New transformations of space-time

Abdelaziz Chahboun

4 juillet 2020

Abstract : The replacement of Lorentz transformations by new spatio -temporal transformations gives results already known and others "undecidable" in the theory of special relativity.

1 Introduction

Les transformations vectorielles de Lorentz sont

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \frac{\vec{r}.v\vec{n}}{c^2}) & (a) \\ \\ \vec{r'} = \vec{r} + (\gamma - 1)(\vec{r}\cdot\vec{n})\vec{n} - \gamma t v\vec{n} & (b) \end{cases} \tag{1.1}$$

avec

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_{||} \\ \vec{r'} = \vec{r'}_\perp + \vec{r'}_{||} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

I) On suppose que $\vec{r}$ est orthogonal à l'axe de vecteur directeur $\vec{n} = \frac{\vec{v}}{v}$, l'équation (a) devient :

$$t' = \gamma[t - v(\vec{r}_\perp + \vec{r}_{||}).\vec{n}]$$

par supposition la projection de $\vec{r}$ sur l'axe de vecteur directeur $\vec{n}$ est $\vec{r}_{||} = 0$ et $\vec{r}_\perp.\vec{n} = 0$, ce qui donne

$$t' = \gamma t \tag{1.2}$$

et l'équation (b) s'écrit

$$\vec{r'} = \vec{r'}_\perp + \vec{r'}_{||} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_{||} + (\gamma - 1)[(\vec{r}_\perp + \vec{r}_{||}).\vec{n}]\vec{n} - \gamma v t \vec{n}$$

avec :

$$\vec{r'}_\perp = \vec{r}_\perp$$

ce qui en résulte avec (1.2)

$$\vec{r'}_{||} = -vt'\vec{n}$$

on a

$$\vec{r'} = \vec{r'}_\perp + \vec{r'}_{||} = \vec{r}_\perp + \vec{r'}_{||}$$
$$r'^2 = r^2 + r'^2_{||} = r^2 + v^2 t'^2$$

pour la lumière , l'équation précédente donne

$$c^2 t'^2 = c^2 t^2 + v^2 t'^2$$
$$t' = \gamma t$$

Les deux équations du système (1.1) donne le même résultat.

II) Dans les transformations vectorielles inverses de Lorentz

$$\begin{cases} t = \gamma(t' + \frac{\vec{r'}.v\vec{n}}{c^2}) & (a') \\ \\ \vec{r} = \vec{r'} + (\gamma - 1)(\vec{r'} \cdot \vec{n})\vec{n} + \gamma t' v \vec{n} & (b') \end{cases} \tag{1.3}$$

on suppose que $\vec{r'}$ est orthogonal à l'axe de vecteur directeur $\vec{n} = \frac{\vec{v}}{v}$, (comme pour le calcul de l'angle d'aberration) on a

$$\begin{cases} t = \gamma[t' + v(\vec{r'}_\perp + \vec{r'}_{||}).\vec{n}] \\ \\ \vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_{||} = \vec{r'}_\perp + \vec{r'}_{||} + (\gamma - 1)[(\vec{r'}_\perp + \vec{r'}_{||}).\vec{n}]\vec{n} + \gamma v t' \vec{n} \end{cases}$$

par supposition la projection de $\vec{r'}$ sur l'axe de vecteur directeur $\vec{n}$ est $\vec{r'}_{||} = 0$ et $\vec{r'}_\perp.\vec{n} = 0$

l'équation (a') devient

$$t = \gamma t' \tag{1.4}$$

la relation (b') avec : $\vec{r'}_\perp = \vec{r}_\perp$ et (1.4) est équivalente à

$$\vec{r}_{||} = vt\vec{n}$$

et

$$\vec{r} = \vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{||} = \vec{r'}_{\perp} + \vec{r}_{||}$$

de norme

$$r^2 = r'^2 + r_{||}^2 = r'^2 + v^2t^2$$

pour la lumière, on a

$$c^2t^2 = c^2t'^2 + v^2t^2$$

i.e

$$t = \gamma t'$$

qui n'est que l'équation (1.4).

On comparant (1.2) et (1.4), on voit que la position de l'événement par rapport aux deux référentiels a une importance pour savoir dans lequel le temps se dilate.

2 Nouvelles transformations

2.1 Rappel

les transformations très connues de l'espace-temps sont

- les transformations directes de Galilée (TG)[1]

$$\begin{cases} \vec{r'} = \vec{r} - \vec{u}\,t \\ t' = t \end{cases} \tag{2.1.1}$$

- Les transformations directes de Lorentz (TL)[2]

$$\begin{cases} x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ \\ t' = \frac{t-\frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{cases} \tag{2.2.2}$$

2.2 Les nouvelles transformations (NT)

On suppose

$$\begin{cases} \vec{r'} = \vec{r} - k\vec{u}\,t \\ t' = kt \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Avec $\vec{u}$ la vitesse du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ au repos (schéma (1)) .

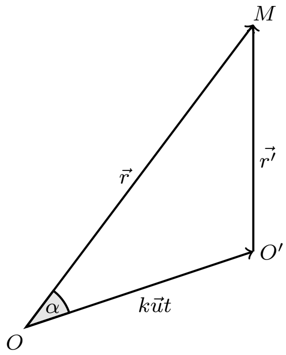


schéma (1) : On prend seulement le plan des trois points O(observateur fixe),O'(observateur mobile) ,M (point dans l'espace-temps), avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{r}' = \overrightarrow{O'M}, k\vec{u}t = \overrightarrow{OO'}$.

