

Quantisierung nicht-perturbativer Lösungen nichtlinearer
Klein-Gordon Gleichungen in 1+1 Dimensionen

Ich erkläre, dass ich diese Arbeit eigenständig und nur unter Einbezug der angegebenen Quellen verfasst habe.

1 . Einleitung

In den siebziger Jahren des 20. Jahrhunderts wurden Techniken entdeckt und entwickelt, nichtlineare, relativistische Wellengleichungen mithilfe topologischer Betrachtungen exakt zu lösen. Sidney Coleman, Roger Dashen und Roman Jackiv leisteten dazu wichtige Beiträge. Die solitären Wellen, oder auch Solitonen, besaßen Eigenschaften ausgedehnter, relativistischer Teilchen, obwohl klassischer Natur. Bekannt war jedoch, dass die physikalischen Theorien zur Beschreibung von Teilchen Quantentheorien sein mussten. So wurde das Interesse einiger Physiker geweckt in den perturbativen Theorien der nichtlinearen Systeme nach Entsprechungen der klassischen Lösungen zu suchen. Im Zuge dessen wurde ein Formalismus entwickelt, den man als Quantisierung von Solitonen bezeichnen könnte und der das Expandieren in halbklassischen Reihen beinhaltet. Anhand des Quantisierens der Fluktuationen um diese „Energieklumpen“ zeigte sich, dass sich quantenmechanische Teilchenzustände mit Solitonen assoziieren ließen und, dass die Dynamik des Systems maßgeblich von der Form der klassischen Lösungen beeinflusst wurde. So erweiterte sich das quantenfeldtheoretische Repertoire um eine wichtige Applikation, was das Verständnis der Quantenrealität verbesserte. Anfangs noch auf zwei dimensionale Skalarfelder beschränkt, erweiterte sich das Erscheinungsbild rasch auf Vektor- und Diracfelder in höheren Dimensionen. Man entdeckte Solitonen in allen Bereichen in denen nichtlineare Systeme als Beschreibung dienen, was sie heute als fester Bestandteil untrennbar mit der modernen, theoretischen und angewandten Physik verbindet. In dieser Arbeit stehen jene Lösungen im Vordergrund, welche die sogenannten BPS-Zustände sättigen. Die ersten Kapitel besitzen eine einleitende und vorbereitende Struktur, um ein Verständnis des Lesers für solitäre Wellen und der topologischen Eigenschaften nichtlinearer Systeme zu entwickeln, und um den flüssigen Übergang zur QFT zu gewährleisten, die in den darauf folgenden Kapiteln erschlossen wird. Neben der Darstellung eines allgemeinen Formalismus werden zwei Systeme besonders genau analysiert, die weitreichende Anwendungsgebiete besitzen. Außerdem wird die erste und zweite Quantisierung dieser von einem algebraischen Standpunkt aus betrachtet und sich der supersymmetrischen Quantenmechanik bedient. Ziel ist es, eine konvergente, moderne und vollständige, zweidimensionale, quantenfeldtheoretische Beschreibung der Systeme im Sinne von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren auf einem geeigneten Fockraum zu entwickeln. Dabei wurde versucht die Ergebnisse der zahlreichen und ausführlichen Literatur der letzten fünf Jahrzehnte, auf die sich diese Arbeit stützt, möglichst effektiv zu verarbeiten.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	4
2. Klassische Feldtheorie	7
2.1 Übergang vom diskreten zum kontinuierlichen System	7
2.2 Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen	8
2.3 Die Euler-Lagrange Gleichungen und das Prinzip der extremalen Wirkung	9
2.4 Das reelle freie Skalare Feld	10
3. Solitonen in nichtlinearen Feldtheorien	13
3.1 Der perturbative Ansatz	13
3.2 Derrecks Theorem	17
3.3 Homotopietheorie und Solitonen	18
3.4 Bogomolny-Prasad-Sommerfeld Schranken	22
3.5 ϕ^4 -Kink	26
3.6 Solitonen des Sin-Gordon-Systems	32
4. Quantisierung stationärer Kinks	39
4.1 Die Algebraische Struktur freier Skalarer Felder	39
4.2 Quantisierung des freien Skalarfeldes	43
4.3 Der Fluktuationsoperator	45
4.4 Zweite Quantisierung des ϕ^4 -Systems	55
4.4.1 Zeitentwicklung	61
4.5 Zweite Quantisierung des Sin-Gordon Modells	63
4.6 1-Loop Massenkorrektur	66

Zusammenfassung

Aufgrund der Topologie der nichtlinearen Systeme ist der Feldkonfigurationsraum $\mathcal{C} = \{\phi(t_0, x) \in (\mathbb{R}^1, \mathbb{R})/E[\phi] < \infty\}$ die Vereinigung von getrennten Sektoren mit $\text{card}(\mathcal{M}) > 1$. Die Quantenmechanik in der Umgebung der Kinks wird durch SUSY-Operatoren der Form $F_{N-} = -\partial_x^2 + N^2 m^2 - N(N+1)m^2 \text{sech}^2(mx)$ beschrieben. Motiviert wird dies durch die Existenz von Translationsmoden, die auftreten falls für die Dimension eines Sektors $d > 0$ gilt. (Kapitel 4.3). Die Quantisierung der nicht-perturbativen Lösungen erzeugt, von der Struktur der Kinks abhängige, reflexionslose Pöschl-Teller Potentiale, in denen sich die Quanten der Systeme bewegen, die durch selbstadjungierte Operatoren auf Fockräumen \mathfrak{F}_0 beschrieben werden. Falls $N > 1$ gilt, pulsieren die Kinks in $N - 1$ angeregten Zuständen mit Frequenzen ω_m beschrieben durch harmonische Oszillatoren auf $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \gamma((2\omega_m)^{-1}))$. Nach dem Satz von Stone sind diese Operatoren infinitesimale Erzeuger unitärer Zeitevolution der Systeme. Die Kinkdarstellung ist zu der Vakuumdarstellung unitär äquivalent, denn es existiert eine Abbildung $\mathbb{V}: \mathfrak{F}_0 \rightarrow \mathfrak{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, d\mathcal{X}) \otimes \mathfrak{F}$, mit $\mathfrak{F} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \gamma((2\omega_m)^{-1})) \otimes \mathfrak{F}_0$ sodass für alle Schwartzfunktionen f gilt.

$$\mathbb{V} * : H_0^{kink} : \mathbb{V}^{-1} =: H_0^{kink} : + \Delta \mathbb{M}_S$$

Dies wird in [34] Abschnitt 3 bewiesen. $\Delta \mathbb{M}_S$ ist die Dashen-Hasslacher-Neveu halbklassische Massenkorrektur, die in Kapitel 4.6 berechnet wird.

2. Klassische Feldtheorie

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen der klassischen Feldtheorie kurz vorgestellt. Die Methodik orientiert sich dabei im ersten Abschnitt an [1] und [2]

2.1 Übergang vom diskreten zum kontinuierlichen System

Klassischen Systemen mit holonomen Zwangsbedingungen und generalisierten Potentialen liegt die sogenannte Lagrange-Funktion zugrunde, welche als Differenz aus kinetischer und potentieller Energie des Systems definiert ist. Um eine Feldtheorie zu entwickeln, müssen wir uns zuerst den Übergang von einem Satz diskreter Koordinaten zu einer kontinuierlichen Feldkoordinate $\phi(x)$ veranschaulichen. Betrachten wir dazu gekoppelte Oszillationen in einem unendlich langen und dünnen elastischen Stab. Die generalisierten Koordinaten q_n werden nun so auf dem Stab platziert, dass q_n die Amplitude bei x misst, q_{n+1} die Amplitude bei $x + a$ misst und so weiter. Die Lagrange-Funktion ist allgemein eine genügend reguläre Abbildung $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{1,n-1}) \times \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{1,n-1}) \ni (q, \dot{q}) \mapsto L(q, \dot{q})$. In diesem speziellen Fall hat die Lagrange-Funktion des gesamten Systems die folgende Gestalt.

$$L = \sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n T_i - U_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} k (q_i - q_{i-1})^2 \quad (2.1.1)$$

Wobei k die Federkonstante und m die Masse des Stabes ist. Der obige Ausdruck lässt sich umschreiben in

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a \left[\frac{m}{a} \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} k a \left(\frac{q_i - q_{i-1}}{a} \right)^2 \right] \quad (2.1.2)$$

Um jetzt von diesem diskreten System in ein kontinuierliches überzugehen, muss der, die diskreten Koordinaten separierende Parameter a , beliebig klein werden. In Folge dessen transformieren sich die wichtigen Größen der Lagrange-Funktion wie folgt.

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n a = \int dx \quad (2.1.3)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} q_n = \phi(x) \quad (2.1.4)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{q_i - q_{i-1}}{a} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.1.5)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{m}{a} = \rho \quad (2.1.6)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} k a = Y \quad (2.1.7)$$

Y wird als Youngscher Modul bezeichnet und ρ repräsentiert die Dichte. Die Lagrange-Funktion transformiert sich mithilfe dieser Grenzwerte zu einer kontinuierlichen lokalen Größe; der Lagrange-Dichte \mathcal{L} .

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow 0} L &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a \left[\frac{m}{a} q_i^2 - \frac{1}{2} k a \left(\frac{q_i - q_{i-1}}{a} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \int \rho \dot{\phi}(x)^2 - Y \frac{\partial \phi(x)^2}{\partial x} dx = \int \mathcal{L} dx\end{aligned}\quad (2.1.8)$$

Der Übergang von n diskreten Koordinaten zu einer einzelnen kontinuierlichen Feldkoordinate hat die Problematik signifikant vereinfacht.

2.2 Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen

Um die Feldtheorie auf den physikalisch relevanten Bereich des 4-dimensionalen Minkowskiraums zu verallgemeinern, transformieren wir die skalare Größe x zu einem Vierer-Vektor.

$$x \rightarrow x^\mu \quad (2.2.1)$$

mit $\mu = \{0, 1, 2, 3\}$

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (2.2.2)$$

Außerdem definieren wir eine Metrik auf dem Minkowskiraum durch die folgende 1-Form $g_{\mu\nu}$, die auch metrischer Tensor genannt wird, und wählen die Signatur $(+, -, -, -)$.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.2.3)$$

$$\partial_\mu = g_{\mu\nu} \partial^\nu \quad (2.2.4)$$

Raum und Zeit sind in dieser Konstruktion gleichwertig wodurch eine Lorentz-Invariante Beschreibung entsteht. Mit anderen Worten ist Bewegung durch Raum und Zeit äquivalent was allerdings nur der Fall wäre, wenn alle Naturkonstanten gleich 1 gesetzt würden. Da in einer relativistischen Theorie die partielle Zeitableitung nur als Teil von $\partial_\mu \phi(x)$ vorkommen kann, gilt für die Lagrange-Dichte

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad (2.2.5)$$

Folglich ist das Wirkungsfunktional S definiert durch

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad (2.2.6)$$

$$\phi: x^\mu \rightarrow \phi(x^\mu) \in \mathbb{R} \quad (2.2.7)$$

Da das Feld $\phi(x)$ jedem Punkt im Minkowskiraum einen Wert zuordnet, wird die Wirkung zu einer globalen Größe. Die Wirkung hat die Einheit [*Energie* \times *Zeit*] und ist wohl die wichtigste Größe der Feldtheorien, denn mit ihr lassen sich aufgrund des Hamiltonschen Prinzips die Bewegungsgleichung einer Theorie berechnen.

2.3 Die Euler-Lagrange Gleichungen und das Prinzip der extremalen Wirkung

Das Hamiltonsche Prinzip ist in dem Postulat begründet, welches besagt, dass solche Feldkonfigurationen vor anderen ausgezeichnet sind, für die die Wirkung stationär (extremal) wird. Deswegen wird es in der Literatur oft als Prinzip der stationären Wirkung bezeichnet. Das Hamiltonsche Prinzip ist also ein Variationsprinzip, welches darauf beruht, dass die Variation der Wirkung verschwindet.

$$\delta S = 0 \quad (2.3.1)$$

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right) \\ &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) \right) \end{aligned}$$

Der dritte Term verschwindet aufgrund des Divergenz-Theorems, nach dem die Divergenz eines Feldes in einem n -dimensionalen Volumen gleich dem Fluss des Feldes durch die $(n - 1)$ -dimensionale Hyperfläche ist, die die Oberfläche des Volumens bildet.

Es gilt

$$\int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) = \oint d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi = 0$$

Denn die Variation der Feldkonfiguration $\delta\phi$ verschwindet nach Definition auf der gesamten 3-Oberfläche. Für die Variation der Wirkung bedeutet das

$$\delta S = \int d^4 x \delta\phi \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right) = 0$$

Innerhalb der 3-Oberfläche ist $\delta\phi$ ungleich Null, weswegen gelten muss, dass

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right) = 0 \quad (2.3.2)$$

Dies sind die Euler-Lagrange Gleichungen für das 4-dimensionale Lorentz invariante Feld. Wir sehen also, dass nur für Feldkonfigurationen, die diese Gleichungen erfüllen, die Wirkung stationär wird. Das Prinzip der extremalen Wirkung lässt sich aus dem übergeordneten Feynman-Pfadintegral-Formalismus ableiten.

2.4 Das reelle freie skalare Feld

Wir würden gerne die Bewegungsgleichungen für den Fall eines freien Feldes explizit berechnen. Dazu müssen wir die Lagrange-Dichte des Systems kennen. In einem relativistischen Setting enthält \mathcal{L} Potenzen von ϕ und $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$, welches das einfachste Skalar ist, das aus $\partial_\mu \phi$ konstruiert werden kann. Im Folgenden wird $\hbar = c = 1$ gesetzt wie in den Quantenfeldtheorien üblich. In diesem Fall ist das Wirkungsfunktional

$$S = \int d^4 x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) + \mathcal{O}(\phi^n (\partial\phi)^m) \right] \quad (2.4.1)$$

Wobei

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 \quad (2.4.2)$$

Der kinetische Term hat aufgrund der gewählten Signatur ein positives Vorzeichen. Das Potential $V(\phi(x))$ ist im Allgemeinen eine Potenzreihe der Form

$$V(\phi(x)) = a + b\phi(x) + c\phi(x)^2 + d\phi(x)^3 + \dots$$

Wir nehmen an, das Potential hätte ein globales Minimum bei ϕ_0 , sodass

$$\left. \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \right|_{\phi=\phi_0} = 0, \quad V(\phi_0) = V_0$$

Anschließend setzen wir $\phi_0 = 0$ und entwickeln $V(\phi(x))$ in der Umgebung des Minimums

$$V(\phi(x)) = V_0 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) + \mathcal{O}(\phi^3(x))$$

Hier haben wir ausgenutzt, dass die linearen Terme in der Nähe des Extremums verschwinden und dass die Annahme, dass wir um ein Minimum herum entwickeln, $m > 0$ impliziert. V_0 ist der klassische Beitrag zum Grundzustand bzw. der Nullpunktsenergie. Da in einer Theorie ohne Gravitation keine absoluten Energien messbar sind, setzen wir $V_0 = 0$. Man sollte jedoch im Hinterkopf behalten, dass V_0 willkürlich ist. Die Wirkung wird dadurch zu

$$S = \int d^4 x \left[\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \dots \right] \quad (2.4.3)$$

Der Vorfaktor des quadratischen Terms hängt mit der Masse, der mit dem Feld assoziierten Teilchen zusammen. Die weggelassenen höheren Potenzen von ϕ sowie der Term $\mathcal{O}(\phi^n (\partial\phi)^m)$ beschreiben Wechselwirkungen zwischen diesen Teilchen. Ein negativer Wert von m^2 signalisiert, dass am Extremum, um das wir entwickelt haben, das Potential ein Maximum anstatt eines Minimums besitzt bzw. ein „falsches“ Vakuum vorliegt. Deswegen zeigt uns $m^2 < 0$ eine tachyonische Instabilität an: Vakuumfluktuationen destabilisieren das Vakuum, sodass es das Potential herunterrollt, bis es sich im „echten“ Vakuum befindet. Da wir in diesem Abschnitt an den Bewegungsgleichungen eines freien Feldes interessiert sind, können wir die zusätzlichen Interaktionsterme vernachlässigen. Die Wirkung des reellen freien skalaren Feldes schreibt sich somit als

$$\boxed{S = \int d^4 x \left[\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]}, \quad \phi = \phi^* \quad (2.4.4)$$

Wie im vorigen Abschnitt gezeigt, ergeben sich die bevorzugten Feldkonfigurationen mit (2.3.2)

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi$$

Folglich schreibt sich die Bewegungsgleichung

$$(\square + m^2)\phi(x^\mu) = 0 \quad (2.4.5)$$

Mit dem D'Alembert-Operator $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$. Die Lösungen dieser relativistischen Wellengleichung, die den Namen „Klein-Gordon Gleichung“ trägt, lassen sich mithilfe der Fourier-Transformation evaluieren. Die Funktion $\hat{\phi}(p)$ heißt Fourier-Transformierte von $\phi(x^\mu)$ und es gilt

$$\phi(x^\mu) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \hat{\phi}(p)$$

Mit $p = p^\mu = (p^0, \vec{p})$. Damit transformiert die Klein-Gordon Gleichung zu

$$(p_\mu p^\mu + m^2)\phi(p) = 0$$

Es folgt die relativistische Dispersionsbeziehung

$$p_\mu p^\mu = m^2 \rightarrow p_0^2 = E_p^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (2.4.6)$$

Da die Bewegungsgleichung linear ist, gilt das Superpositionsprinzip wodurch sich die Lösungen durch ihre, ebene Wellen beschreibenden, Fourier-Moden ausdrücken lassen.

$$\begin{aligned} \phi(x^\mu) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \phi(p) \delta(p_0^2 - \vec{p}^2 + m^2) e^{-ipx} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \cdot \sqrt{2E_p}} (a(\vec{p}) e^{ipx} + a^*(\vec{p}) e^{-ipx}) \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Dabei wurde benutzt, dass

$$\int d^4 p \delta(p_0^2 - \vec{p}^2 + m^2) |_{p_0 > 0} = \int \frac{d^3 p}{2p_0} = \int \frac{d^3 p}{2E_p}$$

Dieser Ausdruck ist das, für eine mögliche zweite Quantisierung des freien skalaren Feldes notwendige, Lorentz-invariantes Maß, welches zur Vakuumnormalisierung benötigt wird.

