

# New transformations of space-time

Abdelaziz Chahboun

8 août 2020

Abstract : The replacement of Lorentz transformations by new spatio -temporal transformations gives results already known and others "undecidable" in the theory of special relativity.

## 1 Introduction

Les transformations vectorielles de Lorentz (TVL) sont

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \frac{\vec{r} \cdot v\vec{n}}{c^2}) & (a) \\ \vec{r}' = \vec{r} + (\gamma - 1)(\vec{r} \cdot \vec{n})\vec{n} - \gamma tv\vec{n} & (b) \end{cases} \quad (1.1)$$

avec

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}'_{\perp} + \vec{r}'_{\parallel} \\ \vec{r}' = \vec{r}'_{\perp} + \vec{r}'_{\parallel} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

I) On suppose que  $\vec{r}$  est orthogonal à l'axe de vecteur directeur  $\vec{n} = \frac{\vec{v}}{v}$ , l'équation (a) devient :

$$t' = \gamma[t - v(\vec{r}'_{\perp} + \vec{r}'_{\parallel}) \cdot \vec{n}]$$

par supposition la projection de  $\vec{r}$  sur l'axe de vecteur directeur  $\vec{n}$  est  $\vec{r}'_{\parallel} = 0$  et  $\vec{r}'_{\perp} \cdot \vec{n} = 0$ , ce qui donne

$$t' = \gamma t \quad (1.2)$$

et l'équation (b) s'écrit

$$\vec{r}' = \vec{r}'_{\perp} + \vec{r}'_{\parallel} = \vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel} + (\gamma - 1)[(\vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel}) \cdot \vec{n}] \vec{n} - \gamma v t \vec{n}$$

avec :

$$\vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp}$$

ce qui en résulte avec (1.2)

$$\vec{r}'_{\parallel} = -v t' \vec{n}$$

on a

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r}'_{\perp} + \vec{r}'_{\parallel} = \vec{r}_{\perp} + \vec{r}'_{\parallel} \\ r'^2 &= r^2 + r'^2_{\parallel} = r^2 + v^2 t'^2 \end{aligned}$$

pour la lumière , l'équation précédente donne

$$\begin{aligned} c^2 t'^2 &= c^2 t^2 + v^2 t'^2 \\ t' &= \gamma t \end{aligned}$$

Les deux équations du système (1.1) donne le même résultat.

II) Dans les transformations vectorielles inverses de Lorentz

$$\begin{cases} t = \gamma(t' + \frac{\vec{r}' \cdot v \vec{n}}{c^2}) & (a') \\ \vec{r} = \vec{r}' + (\gamma - 1)(\vec{r}' \cdot \vec{n}) \vec{n} + \gamma t' v \vec{n} & (b') \end{cases} \quad (1.3)$$

on suppose que  $\vec{r}'$  est orthogonal à l'axe de vecteur directeur  $\vec{n} = \frac{\vec{v}}{v}$ , (comme pour le calcul de l'angle d'aberration) on a

$$\begin{cases} t = \gamma[t' + v(\vec{r}'_{\perp} + \vec{r}'_{\parallel}) \cdot \vec{n}] \\ \vec{r} = \vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel} = \vec{r}'_{\perp} + \vec{r}'_{\parallel} + (\gamma - 1)[(\vec{r}'_{\perp} + \vec{r}'_{\parallel}) \cdot \vec{n}] \vec{n} + \gamma v t' \vec{n} \end{cases}$$

par supposition la projection de  $\vec{r}'$  sur l'axe de vecteur directeur  $\vec{n}$  est  $\vec{r}'_{\parallel} = 0$  et  $\vec{r}'_{\perp} \cdot \vec{n} = 0$

l'équation (a') devient

$$t = \gamma t' \quad (1.4)$$

la relation (b') avec :  $\vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp}$  et (1.4) est équivalente à

$$\vec{r}_{\parallel} = v t \vec{n}$$

et

$$\vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel = \vec{r}'_\perp + \vec{r}'_\parallel$$

de norme

$$r^2 = r'^2 + r_\parallel^2 = r'^2 + v^2 t^2$$

pour la lumière, on a

$$c^2 t^2 = c^2 t'^2 + v^2 t^2$$

i.e

$$t = \gamma t'$$

qui n'est que l'équation (1.4).

Les équations (1.2) et (1.4) montrent que le temps ne dépend pas de l'espace .

## 2 Nouvelles transformations

### 2.1 Rappel

les transformations très connues de l'espace-temps sont

- les transformations directes de Galilée (TG)[1]

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{u} t \\ t' = t \end{cases} \quad (2.1.1)$$

- Les transformations directes de Lorentz (TL)[2]

$$\begin{cases} x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ t' = \frac{t - \frac{u}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (2.2.2)$$

### 2.2 Les nouvelles transformations (NT)

On suppose

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - k\vec{u} t \\ t' = kt \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Avec  $\vec{u}$  la vitesse du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  au repos (fig. 1) .

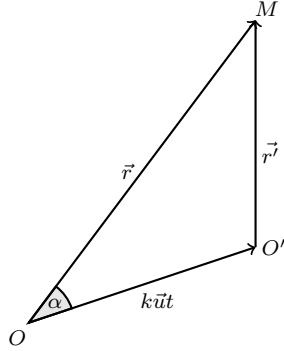


Figure. 1 : On prend seulement le plan des trois points O(observateur fixe), O'(observateur mobile) ,M (point dans l'espace-temps), avec  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ ,  $\vec{r}' = \overrightarrow{O'M}$ ,  $k\vec{u}t = \overrightarrow{OO'}$  .

- Pour trouver l'expression du facteur k , on remplace l'équation (1) dans l'équation  $\vec{r}'^2 - c^2t'^2 = 0$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \vec{r} - k\vec{u}t^2 - c^2k^2t^2 &= 0 \\ \vec{r}^2 + k^2\vec{u}^2 t^2 - 2kt(\vec{r} \cdot \vec{u}) - c^2k^2t^2 &= 0 \\ r^2 + k^2u^2 t^2 - 2kru t \cos(\alpha) - c^2k^2t^2 &= 0 \end{aligned}$$

Pour la lumière, on a  $ct' = kct$ , i.e :  $r' = kr$  :

$$r^2 + k^2 \frac{u^2}{c^2} r^2 - 2k \frac{u}{c} r^2 \cos(\alpha) - k^2 r^2 = 0$$

$$1 + k^2 \frac{u^2}{c^2} - 2k \frac{u}{c} \cos(\alpha) - k^2 = 0$$

on pose  $\beta = \frac{u}{c}$

$$(1 - \beta^2)k^2 + 2k \frac{u}{c} \cos(\alpha) - 1 = 0 \quad (2.2.2)$$

les solutions de l'équation de deuxième degré en k sont

$$k_{\pm} = \frac{1}{\beta \cos(\alpha) \pm \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\alpha)}}$$

On appelle l'angle  $(\alpha)$  l'angle entre l'espace et le temps.

on va prendre seulement la valeur de  $k$  avec le signe (+) devant la racine carré car l'autre solution ne vérifie pas un axiome de la distance ( $d(O, M) \geq 0$ ).