- Pour trouver l'expression du facteur k , on remplace l'équation (1) dans l'équation $\vec{r'}^2 - c^2t'^2 = 0$, ce qui donne

$$\vec{r} - k\vec{u}\,t^2 - c^2k^2t^2 = 0$$
$$\vec{r}^2 + k^2\vec{u}^2\,t^2 - 2kt\,(\vec{r}.\vec{u}) - c^2k^2t^2 = 0$$
$$r^2 + k^2u^2\,t^2 - 2kru\,t\cos(\alpha) - c^2k^2t^2 = 0$$

Pour la lumière, on a $ct' = kct$, i.e : $r' = kr$:

$$r^2 + k^2\frac{u^2}{c^2}\,r^2 - 2k\frac{u}{c}r^2\cos(\alpha) - k^2r^2 = 0$$

$$1 + k^2\frac{u^2}{c^2} - 2k\frac{u}{c}\cos(\alpha) - k^2 = 0$$

on pose $\beta = \frac{u}{c}$

$$(1-\beta^2)k^2 + 2k\frac{u}{c}\cos(\alpha) - 1 = 0 \tag{2.2.2}$$

les solutions de l'équation de deuxième degré en k sont

$$k_{\pm} = \frac{1}{\beta\cos(\alpha) \pm \sqrt{1-\beta^2\sin^2(\alpha)}}$$

On appelle l'angle (α) l'angle entre l'espace et le temps.

on va prendre seulement la valeur de k avec le signe (+) devant la racine carré car l'autre solution ne vérifie pas un axiome de la distance ($d(O, M) \geq 0$).

Soit $\alpha = 0$ ou π, la solution où il y a le signe (-) devant la racine carré donne

$$k = \frac{1}{-1+\beta} \text{ ou } k = \frac{1}{-1-\beta}$$

on'a pour la norme :

$$||\vec{r'}|| = -\frac{||\vec{r}||}{1-\beta} < 0 \text{ ou } ||\vec{r'}|| = -\frac{||\vec{r}||}{1+\beta} < 0$$

donc

$$k = \frac{1}{\beta\cos(\alpha) + \sqrt{1-\beta^2\sin^2(\alpha)}} \tag{2.2.3}$$

les nouvelles transformation s'écrivent

$$\begin{cases} \vec{r}\,' = \vec{r} - \dfrac{\vec{u}\,t}{\frac{u}{c}\cos(\alpha)+\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}\sin^2(\alpha)}} & (1) \\ \\ t' = \dfrac{t}{\frac{u}{c}\cos(\alpha)+\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}\sin^2(\alpha)}} & (2) \end{cases} \tag{2.2.4}$$

- Si $k \simeq 1$, on retrouve les TG comme pour les TL.
- Le facteur k peut s'écrire

$$k = \frac{1}{(\vec{n}' + \vec{\beta}).\vec{n}} \tag{2.2.5}$$

avec : $\vec{n}' = \frac{\vec{r}'}{r'}$,$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$

3 Conséquences

3.1 Dilatation, contraction et invariance de l'espace-temps

De l'équation (1) de (2.2.4), on a

$$d\vec{r}\,' = d\vec{r} - k\vec{u}dt \tag{3.1.1}$$

D'après le schéma (1), si deux événements se passent en un même point M fixe par rapport à l'observateur O avec une différence de temps de dt , on a $d\vec{r} = \vec{c}dt$ (le point M est au repos dans l'espace, non pas dans le temps), cette différence du temps est équivalente à deux événements séparés dans l'espace et "simultanés" .
La relation (3.1.1) devient

$$dr'\vec{n}\,' = dr(\vec{n} - k\vec{\beta}) \tag{3.1.2}$$

avec la relation (2.2.5), on a

$$dr' = kdr$$
$$\Longleftrightarrow \quad dt' = kdt$$

qui est la différentielle de la relation (2) de (2.2.4).

Puisque $\frac{1}{1+\beta} \leqslant k \leqslant \frac{1}{1-\beta}$, il existe une relation entre l'angle α et β pour laquelle $k = 1$ qui est :

$$\cos(\alpha) = \frac{\beta}{2} \tag{3.1.3}$$

- Si $\frac{1}{1+\beta} \leqslant k < 1$, on a contraction de l'espace-temps.
- Si $1 < k \leqslant \frac{1}{1-\beta}$, on a dilatation de l'espace-temps.
- Si $k = 1$, on a invariance de l'espace-temps.

3.2 Effets Doppler

- Effet Doppler longitudinal :

Pour $k(u, \alpha = \pi) = \frac{1}{1-\frac{u}{c}}$, on'a d'après (2.2.4)

$$\begin{cases} r'_1 = r + \frac{ut}{1-\frac{u}{c}} \\ t'_1 = \frac{t}{1-\frac{u}{c}} \end{cases} \tag{3.2.1}$$

$$\begin{cases} r\,'_1 = \left(1 + \frac{\frac{u}{c}}{1-\frac{u}{c}}\right) r \\ \\ t\,'_1 = \left(1 + \frac{\frac{u}{c}}{1-\frac{u}{c}}\right) t \end{cases}$$

$$\begin{cases} r'_1 = \frac{r}{1-\frac{u}{c}} \\ t'_1 = \frac{t}{1-\frac{u}{c}} \end{cases} \tag{3.2.2}$$

- Pour un observateur qui s'éloigne d'une source de lumière (émetteur) ou vice versa, on a

$$\begin{cases} dr'_1 = \lambda' = \frac{dr}{1-\frac{u}{c}} = \frac{\lambda}{1-\frac{u}{c}} \\ \\ dt'_1 = T' = \frac{dt}{1-\frac{u}{c}} = \frac{T}{1-\frac{u}{c}} \end{cases}$$

on a la dilatation des longueurs et du temps ou de l'espace-temps.