Wir haben in diesem Abschnitt anhand des freien Feldes gesehen, wie aus dem Hamilton-Prinzip für Felder, unter Kenntnis der Lagrange-Dichte, die Bewegungsgleichungen des Systems berechnet werden können. Im Impulsraum beschreibt die Klein-Gordon Gleichung einen harmonischen Oszillator mit Frequenz $\omega = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, weswegen der Übergang zu einer quantisierten Feldtheorie über die Quantisierung des harmonischen Oszillators mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren nahe liegt.

3. Theorie der Solitonen in nichtlinearen Feldtheorien

In der Realität sind Felder untereinander gekoppelt. Die Lagrange-Dichten solcher gekoppelter Felder enthalten Kopplungskonstanten und höhere Potenzen von ϕ wodurch die resultierenden Bewegungsgleichungen nichtlineare, relativistische Wellengleichungen beschrieben werden. Diese nichtlinearen Systeme besitzen in (1+1) Dimensionen exakte, klassische, topologische, nichttriviale, nicht-dispersive Lösungen mit endlichen Energien. Grundvoraussetzung für die Existenz solcher Solitonen ist das Vorhandensein mehrerer degenerierter Vakua. Wir werden sehen, dass solche Lösungen sich wie Teilchen verhalten, ihre Masse aber derart mit der Kopplungskonstanten skaliert, dass sie bei einem perturbativen Lösungsansatz, bei dem man unter anderem von einer schwachen Kopplung ausgeht, nicht gefunden werden können. Dazu legen wir unser Augenmerk zuerst auf die Konsequenzen eines solchen Ansatzes.

3.1 Der perturbative Ansatz

Wechselwirkungen in der QFT werden durch Potentiale $V(\phi)$ in höherer als quadratischer Ordnung beschrieben, also durch eine formale Potenzreihe in ϕ .

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{3!}g\phi^3 + \frac{1}{4!}\lambda\phi^4 + \dots$$

In der ϕ^4 -Theorie wird diese Reihe nach dem dritten Term abgebrochen und der ungerade Term vernachlässigt, um die Theorie symmetrisch zu halten. In Folge dessen ist die Wirkung

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right] \quad (3.1.1)$$

Woraus sich die nichtlineare Bewegungsgleichung

$$(\square + m^2)\phi = \lambda\phi^3 \quad (3.1.2)$$

ergibt. Wir wollen dies als Familie von, durch den Kopplungsparameter λ parametrisierten, Gleichungen betrachten. Auf gleicher Weise werden auch alle Lösungen dieser Gleichungen von λ abhängen. Der perturbativen Theorie liegt nun die Idee zugrunde, dass jede dieser Lösungen als Potenzreihe in λ geschrieben werden kann. Also die Annahme, dass diese analytisch in einer Umgebung von λ bei $\lambda = 0$ sind. Unglücklicherweise kann das aber nicht der Fall sein, da Potenzreihen in der komplexen Ebene einen Konvergenzradius besitzen. Wenn die Reihe also für alle $\lambda > 0$ konvergiert, so muss sie auch für einige $\lambda < 0$ konvergieren. Das Potential wäre dann jedoch von unten unbeschränkt und somit instabil.

In Folge dessen würden sich die Lösungen stark von denen des freien Feldes unterscheiden und wären nicht nur kleine Störungen. In den folgenden Abschnitten wird gezeigt werden, dass die Energie von Kink-Lösungen, einer übergeordneten Gruppe der Soliton-Lösungen, die sich durch ihr Streuverhalten von diesen unterscheiden, mit $1/\lambda$ skalieren. Ihre Masse und Wirkung divergieren somit für $\lambda \rightarrow 0$. Aus diesem Grund sind sie bei einer Entwicklung der Lösungen als Taylor-Reihe um $\lambda = 0$ unsichtbar, weswegen sie auch erst relativ spät entdeckt wurden. Nichts desto trotz nehmen wir an, dass die Lösungen der ϕ^4 -Theorie als Potenzreihe dargestellt werden können.

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \lambda^n \quad (3.1.3)$$

$\phi_n(x)$ sind Koeffizienten-Funktionen. Fügen wir diesen Ansatz in die Gleichung ein erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\square + m^2) \phi_n \lambda^n = \lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \lambda^n \right)^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k,l,m} \phi_k \phi_l \phi_m \right) \lambda^n$$

Mit $k + m + l + 1 = n$. Der Vergleich der Koeffizienten ergibt

$$(\square + m^2) \phi_n = \sum_{k,l,m} \phi_k \phi_l \phi_m \quad (3.1.4)$$

Wir sehen, dass dies eine Differentialgleichung für ϕ_n ist, aber die rechte Seite durch ϕ_k , ϕ_l und ϕ_m mit $k, l, m < n$ gegeben ist. Das ursprünglich nichtlineare Problem ist also durch den perturbativen Ansatz in ein iteratives, inhomogenes Problem zerfallen. Die Fundamentallösung des Klein-Gordon-Operators erfüllt

$$(\square + m^2) \mathcal{G}(x) = \delta(x) \quad (3.1.5)$$

Mit der d-dimensionalen Delta-Distribution $\delta^{(d)}(x)$, die durch

$$\delta^{(d)}(x) = \prod_{i=1}^d \delta(x_i) = \prod_{i=1}^d \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_i}{(2\pi)} e^{-ip_i x_i} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{\infty} d^d p e^{-ipx} \quad (3.1.6)$$

gegeben ist, was mithilfe einer Darstellung der Delta-Distribution als Grenzwert einer Dirac-Folge gezeigt werden kann. Mit der Fourierdarstellung der Fundamentallösung

$$\mathcal{G}(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{\infty} d^d p \hat{\mathcal{G}}(p) e^{-ipx}$$

und der Tatsache, dass sich Ableitungen unter Fouriertransformation zu einer Multiplikation mit einem Skalar transformieren, folgt für die inhomogene Klein-Gordon Gleichung.

$$(-p^2 + m^2)\hat{\mathcal{G}}(p) = -1$$

Es folgt weiter

$$\hat{\mathcal{G}}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2} \quad , \quad (3.1.7)$$

sodass

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{\infty} d^d p \hat{\mathcal{G}}(p) e^{-ipx} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{\infty} d^d p \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{m}{|x|} \right)^{\frac{d}{2}-1} K_{\frac{d}{2}-1}(m|x|) \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

$$\mathcal{G}(x) \sim N \sqrt{\frac{|x|}{m^3}} \left(\frac{m}{|x|} \right)^{d/2} e^{-m|x|}$$

Mit $K_{d/2-1}$ den modifizierten Besselfunktionen 2. Gattung. Für eine beliebige Inhomogenität $u(x)$ ergibt sich die Lösung durch Faltung mit der Fundamentallösung.

$$\phi(x) = \mathcal{G}(\overline{p}) \cdot \widehat{u}(p) = \mathcal{G}(x) * u(x) = \int dy \mathcal{G}(x-y) u(y) \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}^d$$

Betrachten wir nun wieder die inhomogenen Klein-Gordon Gleichungen, die unser perturbativer Ansatz hervorgebracht hat.

Für $n = 0$ gilt

$$(\square + m^2)\phi_0(x) = 0$$

Die Lösung dieser Gleichung ist bereits bekannt und setzt sich aus ebenen Wellen zusammen.

$n = 1$:

$$(\square + m^2)\phi_1(x) = \phi_0^3$$

Mit der Greenschen Funktion schreibt sich die Lösung wie folgt.

$$\phi_1(x) = \int dy \mathcal{G}(x - y) \phi_0^3(y) \tag{3.1.9}$$

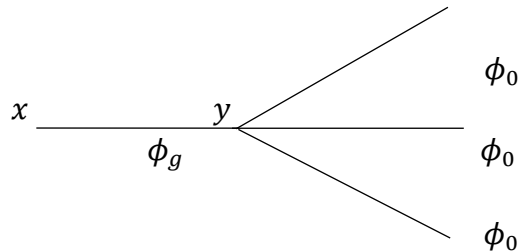
$n = 2$:

$$(\square + m^2)\phi_2(x) = 3\phi_0^2\phi_1$$

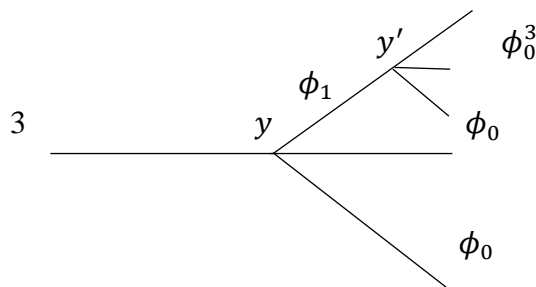
Die 3 spiegelt die Anzahl der Permutationen wider, (k, l, m) zwei Nullen und eine Eins zuzuordnen.

$$\begin{aligned} \phi_2(x) &= 3 \int dy \mathcal{G}(x - y) \phi_0^2(y) \phi_1(y) \\ &= 3 \int dy \int dy' \mathcal{G}(x - y) \phi_0^2(y) \mathcal{G}(y - y') \phi_0^3(y') \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Für größer werdende n werden diese Ausdrücke schnell sehr kompliziert. Man kann jedoch ein Muster erkennen: Die Funktion ϕ_1 lässt sich durch drei Funktionen ϕ_0 ausdrücken, die sich in einem Punkt y treffen und dann durch Faltung mit der Fundamentallösung ϕ_g zum Punkt x transportiert werden.



ϕ_2 setzt sich wie ϕ_1 aus drei Funktionen zusammen, nur dass eine dieser Funktionen ϕ_1 ist. Wir können also die vorherige Prozedur iterieren.



Für die Lösung ϕ_n der Bewegungsgleichung müssten wir also n Vertices in Ordnung λ^n zeichnen, wobei jeder Vertex eine eingehende Linie und drei ausgehende Linien besitzt, die wiederum eingehende Linien für andere Vertices sein können. Bestünde das Potential aus mehr als einem Mononom gäbe es mehrere Kopplungskonstanten und wir hätten eine multidimensionale Potenzreihe und dem entsprechend viele Arten von Vertices. Es zeigt sich, dass unsere gefundenen Regeln, Integrale in Graphen umzuwandeln, sich kaum von den Feynman-Regeln unterscheiden, die benutzt werden, um in der Quantenfeldtheorie Wechselwirkungen zu beschreiben. Einzige Unterschiede dieser klassischen Theorie zur quantentheoretischen Beschreibung sind die Unterscheidung zwischen ein- und ausgehenden Linien, die hier nicht vorgenommen wurde, und die Tatsache, dass durch den klassischen Limes $\hbar \rightarrow 0$ keine sogenannten Loops in der klassischen Theorie vorkommen, weil diese in den Feynman-Graphen mit \hbar beitragen.

Wir haben jetzt also einen Eindruck davon bekommen was es heißt, nichtlineare Bewegungsgleichungen (wenn auch im klassischen Sinne) perturbativ zu lösen. Zentrales Thema dieser Arbeit sind jedoch exakte, also nicht-perturbative Lösungen dieser nichtlinearen Gleichungen und deren quantenmechanische Eigenschaften, die wie schon erwähnt in einer Entwicklung um $\lambda = 0$ ununterscheidbar von null sind. Diese Kink-Solitonen sind von zentraler Bedeutung, um den Zusammenhang zwischen der Topologie der Raumzeit und den physikalischen Phänomenen auf ihr besser zu verstehen. Das Studium $(1 + 1)$ -dimensionaler Solitonen eignet sich gut für die Ausarbeitung der Eigenschaften und Konsequenzen derselben. Diese Erkenntnisse lassen sich danach auf physikalisch relevante, höhere Dimensionen übertragen. Das nicht Existenz-Theorem von Derrick ist ein einfaches Mittel, um festzustellen, ob bestimmte Arten von Feldtheorien topologische Solitonen enthalten, ohne die Bewegungsgleichungen kennen zu müssen. Im Folgenden werden ausschließlich zeitunabhängige Felder auf flacher Raumzeit betrachtet.

3.2 Derricks Theorem

Sei ϕ eine Menge von Skalarfeldern in einer Zeit- und D Raumdimensionen, deren Dynamik durch die folgende Lagrange-Dichte bestimmt ist.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi)$$

Das Potential $V(\phi)$ sei von unten beschränkt und Null für die Grundzustände. Dann sind für $D \geq 2$ die einzigen nichttrivialen Lösungen mit endlicher Energie diese Grundzustände [6].

Beweis: Definiere

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} \int d^D x (\nabla \phi)^2 \\ V_2 &= \int d^D x U(\phi) \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Mit der zeitunabhängigen Lösung $\phi(x)$. Weiterhin sei eine einparametrische Familie von Feldkonfigurationen gegeben.

$$\phi(x, \lambda) \equiv \phi(\lambda x), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Aufgrund der Tatsache, dass die Lösung zeitunabhängig ist lautet die Energie, die mit dieser Familie assoziiert wird

$$H(\lambda) = \lambda^{(2-D)}V_1 + \lambda^{-D}V_2 . \quad (3.2.12)$$

Anwendung des Hamiltonschen Prinzips führt zu

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} = (2-D)V_1 - DV_2 = 0 \quad (3.2.13)$$

V_1 verschwindet für $D > 2$ und V_2 muss für $D = 2$ Null sein. Der Hamilton wird zu

$$H_2 = \lambda V_1 ,$$

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} = V_1 = 0$$

Das Theorem zeigt uns, dass zeitunabhängige nichttriviale Lösungen mit endlicher Energie in einer Raumdimension existieren. Für höherer Dimensionen gibt es Techniken mit deren Hilfe man trotzdem zeitunabhängige Lösungen finden kann. Deren nähere Betrachtung übersteigt jedoch den Umfang dieser Arbeit. Sie werden zum Beispiel in [35] thematisiert.

3.3 Homotopietheorie und Solitonen

Solitonen sind topologische Lösungen, da sich Ihre Existenz einerseits aus energetischen und andererseits aus topologischen Randbedingungen begründet. Aus den Eigenschaften der Homotopie-klassen der Vakuumkonfigurationen der Potentiale lassen sich Bedingungen für Existenz und Stabilität sowie eine Klassifizierung ableiten. Dazu benötigen wir einige topologische Kenntnisse. Zitiert aus [40].

Seien Y und X zwei unberandete Mannigfaltigkeiten und $\Psi : X \mapsto Y$ eine stetige Abbildung. Für zwei Basispunkte $\mathbf{x}_0 \in X$ und $\mathbf{y}_0 \in Y$ gelte $\Psi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$; dann ist Ψ eine Basisabbildung. Eine

Basisabbildung $\Psi_0 : X \mapsto Y$ heißt zu einer anderen Abbildung $\Psi_1 : X \mapsto Y$ homotop, falls sich Ψ_0 stetig in Ψ_1 deformieren lässt. Genauer ist Ψ_0 zu Ψ_1 homotop, wenn eine Abbildung

$$\tilde{\Psi} : X \times [0,1] \mapsto Y$$

existiert, bei der τ das Intervall $[0,1]$ derart parametrisiert, dass $\tilde{\Psi}|_{\tau=0} = \Psi_0$, $\tilde{\Psi}|_{\tau=1} = \Psi_1$ und $\tilde{\Psi}(x_0; \tau) = y_0$ für alle τ gilt.

Homotope Abbildungen sind symmetrisch, transitiv und reflexiv. Die Ψ können also in Homotopieklassen unterteilt werden. Eine dieser Klassen ist die konstante Klasse, bestehend aus der konstanten Abbildung Ψ der homotopen Abbildungen, für die $\Psi(x) = y_0$ für alle x gilt. Man kann wesentlich mehr über die Homotopieklassen aussagen, wenn X eine Sphäre ist. Die n -Sphäre S^n ist die Menge von Punkten im \mathbb{R}^{n+1} mit Abstand eins vom Ursprung. Die Menge der Homotopieklassen von Basisabbildungen $\Psi : S^n \mapsto Y$ werden mit $\pi_n(Y)$ bezeichnet. Für $n \geq 1$ bildet die Menge $\pi_n(Y)$ eine Gruppe; die n -te Homotopiegruppe. Der Kreis S^1 ist beispielsweise die Mannigfaltigkeit zur unitären Gruppe $U(1)$ und S^3 , welche die Einheitssphäre in vier Dimensionen ist, ist die zugehörige topologische Raum zur Gruppe $SU(2)$. Die Basispunkt-Eigenschaft ist hilfreich bei der Charakterisierung einer Homotopieklasse als Gruppe. Will man allerdings nur wissen, ob Abbildungen ineinander deformiert werden können, kann diese Eigenschaft fallengelassen werden. Die Klassifikation der Homotopieklassen bleibt unbeeinflusst, falls der Definitionsbereich X zusammenhängend ist, was für S^n der Fall ist. Unser Ziel ist es, die topologischen Aspekte der Felder auf flachem Raum \mathbb{R}^n zu erschließen, da es nicht ausreicht nur anzunehmen, dass die Felder stetig sind. Jede Feldkonfiguration $\phi(x)$ die durch $(1 - \tau)\phi(x)$ mit $\tau \in [0,1]$ ersetzt werden kann bildet eine Homotopie, wenn die Anfangskonfiguration sich um den trivialen Fall $\phi = 0$ handelt. Der nichtlineare Fall stellt sich anders dar. Angenommen das Feld ist eine Abbildung von \mathbb{R}^n zur Untermannigfaltigkeit Y . Da der \mathbb{R}^n zu einem Punkt kontrahierbar ist, ist die einzige topologische Invariante diejenige Komponente von Y , bei der das Feld seinen Wert annimmt. Feldkonfigurationen können also durch $\pi_0(Y)$ klassifiziert werden. Die topologische Charakterisierung der Feldkonfigurationen wird interessanter, falls angenommen wird, dass die Energiedichte $\varepsilon(x)$ schnellfallend ist, wenn der Abstand zum Ursprung gegen unendlich geht. Die meisten Solitonen haben eine endliche Gesamtenergie, was eine stärkere Annahme wäre. Es gibt jedoch Ausnahmen, wie globale Vertices. Die geforderte Eigenschaft für die Energiedichte erzeugt Randbedingungen für die Felder, die entscheidend für deren topologische Klassifikation sind.