Soit  $\alpha = 0$  ou  $\pi$ , la solution où il y a le signe (-) devant la racine carré donne

$$k = \frac{1}{-1 + \beta} \text{ ou } k = \frac{1}{-1 - \beta}$$

on'a pour la norme :

$$\|\vec{r}'\| = -\frac{\|\vec{r}\|}{1 - \beta} < 0 \text{ ou } \|\vec{r}'\| = -\frac{\|\vec{r}\|}{1 + \beta} < 0$$

donc

$$k = \frac{1}{\beta \cos(\alpha) + \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\alpha)}} \quad (2.2.3)$$

les nouvelles transformation s'écrivent

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \frac{\vec{u}t}{\frac{u}{c} \cos(\alpha) + \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2} \sin^2(\alpha)}} & (1) \\ t' = \frac{t}{\frac{u}{c} \cos(\alpha) + \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2} \sin^2(\alpha)}} & (2) \end{cases} \quad (2.2.4)$$

- Si  $k \simeq 1$ , on retrouve les TG comme pour les TL.
- Le facteur  $k$  peut s'écrire

$$k = \frac{1}{(\vec{n}' + \vec{\beta}) \cdot \vec{n}} \quad (2.2.5)$$

avec :  $\vec{n}' = \frac{\vec{r}'}{r'}$  et  $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$

### 3 Conséquences

#### 3.1 Dilatation, contraction et invariance de l'espace-temps

De l'équation (1) de (2.2.4), on a

$$d\vec{r}' = d\vec{r} - k\vec{u}dt \quad (3.1.1)$$

D'après le schéma (1), si deux événements se passent en un même point  $M$  fixe par rapport à l'observateur  $O$  avec une différence de temps de  $dt$ , on a  $d\vec{r} = \vec{c}dt$  (le point  $M$  est au repos dans l'espace, non pas dans le temps), cette différence du temps est équivalente à deux événements séparés dans l'espace et "simultanés".

La relation (3.1.1) devient

$$dr' \vec{n}' = dr(\vec{n} - k\vec{\beta}) \quad (3.1.2)$$

avec la relation (2.2.5), on a

$$\begin{aligned} dr' &= kdr \\ \iff dt' &= kdt \end{aligned}$$

qui est la différentielle de la relation (2) de (2.2.4).

Puisque  $\frac{1}{1+\beta} \leq k \leq \frac{1}{1-\beta}$ , il existe une relation entre l'angle  $\alpha$  et  $\beta$  pour laquelle  $k = 1$  qui est :

$$\cos(\alpha) = \frac{\beta}{2} \quad (3.1.3)$$

- Si  $\frac{1}{1+\beta} \leq k < 1$ , on a contraction de l'espace-temps.
- Si  $1 < k \leq \frac{1}{1-\beta}$ , on a dilatation de l'espace-temps.
- Si  $k = 1$ , on a invariance de l'espace-temps.

## 3.2 Effets Doppler

- Effet Doppler longitudinal :

Pour  $k(u, \alpha = \pi) = \frac{1}{1-\frac{u}{c}}$ , on'a d'après (2.2.4)

$$\begin{cases} r'_1 = r + \frac{ut}{1-\frac{u}{c}} \\ t'_1 = \frac{t}{1-\frac{u}{c}} \end{cases} \quad (3.2.1)$$

$$\begin{cases} r'_1 = \left(1 + \frac{\frac{u}{c}}{1-\frac{u}{c}}\right) r \\ t'_1 = \left(1 + \frac{\frac{u}{c}}{1-\frac{u}{c}}\right) t \end{cases}$$

$$\begin{cases} r'_1 = \frac{r}{1-\frac{u}{c}} \\ t'_1 = \frac{t}{1-\frac{u}{c}} \end{cases} \quad (3.2.2)$$

- Pour un observateur qui s'éloigne d'une source de lumière (émetteur) ou vice versa, on a

$$\begin{cases} dr'_1 = \lambda' = \frac{dr}{1-\frac{u}{c}} = \frac{\lambda}{1-\frac{u}{c}} \\ dt'_1 = T' = \frac{dt}{1-\frac{u}{c}} = \frac{T}{1-\frac{u}{c}} \end{cases}$$

on a la dilatation des longueurs et du temps ou de l'espace-temps.

La fréquence de la lumière est donnée par

$$f' = \frac{1}{T'} = \frac{1-\frac{u}{c}}{T} = \left(1 - \frac{u}{c}\right) f \quad (3.2.3)$$

comme en physique classique.

- Pour  $k(u, \alpha = 0) = \bar{k} = \frac{1}{1+\frac{u}{c}}$ <sup>1</sup>

$$\begin{cases} \bar{r}'_1 = r - \frac{ut}{1+\frac{u}{c}} \\ \bar{t}'_1 = \frac{t}{1+\frac{u}{c}} \end{cases} \quad (3.2.4)$$

$$\begin{cases} \bar{r}'_1 = \left(1 - \frac{\frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}}\right) r \\ \bar{t}'_1 = \left(1 - \frac{\frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}}\right) t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{r}'_1 = \frac{r}{1+\frac{u}{c}} \\ \bar{t}'_1 = \frac{t}{1+\frac{u}{c}} \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Pour un observateur qui s'approche d'une source de lumière (émetteur) ou réciproquement, la fréquence de la lumière est donnée par

$$\begin{cases} d\bar{r}' = \bar{\lambda}' = \frac{dr}{1+\frac{u}{c}} = \frac{\lambda}{1+\frac{u}{c}} = \bar{k} \lambda \\ d\bar{t}' = \bar{T}' = \frac{dt}{1+\frac{u}{c}} = \frac{T}{1+\frac{u}{c}} = \bar{k} T \end{cases}$$

on a la contraction des longueurs et du temps ou de l'espace-temps.