La fréquence de la lumière est donnée par

$$f' = \frac{1}{T'} = \frac{1-\frac{u}{c}}{T} = \left(1 - \frac{u}{c}\right) f \qquad (3.2.3)$$

comme en physique classique.

- Pour $k(u, \alpha = 0) = \bar{k} = \frac{1}{1+\frac{u}{c}}$ [1]

$$\begin{cases} \bar{r}'_1 = r - \frac{ut}{1+\frac{u}{c}} \\ \bar{t}'_1 = \frac{t}{1+\frac{u}{c}} \end{cases} \qquad (3.2.4)$$

$$\begin{cases} \bar{r}'_1 = \left(1 - \frac{\frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}}\right) r \\ \\ \bar{t}'_1 = \left(1 - \frac{\frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}}\right) t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{r}'_1 = \frac{r}{1+\frac{u}{c}} \\ \bar{t}'_1 = \frac{t}{1+\frac{u}{c}} \end{cases} \qquad (3.2.5)$$

Pour un observateur qui s'approche d'une source de lumière (émetteur) ou réciproquement, la fréquence de la lumière est donnée par

$$\begin{cases} d\bar{r}' = \bar{\lambda}' = \frac{dr}{1+\frac{u}{c}} = \frac{\lambda}{1+\frac{u}{c}} = \bar{k}\,\lambda \\ d\bar{t}' = \overline{T}' = \frac{dt}{1+\frac{u}{c}} = \frac{T}{1+\frac{u}{c}} = \bar{k}\,T \end{cases}$$

on a la contraction des longueurs et du temps ou de l'espace-temps.
La fréquence de la lumière est donnée par

$$\bar{f}' = \frac{1}{\overline{T}'} = \frac{1+\frac{u}{c}}{T} = \left(1 + \frac{u}{c}\right) f \qquad (3.2.6)$$

1. les notations $\bar{k}$,$\bar{r}$,$\bar{t}$,... vont nous servir plus loin .

aussi un résultat classique.

- Effet Doppler transversal :

Pour $k(u, \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \gamma$ (facteur de Lorentz)

$$\begin{cases} \vec{r'} = \vec{r} - \frac{\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\, t \\ t' = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{cases} \tag{3.2.7}$$

$$r'^2 = r^2 + \frac{(ut)^2}{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

$$r'^2 = \left(1 + \frac{(\frac{u}{c})^2}{1-\frac{u^2}{c^2}}\right) r^2$$

$$r'^2 = \left(\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}\right) r^2$$

$$r' = \frac{r}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{3.2.8}$$

Qu'on peut déduire directement de la relation : $t' = kt$ et mettre sous la forme $dr' = kdr$ qui exprime la dilatation transversal de l'espace-temps.

La fréquence a pour expression

$$f' = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\, f \tag{3.2.9}$$

comme en relativité restreinte (RR).

- Remarque (a) :

$$r'^2 = \frac{r^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \gamma^2 r^2 = \left(\frac{r}{1-\frac{u}{c}}\right)\left(\frac{r}{1+\frac{u}{c}}\right) = kr\,\bar{k}r$$

$$r'^2 = r'_1\,\bar{r}'_1 \tag{3.2.10}$$

où r'_1 et $\bar{r}'_1$ sont définit en (3.2.2) et (3.2.5).

- Remarque (b) :
Pour une vitesse $\vec{u}$ colinéaire avec $\vec{r}$ ($\cos(\alpha) = \pm 1$), on a d'après (3.2.1) et (3.2.4)

$$\begin{cases} r = r' - kut \\ r = \bar{r}\,' + \bar{k}ut \end{cases}$$

Puisque $ct' = r' = kct = kr$:

$$\begin{cases} r = kr - kut \\ r = \bar{k}r + \bar{k}ut \end{cases} \tag{3.2.11}$$

$$\begin{cases} r = k(r - ut) \\ r = \bar{k}(r + ut) \end{cases} \tag{3.2.12}$$

on déduit du produit des deux équations du système (3.2.12)

$$r^2 = k\bar{k}(r - ut)(r + ut) = k\bar{k}r^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)$$

$$k\bar{k} = \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \gamma^2 \tag{3.2.13}$$

les formules (3.2.12) ont la même forme que les TL (directes et inverses [3]) mais des transformations identiques et qui sont déterminantes des facteurs $k(u, \pi)$ et $\bar{k}(u, 0)$.

3.3 Composition des vitesses

On a d'après (2.3)

$$\begin{cases} d\vec{r'} = d\vec{r} - k\vec{u}\,dt \\ dt' = kdt \end{cases}$$

la dérivation par rapport à dt' est

$$\frac{d\vec{r'}}{dt'} = \frac{d\vec{r}}{dt'} - \frac{\vec{u}dt}{dt'}$$

$$\frac{d\vec{r'}}{dt'} = \frac{d\vec{r}}{kdt} - \frac{k\vec{u}dt}{kdt}$$

on pose $k = \frac{1}{a}$

$$\frac{d\vec{r'}}{dt'} = a\frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{u}$$

donc

$$\vec{v'} = a\vec{v} - \vec{u} \tag{3.3.1}$$

qui est une nouvelle formule de composition des vitesses .