Wir definieren allgemein ein Multipllett von n Feldern $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ auf dem Minkowskiraum $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Für diese Feldkonfiguration können wir eine Vakuum-mannigfaltigkeit der Theorie als Untermannigfaltigkeit $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ definieren, auf welcher das Potential $V(\phi)$ sein Minimum annimmt. Also

$$\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n : V(\phi) = V_{min} \quad (3.3.1)$$

Es lässt sich jederzeit der Shift $V(\phi) \mapsto V(\phi) - V_0$ ausführen, der die Feldgleichungen invariant lässt, sodass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $V_{min} = 0$ annehmen können. Die Gesamtenergie eines zeitunabhängigen Feldes ist durch das Funktional

$$E = \int d^d x \left(\frac{1}{2} (\Delta\phi)^2 + V(\phi_1, \dots, \phi_n) \right) \quad (3.3.2)$$

gegeben. Es gibt keine Bedingungen an den Wert des Feldes ϕ für endliche x . Allerdings muss ϕ für $x \mapsto \pm\infty$ Werte in \mathcal{V} annehmen, um der Bedingung einer endlichen Energiedichte zu genügen. Es müssen also die Randbedingungen

$$\phi(x) \in \mathcal{V}, \forall x \in S_\infty^{d-1} \quad (3.3.3)$$

gelten. Dadurch definiert eine Feldkonfiguration eine Abbildung von S_∞^{d-1} nach \mathcal{V} .

$$\phi^\infty : S_\infty^{d-1} \mapsto \mathcal{V}$$

Zwei Feldkonfigurationen ϕ und $\tilde{\phi}$ mit verschiedenen asymptotischen Daten $\phi^\infty, \tilde{\phi}^\infty$ sind zueinander homotop, falls ϕ^∞ homotop zu $\tilde{\phi}^\infty$ ist. Der topologische Charakter der Feldkonfiguration $\phi(x)$ ist also durch die Homotopieklasse der Abbildung ϕ^∞ determiniert, welche ein Element von $\pi_{d-1}(\mathcal{V})$ ist. In vielen Fällen liegt als interne Symmetrie eine $SO(n)$ -Symmetrie vor. Falls \mathcal{V} ein einzelner Orbit von $SO(n)$ ist, dann ist \mathcal{V} entweder ein einzelner Punkt oder eine Sphäre S^{n-1} abhängig von der topologischen Gestalt des Potentials $V(\phi)$. Ist \mathcal{V} ein Punkt, liegt keine gebrochene Symmetrie des Vakuums vor und somit enthält $\pi_n(\mathcal{V})$ keine anderen Homotopieklassen außer der trivialen. Im Fall $\mathcal{V} = S^{n-1}$ liegt spontane Brechung der inneren Symmetrie vor. Das asymptotische Feld ist dann eine Abbildung

$$\phi^\infty : S_\infty^{d-1} \mapsto S^{n-1}$$

und folglich sind in diesem Fall die Homotopieklassen der Feldkonfiguration $\phi(x)$ durch $\pi_{d-1}(S^{n-1})$ determiniert. In dieser Arbeit interessiert uns hauptsächlich der eindimensionale Fall.

$d = 1$:

Es gilt $S_\infty^{d-1} = \{\pm\infty\} \in \mathbb{R}$. Also ist ϕ^∞ eine Abbildung von zwei Punkten auf \mathcal{V} . Die Komponenten von \mathcal{V} sind durch $\pi_0(\mathcal{V})$ gegeben, was die Menge der topologisch getrennten Vakua bildet. Somit liegt die topologische Klasse einer Feldkonfiguration $\phi(x)$ in $\pi_0(\mathcal{V}) \times \pi_0(\mathcal{V})$. Besteht \mathcal{V} aus p Punkten im \mathbb{R}^n , dann gibt es p^2 unterschiedliche topologische Arten von Feldern. Die Elemente, die die Solitonen dieser eindimensionalen Theorie klassifizieren, lassen sich also durch

$$(\phi_-, \phi_+) \in \pi_0(\mathcal{V}) \times \pi_0(\mathcal{V})$$

darstellen, wobei die (ϕ_-, ϕ_+) durch $\phi_\pm \equiv \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x)$ definiert sind. Des Weiteren besitzt jede Homotopie eine invariante Größe. Dieser sogenannte Abbildungsgrad ist durch den Satz von Hopf definiert.

Für jede zusammenhängende, orientierte, geschlossene, differenzierbare n -Mannigfaltigkeit M ist der Abbildungsgrad eine Homotopieinvariante von Abbildungen in die n -Sphäre derart, dass je zwei stetige Abbildungen Ψ_1 und Ψ_2 , für die

$$\Psi_i : M \mapsto S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

($i=1,2$) gilt, genau dann homotop sind, wenn sie denselben Abbildungsgrad $Q(\Psi_1) = Q(\Psi_2)$ besitzen.

Der Abbildungsgrad ist also invariant unter stetiger Deformation. Tatsächlich lässt sich sogar jede ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ als Abbildungsgrad einer solchen Abbildung realisieren, sodass gilt:

Ist $\pi_{d-1}(S^n)$ das Mengensystem der Homotopieklassen der stetigen Abbildungen $\Psi : M \mapsto S^n$, so vermittelt die Abbildungsfunktion Q eine Bijektion $\bar{Q} : \pi_{d-1}(S^n) \mapsto \mathbb{Z}$, durch die zu jedem $k \in \mathbb{Z}$ genau eine Homotopieklasse mit $\bar{Q}(\Psi) = Q(\Psi) = k$ zugeordnet wird.

Konkret bedeutet das, dass wir jeder Abbildung

$$\phi^\infty : S_\infty^{d-1} \mapsto \mathcal{V}$$

und somit jeder zugehörigen Feldkonfiguration $\phi(\mathbf{x})$ durch Q eine ganze Zahl k zuordnen können. Q wird auch als Windungszahl oder topologische Ladung bezeichnet. Jeder topologische Sektor des Systems ist also durch eine ganze Zahl gekennzeichnet, was verdeutlicht, dass zwischen verschiedenen Sektoren keine stetige Deformation existiert und die Lösungen für alle Zeiten stabil sind. Zu Q gehört ein topologischer Strom

$$j^\mu = N \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi = N (\partial_t \phi - \partial_x \phi)$$

mit $\varepsilon^{\mu\nu}$ dem antisymmetrischen Tensor in $1 + 1$ Dimensionen, der so gewählt ist, dass $\varepsilon^{01} = 1$ ist. Aufgrund der Symmetrie gemischter Ableitungen ist der Strom erhalten.

$$\partial_\mu j^\mu = N \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0.$$

Die erhaltene Ladung Q ist durch

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} j^0 dx = N \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x \phi dx = N(\phi_+ - \phi_-) \quad (3.3.4)$$

gegeben. N wählen wir so, dass $Q \in \mathbb{Z}$ gilt. Die Ladung Q und der zugehörige Strom j^μ sind nicht davon abhängig, dass ϕ irgendeine Feldgleichung erfüllt. Sie sind vollkommen topologischer Natur. Es handelt sich deswegen auch nicht um einen Noether-Strom, der mit einer infinitesimalen Symmetrie der Wirkung assoziiert ist. Die Ortsableitung des Feldes kann also auch als topologische Ladungsdichte

bezeichnet werden. Außerdem sehen wir sofort, dass für konstante Vakuumlösungen immer $Q = 0$ gelten muss. Q lässt sich auch differentialgeometrisch durch die zur S^1 -Sphäre gehörende normalisierte Volumenform

$$\int_{S^1} \omega$$

definieren.

3.4 Bogomolny-Prasad-Sommerfeld-Schranken

Die Bogomolny-Prasad-Sommerfeld-Schranken bestehen aus einer Reihe von Ungleichungen für Lösungen nichtlinearer PDE's, abhängig von der Homotopieklasse der Lösungen im unendlichen. Anders gesagt entstehen sie durch die Verbindung energetischer und topologischer Randbedingungen. Lösungen, die diese Ungleichungen sättigen, werden auch BPS-Zustände genannt. Die Randbedingungen erzeugen oft einfacher zu lösende partielle Differentialgleichungen, die sogenannten Bogomolny-Gleichungen, deren Lösungen wichtige Rollen in Feld- und Stringtheorie spielen. Die Lagrange-Dichte für das einzelne eindimensionale reelle Skalarfeld lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi)$$

Mit dem, von unten beschränktem Potential $V(\phi)$. Die Euler-Lagrange Feldgleichung für dieses System ist

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (3.4.1)$$

Es handelt sich um eine nichtlineare Klein-Gordon Gleichung. Die Gesamtenergie ist $T + V$ mit der potentiellen Energie V und der kinetischen Energie T .

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi) dx$$

und

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\phi}^2 dx$$

mit dem Gradienten $\phi' = \frac{\partial\phi}{\partial x}$ und $\dot{\phi} = \frac{\partial\phi}{\partial t}$. Sei \mathcal{V} die Menge der isolierten Vakuumfeldkonfigurationen

$$\mathcal{V} = \{ \phi_0; \phi_0' = \dot{\phi}_0 = 0, V(\phi) = V_{min} \}$$

Wie schon erwähnt, ist für die Existenz von Solitonen das Vorhandensein mehrerer Vakua notwendig. \mathcal{V} muss also mehr als ein Element enthalten und $\pi_0(\mathcal{V})$ darf nicht trivial sein. Für $\phi_+ = \phi_-$ ist die Feldkonfiguration in der Homotopieklasse der Vakuumkonfiguration ϕ_+ , da sich das Feld in diesem Fall durch eine stetige Deformation in die konstante Vakuumlösung ϕ_+ transformieren lässt, bei der die Energie endlich bleibt. Gilt andererseits $\phi_+ \neq \phi_-$, gibt es keine solche Deformation, weswegen das Feld kinkartig zwischen den beiden Vakua interpolieren muss, da jedes Feld für das $\phi(\pm\infty) \notin \mathcal{V}$ gilt, unendlich viel Energie besitzt. Aufgrund der Tatsache, dass Zeitevolution ein Beispiel einer stetigen Deformation ist, bei der die Energie endlich bleibt, ist die Stabilität der Kink-Lösungen gesichert. Es würde also unendlich viel Energie benötigt, um eine Kinklösung in eine konstante Vakuumlösung zu deformieren. In Sektion 3.2 haben wir gesehen, dass eine Kombination des Potentials V aus einem Potentialterm und dem Quadrat des Gradienten des Feldes nötig ist, um Derricks Theorem zu umgehen und stationäre Solitonen zu erlauben. Unter Raumdilatation skalieren diese beiden Bestandteile der potentiellen Energie in gegensätzliche Richtungen, was einen Gleichgewichtseffekt erzeugt. Eine endliche, nichtverschwindende, die Energie minimierende Skalierung führt zu einer Art Virialsatz.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \phi'^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} V(\phi) dx \quad (3.4.2)$$

Aus diesem Theorem können wir eine niedrigere Schranke für die Energie herleiten. Die wichtige Ungleichung lautet

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \phi' + \sqrt{V(\phi)} \right)^2 \geq 0 \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi) \right) dx \geq \pm \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2V(\phi)} \phi' dx \end{aligned}$$

Für das zeitabhängige und das statische Feld gilt

$$E \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2V(\phi)} \phi' dx \right| = \left| \int_{\phi_-}^{\phi_+} \sqrt{2V(\phi)} d\phi \right| \quad (3.4.3)$$

Da $V(\phi) > 0$ gilt können wir ein Superpotential $W(\phi)$ einführen mit $V(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{dW(\phi)}{d\phi} \right)^2$. Die rechte Seite des oberen Ausdrucks lässt sich dann integrieren.

$$E \geq |W(\phi_+) - W(\phi_-)| \quad (3.4.4)$$

Diese Beobachtung hat zuerst Bogomolny [36] gemacht, weswegen Schranken für die Gesamtenergie, die ausschließlich von topologischen Daten abhängen, Bogomolny-Schranken genannt werden. Die Gesamtenergie für das stationäre Feld lässt sich somit schreiben als

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(\phi')^2 \mp \left(\frac{dW(\phi)}{d\phi} \right)^2 \right] dx \pm (W(\phi_+) - W(\phi_-)) \quad (3.4.5)$$

Man sieht sofort, dass der erste Term verschwinden muss, um das Energiefunktional zu minimieren, da der zweite Term nur von den festen topologischen Randbedingungen abhängt. Die Energie wird minimiert, wenn

$$\phi' = \pm \frac{dW}{d\phi} = \pm \sqrt{2V(\phi)} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) \equiv \phi_{\pm} \in \mathcal{V} \quad (3.4.6)$$

Das ist die sogenannte Bogomolny-Gleichung. Falls nichttriviale Lösungen existieren, werden die beiden Zweige der Gleichung Kink und Antikink genannt. Diese Lösungen sind globale Minima der Energie für eine gegebene topologische Klasse von Feldern und somit kritische Punkte des Energiefunktionals. Sie sind dadurch automatisch stationäre Lösungen der nichtlinearen Klein-Gordon-Gleichung. Man überprüft leicht, dass

$$\phi'' = \pm \frac{1}{\sqrt{2V}} \frac{dV}{d\phi} \phi' = \frac{dV}{d\phi}$$

gilt. Wie eine zeitabhängige Lösung in einer Raumdimension aussehen kann, wird durch das Verhalten der Lösungen des folgenden Systems verdeutlicht.

$$\square \phi(x, t) = 0 \quad (3.4.7)$$

$$\begin{cases} \phi(x, 0) = v(x) \\ \partial_t \phi(x, 0) = w(x) = 0 \end{cases} \quad (3.4.8)$$

Mit der Fundamentallösung

$$\square K(x, t) = 0$$

$$\begin{cases} K(x, 0) = 0 \\ \partial_t K(x, 0) = \delta(x) \end{cases}$$

die als Fouriertransformation der Fundamentallösung des harmonischen Oszillators K_ω gegeben ist.

$$K(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kut)}{uk} e^{ikx} dk = -\frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(ut+x)} - e^{ik(-ut+x)}}{uk} dk$$

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2u} & |x| < ut, t > 0 \\ 0 & |x| < ut, t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow K(x, t) = \frac{1}{2u} (\theta(x + ut) + \theta(x - ut)) \quad (3.4.9)$$

Die Lösung $\phi(x, t)$ des Anfangswertproblems ist dann

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t K_0(t, x - y) v(y) + K_0(t, x - y) w(y) dy \\ &= \phi_+(x, t) + \phi_-(x, t) = \frac{1}{2} v(x \pm ut) + \frac{1}{2u} \int_{-\infty}^{x+ct} w(y) dy \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Damit lässt sich $\phi(x, t)$ mit den einmal stetig differenzierbaren Profildfunktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben als

$$\phi(x, t) = f(x - ut) + g(x + ut)$$

Diese Lösung stellt mit der Geschwindigkeit u nach rechts und links laufende Wellen dar. Für die speziellen Anfangsbedingungen folgt

$$\phi(x, t) = f(x - ut) = f(\eta)$$

Setzen wir diesen Ausdruck der Funktion $\phi(x, t)$ in unsere Bewegungsgleichung

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{dV}{d\phi} = 0$$

ein, dann folgt mit $\partial_t \phi = -u \frac{df}{d\eta}$ und $\partial_x \phi = \frac{df}{d\eta}$, dass f die Gleichung

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} = \gamma^2 \frac{dV}{df}$$

erfüllt. Wobei $\gamma = (1 - u^2)^{-1/2}$ ist. Multiplizieren wir beide Seiten mit $\frac{df}{d\eta}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} \frac{1}{2} \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 &= \gamma^2 \frac{dV}{df} \frac{df}{d\eta} = \gamma^2 \frac{dV}{d\eta} \\ \Rightarrow \frac{df}{d\eta} &= \pm \gamma \sqrt{2V(f)} \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

Dies ist nichts anderes als die Bogomolny-Gleichung. Offensichtlich lassen sich die Lösungen $\phi(x, t)$ der Gleichung (3.4.11) als

$$\phi(x, t) = \pm \gamma f(\eta) = \pm \gamma f(x - ut)$$

schreiben. Die wichtige Erkenntnis, die wir dadurch erhalten ist, dass wir die stationären Lösungen einer Lorentz-Transformation unterziehen können, um zeitabhängige Lösungen zu erhalten und, dass diese für alle t stets das Energiefunktional minimieren, da sie die Gleichung (3.4.6) erfüllen und offensichtlich ebenfalls

$$\lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} f(\eta) = \phi_\pm$$

gilt.

3.5 ϕ^4 -Kink

In diesem Kapitel diskutieren wir das einfachste Model, welches Kinks enthält. Es besitzt nur zwei Vakua, nämlich $\pi_0(\mathcal{V}) = \mathbb{Z}_2$. Das Potential muss mindestens einen quartischen Term enthalten, um diese Bedingung zu erfüllen. Wie in Kapitel 3.1 gezeigt wird eine solches System durch

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 + C$$

beschrieben. Mit dem Potential

$$V(\phi) = C - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4$$

mit einer Konstante C . Die Bewegungsgleichungen des Systems werden durch diese Konstante nicht beeinflusst. Sie kann so gewählt werden, dass die Bogomolny-Gleichungen einfacher zu lösen sind. Das ungewöhnliche Vorzeichen des quadratischen Terms zeigt, wie in 3.1 erwähnt, eine tachyonische Instabilität an. Es bedeutet, dass ein falsches Vakuum vorliegt, führt aber nicht zu Tachyonen, wie man durch eine einfache Spektralanalyse sieht. Dazu expandiert man die Lagrange-Dichte in kleinen Oszillationen um eines der echten Vakua des Systems. Der resultierende Massenterm ist positiv. Wir wählen das Potential

$$V(\phi) = \frac{m^4}{4\lambda} - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 = \frac{\lambda}{4} \left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 \quad (3.5.1)$$

Die Feldgleichungen lassen sich dann als

$$\square \phi = -V'(\phi) = m^2 \phi - \lambda \phi^3$$

schreiben. Das System besitzt zwei degenerierte globale Minima bei $\phi_\pm^0 = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$. Diese zwei Vakuumkonfigurationen bezeichnen wir als \mathcal{V}_+ und \mathcal{V}_- .