La fréquence de la lumière est donnée par

$$\bar{f}' = \frac{1}{\bar{T}'} = \frac{1+\frac{u}{c}}{T} = \left(1 + \frac{u}{c}\right) f \quad (3.2.6)$$

---

1. les notations  $\bar{k}, \bar{r}, \bar{t}, \dots$  vont nous servir plus loin .

aussi un résultat classique.

- Effet Doppler transversal :

Pour  $k(u, \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \gamma$  (facteur de Lorentz)

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \frac{\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} t \\ t' = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (3.2.7)$$

$$r'^2 = r^2 + \frac{(ut)^2}{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

$$r'^2 = \left(1 + \frac{(\frac{u}{c})^2}{1-\frac{u^2}{c^2}}\right) r^2$$

$$r'^2 = \left(\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}\right) r^2$$

$$r' = \frac{r}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad (3.2.8)$$

Qu'on peut déduire directement de la relation :  $t' = kt$  et mettre sous la forme  $dr' = kdr$  qui exprime la dilatation transversal de l'espace-temps.

La fréquence a pour expression

$$f' = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} f \quad (3.2.9)$$

comme en relativité restreinte (RR).

- Remarque (a) :

$$r'^2 = \frac{r^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \gamma^2 r^2 = \left(\frac{r}{1-\frac{u}{c}}\right) \left(\frac{r}{1+\frac{u}{c}}\right) = kr \bar{k}r$$

$$r'^2 = r'_1 \bar{r}'_1 \quad (3.2.10)$$

où  $r'_1$  et  $\bar{r}'_1$  sont définis en (3.2.2) et (3.2.5).



- Remarque (b) :

Pour une vitesse  $\vec{u}$  colinéaire avec  $\vec{r}$  ( $\cos(\alpha) = \pm 1$ ), on a d'après (3.2.1) et (3.2.4)

$$\begin{cases} r = r' - kut \\ r = \bar{r}' + \bar{k}ut \end{cases}$$

puisque  $ct' = r' = kct = kr$  :

$$\begin{cases} r = kr - kut \\ r = \bar{k}r + \bar{k}ut \end{cases} \quad (3.2.11)$$

$$\begin{cases} r = k(r - ut) \\ r = \bar{k}(r + ut) \end{cases} \quad (3.2.12)$$

on déduit du produit des deux équations du système (3.2.12)

$$r^2 = k\bar{k}(r - ut)(r + ut) = k\bar{k}r^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)$$

$$k\bar{k} = \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \gamma^2 \quad (3.2.13)$$

Les formules (3.2.12) ont la même forme que les TL (directes et inverses [3]) mais des transformations identiques et qui sont déterminantes des facteurs  $k(u, \pi)$  et  $\bar{k}(u, 0)$ .

- Remarque (c) : On peut déduire le facteur  $k$  à partir de la méthode active (voir plus loin : Représentation vectorielle de l'espace-temps) en formalisant un phénomène naturel représenté dans l'Annexe 1.

### 3.3 Composition des vitesses

On a d'après (2.3)

$$\begin{cases} d\vec{r}' = d\vec{r} - k\vec{u} dt \\ dt' = k dt \end{cases}$$

la dérivation par rapport à  $dt'$  est

$$\frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{\vec{u} dt}{dt'}$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r}}{kdt} - \frac{k\vec{u}dt}{kdt}$$

on pose  $k = \frac{1}{a}$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt'} = a \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{u}$$

donc

$$\vec{v}' = a\vec{v} - \vec{u} \quad (3.3.1)$$

qui est une nouvelle formule de composition des vitesses .

- pour  $k(u, \pi)$ , i.e,  $a = 1 - \frac{u}{c}$

$$v' = \left(1 - \frac{u}{c}\right) v + u \quad (3.3.2)$$

si  $v = c$

$$v' = c$$

- pour  $k(u, 0)$ , i.e,  $a = 1 + \frac{u}{c}$  :

$$v' = \left(1 + \frac{u}{c}\right) v - u \quad (3.3.3)$$

si  $v = c$  , on a

$$v' = c$$

- Le cas générale se démontre de la même manière que pour les transformations inverses

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{u} dt' \\ t = a t' \end{cases} \quad (3.3.4)$$

la dérivation par rapport à  $dt$  est

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{\vec{u}dt'}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{adt'} + \frac{\vec{u}dt'}{adt'}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{a} \left( \frac{d\vec{r}'}{dt'} + \frac{\vec{u}dt'}{dt'} \right)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = k \left( \frac{d\vec{r}'}{dt'} + \vec{u} \right)$$

$$\vec{v} = k(\vec{v}' + \vec{u}) \quad (3.3.5)$$

ce n'est qu'une autre façon d'écrire la formule (3.3.1) (pour les transformations inverses).

- Calcul de la norme de  $\vec{v}$  :

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \frac{\vec{v}}{v} &= \vec{v} \cdot \vec{n} = k(\vec{v}' + \vec{u}) \cdot \vec{n} \\ \vec{v} \cdot \vec{n} &= k(\vec{v}' \cdot \vec{n} + \vec{u} \cdot \vec{n}) \\ v &= k[v' \cos(\omega) + u \cos(\alpha)] \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

d'après les relations trigonométriques dans un triangle, on a :

$$\begin{aligned} \frac{ct'}{\sin(\alpha)} &= \frac{ut'}{\sin(\omega)} \\ \sin(\omega) &= \frac{u}{c} \sin(\alpha) \\ \sin^2(\omega) &= \beta^2 \sin^2(\alpha) \\ 1 - \cos^2(\omega) &= \beta^2 \sin^2(\alpha) \\ \cos^2(\omega) &= 1 - \beta^2 \sin^2(\alpha) \\ \cos(\omega) &= \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\alpha)} \end{aligned}$$

L'élimination de la solution négative est dû à un axiome définissant la distance (comme pour le facteur  $k$ ) et la relation (3.2.6) devient

$$v = k \left[ u \cos(\alpha) + v' \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\alpha)} \right]$$

soit  $\beta' = \frac{u}{v'}$

$$v = v' \frac{\beta' \cos(\alpha) + \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\alpha)}}{\beta \cos(\alpha) + \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\alpha)}} \quad (3.3.7)$$

pour  $v' = c$ , on a

$$v = c$$

La vitesse de la lumière est invariante par les NT.