- pour $k(u,\pi)$, i.e, $a = 1 - \frac{u}{c}$

$$v' = \left(1 - \frac{u}{c}\right) v + u \tag{3.3.2}$$

si $v = c$

$$v' = c$$

- pour $k(u,0)$, i.e, $a = 1 + \frac{u}{c}$:

$$v' = \left(1 + \frac{u}{c}\right) v - u \tag{3.3.3}$$

si $v = c$, on a

$$v' = c$$

- le cas générale se démontre de la même manière que pour les transformations inverses

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r'} + \vec{u}\, dt' \\ t = a\, t' \end{cases} \tag{3.3.4}$$

la dérivation par rapport à dt est

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r'}}{dt} + \frac{\vec{u}dt'}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r'}}{adt'} + \frac{\vec{u}dt}{adt'}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{a}\left(\frac{d\vec{r'}}{dt'} + \frac{\vec{u}dt'}{dt'}\right)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = k\left(\frac{d\vec{r'}}{dt'} + \vec{u}\right)$$

$$\vec{v} = k(\vec{v'} + \vec{u}) \tag{3.3.5}$$

ce n'est qu'une autre façon d'écrire la formule (3.3.1) (pour les transformations inverses).
- Calcul de la norme de $\vec{v}$:

$$\vec{v}.\frac{\vec{v}}{v} = \vec{v}.\vec{n} = k(\vec{v'} + \vec{u}).\vec{n}$$

$$\vec{v}.\vec{n} = k(\vec{v'}.\vec{n} + \vec{u}.\vec{n})$$

$$v = k[v' \cos(\omega) + u \cos(\alpha)] \tag{3.3.6}$$

d'après les relations trigonométriques dans un triangle, on a :

$$\frac{ct'}{\sin(\alpha)} = \frac{ut'}{\sin(\omega)}$$

$$\sin(\omega) = \frac{u}{c} \sin(\alpha)$$

$$\sin^2(\omega) = \beta^2 \sin^2(\alpha)$$

$$1 - \cos^2(\omega) = \beta^2 \sin^2(\alpha)$$

$$\cos^2(\omega) = 1 - \beta^2 \sin^2(\alpha)$$

$$\cos(\omega) = \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\alpha)}$$

L'élimination de la solution négative est dû à un axiome définissant la distance (comme pour le facteur k) et la relation (3.2.6) devient

$$v = k\left[u \cos(\alpha) + v' \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\alpha)}\,\right]$$

soit $\beta\,' = \frac{u}{v'}$

$$v = v'\,\frac{\beta' \cos(\alpha) + \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\alpha)}}{\beta \cos(\alpha) + \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\alpha)}} \tag{3.3.7}$$

pour $v' = c$, on a

$$v = c$$

La vitesse de la lumière est invariante par les NT.

3.4 Aberration de la lumière

Pour simplifier, on suppose que le mouvement du référentiel $\mathcal{R}'$ est dans le plan (x,y) suivant l'axe (Ok) où k est la projection orthogonale sur le plan (x,y) du point M (source de lumière) et les axes (oz),$(o'z')$ sont parallèles. d'après la relation (3.3.5), on a

$$\vec{v}.\vec{n} = k(\vec{v'}.\vec{n} + \vec{u}.\vec{n})$$

avec $\vec{n} = \frac{\vec{u}}{u}$

$$\begin{cases} v\cos(\alpha) = k[v'\cos(\alpha') + u] \\ v\sin(\alpha) = kv'sin(\alpha') \end{cases} \tag{3.4.1}$$

dans le cas où $v = v' = c$

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = k[\cos(\alpha') + \frac{u}{c}] \\ \sin(\alpha) = ksin(\alpha') \end{cases} \tag{3.4.2}$$

La lumière va en sens opposé à celui de l'axe $(o'z')$ avec $\alpha' = -\frac{\pi}{2}$.
L'angle d'aberration entre la lumière provenant d'une étoile (source) et l'observateur dans le référentiel au repos est : $\omega = -(\alpha + \frac{\pi}{2})$ et d'après (3.4.2), on a

$$tg(\omega) = -tg(\alpha + \frac{\pi}{2}) = cotg(\alpha) = -\frac{u}{c} \tag{3.4.3}$$

c'est comme le résultat de la physique classique [4].

3.5 Formules mathématiques

- <u>Expression du facteur k en fonction de l'angle α entre $\vec{r}$ et $\vec{u}$</u>

Dans le cas d'un repère non orthogonal (x,y), on a :

$$\vec{l}^2 = \vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{x}.\vec{y}$$

$$l^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos(\alpha) \tag{3.5.1}$$

$$x^2 = l^2 - y^2 + 2xy\cos(\alpha)$$

$$x^2 = l^2\left[1 - \frac{y^2}{l^2} + 2\,\frac{x}{l}\,\frac{y}{l}\,\cos(\alpha)\right] \tag{3.5.2}$$

si on pose

$$\begin{cases} x = r = ct \\ y = ut' \\ l = r' = ct' \end{cases} \tag{3.5.3}$$

la relation précédente devient

$$r^2 = r'^{\,2}\left[1 - \frac{u^2}{c^2} + 2\,\frac{1}{k}\,\frac{u}{c}\,\cos(\alpha)\right]$$

on multiplient l'équation par le facteur k^2

$$k^2 r^2 = r'^{\,2}\left[\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)k^2 + 2\,\frac{u}{c}\,k\,\cos(\alpha)\right]$$

or on sait que $r' = kct = kr$, i.e

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)k^2 + 2\,\frac{u}{c}\,k\,\cos(\alpha) - 1 = 0$$

qui est l'équation (2.2.2).