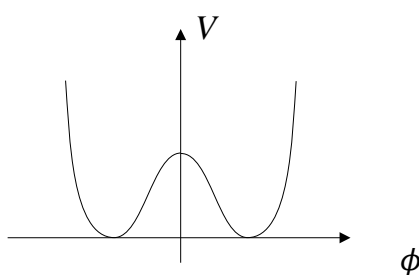


Abb.1: Das Potential $V(\phi)$

Der topologische Gehalt einer Feldkonfiguration ist durch die topologische Ladung Q gegeben.

$$Q = \frac{\sqrt{\lambda}}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x \phi_\pm^0 dx = 0 \quad (3.5.2)$$

Die konstanten Vakuumkonfigurationen, in diesem Kontext auch triviale Lösungen genannt, besitzen keine topologische Ladung. Deswegen werden sie auch oft als nichttopologische Lösungen bezeichnet. Es ist offensichtlich, dass die Minima $\phi_{\pm}^0 = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$ die Bogomolny Gleichung

$$\phi' = \pm \sqrt{2V(\phi)}$$

und somit auch die Bewegungsgleichungen des Feldes erfüllen. Weiterhin ist

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi_{\pm}^0 = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}}.$$

Für die beiden Vakuumlösungen gilt $\phi_+ = \phi_-$ beziehungsweise $\phi_- = \phi_+$. Es existieren also stetige Deformationen zwischen ϕ_{\pm}^0 und ϕ_{\pm} , was in diesem Fall trivial ist, da es sich um konstante Lösungen handelt. Es bedeutet, dass das Feld zwischen den gleichen Vakuumwerten interpoliert und im selben topologischen Sektor wie das Vakuum liegt, in welches es stetig deformiert werden kann. Um die anderen möglichen Konfigurationen zu erhalten, die diese Gleichung erfüllen, setzen wir $V(\phi)$ in ein.

$$\phi'(x) = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2} \left(\phi^2 - \frac{m^2}{4\lambda} \right)} \quad (3.5.3)$$

Trennung der Variablen und umstellen ergibt

$$\begin{aligned} \pm \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda}} &= \int_{x_0}^x dx = x - x_0 \\ \Leftrightarrow \pm \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2m} \right) \left| \ln \frac{\phi - \frac{m}{\sqrt{\lambda}}}{\phi + \frac{m}{\sqrt{\lambda}}} \right|_0^{\phi} &= x - x_0 \Leftrightarrow \frac{\phi - \frac{m}{\sqrt{\lambda}}}{\phi + \frac{m}{\sqrt{\lambda}}} = e^{\mp m\sqrt{2}(x-x_0)} \\ \phi &= \frac{m e^{\pm \frac{m}{\sqrt{2}}(x-x_0)} - e^{\mp \frac{m}{\sqrt{2}}(x-x_0)}}{\sqrt{\lambda} \left(e^{\pm \frac{m}{\sqrt{2}}(x-x_0)} + e^{\mp \frac{m}{\sqrt{2}}(x-x_0)} \right)} = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left(\frac{m(x-x_0)}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Diese Lösungen bezeichnet man als Kink bzw. Antikink, da sie zwischen benachbarten Vakua asymptotisch interpolieren. Die Integrationskonstante x_0 gibt die Stelle an, bei der die Funktion die x -

Achse schneidet bzw. über den „Hügel“ des Potentials geht. Offensichtlich sind die Lösungen translationsinvariant, da ein Shift von x_0 nur eine Änderung der Position von $\phi(x)$ bewirkt. Die anderen Symmetrien der Lagrange-Funktion lassen sich wie folgt zusammenfassen:

$$\phi_{k+}(x) = -\phi_{k-}(x) = \phi_{k-}(-x)$$

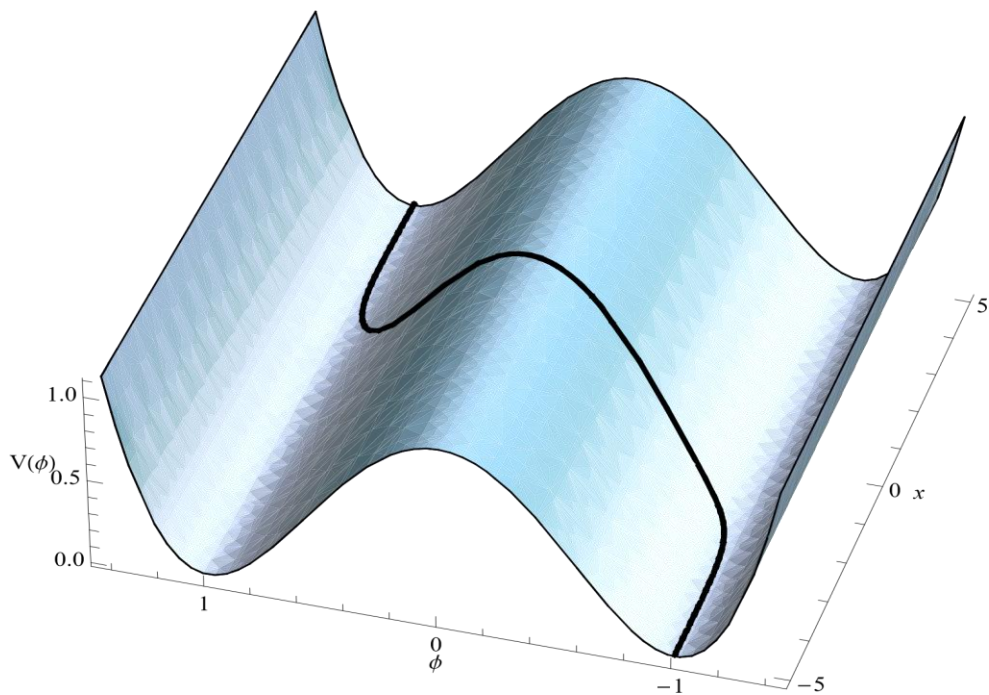
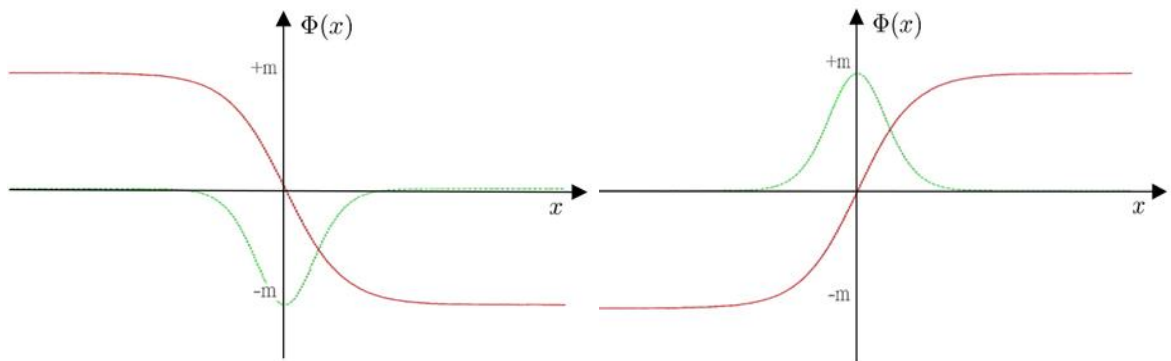


Abb.2 Kink (rechts) und Antikink (links) rot dargestellt mit den zugehörigen topologischen Ladungsdichten (grün) für $\lambda = m = 1$ und $x_0 = 0$. Die dreidimensionale Ansicht des Potentials und der Kinklösung (unten).

Die topologische Ladung ergibt sich zu

$$\begin{aligned} Q &= \pm \frac{\sqrt{\lambda}}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh\left(\frac{m(x-x_0)}{\sqrt{2}}\right) dx = \pm \left[\frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh\left(\frac{m(x-x_0)}{\sqrt{2}}\right) \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \pm \frac{\sqrt{\lambda}}{2m} \left(\frac{m}{\sqrt{\lambda}} + \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \right) = \pm 1 \end{aligned}$$

Es gilt offensichtlich $\phi_+ \neq \phi_-$, wodurch keine stetige Deformation in die Vakuumlösung ϕ_+ existiert. Wie wir gesehen haben, sind eine endliche Energiedichte in Verbindung mit der Forderung, dass die Vakuummannigfaltigkeit des Systems weder eine leere noch eine einelementige Menge ist, notwendige Bedingungen für die Existenz nichttrivialer beziehungsweise topologischer Lösungen nichtlinearer, selbstwechselwirkender Feldtheorien, die zwischen benachbarten Vakuumkonfigurationen interpolieren, während x von $-\infty$ gegen $+\infty$ steigt. Allerdings gilt die Umkehrung dieses Satzes ebenfalls, weil für jede Lösung, für die $\phi(\pm\infty) \notin \mathcal{V}$ gilt, das Erfüllen der Bogomolny-Gleichungen keine ausreichende Bedingung für die Minimierung des Energiefunktional ist und die Energie dann sogar über alle Grenzen steigt. Mithilfe der Bogomolny-Gleichungen lässt sich die Energiedichte $\varepsilon(x)$ wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= \frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi) = V(\phi) + V(\phi) = 2V(\phi) \\ &= \frac{\lambda}{2} \left((\phi_k)^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{m^2}{\lambda} \tanh^2\left(\frac{m(x-x_0)}{\sqrt{2}}\right) - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 \\ &= \frac{\lambda}{2} \left(\frac{m^4}{\lambda^2} \tanh^4\left(\frac{m(x-x_0)}{\sqrt{2}}\right) - \frac{2m^4}{\lambda^2} \tanh^2\left(\frac{m(x-x_0)}{\sqrt{2}}\right) + \frac{m^4}{\lambda^2} \right) = \frac{m^4}{2\lambda} \operatorname{sech}^4\left(\frac{m(x-x_0)}{\sqrt{2}}\right) \quad (3.5.5) \end{aligned}$$

Die Energiedichte ist klar bei x_0 konzentriert und ihre Breite skaliert mit $\frac{1}{m}$.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x) dx = \frac{m^4}{2\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4\left(\frac{mx}{\sqrt{2}}\right) dx \quad (3.5.6)$$

Substituieren wir $\xi = \frac{mx}{\sqrt{2}} \rightarrow d\xi = \frac{m}{\sqrt{2}} dx$, so erhalten wir

$$E = \frac{m^3}{\sqrt{2}\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4(\xi) d\xi = \left| \frac{m^3}{3\lambda\sqrt{2}} \tanh(\xi) \operatorname{sech}^2(\xi) \right|_{-\infty}^{\infty} + \frac{2m^3}{3\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(\xi) d\xi$$

Wobei die Reduktionsformel

$$\int \operatorname{sech}^m(\xi) d\xi = \frac{\sinh(\xi)\operatorname{sech}^{m-1}(\xi)}{m-1} + \frac{m-2}{m-1} \int \operatorname{sech}^{m-2}(\xi) d\xi$$

benutzt wurde. Es folgt nach Rücksubstitution

$$E = \frac{2m^3}{3\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(\xi) d\xi = \left| \frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda} \tanh\left(\frac{m\xi}{\sqrt{2}}\right) \right|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda} \quad (3.5.7)$$

Dieser endliche Ausdruck wird auch als klassische Kinkmasse bezeichnet.

$$M_{cl} = E = \frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda}$$

Wie schon am Anfang dieses Kapitels angemerkt, skaliert die Masse mit $1/\lambda$, weswegen es sich um keine perturbative Lösung handeln kann. Für kleine λ divergiert der Ausdruck. Für schwache Kopplung und unter der Annahme kleiner Energien ist die Lösung der Bewegungsgleichungen also unsichtbar. Der Kink ist eine legitime solitäre Welle, aber kein Soliton. Er ist Element einer, den Solitonen übergeordnete Klasse von Lösungen, die bei Kollision mit anderen Kinks in Mesonen zerfallen können. Außerdem kann es keine Zwei-Kink-Lösungen mit endlicher Energie geben. Im Gegensatz dazu findet bei Soliton-Soliton Kollisionen kein Energieaustausch statt und es existieren N-Solitonen Lösungen. Die Feldkonfiguration kann in dem Sinn als „Klumpen“ Materie angesehen werden, als dass sie ein statisches selbsterhaltendes lokalisiertes Wellenpaket ist. Die Ähnlichkeit zu einem Teilchen lässt sich noch stärker verdeutlichen, wenn wir uns vor Augen führen, dass das System lorentzinvariant ist. Wie wir gesehen haben lässt sich die zeitabhängige Lösung durch

$$\phi_{k\pm}(x, t) = \gamma \phi_{k\pm}(x - ut) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh\left(\frac{m}{\sqrt{2}} \frac{(x - x_0 - ut)}{\sqrt{1 - u^2}}\right) \quad (3.5.8)$$

darstellen. Das ist nichts anderes als ein Lorentz-Boost in Form einer Koordinaten-transformation

$$x \mapsto \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2}}$$

wobei $-1 < u < 1$ die Geschwindigkeit ist. Wie von einem relativistischen Klumpen Materie zu erwarten wäre, charakterisiert sich die Breite des sich bewegenden Kinks durch $\sqrt{1 - u^2}/m$.

Die Energie der zeitabhängigen Lösung berechnet sich zu

$$E(\phi(x, t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi) dx dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m^4}{4\lambda} \frac{u^2}{1-u^2} + \frac{m^4}{4\lambda} \frac{1}{1-u^2} + \frac{m^4}{4\lambda} \right) \operatorname{sech}^4 \left(\frac{m}{\sqrt{2}} \frac{(x-x_0-ut)}{\sqrt{1-u^2}} \right) dx dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m^4}{2\lambda(1-u^2)} \operatorname{sech}^4 \left(\frac{m}{\sqrt{2}} \frac{(x-x_0-ut)}{\sqrt{1-u^2}} \right) dx dt \\
&= \frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{M_{cl}}{\sqrt{1-u^2}} \tag{3.5.10}
\end{aligned}$$

Offensichtlich verhält sich die Lösung wie ein klassisches relativistisches Teilchen. Deswegen gilt auch die relativistische Energie-impuls Beziehung

$$E = \sqrt{p^2 + m^2}$$

Es ist also nicht verwunderlich, dass die quantisierte Version dieser Theorie Teilchenzustände erzeugt. Zudem sind, wie auch die Kinklösung, viele Konsequenzen für die Quantisierung nicht-perturbativ. Als nächstes wollen wir ein integrables System betrachten, welches Solitonen im Sinne der strikten Klassifikation durch das Streuverhalten enthält.

3.6 Solitonen des Sine-Gordon-Systems

Das System besteht aus einem einzelnen Skalarfeld in 1 + 1 Dimensionen. Die Lagrange-Dichte lautet

$$\mathcal{L}(x, t) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) + \frac{m^4}{\lambda} \left\{ \cos \left[\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m} \right) \phi \right] - 1 \right\} \tag{3.6.1}$$

Dieses Modell besitzt ein breites Anwendungsgebiet. Es wird bei der Untersuchung vieler Phänomene in der modernen Physik verwendet. Unter anderem bei der Propagation von Kristalldefekten, der Ausbreitung von Spreizwellen in Membranen, des magnetischen Flusses in Josephson-Strukturen und der Bewegung von Blochgrenzen in magnetischen Kristallen um nur einige zu nennen. Außerdem findet es Anwendung bei der Beschreibung zweidimensionaler Teilchen. Das Potential ist periodisch und besitzt Nullstellen bei

$$\phi_n^0 = \frac{2\pi n m}{\sqrt{\lambda}}$$

mit $n \in \mathbb{Z}$.

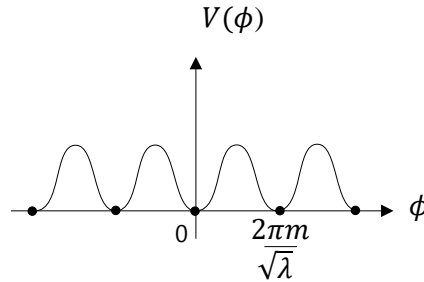


Abb. 3. Sine-Gordon Potential

Bevor wir die Lösungen der Feldgleichung des Systems; die sogenannte Sin-Gordon-Gleichung, berechnen, wollen wir erst die topologische Struktur näher analysieren. Es ist $\pi_0(\mathcal{V}) = \mathbb{Z}$. Seien (ϕ_-, ϕ_+) die Werte des Feldes für $x = \pm\infty$. Offensichtlich ist die Lagrange-Dichte invariant unter der Transformation $\phi \rightarrow \phi \pm \frac{2\pi m}{\sqrt{\lambda}}$. Das bedeutet, dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\phi_- = 0$ annehmen können. Aufgrund der Periodizität des Potentials betrachten wir die Lösungen als Felder modulo 2π . Also als Abbildung

$$\phi: \mathbb{R} \mapsto S^1,$$

wodurch die Randbedingung die Form $\phi(\pm\infty) = 0 \text{ mod } 2\pi$ erhält. Wir können die Kinks also anstatt zwischen Vakua interpolierend, als sich um den Einheitskreis windend betrachten. Da das Feld in beide räumlichen Richtungen derselben Randbedingung genügen muss, fügen wir beide Enden zusammen und erhalten durch diese Kompaktifizierung des Raumes eine Abbildung

$$\phi: S^1 \mapsto S^1.$$

Q lässt sich hier also anschaulich als Windungszahl betrachten.

$$Q = \int j^0 dx = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} \phi' dx = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m} \left(\frac{2\pi n_+ m}{\sqrt{\lambda}} - \frac{2\pi n_- m}{\sqrt{\lambda}} \right) = n_+ - n_-$$

Da eine, im Sinne der Energie, endliche stationäre Lösung zwei Minima verbinden muss gilt hier $Q \in \mathbb{Z}$. Für das Berechnen der expliziten Lösungen wenden wir wieder (3.4.6) an.