### 3.4 Aberration de la lumière

Pour simplifier, on suppose que le mouvement du référentiel  $\mathcal{R}'$  est dans le plan (x,y) suivant l'axe (Ok) où k est la projection orthogonale sur le plan (x,y) du point M (source de lumière) et les axes (oz),(o'z') sont parallèles. d'après la relation (3.3.5), on a

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = k(v' \cdot \vec{n} + \vec{u} \cdot \vec{n})$$

avec  $\vec{n} = \frac{\vec{u}}{u}$

$$\begin{cases} v \cos(\alpha) = k[v' \cos(\alpha') + u] \\ v \sin(\alpha) = kv' \sin(\alpha') \end{cases} \quad (3.4.1)$$

dans le cas où  $v = v' = c$

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = k[\cos(\alpha') + \frac{u}{c}] \\ \sin(\alpha) = k \sin(\alpha') \end{cases} \quad (3.4.2)$$

La lumière va en sens opposé à celui de l'axe (o'z') avec  $\alpha' = -\frac{\pi}{2}$ .

L'angle d'aberration entre la lumière provenant d'une étoile (source) et l'observateur dans le référentiel au repos est :  $\omega = -(\alpha + \frac{\pi}{2})$  et d'après (3.4.2), on a

$$tg(\omega) = -tg(\alpha + \frac{\pi}{2}) = cotg(\alpha) = -\frac{u}{c} \quad (3.4.3)$$

c'est un résultat 'classique' [4].

### 3.5 Formules mathématiques

- Expression du facteur k en fonction de l'angle  $\alpha$  entre  $\vec{r}$  et  $\vec{u}$

Dans le cas d'un repère non orthogonal (x,y), on a :

$$\begin{aligned} \vec{l}^2 &= \vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{x} \cdot \vec{y} \\ l^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

$$\begin{aligned} x^2 &= l^2 - y^2 + 2xy \cos(\alpha) \\ x^2 &= l^2 \left[ 1 - \frac{y^2}{l^2} + 2 \frac{x}{l} \frac{y}{l} \cos(\alpha) \right] \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

si on pose

$$\begin{cases} x = r = ct \\ y = ut' \\ l = r' = ct' \end{cases} \quad (3.5.3)$$

la relation précédente devient

$$r^2 = r'^2 \left[ 1 - \frac{u^2}{c^2} + 2 \frac{1}{k} \frac{u}{c} \cos(\alpha) \right]$$

on multiplie l'équation par le facteur  $k^2$

$$k^2 r^2 = r'^2 \left[ \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) k^2 + 2 \frac{u}{c} k \cos(\alpha) \right]$$

or on sait que  $r' = kct = kr$ , i.e

$$\left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) k^2 + 2 \frac{u}{c} k \cos(\alpha) - 1 = 0$$

qui est l'équation (2.2.2).

On note le facteur  $k$  on fonction de l'angle  $\alpha$

$$\begin{cases} k(u, \alpha) = k = \frac{1}{\beta \cos(\alpha) + \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\alpha)}} & \text{si } \alpha \in ]0, \pi] \\ k(u, \alpha + \pi) = \bar{k} = \frac{1}{\beta \cos(\alpha + \pi) + \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\alpha + \pi)}} & \text{si } \alpha \in ]\pi, 2\pi] \\ k\bar{k} = \gamma^2 \end{cases} \quad (3.5.4)$$

dans le cas où  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , (orthogonalité de l'espace et du temps ) on a

$$k = \bar{k} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

- Expression du facteur  $k = \frac{1}{h}$  en fonction de l'angle  $\theta$  entre  $\vec{l}$  et  $\vec{y}$

D'après la relation d'Al-kashi dans un triangle

$$x^2 = l^2 + y^2 - 2ly \cos(\theta)$$

$$x^2 = l^2 \left[ 1 + \frac{y^2}{l^2} - 2 \frac{y}{l} \cos(\theta) \right]$$

avec (3.5.3) et  $r' = kr$ , on a

$$r^2 = r'^2 \left[ 1 + \frac{u^2}{c^2} - 2 \frac{u}{c} \cos(\theta) \right]$$

donc

$$k = \frac{1}{h} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{c^2} - 2 \frac{u}{c} \cos(\theta)}} \quad (3.5.5)$$

dans le cas où  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , comme dans le cas où on calcule l'aberration de la lumière ( $\vec{u} \perp \vec{r}'$ ) on 'a

$$\begin{cases} r' = \frac{r}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{r}{h} \\ t' = \frac{t}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{t}{h} \end{cases} \quad (3.5.6)$$

qui exprime la contraction de l'espace-temps et qu'on peut la déduire de la méthode active représenté dans l'annexe 2 .

- Si le mouvement du référentiel  $\mathcal{R}'$  est rectiligne et les points de départ et d'arrivé appartiennent à une sphère dont le centre est le lieu de l'événement, i.e  $\|\vec{r}'\| = \|\vec{r}\|$ , (réalisation de la condition (3.1.3)) on a

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t' \\ t' = t \end{cases} \quad (3.5.7)$$

### 3.6 Explication de l'expérience de Michelson-Morley

On sait d'après (3.5.1), (3.5.2) et (3.5.4) que dans un repère (L,l) quelconque, les normes

$$\begin{aligned} L_1'^2 &= L^2 + l^2 - 2Ll \cos(\alpha) & \alpha \in ]0, \pi[ \\ \bar{L}_1'^2 &= L^2 + \bar{l}^2 + 2L\bar{l} \cos(\alpha) & \alpha \in ]\pi, 2\pi[ \end{aligned}$$

s'écrivent

$$L_1' = kL \quad (3.6.1)$$

$$\bar{L}_1' = \bar{k}L \quad (3.6.2)$$

et que

$$L'^2 = L_1' \bar{L}_1' = k \bar{k} L^2 = \gamma^2 L^2 \quad (3.6.3)$$

est la norme dans un repère (L,l) orthogonal ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ) qu'on peut écrire sous la forme :

$$2L' = 2\gamma L = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2 \sin^2(\alpha)}} (k + \bar{k})L \quad (3.6.4)$$

pour  $\alpha = \pi$  ,  $k = \frac{1}{1-\beta}$  ,  $\bar{k} = \frac{1}{1+\beta}$  , on retrouve l'expression qui explique l'expérience de Michelson-Morley sans avoir recours à l'hypothèse de Lorentz-FitzGerald (L-f)  $\mathcal{L}' = \sqrt{1-\beta^2}L$ .