On note le facteur k on fonction de l'angle α

$$\begin{cases} k(u,\alpha) = k = \frac{1}{\beta\cos(\alpha)+\sqrt{1-\beta^2\sin^2(\alpha)}} & \text{si } \alpha \in]0,\pi] \\ \\ k(u,\alpha+\pi) = \bar{k} = \frac{1}{\beta\cos(\alpha+\pi)+\sqrt{1-\beta^2\sin^2(\alpha+\pi)}} & \text{si } \alpha \in]\pi,2\pi] \\ \\ k\bar{k} = \gamma^2 \end{cases} \tag{3.5.4}$$

dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{2}$, (orthogonalité de l'espace et du temps) on a

$$k = \bar{k} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

- Expression du facteur $k = \frac{1}{h}$ en fonction de l'angle θ entre $\vec{l}$ et $\vec{y}$

D'après la relation d'Al-kashi dans un triangle

$$x^2 = l^2 + y^2 - 2ly\cos(\theta)$$

$$x^2 = l^2\left[1 + \frac{y^2}{l^2} - 2\,\frac{y}{l}\,\cos(\theta)\right]$$

avec (3.5.3) et $r' = kr$, on a

$$r^2 = r'^{\,2}\left[1 + \frac{u^2}{c^2} - 2\,\frac{u}{c}\,\cos(\theta)\right]$$

donc

$$k = \frac{1}{h} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{c^2} - 2\,\frac{u}{c}\,\cos(\theta)}} \tag{3.5.6}$$

dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{2}$, comme dans le cas où on calcule l'aberration de la lumière ($\vec{u} \perp \vec{r'}$) on 'a

$$\begin{cases} r' = \frac{r}{\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}}} = hr \\ t' = \frac{t}{\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}}} = ht \end{cases}$$

qui exprime la contraction de l'espace-temps.

- Si le mouvement du référentiel $\mathcal{R}'$ est rectiligne et les points de départ et d'arrivé appartiennent à une sphère dont le centre est le lieu de l'événement, i.e $|||\vec{r'}|| = ||\vec{r}||$, (réalisation de la condition (3.1.3)) on a

$$\begin{cases} \vec{r'}' = \vec{r} - \vec{u}t' \\ t' = t \end{cases} \tag{3.5.6}$$

3.6 Explication de l'expérience de Michelson-Morley

On sait d'après (3.5.1), (3.5.2) et (3.5.4) que dans un repère (L,l) quelconque, les normes

$$\begin{aligned} L_1'^{\,2} &= L^2 + l^2 - 2Ll\cos(\alpha) \qquad \alpha \in]0, \pi] \\ \bar{L}_1'^2 &= L^2 + \bar{l}^{\,2} + 2L\bar{l}\cos(\alpha) \qquad \alpha \in]\pi, 2\pi] \end{aligned}$$

s'écrivent

$$L_1' = kL \tag{3.6.1}$$

$$\bar{L}_1' = \bar{k}L \tag{3.6.2}$$

et que

$$L'^2 = L_1'\bar{L}_1' = k\bar{k}L^2 = \gamma^2 L^2 \tag{3.6.3}$$

est la norme dans un repère (L,l) orthogonal ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) qu'on peut écrire sous la forme :

$$2L' = 2\gamma L = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2(\alpha)}}(k+\bar{k})L \tag{3.6.4}$$

pour $\alpha = \pi$, $k = \frac{1}{1-\beta}$,$\bar{k} = \frac{1}{1+\beta}$, on retrouve l'expression qui explique l'expérience de Michelson-Morley sans avoir recours à l'hypothèse de Lorentz–FitzGerald (L-f) $\mathcal{L}' = \sqrt{1-\beta^2}L$.

Pour n'importe quelle position de l'interféromètre par rapport à la source de lumière, l'hypothèse de L-F doit avoir la forme

$$\mathcal{L}' = L\sqrt{\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2\sin^2(\alpha)}} \tag{3.6.5}$$

pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\mathcal{L}' = L$$

or on n'a pas besoin de cette hypothèse qui n'a pas de signification physique dans notre contexte et la relation (3.6.4) n'est qu'une autre façon d'écrire la relation (3.6.3) où L' est une norme dans la base (L,l).

3.7 Invariance de l'équation d'onde

La forme la plus simple de l'équation d'onde est

$$\frac{\partial^2\phi}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = 0 \tag{3.7.1}$$

on appliquant les équations de changement de variables

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\partial\phi}{\partial r'}\frac{\partial r'}{\partial r} + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial r} \\ \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial r'}\frac{\partial r'}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} \end{cases}$$

d'après les formules $r' = kr = \frac{r}{a}$,$t' = kt = \frac{t}{a}$

$$\begin{cases} \frac{\partial r'}{\partial r} = k \quad \text{et} \quad \frac{\partial t'}{\partial r} = 0 \\ \\ \frac{\partial t'}{\partial t} = k \quad \text{et} \quad \frac{\partial r'}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

le système antéprécédent devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial r} = k\frac{\partial\phi}{\partial r'} \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} = k\frac{\partial\phi}{\partial t} \end{cases}$$

d'où :

$$k^2\left(\frac{\partial^2\phi}{c^2\partial t'^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial r'^2}\right) = \frac{\partial^2\phi}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2\phi}{c^2\partial t'^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial r'^2} = 0 \tag{3.7..2}$$

L'équation d'onde dans le vide est invariante par les NT.