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{\sqrt{2\left(\frac{m^4}{\lambda}\left\{\cos\left[\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\right)\phi\right]-1\right\}\right)}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2m} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\phi}{2m}} \quad (3.6.2)$$

Substitution von $\phi = \frac{2m}{\sqrt{\lambda}} \arcsin t \rightarrow d\phi = \frac{2m}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ ergibt

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{2m} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\phi}{m}} = \frac{1}{m} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} dt$$

Mit $s = \sqrt{1-t^2}$, $dt = -\frac{\sqrt{1-t^2}}{t} ds$ wird der Ausdruck zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{s^2-1} ds &= \frac{1}{m} \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{(s+1)(s-1)} ds = \frac{1}{2m} \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s-1} ds \\ &= \frac{1}{2m} \left| \ln \frac{1-s}{1+s} \right|_{s_1}^{s_2} = \pm(x-x_0) \\ \Rightarrow \frac{1 - \cos\frac{\sqrt{\lambda}\phi}{m^2}}{1 + \cos\frac{\sqrt{\lambda}\phi}{m^2}} &= \frac{\sin^2\frac{\sqrt{\lambda}\phi}{4m^2}}{\cos^2\frac{\sqrt{\lambda}\phi}{4m^2}} = e^{\pm 2m(x-x_0)} \Rightarrow \tan^2\frac{\sqrt{\lambda}\phi}{4m^2} = e^{\pm 2m(x-x_0)} \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

$$\Rightarrow \tan\frac{\sqrt{\lambda}\phi}{4m^2} = e^{\pm m(x-x_0)} \Rightarrow \phi(x) = \frac{4m}{\sqrt{\lambda}} \tan^{-1}(e^{\pm m(x-x_0)}) \quad (3.6.4)$$

Die Lösung der zeitunabhängigen Sin-Gordon-Gleichung lautet also

$$\phi(x) = \pm \frac{4m}{\sqrt{\lambda}} \tan^{-1}(e^{m(x-x_0)}). \quad (3.6.5)$$

Sie erfüllt die Bewegungsgleichung

$$\square\phi = -(m^3/\sqrt{\lambda}) \sin([\sqrt{\lambda}/m]\phi)$$

Weiterhin gilt

$$\phi_{sol}(x) = -\phi_{antisol}(x)$$

Die Feldkonfiguration $\phi(x)$ mit dem positiven Vorzeichen verbindet die beiden Vakua $\phi_0^0(x) = 0$ und $\phi_0^1(x) = \frac{2\pi m}{\sqrt{\lambda}}$ oder $\frac{2\pi m}{\sqrt{\lambda}}$ mit $\frac{4\pi m}{\sqrt{\lambda}}$ usw. und wird Soliton des Systems genannt. Sie besitzt die topologische Ladung

$$Q = n_+ - n_- = n - (n - 1) = 1$$

Für die Lösungen mit negativem Vorzeichen gilt somit

$$Q = n_+ - n_- = (n - 1) - n = -1$$

Sie werden Antisoliton genannt. Die Bogomolny-Schranke für die Energie des Sin-gordon-Solitonen lautet explizit

$$\begin{aligned}
 E &\geq \left| \int_{\phi_-}^{\phi_+} \sqrt{2V(\phi)} d\phi \right| = \frac{2m^2}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\frac{2\pi m}{\sqrt{\lambda}}} \left| \sin \frac{\sqrt{\lambda}\phi}{m} d\phi \right| = \frac{2m^2}{\sqrt{\lambda}} |n| \left| \cos \frac{\sqrt{\lambda}\phi}{m} \right|_0^{\frac{2\pi m}{\sqrt{\lambda}}} \quad (3.6.6) \\
 &= \frac{2m^2}{\sqrt{\lambda}} |n| \frac{4m}{\sqrt{\lambda}} = \frac{8m^3}{\lambda} |n|
 \end{aligned}$$

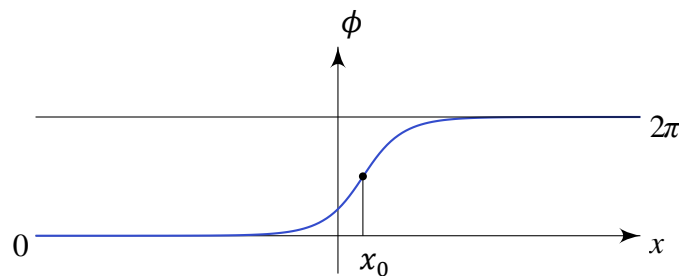


Abb.5 Sin-Gordon Soliton für $m = \lambda = 1$, $x_0 = \pi$.

Das System enthält aber noch weitere Lösungen. Obwohl es keine statischen Multisolitonen gibt können wir zeitabhängige Feldkonfigurationen finden, die den Streuprozess zweier Kinks beschreiben. Beim Sin-Gordon Modell ist es sogar möglich diese Lösungen in geschlossener Form herleiten, was relativ selten ist. Das ist aufgrund der Tatsache, dass das System in einer Dimension integrierbar ist, möglich. Integrierbare Soliton-Gleichungen würden eine lange Digression erfordern, weswegen es hier nur bei

einigen Kommentaren belassen wird. Allerdings gibt es keine universale allgemeingültige Definition eines integrierbaren Systems. Haupteigenschaften vieler von PDE's beschriebener Systeme, die man zu dieser Kategorie zählt, sind beispielsweise: Die Existenz unendlich vieler Erhaltungsgrößen, die Möglichkeit das System als Eigenwertgleichung eines linearen Operators zu formulieren, der mit dem Zeitentwicklungsoperator des Systems die Lax-Gleichungen erfüllt und ein Lax-Paar bildet und die Anwendbarkeit Lösungs-generierender Techniken, wie die inverse Streumethode und die Bäcklund-Transformation. Die letzte Eigenschaft benutzen wir jetzt um explizit die Zwei-Soliton Lösung zu konstruieren. Dazu müssen zuerst einige Koordinatentransformationen durchführen.

$$\bar{x} = mx, \quad \bar{t} = mt, \quad \bar{\phi} = \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi \quad (3.6.7)$$

Die Bewegungsgleichung erhält dann die Form

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{t}^2} - \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^2} + \sin \bar{\phi}(\bar{x}, \bar{t}) = 0 \quad (3.6.8)$$

Als nächstes ist es angebracht Lichtkegel-Koordinaten einzuführen, wobei wir $\bar{x} = x$, $\bar{t} = t$ und $\bar{\phi} = \phi$ setzen.

$$x_{\pm} = \frac{1}{2}(x \pm t) \quad \partial_{\pm} = \frac{\partial}{\partial x_{\pm}}$$

Die Sin-Gordon Gleichung wird dann zu

$$\partial_+ \partial_- \phi = \sin \phi \quad (3.6.9)$$

Wir führen das folgende Paar von Gleichungen ein

$$\partial_+ \chi = -2\beta \sin \frac{\chi}{2}, \quad \partial_- \chi = -\frac{2}{\beta} \sin \frac{\chi}{2}$$

Integration beider Seiten liefert

$$\chi(x_+, x_-) = 4 \tan^{-1} \left(e^{\frac{-\beta x_+ - x_-}{\beta + \alpha}} \right) \quad (3.6.10)$$

mit der Integrationskonstante α . Als nächstes führen wir drei neue Variablen ein.

$$u = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} = -\frac{1 + \beta^2}{2\beta}, \quad a = \frac{2\alpha\beta}{1 + \beta^2}$$

Die Bäcklund-Transformation führt zu einer rein algebraischen Methode Multisolitonen zu konstruieren, ohne (...) explizit integrieren zu müssen. Die algebraische Konstruktion entsteht durch die Annahme, dass die χ_1, χ_2 dieselbe Anfangswertfunktion $\phi = \chi_0$, aber verschiedene Bäcklundparameter β_1, β_2 besitzt. Durch einige Umformungsschritte kann gezeigt werden, dass Permutabilität gilt, sodass die Lösung χ_{12} durch Bäcklund-Transformation mit dem Parameter β_2 zur Anfangswertfunktion χ_1 und χ_{21} durch Transformation mit β_1 und χ_2 erzeugt werden kann. Die Konsistenzbedingung $\chi_{12} = \chi_{21}$ führt zu

$$\chi_{12} = \chi_{21} = 4 \tan^{-1} \left\{ \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \right) \tan \left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{4} \right) \right\} - \chi_0$$

mit den bekannten Funktionen $\chi_{12}, \chi_{21}, \chi_0$. Wir haben oben diese Transformation von der Vakuumlösung χ_0 aus durchgeführt und den Eins-Kink erhalten.

$$\chi_j = 4 \tan^{-1} e^{\theta_j}$$

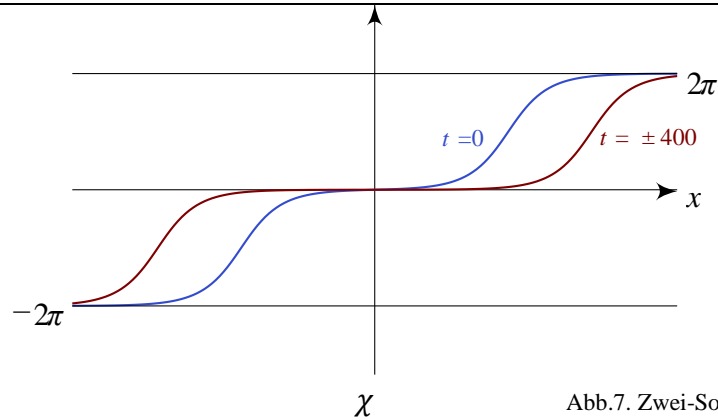
wobei $j = 1, 2$ und $\theta_j = \frac{-\beta_j x_+ - x_-}{\beta_j + \alpha_j}$ bezeichnet. Einfügen in die Gleichung (3.6.10) ergibt

$$\chi(x_+, x_-) = 4 \tan^{-1} \left\{ \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \right) \left(\frac{\sinh \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}}{\cosh \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}} \right) \right\}$$

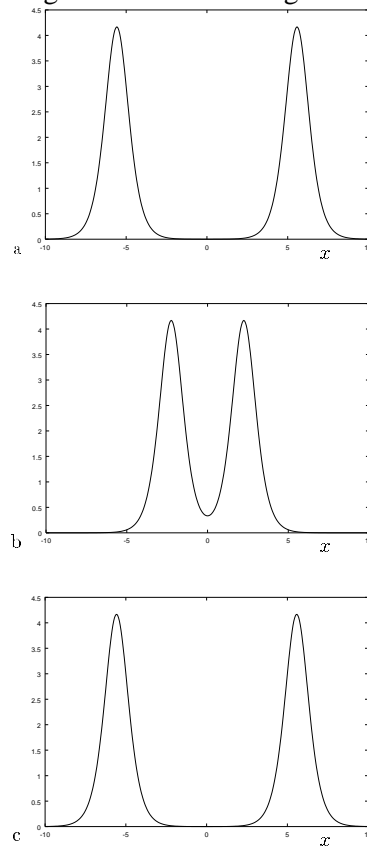
Setzen wir $\beta_1 = 1/\beta_2 \equiv \beta$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, wird (..) zu

$$\chi(x, t) = 4 \tan^{-1} \left\{ \left(\frac{u \sinh(\gamma x)}{\cosh(\gamma ut)} \right) \right\}. \quad (3.6.11)$$

Da diese Lösung zwischen den Vakua -2π und 2π interpoliert während x von $-\infty$ nach $+\infty$ läuft, befindet es sich im $Q = 2$ Sektor und beschreibt deswegen ein Zwei-Kinkfeld, welches auch Breather genannt wird. Konsistent mit der Nichtexistenz statischer Multisolitonen degeneriert die Lösung für $u \rightarrow 0$. Für $|t|$ groß beschreibt die Lösung zwei seperierte Kinks. Diese nähern sich mit Geschwindigkeit u für $t < 0$ an und entfernen sich für $t > 0$ mit der Geschwindigkeit u voneinander. Sie erfahren eine abstoßende Kink-Kink Kraft und prallen aneinander ab wenn $t = 0$. Die Zwei-Kink Lösung wurde zuerst von Perring und Skyrme durch numerische Analysen entdeckt. Sie ist symmetrisch in der Zeit, sodass die Bewegung symmetrisch um $t = 0$ ist. Normalerweise wird die Streulösung in der Form interpretiert, als das die Kinks sich durch den jeweils anderen hindurch bewegen und während dessen etwas beschleunigt werden.

Abb.7. Zwei-Soliton Lösung für $v = 0.01$

Im Allgemeinen ist die Interaktion von Kinks sehr kompliziert, denn wie wir gesehen haben, müssen statische Lösung zwei benachbarte Vakua verbinden. Für die Verbindung weiter entfernter Vakuumkonfigurationen haben wir viele untereinander interagierende Kinks. Für mehrere Kinks und Antikinks, die verschiedene Geschwindigkeiten besitzen, ist die Interaktion wesentlich komplexer, da Vorgänge wie Paarbildung und Anihilation auftreten. Für Solitonen hingegen, wie sie das Sin-Gordon System enthält, ist die Interaktion keineswegs kompliziert, da kein Energieverlust durch Strahlung auftritt, wie man anhand von Simulationen sehen kann. Die Solitonen bleiben strukturiert und behalten ihre Identität während des Streuprozesses. Das liegt vorallem an der Integrabilität des Modells. Ähnliche Systeme beschreiben beispielsweise Tsunamies und erklären die Stabilität und das Streuverhalten kleiner Wasserwellen wie die Korteweg-de-Kries Gleichung.

Abb.8. Die Energie des Sin-Gordon Kinks für die Zeiten (a) $t = -20$, (b) $t = 0$, (c) $t = 20$ und $u = 0.2$

4. Quantisierung stationärer Kinks

Die vorherigen Kapitel beinhalteten klassische Lösungen relativistischer nichtlinearer Bewegungsgleichungen. In diesem Kapitel werden wir die Relevanz solcher Lösungen für die korrespondierende Quantentheorie diskutieren. Solitäre Wellen bzw. Solitonen werden mit Quantenzuständen ausgedehnter Teilchen assoziiert und Streuzustände in Quantenfeldtheorien können durch die zugehörigen nichtperturbativen Lösungen beschrieben werden. Dies ist von mehr als konzeptionellem Interesse, da bestimmte Eigenschaften dieser Zustände, wie zum Beispiel die Energie oder Formfaktoren, in halbklassischen Reihen expandiert werden können. Die dominierenden Terme sind die zugehörigen klassischen Lösungen. Sie zeigen auch an, welche Regionen im Feldkonfigurationsraum maßgeblich zum Pfadintegral beitragen. Instatonen sind höherdimensionale Kinks, die nicht im Raum sondern in der Zeit lokalisiert sind. Ihre quantisierte Form taucht in der Quantenchromodynamik und in der Inflationstheorie auf, wo sie Tunnelprozesse im Wechselwirkungspotential und Zerfälle von falschen Vakua in metastabilen Potentialen beschreiben. Interessant ist auch, dass die Sin-Gordon Solitonen in $1 + 1$ Dimensionen ein Modell für Hawking-Strahlung sich bewegender schwarzer Löcher sind. Die Temperatur der Strahlung hängt dabei eng mit der Geschwindigkeit der quantisierten Solitonen zusammen.

4.1 Algebraische Struktur der Quantenfeldtheorie freier skalarer Felder

In der Quantenmechanik werden Messgrößen durch wesentlich selbstadjungierte Operatoren auf komplexen Hilberträumen beschrieben. Die Menge dieser Observablen besitzt die Struktur einer assoziativen, involutiven Algebra mit Eins über den komplexen Zahlen. Zur Beschreibung einer normabgeschlossenen Algebra beschränkter Hilbertraum-Operatoren, die in der Regel nichtkommutativ ist, eignen sich C^* -Algebren, denn diese sind isomorph zu Ersteren. Um den Quantisierungsprozess der Vakuumsektoren besser zu verstehen ist es hilfreich als erstes das freie skalare Feld zu betrachten. Ganz allgemein hat die Algebra der freien Felder auf dem Minkowskiraum aus klassischer Sichtweise die folgende Struktur zitiert aus [37] unter Zuhilfenahme von [38].

Sei $\mathcal{C} := C^\infty(\mathbb{M})$ die Menge der möglichen glatten Feldkonfigurationen. Das klassische Feld kann als Funktional auf dem klassischen Konfigurationsraum aufgefasst werden.

$$\phi(x)(f) = f(x)$$

Sei $S = \int d^4x \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$ das klassische freie Wirkungsfunktional mit den Lösungen der freien zugehörigen Feldgleichung, welche Elemente der Menge $\mathcal{C}_S \subset \mathcal{C}$ sind. Die Fundamentallösung positiver Energie des Systems

$$(\square + m^2)\Delta_+(x) = 0 \tag{4.1.1}$$

mit den Anfangswerten

$$\Delta_+(x, 0) = 0 \quad (4.1.2)$$

$$\partial_t \Delta_+(x, 0) = \delta^{(3)}(x)$$

lautet

$$\Delta_+(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} e^{i\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}x^0 - \vec{p}x} \quad (4.1.3)$$

Die Observablen der klassischen Theorie sind Funktionale $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Form

$$\mathcal{F} = \sum_n \int dx_1 \cdots dx_n F_n(x_1, \dots, x_n) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \quad (4.1.4)$$

Die F_n sind Distributionen mit kompaktem Träger bei deren Wellenfrontmengen gewisse Einschränkungen zu machen sind. Das Produkt zweier solcher Funktionale wird auch Wickprodukt oder Normalprodukt bezeichnet.

$$\mathcal{F} * \mathcal{G} := \sum_n \frac{\hbar^n}{n!} \int dx dy \frac{\delta^n \mathcal{F}}{\delta \phi^n}(x) \frac{\delta^n \mathcal{G}}{\delta \phi^n}(y) \prod_{i=1}^n \Delta_+(x_i - y_i) \quad (4.1.5)$$

Die n -te Funktionalableitung ist dabei definiert als

$$\frac{\delta^n \mathcal{F}}{\delta \phi^n}(x_1, \dots, x_n) := \sum_{k \geq n} \frac{k!}{(k-n)!} \sum_n \int dx_{n+1} \cdots dx_k F_k(x_1, \dots, x_k) \phi(x_{n+1}) \cdots \phi(x_k)$$

Für $\hbar = 0$ ist $(\mathcal{F} * \mathcal{G})(\phi) = \mathcal{F}(\phi)\mathcal{G}(\phi)$ das punktweise klassische Produkt der Funktionale. In erster Ordnung \hbar , ist der Kommutator $[\mathcal{F}, \mathcal{G}]$ proportional zur Poisson-Klammer

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{i\hbar} [\mathcal{F}, \mathcal{G}] = \int dx dy \frac{\delta^n \mathcal{F}}{\delta \phi^n}(x) \frac{\delta^n \mathcal{G}}{\delta \phi^n}(y) \Delta(x - y)$$

und mit den Anfangswerten (..) ist

$$i\Delta(x - y) := \Delta_+(x - y) - \Delta_-(x - y) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4 p \delta(p^2 - m^2) \theta(p_0) (e^{ipx} - e^{-ipx})$$

Durch dieses Produkt lässt sich eine Algebra für alle Raumzeitgebiete $\mathcal{M} \subset \mathbb{M}$ definieren.

$$\mathfrak{A}_0(\mathcal{M}) := \{\mathcal{F} \in \mathfrak{A} \mid \text{supp} F_n \subset \mathcal{M}^n\} \quad (4.1.6)$$

Sie ist isoton, lorentz- und translationsinvariant und besitzt einen ausgezeichneten Zustand, der als Vakuumzustand bezeichnet wird. Zustände von \mathfrak{A} sind allgemein alle \mathbb{C} -linearen Funktionale $w : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$ für die

$$w(1) = 1 \tag{4.1.7}$$

$$w(\mathcal{F}) \geq 0 \Rightarrow \mathcal{F} \geq 0$$

gilt. Der Vakuumzustand ist gegeben durch

$$w_0(\mathcal{F}) = F_0 ,$$

wobei F_0 die feldunabhängige Komponente von \mathcal{F} ist.

$$F_0 = \mathcal{F}(\phi \equiv 0)$$

Es lässt sich zeigen das w_0 die Eigenschaften der Linearität, Normiertheit und Positivität erfüllt. Offensichtlich ist w_0 linear und normiert. Die Positivität können wir wie folgt zeigen.

$$\mathcal{F}^* = \sum_n \int dx_1 \cdots dx_n \bar{F}_n(x_1, \dots, x_n) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)$$

$$w_0(\mathcal{F}^* \mathcal{F}) = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})_0$$

$$= \sum_n n! \hbar^n \int dx dy \bar{F}_n(x) F_n(y) \prod_{i=1}^n \Delta_+(x_i - y_i)$$

$$= \sum_n n! \hbar^n \int dx dy \bar{F}_n(x) F_n(y) \int \frac{d^3 p_i}{2\omega_i} e^{ip_i(x_i - y_i)}$$

$$= \sum_n n! \hbar^n \prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 p_i}{2\omega_i} |\hat{F}_n(p_1, \dots, p_n)|^2 \geq 0$$

Der letzte Term ist im nichttrivialen Fall positiv definit mit der Fouriertransformierten \hat{F}_n . Da die Observablen der Quantenmechanik auf Hilberträumen operieren und Zustände als normierte Elemente dieser Vektorräume aufgefasst werden ist es nötig, die Algebra in einer Hilbertraumdarstellung zu konstruieren. Nach der Gelfand-Neumark-Segal Konstruktion gilt einerseits, dass die Darstellung einer involutiven Algebra \mathfrak{A} mit Eins ein $*$ -Homomorphismus $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{L}(\mathfrak{D})$ in die Algebra der linearen

Operatoren eines dichten Teilraums \mathfrak{D} eines Hilbertraums \mathfrak{H} mit $\pi(1) = 1$ ist, und das andererseits jeder Einheitsvektor $\Phi \in \mathfrak{D}$ durch $w(A) = (\Phi, \pi(A)\Phi)$ einen Zustand der Algebra \mathfrak{A} darstellt mit einem linearen beschränkten Operator A . Man kann also ein Theorem formulieren:

Sei w ein Zustand einer involutiven Algebra \mathfrak{A} mit Eins. Dann gibt es eine Darstellung π der Algebra durch lineare Operatoren eines dichten Teilraums \mathfrak{D} eines Hilbertraums \mathfrak{H} und einen Einheitsvektor $Y \in \mathfrak{D}$, sodass gilt

$$w(A) = (Y, \pi(A)Y) \quad (4.1.8)$$

und $\mathfrak{D} = \{\pi(A)Y, A \in \mathfrak{A}\}$. $\mathfrak{H}, \mathfrak{D}, Y$ und π sind bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt.