Pour n'importe quelle position de l'interféromètre par rapport à la source de lumière, l'hypothèse de L-F doit avoir la forme

$$\mathcal{L}' = L \sqrt{\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2 \sin^2(\alpha)}} \quad (3.6.5)$$

pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\mathcal{L}' = L$$

or on n'a pas besoin de cette hypothèse qui n'a pas de signification physique dans notre contexte et la relation (3.6.4) n'est qu'une autre façon d'écrire la relation (3.6.3) où  $L'$  est une norme dans la base (L,l).

### 3.7 Invariance de l'équation d'onde

La forme la plus simple de l'équation d'onde est

$$\frac{\partial^2 \phi}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0 \quad (3.7.1)$$

on appliquant les équations de changement de variables

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \phi}{\partial r'} \frac{\partial r'}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial r} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial r'} \frac{\partial r'}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} \end{cases}$$

d'après les formules  $r' = kr = \frac{r}{a}$  ,  $t' = kt = \frac{t}{a}$

$$\begin{cases} \frac{\partial r'}{\partial r} = k \quad \text{et} \quad \frac{\partial t'}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial t'}{\partial t} = k \quad \text{et} \quad \frac{\partial r'}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

le système antérieur devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial r} = k \frac{\partial \phi}{\partial r'} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} = k \frac{\partial \phi}{\partial t'} \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{aligned} k^2 \left( \frac{\partial^2 \phi}{c^2 \partial t'^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r'^2} \right) &= \frac{\partial^2 \phi}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

L'équation d'onde dans le vide est invariante par les NT.

## 4 Cinématique relativiste :

### 4.1 Représentation vectorielle de l'espace-temps :

Au lieu de faire un changement de référentiel, on considère que le référentiel  $\mathcal{R}$  est lié à l'événement qui se passe en son origine O et qu'un point M animé d'un mouvement rectiligne uniforme avec une vitesse  $\vec{v}$  et qui se trouve à l'instant  $t_0 = \frac{\|OM\|}{c} = r_0$  en M et à l'instant  $t = \frac{\|OM'\|}{c} = r$  en  $M'$  avec  $\overrightarrow{MM'} = \vec{l} = \vec{v}t$  (fig. 2 ci-dessous), on a :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t \quad (4.1.1)$$

$$\vec{r}_0 = \vec{r} - \vec{v}t$$

$$\vec{r}_0 = \vec{r} - \vec{l} \quad (4.1.2)$$

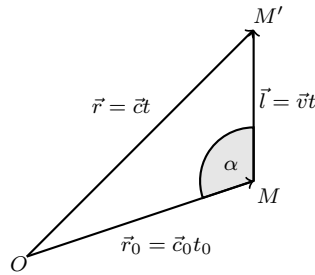


Figure.2

on représente la relation (4.1.2) par

$$\vec{r}_0 = (\vec{r}, \vec{l}) \quad (4.1.3)$$



d'après (2) de (2.2.4) (avec changement de notation), on a :

$$dt = k dt_0 = \frac{dt_0}{a} = \frac{dt_0}{\beta \cos(\alpha) + \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\alpha)}}$$

## 4.2 Vecteur vitesse

La dérivation de (4.1.3) par rapport à  $dt_0$  est

$$\frac{d\vec{r}_0}{dt_0} = \left( \frac{d\vec{r}}{dt_0}, \frac{d\vec{l}}{dt_0} \right)$$

$$\frac{d\vec{r}_0}{dt_0} = \left( \frac{d\vec{r}}{adt}, \frac{d\vec{l}}{adt} \right) \quad (4.2.1)$$

$$\vec{c}_0 = \left( \frac{\vec{c}}{a}, \frac{\vec{v}}{a} \right) \quad (4.2.2)$$

de norme

$$c^2 = \frac{c^2}{a^2} - \frac{v^2}{a^2} + 2c \frac{v}{a} \cos(\alpha) \quad (4.2.3)$$

Pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , on retrouve la pseudo-norme du quadrivecteur vitesse  $(\frac{c}{a}, \frac{\vec{v}}{a})$  de la RR .

La norme d'un vecteur unitaire  $\vec{u} = (k\vec{n}, k\vec{\beta})$  avec  $\|\vec{n}\| = 1$  est

$$\vec{u}^2 = k^2 - k^2\beta^2 + 2k\beta \cos(\alpha) = 1 \quad (4.2.4)$$

## 4.3 Vecteur accélération

La dérivation de (4.2.1) par rapport à  $dt_0$  est

$$\frac{d^2\vec{r}_0}{dt_0^2} = \frac{d}{dt_0} \left( \frac{d\vec{r}}{adt}, \frac{d\vec{l}}{adt} \right)$$

$$\frac{d\vec{c}_0}{dt_0} = \left( \frac{d(\frac{\vec{c}}{a})}{adt}, \frac{d(\frac{\vec{v}}{a})}{adt} \right)$$

la vitesse de la lumière suivant l'axe (OM) est  $\vec{c}_0 = cst$  , donc

$$\left( \frac{d(\frac{\vec{c}}{a})}{adt}, \frac{d(\frac{\vec{v}}{a})}{adt} \right) = \vec{0} \quad (4.3.1)$$

La norme de l'accélération est nulle dans la représentation vectorielle de l'espace-temps .

## 5 Dynamique relativiste

### 5.1 Principe fondamental de dynamique relativiste

On considère que la vitesse  $\vec{v}$  n'est pas constante ! (même façon de faire qu'en RR), multipliant (6.3.1) par la masse  $m_0$  :

$$\frac{d(m_0\vec{c}_0)}{dt_0} = \left( \frac{d(\frac{m_0\vec{c}}{a})}{adt}, \frac{d(\frac{m_0\vec{v}}{a})}{adt} \right) \quad (5.1.1)$$

qu'on note

$$\vec{\mathcal{F}}_0 = (\vec{\mathcal{F}}, \vec{F}) \quad (5.1.2)$$

avec la représentation vectorielle, on a :