4 Cinématique relativiste :

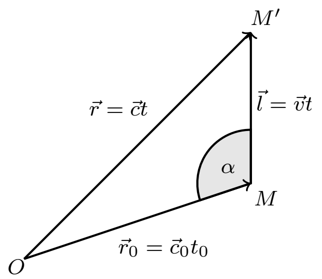
4.1 Représentation vectorielle de l'espace-temps :

Au lieu de faire un changement de référentiel, on considère que le référentiel $\mathcal{R}$ est lié à l'événement qui se passe en son origine O et qu'un point M animé d'un mouvement rectiligne uniforme avec une vitesse $\vec{u}$, se trouve à l'instant $t_0 = \frac{||OM||}{c} = r_0$ en M et à l'instant $t = \frac{||OM'||}{c} = r$ en M' avec $\overrightarrow{MM'} = \vec{l} = \vec{v}\,t$ (schéma : 2 ci-dessous), on a :

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v}\,t \tag{4.1.1}$$

$$\vec{r_0} = \vec{r} - \vec{v}\,t \tag{4.1.2}$$

$$\vec{r_0} = \vec{r} - \vec{l}$$



schema : 2

on représente la relation (4.1.2) par

$$\vec{r_0} = (\vec{r}, \vec{l}\,) \tag{4.1.3}$$

d'après (2) de (2.2.4) (avec changement de notation), on a :

$$dt = kdt_0 = \frac{dt_0}{a} = \frac{dt_0}{\beta\cos(\alpha) + \sqrt{1-\beta^2\sin^2(\alpha)}}$$

4.2 Vecteur vitesse

La dérivation de (4.1.3) par rapport à dt_0 est

$$\frac{d\vec{r}_0}{dt_0} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt_0}, \frac{d\vec{l}}{dt_0}\right)$$

$$\frac{d\vec{r}_0}{dt_0} = \left(\frac{d\vec{r}}{adt}, \frac{d\vec{l}}{adt}\right) \tag{4.2.1}$$

$$\vec{c}_0 = \left(\frac{\vec{c}}{a}, \frac{\vec{v}}{a}\right) \tag{4.2.2}$$

de norme

$$c^2 = \frac{c^2}{a^2} - \frac{v^2}{a^2} + 2c\,\frac{v}{a}\cos(\alpha) \tag{4.2.3}$$

Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on retrouve la pseudo-norme du quadrivecteur vitesse $(\frac{c}{a}, \frac{\vec{v}}{a})$ de la RR .
La norme d'un vecteur unitaire $\vec{u} = (k\vec{n}, k\vec{\beta})$ avec $||\vec{n}|| = 1$ est

$$\vec{u}^{\,2} = k^2 - k^2\beta^2 + 2k\beta\cos(\alpha) = 1 \tag{4.2.4}$$

4.3 Vecteur accélération

La dérivation de (4.2.1) par rapport à dt_0 est

$$\frac{d^2\vec{r}_0}{dt_0^2} = \frac{d}{dt_0}\left(\frac{d\vec{r}}{adt}, \frac{dl}{adt}\right)$$

$$\frac{d\vec{c}_0}{dt_0} = \left(\frac{d(\frac{\vec{c}}{a})}{adt}, \frac{d(\frac{\vec{v}}{a})}{adt}\right)$$

la vitesse de la lumière suivant l'axe (OM) est $\vec{c}_0 = cst$, donc

$$\left(\frac{d(\frac{\vec{c}}{a})}{adt}, \frac{d(\frac{\vec{v}}{a})}{adt}\right) = \vec{0} \tag{4.3.1}$$

La norme de l'accélération est nulle dans la représentation vectorielle de l'espace-temps .

5 Dynamique relativiste

5.1 Principe fondamental de dynamique relativiste

On considère que la vitesse $\vec{v}$ n'est pas constante ! (même façon de faire qu'en RR), multipliant (6.3.1) par la masse m_0 :

$$\frac{d(m_0\vec{c_0})}{dt_0} = \left(\frac{d(\frac{m_0\vec{c}}{a})}{adt}, \frac{d(\frac{m_0\vec{v}}{a})}{adt}\right) \tag{5.1.1}$$

qu'on note :

$$\vec{\mathcal{F}_0} = (\vec{\mathcal{F}}\ , \vec{F}) \tag{5.1.2}$$

avec la représentation vectorielle, on a :

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{F}_0} = \vec{\mathcal{F}} - \vec{F} & (\xi) \\ \vec{c_0} = \frac{\vec{c}}{a} - \frac{\vec{v}}{a} & (\eta) \end{cases}$$

le produit scalaire $(\xi).(\eta)$ donne

$$\vec{\mathcal{F}_0}.\vec{c_0} = \left(\vec{\mathcal{F}}.\frac{\vec{c}}{a} - \vec{F}.\frac{\vec{v}}{a}\right) - \left(\vec{\mathcal{F}_0}.\frac{\vec{v}}{a} + \vec{c_0}.\vec{F}\right) \tag{5.1.3}$$

pour

$$\vec{\mathcal{F}_0}.\frac{\vec{v}}{a} + \vec{c_0}.\vec{F} = 0 \tag{5.1.4}$$

on a le produit minkowskien de la RR

$$\vec{\mathcal{F}_0}.\vec{c_0} = \left(\vec{\mathcal{F}}.\frac{\vec{c}}{a} - \vec{F}.\frac{\vec{v}}{a}\right)$$

de (4.3.1) on déduit que $\vec{\mathcal{F}_0} = \vec{0}$ et la relation précédente devient

$$\vec{\mathcal{F}}.\frac{\vec{c}}{a} = \vec{F}.\frac{\vec{v}}{a}$$

i.e :

$$\frac{d(\frac{m_0\vec{c}}{a})}{adt}.\vec{c} - \frac{d(\frac{m_0\vec{v}}{a})}{adt}.\vec{v} = 0 \tag{5.1.5}$$

