна тем, что авторы попытались построить альтернативную, но мысленную динамику, свободную от возникновения парадоксов, связанных с нарушением причинности. Следует отметить её сугубую математическую абстрактность, а к реальной физике имеющей пока лишь косвенное отношение.

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теория поля.* Том II. М., Наука, 1988.
https://www.dropbox.com/s/1xidvqxbwcgyhuq/Landau2.pdf?dl=0
https://cloud.mail.ru/public/5c19/5C13KtGWj
https://www.academia.edu/44365431/

2. С. Хокинг, Дж. Эллис. *Крупномасштабная структура пространства-времени*. М., Мир, 1977.
https://www.dropbox.com/s/rzv4ehpfublvbtt/HawkingEllis.pdf?dl=0
https://cloud.mail.ru/public/3NNm/26rJ56e5B
https://www.academia.edu/44322238/

2[a]. С.В. Красников. *Пространства-времена с нестандартными причинными свойствами*. Диссертация на соискание ученой степени д. ф.м.н. Санкт-Петербург. 2014.
https://cloud.mail.ru/public/R3Xk/tmieMXCcy

3. G. Tobar, F. Costa. *Обратимая динамика с замкнутым времениподобными кривыми и свободой выбора*. 2020.
https://www.dropbox.com/s/ohf6j21k7qo8l0a/ClassicalAndQuantumGravity.pdf?dl=0
https://cloud.mail.ru/public/2VvM/4WE7b2kpP
https://www.academia.edu/44299931/

4. Baumeler D, Costa F, Ralph T C, Wolf S, Zych M. 2019. *Reversible time travel with freedom of choice.* Class Quantum Grav. 36 224002

5. В.А. Касимов. *Теория относительности*. СИБПРИНТ Новосибирск 2014
https://www.dropbox.com/s/odqtz8sagsfnnlj/TO-01-02-2018.pdf?dl=0
https://cloud.mail.ru/public/9UQm/VgUxtqSY3
https://www.academia.edu/35877014/
http://vixra.org/pdf/1807.0060v1.pdf

6. А.А. Логунов. *Лекции по теории относительности и гравитации. Современный анализ проблемы*. М., Наука, 1987
https://cloud.mail.ru/public/45C1/5MW6qdGUWC