Die zugehörige GNS-Konstruktion zur Algebra $\mathfrak{A}_0(\mathcal{M}) := \{\mathcal{F} \in \mathfrak{A} \mid \text{supp } F_n \subset \mathcal{M}^n\}$ liefert folglich einen Hilbertraum \mathfrak{H}_0 , einen dichten Teilraum \mathfrak{D} , einen Einheitsvektor Y und eine Abbildung π . Der Raum $\phi(f)Y$ ist der Raum der positiven Frequenzlösungen der Klein-Gordon Gleichung und wird als Einteilchenraum identifiziert. Analog kann \mathfrak{H} als Fock-Raum über dem Einteilchenraum bezeichnet werden, der durch die direkte Hilbertraum-Summe von symmetrischen Tensorpotenzen von n -Mannigfaltigkeiten des $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit dem Lorentz-invarianten Maß gebildet wird. Der Nullraum \mathcal{N} ist

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &:= \{\mathcal{F} \in \mathfrak{A}_0(\mathbb{M}) \mid w_0(\mathcal{F}^*\mathcal{F}) = 0\} \\ &= \{\mathcal{F} \in \mathfrak{A}_0(\mathbb{M}) \mid \hat{F}_n = 0\} \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

$$\mathfrak{A}(\mathbb{M})/\mathcal{N} \subset \mathfrak{F}$$

Mit dem üblichen Fockraum \mathfrak{F}

$$\mathfrak{F} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_{\text{Sym}}^2((\mathbb{R}^{3n}), \prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 p_i}{2\omega_i}) \quad (4.1.10)$$

und der Observablenalgebra des freien Feldes $\mathfrak{A}(\mathbb{M}) := \mathfrak{A}_0(\mathbb{M})/\mathcal{J}$. Wobei $\mathcal{J} \subset \mathfrak{A}_0$ das Ideal ist, welches durch die klassische Feldgleichung

$$\phi((\square + m^2)f)$$

erzeugt wird.

4.2 Quantisierung des freien Skalarfeldes

Wie im vorherigen Kapitel dargestellt, können $\phi, \dot{\phi} = \Pi$ als operatorwertige Distributionen auf einem Hilbertraum aufgefasst werden, für die die gleichzeitigen Kommutatorrelationen

$$[\phi(t, x), \phi(t, y)] = 0, \quad [\Pi(t, x), \Pi(t, y)] = 0, \quad [\phi(t, x), \Pi(t, y)] = i\delta(x - y) \quad (4.2.1)$$

gelten. Die letzte Relation ist dabei so zu verstehen, dass auf Testfunktionen $f, g \in \mathcal{S}$ angewandt

$$[\phi_t(f), \Pi_t(g)] = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} dx dy f(x)g(y)[\phi(t, x), \Pi(t, y)] = i \int_{\mathbb{R}} dx f(x)g(x) = i\langle f, g \rangle.$$

Die Bewegungsgleichung der freien skalaren Feldtheorie beschreibt einen harmonischen Oszillator im Impulsraum mit Frequenz $\omega_p = \sqrt{p^2 + m^2}$.

$$\phi(t, x) = \int \frac{dp}{2\pi\sqrt{2\omega_p}} (a(p)e^{-i(w_p t - px)} + a^\dagger(p)e^{i(w_p t - px)}) \quad (4.2.2)$$

$$\Pi(t, x) = \int \frac{dp}{2\pi} (-i) \frac{\sqrt{\omega_p}}{2} (a(p)e^{-i(w_p t - px)} - a^\dagger(p)e^{i(w_p t - px)}) \quad (4.2.3)$$

mit $a^\dagger = a^*$. Die Fouriermoden

$$f_p(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\omega_p}} e^{\pm i(w_p t - px)} \quad (4.2.4)$$

bilden dabei ein vollständiges Orthonormalsystem bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle A^*, B \rangle \equiv \int dx A^*(x) i \vec{\partial}_0 B(x)$$

Die Kommutatorrelationen für Erzeuger und Vernichter sind identisch mit denen der Erzeuger und Vernichter von Quanten des harmonischen Oszillators mit Frequenz ω_p . Das Quantenfeld ϕ kann dadurch als Überlagerung quantenmechanischer harmonischer Oszillatoren interpretiert werden und somit ist es möglich, die kanonischen Kommutatorrelationen für die Felder durch die Vernichter und Erzeuger auszudrücken.

$$[a(p), a(p')] = [a^\dagger(p), a^\dagger(p')] = 0, \quad [a(p), a^\dagger(p')] = 2\pi\delta(p - p') \quad (4.2.5)$$

Mit

$$\begin{aligned}
\langle f_p, f_{p'}^* \rangle &= \int dp \{ f_p^*(x) i \vec{\partial}_0 f_{p'}(x) - [i \vec{\partial}_0 f_p^*(x)] f_{p'}(x) \} \\
&= \int \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{4\omega_p \omega_{p'}}} \left[e^{i(\omega_p t - px)} \omega_{p'} e^{-i(\omega_{p'} t - p'x)} + \omega_p e^{i(\omega_p t - px)} e^{-i(\omega_{p'} t - p'x)} \right] \\
&= \frac{\omega_{p'} + \omega_p}{2\pi \sqrt{4\omega_p \omega_{p'}}} e^{i((\omega_p - \omega_{p'})t)} 2\pi \delta(p - p') \equiv \delta(p - p')
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
[a(p), a^\dagger(p')] &= \int dp 2\pi \sqrt{4\omega_p \omega_{p'}} f_p^*(x) i \vec{\partial}_0 f_p(x) \\
&= 2\pi \sqrt{4\omega_p \omega_{p'}} \langle f_p, f_p^* \rangle \\
&= 2\omega_p 2\pi \delta(p - p')
\end{aligned}$$

Ähnlich zeigt man

$$[a(p), a(p')] = 0 \quad [a^\dagger(p), a^\dagger(p')] = 0 \quad (4.2.6)$$

Der Hilbertraum \mathfrak{H} kann mithilfe eines Vakuumvektors Ω mit $\langle \Omega, \Omega \rangle = 1$ konstruiert werden. Auf diesem wirken die operatorwertigen Distributionen ϕ und Π als unbeschränkten Operatoren.

$$\mathfrak{H} = \overline{\text{span}\{a_{p_1}^\dagger \dots a_{p_N}^\dagger \Omega : N \in \mathbb{N}, p_i \in \mathbb{R}^{n-1}\}} \quad (4.2.7)$$

Mit $a_p \Omega = 0$, $\forall p \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $a_p^\dagger = (a_p)^*$. ϕ und Π in den Hamiltonoperator eingesetzt wird mithilfe der Kommutatorrelationen der Erzeuger -und Vernichteroperatoren zu

$$H = \int \frac{dp}{(2\pi)^{n-1}} \frac{\omega_p}{2} (a_p a_p^\dagger + a_p^\dagger a_p) \quad (4.2.8)$$

Dieser Ausdruck ist divergent, denn mit $a_p a_p^\dagger + a_p^\dagger a_p \Omega = \Omega$ folgt

$$H\Omega = \int \frac{dp}{(2\pi)^{n-1}} \frac{w_p}{2} \rightarrow \infty \quad (4.2.9)$$

4.3 Der Fluktationsoperator

In der nichtrelativistischen, klassischen Mechanik werden Teilchen mit der Einheitsmasse in einer Raumdimension durch die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dV}{dx} \quad (4.3.1)$$

beschrieben. Die stationären Lösungen der Gleichung sind offensichtlich die Extrema des Potentials $V(x)$. In der Quantenmechanik dagegen, ist ein solcher Zustand - das Teilchen besitzt keinen Impuls und einen fixen Ort - aufgrund der Unschärferelation nicht erlaubt. Ort und Impuls des quantenmechanischen Teilchens fluktuieren also um die Extrema von $V(x)$, was durch die Beschreibung des Objekts als Wellenfunktion $\psi(x)$ verdeutlicht wird. Die Wellenfunktion ist Element des Hilbertraumes \mathfrak{H} auf dem das Energiefunktional H des Systems operiert, welches besser unter dem Namen „stationärer Schrödinger-Operator“ bekannt ist

$$(H\psi_n)(x) = -\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + V(x)\psi_n(x) = E_n\psi_n(x) \quad (4.3.2)$$

Die Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ beschreiben das Teilchen im n -ten Zustand mit Energie E_n vollständig. Um zur Feldtheorie überzugehen, müssen wir die Terminologie des Pfadintegralformalismus verwenden.

Aus den vorherigen Kapiteln ist bekannt, dass die Lösungen der Bewegungsgleichung des Feldes $\phi(x)$ im Potential $V(x)$ die Wirkung S minimieren. Somit sind sie Sattelpunkte des euklidischen Pfadintegrals

$$K(\phi_i, \phi_f, x) = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \mathcal{D}\phi \exp(-S_E[\phi]) \quad (4.3.3)$$

mit

$$S_E = \int dx \left(\frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi(x)) \right) \quad (4.3.4)$$

Die klassischen Lösungen sind Äquipotentialflächen im Feldkonfigurationsraum und bilden die Hauptbeiträge zum Pfadintegral. Wir müssen also Pfade in der Nähe der Kinks untersuchen. Dazu wird die Wirkung S_E variiert. Die Quantenkorrekturen zur klassischen Energie werden durch die Terme höherer Ordnung repräsentiert, wobei die erste Variation des Wirkungsfunktional nach dem Hamiltonschen Prinzip verschwindet.

$$S_E[\phi(x)] = S_E[\phi_{cl}(x)] + \int dx dx' (\phi - \phi_{cl})(x) \frac{1}{2} \frac{\delta^2 S_E}{\delta\phi(x)\delta\phi(x')} \Big|_{\phi(x)=\phi_{cl}(x)} (\phi - \phi_{cl})(x')$$

$$\left[\frac{\delta^2 S_E}{\delta\phi(x)\delta\phi(x')} \right]_{\phi(x)=\phi_{cl}(x)} = \underbrace{[-\partial_x^2 + V''(\phi_{cl}(x))]}_{\text{Fluktuationsoperator}} \delta(x - x') \quad (4.3.5)$$

Mit dieser Darstellung wird die zweite Variation der Wirkung zum Erwartungswert des Fluktuationsoperators. Dieser schrödingerartige Operator \hat{F} mit der Eigenwertgleichung (Stabilitätsgleichung)

$$[-\partial_x^2 + V''(\phi_{cl}(x))] \psi_n(x) = \omega^2 \psi_n(x) \quad (4.3.6)$$

kann Nullmoden ψ_0 besitzen, deren Anzahl abhängig von der Menge der Parameter ist, unter deren Änderung die Wirkung konstant bleibt. Für jeden Parameter ξ_i für den gilt

$$S_E[\phi_{cl}(x; \xi_i)] = \text{const.} \quad (4.3.7)$$

verschwinden die Fluktuationen und somit auch die zweite Ableitung von S_E .

$$\frac{\partial \phi_{cl}}{\partial \xi_i} \frac{\delta^2 S_E}{\delta\phi_k^2} \frac{\partial \phi_{cl}}{\partial \xi_i} = 0 \quad (4.3.8)$$

Die stationäre Kink-Lösung ist zwar ein Extremum der Wirkung. Jedoch ist sie kein Minimum des Potentials, weil die Energie invariant unter Translation der Lösung $\phi_{cl}(x - x_0)$ ist. Die translatierten Lösungen bilden eine Äquipotentialkurve im Feldkonfigurationsraum entlang welcher ϕ_{cl} nur „neutrale“ Stabilität besitzt. Die Nullmode kann also als Tangente an jeden Punkt der Äquipotentialkurve verstanden werden, weil die Wirkung und damit auch der Fluktuationsoperator in Richtung von ξ_i verschwindet. Wir nennen sie deswegen auch Translationsmode. Folglich muss diese, bis auf Normierungsfaktoren, die Ableitung des Kinks in Richtung ξ_i sein

$$\psi_0(x) = \frac{\partial \phi_{cl}}{\partial \xi_i} \quad (4.3.9)$$

$$[-\partial_x^2 + V''(\phi_k(x))]\psi_0(x) = 0 \quad (4.3.10)$$

Weiterhin gilt $\psi_0 \in \mathcal{L}^2$, denn mit Bolgomolny folgt

$$E = \int dx \psi_0(x)^2 = \int dx \left(\frac{\partial \phi_{cl}}{\partial x} \right)^2 = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_{cl}}{\partial x} \right)^2 + V(\phi_k(x)) \right] < \infty \quad (4.3.11)$$

Somit ist ψ_0 quadrat-integabel und normierbar. Da Sin-Gordon- und ϕ^4 -Kinks monotone Funktionen sind besitzt die Translationsmode keine Nullstellen, was sie als Grundzustand auszeichnet. Deswegen gilt für die Eigenwerte $\omega \geq 0$. Die ϕ^4 -Theorie besitzt zwei Sektoren.

Den Vakuumsektor

$$\phi_{\pm}^0 = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$$

und den Kinksektor

$$\phi_k = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh\left(\frac{mx}{\sqrt{2}}\right)$$

Die triviale Lösung besitzt keine Translationsinvarianz, da sie ein Minima der Wirkung ist und einen Punkt im Feldkonfigurationsraum bildet. Es ist also keine Translationsmode zu erwarten. Die zugehörigen Fluktuationsoperatoren der Sektoren lauten

$$F_0 = -\partial_x^2 + V''(\phi_0(x)) = -\partial_x^2 - m^2 + 3\lambda\phi_0^2 = -\partial_x^2 - m^2 + \frac{3\lambda m^2}{\lambda} = -\partial_x^2 + 2m^2 \quad (4.3.12)$$

und

$$\begin{aligned} F &= -\partial_x^2 + V''(\phi_k(x)) = -\partial_x^2 - m^2 + 3m^2 \tanh^2\left(\frac{mx}{\sqrt{2}}\right) \\ &= -\partial_x^2 + m^2 \left(3 \tanh^2\left(\frac{mx}{\sqrt{2}}\right) - 1 \right). \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Analog für das Sin-Gordon System

$$\phi_n^0 = \frac{2\pi n m}{\sqrt{\lambda}}$$

$$G_0 = -\partial_x^2 + V''(\phi_0(x)) = -\partial_x^2 + m^2 \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}\phi_0}{m}\right) = -\partial_x^2 + m^2 \cos(2\pi) = -\partial_x^2 + m^2 \quad (4.3.14)$$

und

$$\begin{aligned} G &= -\partial_x^2 + V''(\phi_s(x)) = -\partial_x^2 + m^2 \cos(4 \tan^{-1}(e^{mx})) \\ &= -\partial_x^2 + m^2 - 2m^2 \operatorname{sech}^2(mx) \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

Im folgenden wollen wir die Spektren der Fluktuationsoperatoren beider Systeme genauer untersuchen. Dabei lässt sich die Eigenschaft ausnutzen, dass F ein supersymmetrischer Operator ist. Definieren wir also zwei Operatoren erster Ordnung

$$B_N = \partial_x + W_N(x) \quad (4.3.16)$$

und

$$B_N^\dagger = -\partial_x + W_N(x) \quad (4.3.17)$$

Mit dem noch zu wählenden Superpotential $W_N(x)$. Weiterhin definieren wir durch B_N^\dagger und B_N die Operatoren

$$F_{N-} = B_N^\dagger B_N = -\partial_x^2 - W_N'(x) + W_N^2(x) \quad (4.3.18)$$

sowie

$$F_{N+} = B_N B_N^\dagger = -\partial_x^2 + W_N'(x) + W_N^2(x). \quad (4.3.19)$$

Angenommen der Grundzustand $\psi_0(x)$ des Systems erfüllt die Gleichung

$$F_{N-}(\psi_0)(x) = (B_N^\dagger B_N \psi_0)(x) = B_N^\dagger(\partial_x + W(x))\psi_0 = 0$$

Kennt man nun den Grundzustand $\psi_0(x)$, kann man $W(x)$ berechnen durch

$$W_N(x) = -\left(\frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)}\right). \quad (4.3.20)$$