et la condition (5.1.4) se réduit à $\vec{F} \perp \vec{c_0}$, i.e :

$$\vec{f} \perp \vec{c_0} \tag{5.1.6}$$

avec $\vec{F} = k\vec{f} = k\,\frac{d(\frac{m_0\vec{v}}{a})}{dt}$ comme en RR et (5.1.5) devient

$$\frac{dE}{dt} = \vec{f}.\vec{v} \tag{5.1.7}$$

5.2 Énergie et impulsion

On multiplie la relation (4.2.2) par la masse m_0

$$m_0\vec{c}_0 = \left(\frac{m_0\vec{c}}{a}, \frac{m_0\vec{v}}{a}\right) \tag{5.2.1}$$

on pose :

$$\begin{cases} \vec{P}_0 = m_0\vec{c}_0 \\ \vec{P} = \frac{m_0\vec{c}}{a} = km_0\vec{c} \\ \vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{a} = km_0\vec{v} \end{cases} \tag{5.2.2}$$

les deux premières équations du système (5.2.2) signifient que la particule est dans un champs qui se propage avec une vitesse finie $\vec{c}$.

La relation (5.2.1) s'écrit

$$\vec{P}_0 = (\vec{P}, \vec{p}) \tag{5.2.3}$$

de norme

$$\vec{P}^{\,2} = \vec{P}_0^{\,2} + \vec{p}^{\,2} - 2aP\,p\cos(\alpha) \tag{5.2.4}$$

puisque : $aP = P_0$ car $||\vec{c}\,|| = ||\vec{c}_0|| = c$, la relation devient

$$\vec{P}^{\,2} = \vec{P}_0^{\,2} + \vec{p}^{\,2} - 2P_0\,p\cos(\alpha) \tag{5.2.5}$$

si on pose

$$\begin{cases} \vec{P}_0 = \vec{E}_0/c \\ \vec{P} = \vec{E}/c \end{cases}$$

la relation (5.2.3) devient

$$\vec{E}_0 = (\vec{E}, \vec{p}c) = \vec{E} - \vec{p}c \tag{5.2.6}$$

de norme

$$E^2 = E_0^2 + \vec{p}^{\,2}c^2 - 2E_0\,pc\cos(\alpha) \tag{5.2.7}$$

si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on a la relation d'Einstein

$$E^2 = E_0^2 + \vec{p}^{\,2}c^2 \tag{5.2.8}$$

qu'on peut la déduire de la multiplication des deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{p}_1 c \quad , k(\alpha = \pi) \\ \vec{\bar{E}} = \vec{E}_0 - \vec{\bar{p}}_1 c \quad , \bar{k}(\alpha = 2\pi) \end{cases} \tag{5.2.9}$$

avec toujours les notations

$$\begin{cases} X_1 = kX_0 \\ \bar{X}_1 = \bar{k}X_0 \\ X^2 = X\bar{X} = \gamma X_0^2 \end{cases} \tag{5.2.10}$$

X : une distance ou un temps ou une impulsion ou une énergie.

La relation (5.1.7) peut être obtenue pas une autre manière :

On a d'après le schéma (2)

$$d\vec{r} = d\vec{l} = \vec{v}dt$$

et la relation (5.2.6)

$$d\vec{E} = d\vec{p}c = \vec{f}dt$$

d'après (4.2.2)

$$d\vec{E}.\vec{n} = d\vec{p}.\vec{c} = \vec{f}.(a\vec{c}_0 + \vec{v})dt$$

$$\frac{dE}{dt} = \vec{f}.\vec{v} + a\vec{f}.\vec{c}_0$$

$$\frac{dE}{adt} - \frac{\vec{f}}{a}.\vec{v} = \vec{f}.\vec{c}_0$$

si $\vec{f} \perp \vec{c}_0$ (condition (5.1.6)), on retrouve la relation (5.1.7).

5.3 Transformation des vecteurs impulsion et force :

• Transformation des vecteurs :

Un vecteur $\vec{A}(\vec{X}, \vec{Y})$ dans $\mathcal{R}$ se transforme dans $\mathcal{R}'$ en un vecteur $\vec{A}'(\vec{X}\,', \vec{Y}\,')$ selon les formules suivantes :

$$\begin{cases} \vec{Y}\,' = \vec{Y} - k\vec{\beta}X \\ X' = kX \end{cases} \tag{5.3.1}$$

par exemple, la transformation du vecteur vitesse $\vec{V}(\kappa\vec{c}, \kappa\vec{v})$ dans $\mathcal{R}$ en vecteur vitesse $\vec{V'}(\kappa'\vec{c}, \kappa'\vec{v})$ dans $\mathcal{R}'$ est

$$\begin{cases} \kappa'\vec{v'} = \kappa\vec{v} - k\vec{\beta}c \\ \kappa' c = k\kappa c \end{cases} \tag{5.3.2}$$

la deuxième relation du système a pour conséquence

$$k = \frac{\kappa'}{\kappa} \tag{5.3.3}$$

on l'injectons dans la première, on retrouve la relation de composition des vitesses (3.3.5).

• Transformation du vecteur impulsion $\vec{P}(\frac{\vec{E}}{c}, km_0\vec{v})$

$$\begin{cases} \vec{p'} = \vec{p} - k\vec{\beta}\,\frac{E}{c} \\ E' = kE \end{cases} \tag{5.3.4}$$

qu'on peut obtenir directement de (5.3.2) en multipliant les deux équations du système par une masse m_0.