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{F}}_0 = \vec{\mathcal{F}} - \vec{F} & (\xi) \\ \vec{c}_0 = \frac{\vec{c}}{a} - \frac{\vec{v}}{a} & (\eta) \end{cases}$$

le produit scalaire  $(\xi) \cdot (\eta)$  donne

$$\vec{\mathcal{F}}_0 \cdot \vec{c}_0 = \left( \vec{\mathcal{F}} \cdot \frac{\vec{c}}{a} - \vec{F} \cdot \frac{\vec{v}}{a} \right) - \left( \vec{\mathcal{F}}_0 \cdot \frac{\vec{v}}{a} + \vec{c}_0 \cdot \vec{F} \right) \quad (5.1.3)$$

pour

$$\vec{\mathcal{F}}_0 \cdot \frac{\vec{v}}{a} + \vec{c}_0 \cdot \vec{F} = 0 \quad (5.1.4)$$

on a le produit minkowskien de la RR

$$\vec{\mathcal{F}}_0 \cdot \vec{c}_0 = \left( \vec{\mathcal{F}} \cdot \frac{\vec{c}}{a} - \vec{F} \cdot \frac{\vec{v}}{a} \right)$$

de (4.3.1) on déduit que  $\vec{\mathcal{F}}_0 = \vec{0}$  et la relation précédente devient

$$\vec{\mathcal{F}} \cdot \frac{\vec{c}}{a} = \vec{F} \cdot \frac{\vec{v}}{a}$$

i.e :

$$\frac{d(\frac{m_0\vec{c}}{a})}{adt} \cdot \vec{c} - \frac{d(\frac{m_0\vec{v}}{a})}{adt} \cdot \vec{v} = 0 \quad (5.1.5)$$

et la condition (5.1.4) se réduit à  $\vec{F} \perp \vec{c}_0$ , i.e :

$$\vec{f} \perp \vec{c}_0 \quad (5.1.6)$$

avec  $\vec{F} = k\vec{f} = k \frac{d(\frac{m_0\vec{v}}{a})}{dt}$  comme en RR et (5.1.5) devient

$$\frac{dE}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} \quad (5.1.7)$$

## 5.2 Énergie et impulsion

On multiplie la relation (4.2.2) par la masse  $m_0$

$$m_0 \vec{c}_0 = \left( \frac{m_0 \vec{c}}{a}, \frac{m_0 \vec{v}}{a} \right) \quad (5.2.1)$$

on pose :

$$\begin{cases} \vec{P}_0 = m_0 \vec{c}_0 \\ \vec{P} = \frac{m_0 \vec{c}}{a} = k m_0 \vec{c} \\ \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{a} = k m_0 \vec{v} \end{cases} \quad (5.2.2)$$

les deux premières équations du système (5.2.2) signifient que la particule est dans un champs qui se propage avec une vitesse finie  $\vec{c}$ .

La relation (5.2.1) s'écrit

$$\vec{P}_0 = (\vec{P}, \vec{p}) \quad (5.2.3)$$

de norme

$$\vec{P}^2 = \vec{P}_0^2 + \vec{p}^2 - 2aPp \cos(\alpha) \quad (5.2.4)$$

puisque :  $aP = P_0$  car  $\|\vec{c}\| = \|\vec{c}_0\| = c$ , la relation devient

$$\vec{P}^2 = \vec{P}_0^2 + \vec{p}^2 - 2P_0 p \cos(\alpha) \quad (5.2.5)$$

si on pose

$$\begin{cases} \vec{P}_0 = \vec{E}_0/c \\ \vec{P} = \vec{E}/c \end{cases}$$

la relation (5.2.3) devient

$$\vec{E}_0 = (\vec{E}, \vec{p}c) = \vec{E} - \vec{p}c \quad (5.2.6)$$

de norme

$$E^2 = E_0^2 + \vec{p}^2 c^2 - 2E_0 pc \cos(\alpha) \quad (5.2.7)$$

si  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , on a la relation d'Einstein

$$E^2 = E_0^2 + \vec{p}^2 c^2 \quad (5.2.8)$$

qu'on peut la déduire de la multiplication des deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{p}_1 c & , k(\alpha = \pi) \\ \vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{p}_1 c & , \bar{k}(\alpha = 2\pi) \end{cases} \quad (5.2.9)$$

avec toujours les notations

$$\begin{cases} X_1 = kX_0 \\ \bar{X}_1 = \bar{k}X_0 \\ X^2 = X\bar{X} = \gamma X_0^2 \end{cases} \quad (5.2.10)$$

$X$  : une distance ou un temps ou une impulsion ou une énergie.

La relation (5.1.7) peut être obtenue pas une autre manière :

On a d'après la figure.2

$$d\vec{r} = d\vec{l} = \vec{v}dt$$

et la relation (5.2.6)

$$d\vec{E} = d\vec{p}c = \vec{f}cdt$$

d'après (4.2.2)

$$d\vec{E} \cdot \vec{n} = d\vec{p} \cdot \vec{c} = \vec{f} \cdot (a\vec{c}_0 + \vec{v})dt$$

$$\frac{dE}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} + a\vec{f} \cdot \vec{c}_0$$

$$\frac{dE}{adt} - \frac{\vec{f}}{a} \cdot \vec{v} = \vec{f} \cdot \vec{c}_0$$

si  $\vec{f} \perp \vec{c}_0$  (condition (5.1.6)), on retrouve la relation (5.1.7).

### 5.3 Transformation des vecteurs impulsion et force

- Transformation des vecteurs :

Un vecteur  $\vec{A}(\vec{X}, \vec{Y})$  dans  $\mathcal{R}$  se transforme dans  $\mathcal{R}'$  en un vecteur  $\vec{A}'(\vec{X}', \vec{Y}')$  selon les formules suivantes :

$$\begin{cases} \vec{Y}' = \vec{Y} - k\beta X \\ X' = kX \end{cases} \quad (5.3.1)$$

par exemple, la transformation du vecteur vitesse  $\vec{V}(\kappa\vec{c}, \kappa\vec{v})$  dans  $\mathcal{R}$  en vecteur vitesse  $\vec{V}'(\kappa'\vec{c}, \kappa'\vec{v})$  dans  $\mathcal{R}'$  est

$$\begin{cases} \kappa'\vec{v}' = \kappa\vec{v} - k\beta c \\ \kappa'c = k\kappa c \end{cases} \quad (5.3.2)$$

la deuxième relation du système a pour conséquence

$$k = \frac{\kappa'}{\kappa} \quad (5.3.3)$$

on l'injecte dans la première équation de (5.3.2), on retrouve la relation de composition des vitesses (3.3.5).

- Transformation du vecteur impulsion  $\vec{P}(\frac{\vec{E}}{c}, km_0\vec{v})$

$$\begin{cases} \vec{p}' = \vec{p} - k\vec{\beta}\frac{E}{c} \\ E' = kE \end{cases} \quad (5.3.4)$$

qu'on peut obtenir directement de (5.3.2) en multipliant les deux équations du système par une masse  $m_0$ .