Umgekehrt gilt

$$\psi_0(x) = e^{\int^x W_N(\xi) d\xi}. \quad (4.3.21)$$

Der Operator \hat{F} lässt sich in als Matrix darstellen

$$\begin{aligned} \hat{F}_N &= \begin{pmatrix} F_{N-} & 0 \\ 0 & F_{N+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 - W_N'(x) + W_N^2(x) & 0 \\ 0 & -\partial_x^2 + W_N'(x) + W_N^2(x) \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_N & 0 \end{pmatrix}}_{:= Q_N} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & B_N^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{:= Q_N^\dagger} + \begin{pmatrix} 0 & B_N^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_N & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für die Superladungen Q_N und Q_N^\dagger gilt außerdem die Relation

$$Q_N^2 = (Q_N^\dagger)^2 = 0$$

Sie schließen eine Superalgebra und bilden das supersymmetrische Quantensystem \hat{F} . Die Gestalt der Translationsmode des Fluktuationsoperators der ϕ^4 -Theorie folgt aus der Tatsache, dass die Energie der klassischen Lösungen ϕ_{cl} translationsinvariant bezüglich der Koordinate x ist. Im folgenden wurde im Argument des Tangens Hyperbolicus $\sqrt{2}$ in m absorbiert um die Natürlichkeit der SUSY-Kette zu erhalten. Dies führt zu einer Verschiebung der Energieeigenwerte, lässt die Struktur des Quantensystems jedoch unverändert

$$\psi_0(x) = \frac{\partial \phi_{cl}}{\partial \xi_i} = \frac{\partial \phi_{cl}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh(mx) \right) = \frac{m^2}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sech}^2(mx) \quad (4.3.22)$$

und

$$\psi_0'(x) = -\frac{2m^3}{\sqrt{\lambda}} \tanh(mx) \operatorname{sech}^2(mx)$$

$$W_N(x) = -\left(\frac{\psi'_0(x)}{\psi_0(x)}\right) = \frac{\frac{2m^3}{\sqrt{\lambda}} \tanh(mx) \operatorname{sech}^2(mx)}{\frac{m^2}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sech}^2(mx)} = 2m \tanh(mx) \quad (4.3.23)$$

Weiter folgt

$$B_2 = \partial_x + 2m \tanh(mx) \quad (4.3.24)$$

$$B_2^\dagger = -\partial_x + 2m \tanh(mx) \quad (4.3.25)$$

sowie die allgemeine Form der Leiteroperatoren

$$B_N = \partial_x + Nm \tanh(mx) \quad (4.3.26)$$

$$B_N^\dagger = -\partial_x + Nm \tanh(mx) \quad (4.3.27)$$

$$F_{N-} = -\partial_x^2 + \frac{N^2 m^2}{v_N^2} - N(N+1) m^2 \operatorname{sech}^2(mx) \quad (4.3.28)$$

$$F_{N+} = -\partial_x^2 + \frac{(N-1)^2 m^2}{v_{(N-1)}^2} - N(N-1) m^2 \operatorname{sech}^2(mx) + (2N-1)m^2 \quad (4.3.29)$$

$$= F_{(N-1)-} + (2N-1)m^2 \quad (4.3.30)$$

Die F_{N-} und ihre SUSY-Partner bilden eine forminvariante SUSY-Kette. Eine hierarchische Struktur reflektionsloser Pöschl-Teller-Potentiale mit $N-1$ gebundener Zustände, die das diskrete Spektrum bilden, sowie eines halbdiskreten Zustandes genau auf dem Rand des kontinuierlichen Spektrums mit $\omega_l^2 = N^2 m^2$, gefolgt von verallgemeinerten Eigenzuständen als Teil eines kontinuierlichen Spektrums zu den Eigenwerten $\omega^2(k) = k^2 + v_N^2$. Gleichzeitig können sie als Teilchenzahloperatoren der einzelnen Systeme angesehen werden.

$$\operatorname{Spec}(F_{N-}) = \{\omega_n^2\}_{n=0,1,\dots,l-1} \cup \{\omega_l^2\}_{l=N} \cup \{k^2 + v_N^2\}_{k \in \mathbb{R}} \quad , \quad \omega_n^2 < \omega_{n+1}^2$$

$$\operatorname{Spec}(F_{N+}) = \{\omega_n^2\}_{n=1,2,\dots,l-1} \cup \{\omega_l^2\}_{l=N} \cup \{k^2 + v_N^2\}_{k \in \mathbb{R}} \quad , \quad \omega_n^2 < \omega_{n+1}^2$$

Für ϕ^4 gilt also $N = 2$

$$\begin{aligned} F_{2-} &= B_2^\dagger B_2 = -\partial_x^2 - 2m^2 \operatorname{sech}^2(mx) + 4m^2 \tanh^2(mx) \\ &= -\partial_x^2 + 4m^2 - 6m^2 \operatorname{sech}^2(mx) \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

Die Eigenfunktionen erfüllen die Gleichung

$$-\partial_x^2 \psi_n(x) + [4m^2 - 6m^2 \operatorname{sech}^2(mx)] \psi_n(x) = \omega_n^2 \psi_n(x) \quad (4.3.32)$$

Substitution von $u = \tanh(mx)$ und in Sturm-Liouville Form bringen ergibt

$$[(1-u^2)\psi_n'(u)]' + \underbrace{6u^2}_{\mu^2} \psi_n(u) = \left(-\frac{\omega_n^2}{m^2} + 4\right) \psi_n(u)$$

Die Lösungen dieser assoziierten Legendre-Differentialgleichung sind wohl bekannt. Sie lauten

$$\psi_n(x) = P_N^{\sqrt{-\frac{\omega_n^2}{m^2} + 4}}(\tanh(mx)) \quad (4.3.33)$$

mit $\mu = 1, 2, \dots, N$.

$$\psi_0(x) = \operatorname{sech}^2(mx) \quad , \quad \omega_0^2 = 0$$

$$\psi_1(x) = \tanh(mx) \operatorname{sech}(mx) \quad , \quad \omega_1^2 = 3m^2$$

$\psi_1(x), \psi_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\operatorname{Spec}(F_{2-}) = \{\omega_n^2\}_{n=0,1} \cup \{k^2 + 4m^2\}_{k \in \mathbb{R}} \quad (4.3.34)$$

Der supersymmetrische Partner von F_{2-} ,

$$F_{2+} = B_2 B_2^\dagger = -\partial_x^2 + 4m^2 - 2m^2 \operatorname{sech}^2(mx) = B_1^\dagger B_1 + 3m^2 = F_{1-} + 3m^2 \quad (4.3.35)$$

besitzt einen Grundzustand mit Energie $\omega_1^2 = 3m^2$, welcher der erste angeregte Zustand des Operators F_{2-} ist. Durch wiederholte Anwendung des Leiteroperators B_N^\dagger gehen die angeregten Zustände der Pöschl-Teller Potentiale aus dem Grundzustand hervor. Die Glieder der Kette sind durch die B_N^\dagger und B_N miteinander verknüpft. Mithilfe dieser Leiterstruktur lassen sich die Eigenfunktionen bestimmen. Für das Sin-Gordon Modell gilt $N = 1$.

$$B_1 = \partial_x + m \tanh(mx) \quad (4.3.36)$$

$$B_1^\dagger = -\partial_x + m \tanh(mx) \quad (4.3.37)$$

$$F_{1+} = B_1 B_1^\dagger = -\partial_x^2 + m^2 \quad (4.3.38)$$

$$F_{1-} = B_1^\dagger B_1 = F_{2+} - 3m^2 = -\partial_x^2 + m^2 - 2m^2 \operatorname{sech}^2(mx) \quad (4.3.39)$$

Das diskrete Spektrum von F_{1-} enthält nur ψ_0 , als Element des Kerns $\ker(F_{1-}) = \{\psi_0\}$ entsprechend der Hierarchie.

$$\psi_0(x) = \operatorname{sech} mx \quad , \quad \omega_0^2 = 0$$

Zusammen mit den ungebundenen Zuständen bildet es das Spektrum von F_{1-}

$$\operatorname{Spec}(F_{1-}) = \{0\} \cup \{k^2 + m^2\}_{k \in \mathbb{R}} \quad (4.3.40)$$

Für die verallgemeinerten Eigenfunktionen machen wir einen Ansatz als ebene Welle und nutzen die Leiterstruktur der SUSY-Kette aus. Es ist

$$B_1^\dagger B_1 \psi = \omega_n^2 \psi \quad \text{und} \quad B_1^\dagger B_1 B_1^\dagger \psi = \omega_{(n+1)}^2 B_1^\dagger \psi$$

sodass

$$B_1^\dagger e^{ikx} = (\tanh mx - ik) e^{ikx} \quad (4.3.41)$$

eine Eigenfunktionen von $B_1^\dagger B_1$ ist. Analog folgt für die Eigenfunktionen des Operators F_{2-}

$$B_2^\dagger B_2 \psi = \omega_n^2 \psi$$

und

$$B_2^\dagger B_2 B_2^\dagger \psi = B_2^\dagger (B_1^\dagger B_1 + \omega_1^2) \psi = \omega_{n+1}^2 B_2^\dagger \psi = B_2^\dagger B_2 B_2^\dagger B_1^\dagger \psi = \omega_{n+1}^2 B_2^\dagger B_1^\dagger \psi$$

sodass $B_2^\dagger B_1^\dagger e^{ikx}$ Eigenfunktionen des Operators $B_2^\dagger B_2$ sind.

$$B_2^\dagger B_1^\dagger e^{ikx} = (k^2 - 3imk \tanh(mx) + 4m^2 + 6m^2 \operatorname{sech}^2(mx)) e^{ikx} \quad (4.3.42)$$

Aus praktischen Gründen ist es sinnvoll Phasenfaktoren $e^{\pm i\delta_k}$ einzuführen. Die Information über die Dynamik der Eigenfunktionen für $x \rightarrow \pm\infty$ ist im Phasenshift δ_k enthalten.

$$e^{\pm i\delta_k} = \frac{-k^2 \mp 3imk + 4m^2}{\sqrt{(k^2 + m^2)(k^2 + 4m^2)}} \quad (4.3.43)$$

Die normierten, verallgemeinerten Eigenfunktionen bekommen dann die Gestalt

$$Y_k(x) = \frac{(k^2 - 3imk \tanh(mx) + 4m^2 + 6m^2 \operatorname{sech}^2(mx)) e^{ikx}}{\sqrt{(k^2 + m^2)(k^2 + 4m^2)}} e^{i\delta_k}, \quad k \geq 0 \quad (4.3.44)$$

$$Y_k(x) = \frac{(k^2 - 3imk \tanh(mx) + 4m^2 + 6m^2 \operatorname{sech}^2(mx)) e^{ikx}}{\sqrt{(k^2 + m^2)(k^2 + 4m^2)}} e^{-i\delta_k}, \quad k < 0 \quad (4.3.45)$$

Im Fall des Sin-Gordon-Systems findet man die Beziehungen

$$e^{\pm i\delta_k} = \frac{\mp ik}{\sqrt{(k^2 + m^2)}} \quad (4.3.46)$$

$$Y_k(x) = \frac{(\tanh mx - ik)e^{ikx}}{\sqrt{(k^2 + m^2)}} e^{i\delta_k}, \quad k \geq 0 \quad (4.3.47)$$

$$Y_k(x) = \frac{(\tanh mx - ik)e^{ikx}}{\sqrt{(k^2 + m^2)}} e^{-i\delta_k}, \quad k < 0 \quad (4.3.48)$$

Zusammen mit den, durch die Forderung $|\psi(x)|^2 = 1$, normierten, diskreten Zuständen

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{3m}{4}} \operatorname{sech}^2(mx) \quad (4.3.49)$$

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{3m}{2}} \tanh(mx) \operatorname{sech}(mx), \quad (4.3.50)$$

beziehungsweise

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \operatorname{sech} mx, \quad (4.3.51)$$

ergibt sich eine Spektraldarstellung der Teilchenzahloperatoren F_{2-} und F_{1-}

$$S(F_{2-}) = S(0)\psi_0(x)\psi_0(y) + S(3m^2)\psi_1(y)\psi_1(x) + \frac{1}{2\pi} \int S(k^2 + 4m^2) \overline{Y_k(y)} Y_k(x) dk \quad (4.3.52)$$

$$S(F_{1-}) = S(0)\psi_0(x)\psi_0(y) + \frac{1}{2\pi} \int S(k^2 + m^2) \overline{Y_k(y)} Y_k(x) dk \quad (4.3.53)$$

Dabei gelten die Orthonormalitätsrelationen

$$\begin{aligned} \int \overline{Y_m(x)} Y_n(x) dx &= 2\pi \delta(m - n) \quad \forall m, n \in \mathbb{R} \quad (4.3.54) \\ \int \psi_a(x) \psi_b(x) &= \delta_{ab} \quad a, b \in \{0,1\} \\ \int \psi_a(x) Y_n(x) &= 0. \end{aligned}$$

In dieser Darstellung sind die F_{N-} wesentlich selbstadjungierte Operatoren. Als $\mathcal{D}(F_{N-})$ wurde der dichte Teilraum des \mathcal{L}^2 - der Funktionenraum der schnell fallenden, glatten Funktionen - \mathcal{S} gewählt.

Dadurch können die verallgemeinerten Eigenfunktionen als temperierte Distributionen aufgefasst werden. Also als Funktionale $T \in \mathcal{S}'$. Folglich handelt es sich nach dieser Konstruktion des Hilbertraums, um ein Gelfandsches Raumtripel und somit auch um eine verallgemeinerte C^* -Algebra wie in der QFT üblich. Die spektrale Dekomposition der Fluktuationsoperatoren eröffnet uns den Zugang zur kanonischen Quantisierung und Renormierung.

4.4 Zweite Quantisierung des ϕ^4 -Modells

Die erste Quantisierung beschreibt nicht wechselwirkende bosonische Teilchen mit der Dispersionsrelation $\omega_k = \sqrt{k^2 + 4m^2}$, die durch Klein-Gordon-Gleichungen beschrieben werden. Sowie einen pulsierenden Kink, der mit der oszillierenden Mode $\sqrt{3}m$ und den, mit dem kontinuierlichen Spektrum $[4m^2, \infty)$ assoziierten, Strahlungsmoden interagiert. Quantenfeldtheorie im Vakuumsektor realisiert sich also identisch zu der des freien skalaren Feldes aus Abschnitt 4.1. Die Einbettung $e : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ermöglicht es uns die Felder

$$\phi(x) = \int \frac{dk}{2\pi\sqrt{2\omega_k}} (a(k)e^{-ikx} + a^\dagger(k)e^{ikx}) \quad (4.4.1)$$

$$\Pi(x) = \int \frac{dk}{2\pi} (-i) \frac{\sqrt{\omega_k}}{2} (a(k)e^{-ikx} - a^\dagger(k)e^{ikx}) \quad (4.4.2)$$

als operatorwertige Distributionen zu beschreiben. Also als Abbildungen $\varphi : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto \varphi(f) = \int f(x) g(x) dx$ mit $g(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

$$\phi(f) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\omega_p}} (a_k \hat{f}(-k) + a^\dagger_k \hat{f}(k)) \quad (4.4.3)$$

$$\Pi(f) = \int dk (-i) \frac{\sqrt{\omega_k}}{2} (a_k \hat{f}(-k) - a^\dagger_k \hat{f}(k)) \quad (4.4.4)$$

Es existiert eine Darstellung mithilfe des Fluktuationsoperators $F_0 = \partial^2 + 4m^2$ wie folgt.

$$\phi(f) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\omega_p}} (a_k \hat{f}(-k) + a^\dagger_k \hat{f}(k)) = \int \frac{dk}{\sqrt{2}(k^2 + 4m^2)^{\frac{1}{4}}} (a_k \hat{f}(-k) + a^\dagger_k \hat{f}(k)) \quad (4.4.5)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\hat{F}_0^{\frac{1}{4}}} \left(\int dk a_k \hat{f}(-k) + \int dk a_k^\dagger \hat{f}(k) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int a_k dk \hat{F}_0^{-\frac{1}{4}} \hat{f}(-k) + \int a_k^\dagger dk \hat{F}_0^{-\frac{1}{4}} \hat{f}(k) \quad (4.4.6)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_k \left(F_0^{-\frac{1}{4}} f \right) + a_k^\dagger \left(F_0^{-\frac{1}{4}} f \right) \right) \quad (4.4.7)$$

Analog findet man

$$\Pi(f) = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left(a_k \left(F_0^{\frac{1}{4}} f \right) - a_k^\dagger \left(F_0^{\frac{1}{4}} f \right) \right) \quad (4.4.8)$$

Typische Elemente des Fockraums $\mathfrak{F}_0 = \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_{Sym}^2(\mathbb{R}, dk)$ $\Psi \in \mathfrak{F}_0$ lassen sich nach Folgen von Wellenfunktionen $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ entwickeln. Die ψ_n sind symmetrisch gegen paarweise Vertauschung zweier Indizes und alle $k \in \mathbb{R}$ wirken die a_k, a_k^\dagger auf die ψ_n wie

$$(a_k \psi)_{n-1}(k_1, \dots, k_{n-1}) = \sqrt{n} \psi_n(k, k_1, \dots, k_{n-1}) \quad (4.4.9)$$

$$(a_k^\dagger \psi)_{n+1}(k_1, \dots, k_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \delta(k - k_j) \psi_n(k, k_1, \dots, k_{n+1}) \quad (4.4.10)$$

Der Definitionsbereich von a_k^\dagger beschränkt sich dabei nur auf den Nullvektor Ω . Expandiert man um das Vakuum erhält man den Ausdruck für H als

$$H_\lambda^{vac}(\pm\Phi_0 + \phi, \pi) = \int \left[\frac{1}{2} (\pi^2 + \partial_x \phi^2 + 4m^2 \phi^2) + \mathcal{O}(\phi^3) + \mathcal{O}(\phi^4) \right] dx \quad (4.4.11)$$

Für $\lambda \rightarrow 0^+$ wird dieser Ausdruck zu $H_0 = \frac{1}{2} \int \pi^2 + \phi F_0 \phi$. Analog zur freien Theorie lautet der Hamiltonoperator nach Normalordnung

$$:H_0: = \frac{1}{2} \int : \pi^2 + \phi F_0 \phi : dx = \int \omega_k a_k^\dagger a_k dk \quad (4.4.12)$$

In der Tat beschreibt er nicht interagierende Bosonen mit Dispersionsrelation $\omega_k = \sqrt{k^2 + 4m^2}$. Der Ausdruck definiert einen selbstadjungierten Operator mit

$$Dom(: H_0:) = \left\{ \Psi \in \bigoplus L_{Sym}^2(\mathbb{R}, dk) : \sum_n \left\| \sum_{i=1}^n \omega_{k_i} \psi_n(k_1, \dots, k_n) \right\|_{\mathcal{L}^2}^2 < \infty \right\} \quad (4.4.13)$$

Die Doppelpunkte zeigen die Normalordnung bezüglich des Vakuums an. Nach dem Satz von Stone ist ein solcher Operator infinitesimaler Erzeuger einer einparametrischen, stark stetigen, unitären Halbgruppe, die die unitäre Zeitentwicklung des Systems beschreibt.