• Transformation du vecteur force $\vec{F}\left(\frac{\kappa}{c}(\vec{f}.\vec{v})\,\frac{\vec{c}}{c}, \kappa\vec{f}\right)$

$$\begin{cases} \kappa'\vec{f'} = \kappa\left(\vec{f} - k\frac{\vec{\beta}}{c}(\vec{f}.\vec{v})\right) \\ \frac{1}{c}\kappa'(\vec{f'}.\vec{v'}) = \frac{1}{c}k\kappa(\vec{f}.\vec{v}) \end{cases} \tag{5.3.5}$$

compte tenu de (5.3.3) avec $k = \frac{1}{a}$, le système précédent devient

$$\begin{cases} \vec{f'} = a\left(\vec{f} - k\frac{\vec{\beta}}{c}(\vec{f}.\vec{v})\right) \\ \vec{f'}.\vec{v'} = \vec{f}.\vec{v} \end{cases} \tag{5.3.6}$$

ou sous forme de transformations inverses

$$\begin{cases} \vec{f} = k\left(\vec{f'} + \frac{\vec{\beta}}{c}(\vec{f'}.\vec{v'})\right) \\ \vec{f}.\vec{v} = \vec{f'}.\vec{v'} \end{cases} \tag{5.3.6}$$

6 Liens avec la mécanique quantique relativiste :

Les équations de correspondance entre les valeurs classiques et les opérateurs :

$$\begin{cases} E \longleftrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{p} \longleftrightarrow -i\hbar\vec{\nabla} \end{cases}$$

donnent pour la relation (5.2.7)

$$-\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\psi(\vec{r},t) = \left[\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \nabla^2 + i\,\frac{m_0c}{\hbar}\;cos(\alpha)\,\nabla\right]\psi(\vec{r},t) \tag{8.1}$$

ou

$$\left[\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} + i\,\frac{m_0 c}{\hbar}\,\overrightarrow{\overrightarrow{\nabla}}.\vec{n}\right]\psi(\vec{r},t) = 0 \tag{8.2}$$

Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\vec{n} = \frac{\vec{c}_0}{c}$, on retrouve l'équation de Klein -Gordon [5]

$$\left[\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right]\psi(\vec{r},t) = 0 \tag{8.3}$$

Qu'on peut déduire de (5.2.9) pour $k(\alpha = \pi)$ et $\bar{k}(\alpha = 2\pi)$, i.e

$$E^2 = E\bar{E} = (E_0 + pc)(E_0 - \bar{p})$$

avec

$$\frac{\partial^2\psi(r,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi(r_1,\bar{r}_1,t_1,\bar{t}_1)}{\partial t_1\partial\bar{t}_1} = \frac{\partial\psi_1(r_1,t_1)}{\partial t_1}\,\frac{\partial\psi_1(\bar{r}_1,\bar{t}_1)}{\partial\bar{t}_1}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial\psi_1}{\partial t_1}\,\frac{\partial\overline{\psi}_1}{\partial\bar{t_1}}$$

et

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} = \frac{\partial\psi_1}{\partial r_1}\,\frac{\partial\overline{\psi}_1}{\partial\bar{r_1}}$$

i.e :

$$\Delta\psi = \nabla_1\psi_1\overline{\nabla}_1\overline{\psi}_1$$

Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, i.e $k = \bar{k}$ qui implique que : $\nabla = \overline{\nabla}$, on a

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla_1\overline{\nabla}_1 \tag{8.4}$$

ce qui est une autre façon d'écrire l'opérateur laplacien.

Il est aussi possible de déduire de (8.1) un potentiel $U(r)$ (fonction hypergéométrique confluente) qui vérifie

$$\left[\nabla^2 - \left(\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} + i\,\frac{m_0 c}{\hbar}\,\overrightarrow{\overrightarrow{\nabla}}.\vec{n}\right)\right]U(r) = 0 \tag{8.4}$$

qui se réduit au potentiel de Yukawa dans le cas de $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

La relation (5.2.6) donne

$$m_0\,\vec{c}_0 = i\hbar\left(\frac{\overrightarrow{\partial\psi}}{c\partial t}\ ,\ -\overrightarrow{\overrightarrow{\nabla}}\psi\right) \tag{8.5}$$

$$\Longleftrightarrow\quad \left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{c\partial t} + \overrightarrow{\overrightarrow{\nabla}} + i\,\frac{m_0\,\vec{c}_0}{\hbar}\right)\psi(\vec{r},t) = 0 \tag{8.6}$$

Dont la norme est l'équation (8.1).

7 Conclusion

À partir des nouvelles transformations, on a retrouvé presque tous les résultats existants en RR et d'autres qui mettent en lumière l'aspect 'élastique' de l'espace-temps :dilatation,contraction,galiléen, même si $\vec{v}(O') \neq 0$ et que sa représentation vectorielle permet de généraliser la célèbre équation d'Einstein $E^2 = m^2 + p^2$ avec : $c = 1$ et de trouver une équation $''$linéaire$''$ pour la fonction d'onde sans passer par les spineurs de Dirac.

[1] L.Landau et E.Lifchitz, Mécanique (Mir,Moscou,1969)

[2] N.Éfimov, Géométrie supérieure (Mir,Moscou,1981)

[3] V.Smirnov, Cours de mathématiques supérieures,Tome III, 1 ère partie

(Mir,Moscou,1970)

[4] V.Ougarov, Théorie de la relativité réstreinte (Mir,Moscou,1979)

[5] L.Landau et E.Lifchitz, Electrodynamique quantique (Mir,Moscou,1973)