- Transformation du vecteur force  $\vec{F}(\frac{\kappa}{c}(\vec{f}\cdot\vec{v})\frac{\vec{c}}{c}, \kappa\vec{f})$

$$\begin{cases} \kappa'\vec{f}' = \kappa\left(\vec{f} - k\frac{\vec{\beta}}{c}(\vec{f}\cdot\vec{v})\right) \\ \frac{1}{c}\kappa'(\vec{f}'\cdot\vec{v}') = \frac{1}{c}k\kappa(\vec{f}\cdot\vec{v}) \end{cases} \quad (5.3.5)$$

compte tenu de (5.3.3) avec  $k = \frac{1}{a}$ , le système précédent devient

$$\begin{cases} \vec{f}' = a\left(\vec{f} - k\frac{\vec{\beta}}{c}(\vec{f}\cdot\vec{v})\right) \\ \vec{f}'\cdot\vec{v}' = \vec{f}\cdot\vec{v} \end{cases} \quad (5.3.6)$$

ou sous forme de transformations inverses

$$\begin{cases} \vec{f} = k\left(\vec{f}' + \frac{\vec{\beta}}{c}(\vec{f}'\cdot\vec{v}')\right) \\ \vec{f}\cdot\vec{v} = \vec{f}'\cdot\vec{v}' \end{cases} \quad (5.3.6)$$

## 6 Liens avec la mécanique quantique relativiste :

Les équations de correspondance entre les valeurs classiques et les opérateurs :

$$\begin{cases} E \longleftrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{p} \longleftrightarrow -i\hbar\vec{\nabla} \end{cases}$$

donnent pour la relation (5.2.7)

$$-\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\psi(\vec{r}, t) = \left[ \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \nabla^2 + i\frac{m_0c}{\hbar}\cos(\alpha)\nabla \right] \psi(\vec{r}, t) \quad (6.1)$$

ou

$$\left[ \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} + i \frac{m_0 c}{\hbar} \vec{\nabla} \cdot \vec{n} \right] \psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (6.2)$$

Pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , avec  $\vec{n} = \frac{\vec{c}_0}{c}$ , on retrouve l'équation de Klein -Gordon [5]

$$\left[ \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right] \psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (6.3)$$

qu'on peut déduire de (5.2.9) pour  $k(\alpha = \pi)$  et  $\bar{k}(\alpha = 2\pi)$ , i.e

$$E^2 = E\bar{E} = (E_0 + pc)(E_0 - \bar{p}c)$$

avec

$$\frac{\partial^2 \psi(r, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi(r_1, \bar{r}_1, t_1, \bar{t}_1)}{\partial t_1 \partial \bar{t}_1} = \frac{\partial \psi_1(r_1, t_1)}{\partial t_1} \frac{\partial \psi_1(\bar{r}_1, \bar{t}_1)}{\partial \bar{t}_1}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial \psi_1}{\partial t_1} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \bar{t}_1}$$

et

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{\partial \psi_1}{\partial r_1} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \bar{r}_1}$$

i.e

$$\Delta \psi = \nabla_1 \psi_1 \bar{\nabla}_1 \bar{\psi}_1$$

Pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , i.e  $k = \bar{k}$ , qui implique que  $\nabla = \bar{\nabla}$ , on a

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla_1 \bar{\nabla}_1 \quad (6.4)$$

ce qui est une autre façon d'écrire l'opérateur laplacien.

Il est aussi possible de déduire de (6.1) un potentiel  $U(r)$  (fonction hypergéométrique confluente) qui vérifie

$$\left[ \nabla^2 - \left( \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} + i \frac{m_0 c}{\hbar} \vec{\nabla} \cdot \vec{n} \right) \right] U(r) = 0 \quad (6.5)$$

qui se réduit au potentiel de Yukawa dans le cas de  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

La relation (5.2.6) donne

$$m_0 \vec{c}_0 = i\hbar \left( \frac{\overrightarrow{\partial \psi}}{c \partial t}, -\vec{\nabla} \psi \right) \quad (6.6)$$

$$\iff \left( \frac{\overrightarrow{\partial}}{c \partial t} + \vec{\nabla} + i \frac{m_0 \vec{c}_0}{\hbar} \right) \psi(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (6.7)$$

dont la norme est l'équation (6.1).

## 7 Conclusion

On a montré à partir des NT que le temps 'relatif' ne dépend pas de l'espace comme (1.2) et (1.4) (déduites directement des TVL) contrairement à l'idée très répandue et formalisée dans le boost de Lorentz et qu'il y a des résultats communs aux deux transformations comme :

- *effets Doppler relativiste transversal.*
- *invariance de la vitesse de la lumière.*
- *invariance de l'équation d'onde (de d'Alembert).*

et d'autres 'indécidables' dans la théorie de la RR :

- *généralisation du facteur de Lorentz ( $k(\frac{\pi}{2}) = \gamma$ ).*
- *contraction et invariance (galiléen :  $\forall \vec{v}(O') \leq c$ ) du temps.*

L'application des NT d'une façon active (un point de l'espace-temps qui bouge au lieu du référentiel  $\mathcal{R}'$ ) permet :

- *une représentation vectorielle de l'espace-temps.*
- *une généralisation de l'équation d'Einstein :  $E^2 = m^2 + p^2$ , ( $c = 1$ ).*
- *la 'linéarisation' de l'équation quantique de la fonction d'onde sans passer par les spineurs de Dirac.*

Des travaux récents en théorie de la gravitation quantique à boucles et en théorie des cordes laissent soupçonner que la relation de dispersion énergie-quantité de mouvement d'une particule massive ne serait plus de la forme :  $E = \sqrt{m^2 + p^2}$ .

Des tests expérimentaux de cette violation potentielle sont actuellement en cours .

Le cas  $k < 1$  constitue une violation de l'invariance de Lorentz ( il n'y a pas de dilatation du temps ) .

- [1] L.Landau et E.Lifchitz, Mécanique (Mir,Moscou,1969)
- [2] N.Éfimov, Géométrie supérieure (Mir,Moscou,1981)
- [3] V.Smirnov, Cours de mathématiques supérieures,Tome III, 1 ère partie  
(Mir,Moscou,1970)
- [4] V.Ougarov, Théorie de la relativité réstreinte (Mir,Moscou,1979)
- [5] L.Landau et E.Lifchitz, Electrodynamique quantique (Mir,Moscou,1973)



**Annexe 1 : Dédution du facteur  $k(\alpha, v)$  à partir de la représentation géométrique d'un phénomène naturel .**

Soit (O) le lieu de l'émission d'un signal lumineux et (M) un point animé d'un mouvement rectiligne uniforme avec une vitesse  $\vec{v}$  et qui se trouve à l'instant  $t = \frac{\|OM\|}{c} = r$  en M et à l'instant  $t' = \frac{\|OM'\|}{c} = r'$  en  $M'$  avec  $\overrightarrow{MM'} = \vec{l} = \vec{v}t'$  et la condition : le signal lumineux est émit au moment où le point (M) se met en mouvement (Fig.a).

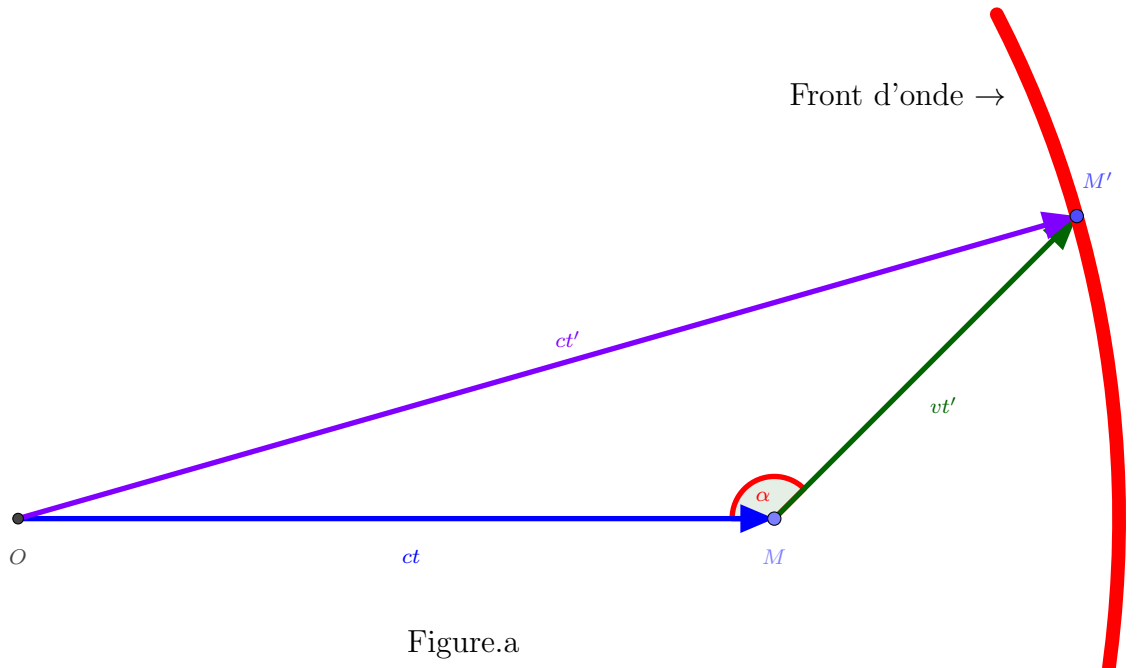


Figure.a

D'après la relation Al-Kashi, on a

$$c^2t'^2 = c^2t^2 + v^2t'^2 - ct'vt \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow t' = \frac{t}{\beta \cos(\alpha) + \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\alpha)}} \quad , \quad \beta = \frac{v}{c}$$

en comparant avec (2.2.3), on a

$$t' = kt$$

$$\Rightarrow dt' = kdt$$

Pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , la dernière relation est déduite 'classiquement' de la métrique hyperbolique

$$ds^2 = c^2 dt'^2 - dl^2 \quad (A1)$$

avec  $ds = cdt$ ,  $l = vt'$

**Annexe 2 : Déduction du facteur  $k(\theta = \frac{\pi}{2}, v)$  à partir de la représentation géométrique d'un phénomène naturel .**

En plus des conditions précédentes pour déduire  $k(\alpha, v)$ , on suppose que le mobile et l'onde se rencontrent suivant un angle droit (Fig.b, comme pour le calcul de l'angle d'aberration).

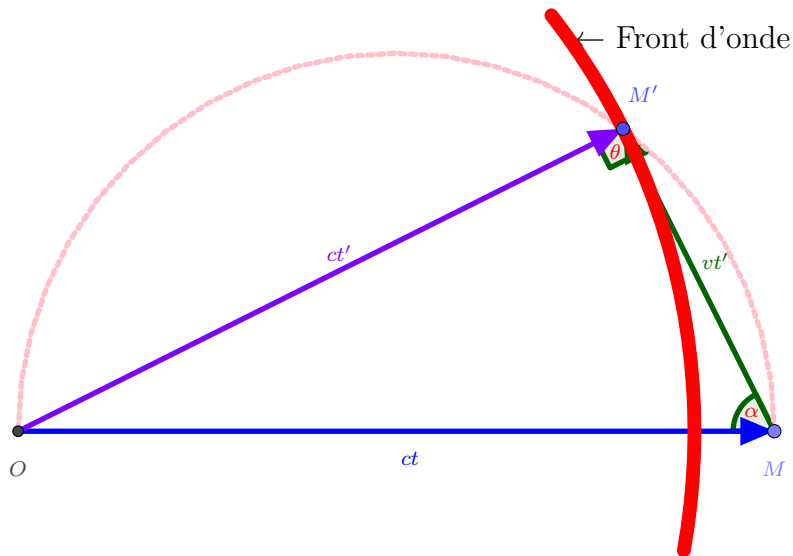


Figure.b

D'après le théorème de Pythagore, on a

$$c^2 t^2 = c^2 t'^2 + v^2 t'^2$$

$$\Rightarrow t' = \frac{t}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}$$

qui est la 2 ème relation du système (3.5.6).

Sa différentielle peut être déduite de la métrique Euclidienne

$$ds^2 = c^2 dt'^2 + dl^2 \quad (A2)$$

avec :  $ds = c dt$  ,  $l = vt'$ .

On constate que la métrique Euclidienne a un rôle à jouer dans la représentation de l'espace-temps.

D'après la figure.b,  $tg(\alpha) = \frac{c}{v}$  équivalente à  $cotg(\alpha) = \frac{v}{c}$  qui n'est que la relation (3.4.3) de l'aberration de lumière au signe près dû à la méthode active.