Expandieren um die interpolierende Lösung (3.5.4) ergibt H zu

$$H_\lambda^{kink}(\phi, \pi) = H(\Phi_{kink} + \phi, \pi) \quad (4.4.14)$$

$$= \frac{M_{cl}}{\lambda} + \int \frac{1}{2} (\pi^2 + \partial_x \phi^2 + 4m^2 \phi^2 - 6m^2 \operatorname{sech}^2 mx \phi^2) dx + \int 2m\sqrt{\lambda} \tanh(mx) \phi^3 + \frac{1}{2} \lambda \phi^4 dx$$

Es gibt zwei Möglichkeiten den Kinksektor zu quantisieren: Entweder wird analog zum Vakuumsektor vorgegangen mit dem Unterschied, dass die Felder um den Kink verschoben werden, oder die Felder werden ausgehend von F quantisiert. Dies wird als Kinkdarstellung bezeichnet und es gibt eine unitäre Abbildung zwischen der Vakuum- und Kinkdarstellung.

Mithilfe der spektralen Dekomposition des Operators $F = F_0 - 6m^2 \operatorname{sech}^2 mx$ aus dem vorigen Kapitel können wir eine Integraldarstellung für jede \mathcal{L}^2 -Funktion angeben.

$$U(x) = (\psi_0, U)_{\mathcal{L}^2} \psi_0(x) + (\psi_1, U)_{\mathcal{L}^2} \psi_1(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \overline{Y_k(x)} U(y) Y_k(x) dy dk \quad (4.4.15)$$

Weiterhin wird durch

$$\tilde{U}(k) = \frac{1}{2\pi} \int \overline{Y_k(x)}(x) U(x) dx \quad (4.4.16)$$

eine verzernte Fouriertransformation definiert, deren Bildraum das orthogonale Komplement jenes eindimensionalen Unterraums des \mathcal{L}^2 ist, der von den diskreten Zuständen des Operators F aufgespannt wird. Für die Felder im Kinksektor machen wir den Ansatz

$$(\phi(x), \Pi(x)) = (\phi_{cl}(x) + \phi, \pi(x)) \quad (4.4.17)$$

φ und π sind die Fluktuationfelder um die Kinklösung, die wir als Teilchen mithilfe der unbeschränkten Orts- und Impulsoperator \mathcal{X} und $\mathcal{P} = i\partial_x$ quantisieren, welche die Relation $[\mathcal{X}, \mathcal{P}] = i$ erfüllen. Seien weiterhin \mathbb{P}_0 und \mathbb{P}_1 jeweils die orthogonalen Projektionen auf die Unterräume der quadratintegrierbaren diskreten Fluktuationen um den Kink. Die einzuführenden Leiteroperatoren b^\dagger, b operieren dann auf dem Fockraum

$$\mathfrak{F} = \bigoplus \operatorname{Sym}^n \mathbb{P}_0^\perp(\mathcal{L}^2(\mathbb{R})) \quad (4.4.18)$$

Die Fluktuationfelder können wir direkt angeben. Sie lauten für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \cap \mathbb{P}_0^\perp(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}))$

$$\hat{\phi}(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(b \left(F^{-\frac{1}{4}} f \right) + b^\dagger \left(F^{-\frac{1}{4}} f \right) \right) \quad (4.4.19)$$

$$\hat{\pi}(f) = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left(b \left(F^{\frac{1}{4}} f \right) - b^\dagger \left(F^{\frac{1}{4}} f \right) \right). \quad (4.4.20)$$

Somit folgt

$$\phi(f) = -(\psi_0, f)_{\mathcal{L}^2} \sqrt{M_{cl}} \mathcal{X} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(b \left(F^{-\frac{1}{4}} f_1 \right) + b^\dagger \left(F^{-\frac{1}{4}} f_1 \right) \right) \quad (4.4.21)$$

und

$$\pi(f) = -\frac{\mathcal{P}}{\sqrt{M_{cl}}} (\psi_0, f)_{\mathcal{L}^2} - \frac{i}{\sqrt{2}} \left(b \left(F^{\frac{1}{4}} f_1 \right) - b^\dagger \left(F^{\frac{1}{4}} f_1 \right) \right) \quad (4.4.22)$$

mit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $f_1 = f - (\psi_0, f)_{\mathcal{L}^2}$. Nach dem Satz über die orthogonale Projektion und dem Lotprinzip in einem Hilbertraum, ist f_1 die Komponente von f in $\mathbb{P}_0^\perp(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}))$. $f_1 + (\psi_0, f)_{\mathcal{L}^2} = f$ ist also die orthogonale Zerlegung von f in \mathfrak{F} . Wie gewünscht hat die Kommutatorrelation nun die Form

$$\begin{aligned} [\phi(f), \pi(g)] &= \left([\mathcal{X}, \mathcal{P}] (\psi_0, f)_{\mathcal{L}^2} (\psi_0, g)_{\mathcal{L}^2} + \frac{i}{\sqrt{2}} \left[b \left(F^{-\frac{1}{4}} f_1 \right), b^\dagger \left(F^{\frac{1}{4}} g_1 \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{\sqrt{2}} \left[b^\dagger \left(F^{-\frac{1}{4}} f_1 \right), b \left(F^{\frac{1}{4}} g_1 \right) \right] \right) \\ &= \int |\psi_0(x)|^2 f(x) g(x) dx = i(f, g)_{\mathcal{L}^2} \end{aligned} \quad (4.4.23)$$

Die Darstellung der Feldoperatoren ist noch sehr allgemein und für unsere Zwecke unzureichend. Für eine explizitere Darstellung führen wir die operatorwertigen Distributionen ein, die speziell an das Spektrum von F angepasst sind und extrahieren die Testfunktionen. a_m, a_m^\dagger sind Erzeuger und Vernichter der diskreten Mode mit Frequenz ω_m .

$$a_m = b(\psi_1), \quad a_m^\dagger = b(\psi_1), \quad (4.4.24)$$

Desweiteren operieren a_k und a_k^\dagger auf dem Kontinuum von F im gleichen Sinn wie im Fall des Vakuumsektors.

$$a_k = b \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{Y_k(x)} \right), \quad a_k^\dagger = b \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} Y_k(x) \right) \quad (4.4.25)$$

und es gilt $[a_k, a_l^\dagger] = \delta(k - l)$. Dann folgt

$$\phi(x) = -\sqrt{M_{cl}} \mathcal{X} \psi_0(x) + \frac{1}{\sqrt{2\omega_m}} (a_m \psi_1(x) + a_m^\dagger \psi_1(x)) + \int \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (a_k Y_k(x) + a_k^\dagger \overline{Y_k(x)}) dk$$

$$\pi(x) = -\frac{\mathcal{P}}{\sqrt{M_{cl}}} \psi_0 - i \frac{\sqrt{\omega_m}}{\sqrt{2}} (a_m \psi_1(x) - a_m^\dagger \psi_1(x)) - \int i \frac{\sqrt{\omega_k}}{\sqrt{2}} (a_k Y_k(x) - a_k^\dagger \overline{Y_k(x)}) dk \quad (4.4.26)$$

Die spektrale Dekomposition erkennt man in dieser Darstellung besonders gut. Auch die Unterschiede zur freien Theorie sind deutlich zu erkennen. Mithilfe der Orthonormalitätsrelationen (4.3.54) sieht man leicht, dass die Felder

$$[\phi(x), \pi(y)] = i\delta(x - y) \quad (4.4.27)$$

erfüllen. Paart man ϕ, π mit U zeigt sich, dass, falls U orthogonal zu ψ_0 und ψ_1 ist, der Operator $\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a_k^\dagger \tilde{U}(k) dk$ Teilchen in diesem Zustand erzeugt. Der Unterschied zur Vakuumdarstellung ist also das Ersetzen von $\hat{U}(k)$ durch $\tilde{U}(k)$ mithilfe der Streutheorie. Die Darstellung representiert damit die gleichen Bosonen wie im freien Fall, nur werden diese mithilfe der Streutheorie auf die freien Bosonen abgebildet. Weiterhin hängt durch das Einfügen der verzerrten Fouriertransformation die Dynamik der Bosonen von der Struktur des Kinks ab. Die anderen Terme beschreiben die standartmäßig quantisierten diskreten Moden. Mathematisch ausgedrückt gibt es einen isometrischen Isomorphismus

$$\mathbb{P}_0^\perp(\mathcal{L}^2(\mathbb{R})) \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, dk) \quad (4.4.28)$$

$$U \mapsto ((\psi_1, U)_{\mathcal{L}^2}, \tilde{U}(k)) \quad (4.4.29)$$

\mathcal{F} kann folglich als Tensorprodukt geschrieben werden, denn es gibt eine unitäre Transformation \mathbb{W}

$$\mathbb{W} : \mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \exp(-\omega_m x_m^2) dx_m) \otimes \bigoplus_{n=0}^{\infty} \text{Sym}^n \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, dk) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \gamma((2\omega_m)^{-1})) \otimes \mathfrak{F}_0$$

unter der

$$\mathbb{W} a_m \mathbb{W}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_m}} (\partial_{x_m})$$

$$\mathbb{U} a_m^\dagger \mathbb{U}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_m}} (2\omega_m x_m - \partial_{x_m})$$

Der Teilchenzahloperator lautet

$$\hat{\mathbb{N}} = a_m^\dagger a_m + \int a_k^\dagger a_k dk \quad (4.4.30)$$

und der Hamiltonoperator nach Normalordnung formal

$$\begin{aligned} : H_0^{kink} : &:= : H_0 : - \frac{1}{2} : \int 6m^2 \operatorname{sech}^2 mx \phi^2(x) dx : \\ : H_0^{kink} : &:= \frac{1}{2} : \int : \pi^2 + \phi F \phi : dx \end{aligned} \quad (4.4.31)$$

Substitution von (4.4.26) in diesen Ausdruck ergibt

$$\begin{aligned} : H_0^{kink} : &:= \frac{1}{2} : \int \left(-\frac{\mathcal{P}}{\sqrt{M_{cl}}} \psi_0 - i \frac{\sqrt{\omega_m}}{\sqrt{2}} (a_m \psi_1(x) - a_m^\dagger \psi_1(x)) \right. \\ &\quad \left. - \int i \frac{\sqrt{\omega_m}}{\sqrt{2}} (a_k Y_k(x) - a_k^\dagger \overline{Y_k(x)}) dk \right)^2 + F_0 \\ &\quad - 6m^2 \operatorname{sech}^2 mx \\ &\quad \times \left(\sqrt{M_{cl}} \mathcal{X} \psi_0(x) + \frac{1}{\sqrt{2\omega_m}} (a_m \psi_1(x) + a_m^\dagger \psi_1(x)) \right. \\ &\quad \left. + \int \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (a_k Y_k(x) + a_k^\dagger \overline{Y_k(x)}) dk \right)^2 : dx \\ : H_0^{kink} : &:= \frac{\lambda \mathcal{P}^2}{2M_{cl}} + \omega_m a_m^\dagger a_m + \int \omega_k a_k^\dagger a_k dk \\ &= \frac{\lambda \mathcal{P}^2}{2M_{cl}} + h(\omega_m) + h(\omega_\blacksquare) \end{aligned} \quad (4.4.32)$$

Die Triplepunkte zeigen die Normalordnung bezüglich des Kinks an. Der Operator erzeugt eine unitäre Evolution auf dem Raum $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, d\mathcal{X}) \otimes \mathfrak{F}$

$$\exp(-it : H_0^{kink} :) = \exp\left(-it \frac{\mathcal{P}^2}{M_{cl}}\right) \otimes \exp(-it\omega_m) \otimes \Gamma(\exp(-it\omega_\blacksquare)) \quad (4.4.34)$$

Γ steht für die Transformation auf \mathfrak{F}_0 die durch die, auf $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, dk)$ unitäre Abbildung $\exp(-it\omega_{\blacksquare}) : f(k) \rightarrow \exp(-it\omega_k) f(k)$ induziert wird. s. [43, Chapter 1]
 $: H_0^{kin}$: ist selbstadjungiert auf

$$Dom(: H_0^{kin} :) = \left\{ \Psi : \sum_{v,w} \left(\left\| (m\omega_m + \sum_{i=1}^v \omega_{k_i}) \Psi_{v,w} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, d\mathcal{X} dk)}^2 + \left\| (m\omega_m + \sum_{i=1}^s \omega_{k_i}) \frac{d\Psi_{v,w}}{d\mathcal{X}} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, d\mathcal{X} dk)}^2 + \left\| \frac{d^2\Psi_{v,w}}{d\mathcal{X}^2} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, d\mathcal{X} dk)}^2 \right) < \infty \right\}. \quad (4.4.35)$$

Beweis: Zerlege unter Berücksichtigung der Operatoren $h(\omega_m)$ und \mathbb{N}_0 , sodass $\Psi \in \mathfrak{F}$ einer Reihe $\{\sum_w \Psi_{v,w} f_w\}_{w \geq 0}$ entspricht, wobei die $\{f_w\}_{w \geq 0}$ die normierten Eigenfunktionen des Operators $h(\omega_m)$ zu den Eigenwerten $m\omega_m$ sind, und jedes $\Psi_{v,w} = \Psi_{v,w}(\mathcal{X}, k_1, \dots, k_n)$. Es folgt, dass $(h(\omega_m) + h(\omega_{\blacksquare}))\Psi$ der Reihe $\{\sum_t (m\omega_m + \sum_{i=1}^v \omega_{k_i}) \Psi_{v,w} f_w\}_{v \geq 0}$ entspricht und daraus folgt die obere Beziehung.

4.4.1 Zeitentwicklung

Ausgehend von der klassischen Gleichung $\ddot{y}(t) + Fy(t) = 0$, die in ein System erster Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -F & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (4.4.1.1)$$

überführt werden kann und eine auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$ stetige, einparametrische Gruppe

$$\mathbb{T} = \exp \left[t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -F & 0 \end{pmatrix} \right] \quad (4.4.1.2)$$

generiert, lässt sich die folgenden Form des Hilbertfeldes in Kinkrepräsentation berechnen.

$$\begin{aligned} \phi^H(t, x) = & -\sqrt{M_{cl}}(\mathcal{X} + vt)\psi_0(x) + \frac{1}{\sqrt{2\omega_m}} \left(\mathbf{a}_m(t)\psi_1(x) + \mathbf{a}_m^\dagger(t)\psi_1(x) \right) \\ & + \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(\mathbf{a}_k(t)Y_k(x) + \mathbf{a}_k^\dagger(t)\bar{Y}_k(x) \right) dk \end{aligned} \quad (4.4.1.3)$$

Mit

$$\mathbf{a}_m(t) = a_m e^{-i\omega_m t}, \quad \mathbf{a}_m^\dagger(t) = a_m^\dagger e^{i\omega_m t} \quad (4.4.1.4)$$

und

$$\mathbf{a}_k(t) = a_k e^{-i\omega_k t}, \quad \mathbf{a}_k^\dagger(t) = a_k^\dagger e^{i\omega_k t}. \quad (4.4.1.5)$$

Es folgt

$$\exp(-it : H_0^{kink} :) f(\mathcal{X}) (\mathbf{a}_m^\dagger)^d \prod_j a(\xi_j) \Omega = \psi(t, \mathcal{X}) e^{idt w_m} (\mathbf{a}_m^\dagger)^d \prod_j a^\dagger(e^{i w_m t} \xi_j) \Omega \quad (4.4.4.2)$$

Dabei ist $\tilde{\xi}_j$ ist die verzerrte Fouriertransformation von $\xi \in \langle \{\psi_0, \psi_1\} \rangle^\perp$ und $\psi(t, \mathcal{X})$ erfüllt die Gleichung

$$i \partial_t \psi(t, \mathcal{X}) = -\frac{\lambda}{2M_{cl}} \partial_{\mathcal{X}} \psi(t, \mathcal{X}) \quad (4.4.1.6)$$

$$\psi(0, \mathcal{X}) = f(\mathcal{X}) \quad (4.4.1.7)$$

Für das weitere Vorgehen ist es hilfreich, den Ausdruck $\alpha = 2^{-\frac{1}{2}} (F_0^{\frac{1}{4}} y + i F_0^{-\frac{1}{4}} \dot{y})$ einzuführen. Die Entwicklungsgleichung nimmt dann die Form

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \begin{pmatrix} -i F_0^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & i F_0^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \eta - \frac{i}{2} F_0^{-\frac{1}{4}} V F_0^{-\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \eta, \quad \eta(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \bar{\alpha}(t) \end{pmatrix} \quad (4.4.1.8)$$

$\eta(t)$ kann mithilfe von 2×2 -Matrizen von Operatoren $\lambda(t)$ geschrieben werden.

$$\eta(t) = \lambda(t - t_0) \eta(t_0) \quad (4.4.1.9)$$

Diese Matrizen erfüllen $\lambda_{22} = \bar{\lambda}_{11}$ und $\lambda_{12} = \bar{\lambda}_{21}$ und sind pseudounitär im Sinne von

$$\lambda^* \begin{pmatrix} id & 0 \\ 0 & -id \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} id & 0 \\ 0 & -id \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} id & 0 \\ 0 & -id \end{pmatrix} \lambda^* \quad (4.4.1.10)$$

$\{\lambda(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ sind Teil einer stark stetigen, unitären, einparametrischen Gruppe von Operatoren auf $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ mit der Operatornorm $\|\lambda(t)\|_{\mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}^2} \in [e^{-L|t|}, e^{+L|t|}]$ für ein $L > 0$. s.(21, Theorem XI.104). Diese Schranke kann allerdings nicht zeitunabhängig sein, denn $F\psi_0 = 0$ und somit gibt es eine Lösung

$$\eta_Z(t) = \lambda(t) i F_0^{-\frac{1}{4}} \psi_0 = t F_0^{\frac{1}{4}} \psi_0 + i F_0^{-\frac{1}{4}} \psi_0, \quad (4.4.1.11)$$

die mit der Zeit anwächst. Die Operatoren $\lambda(t)$ induzieren eine Zeitentwicklung der Felder im Heisenbergbild. Das Heisenbergfeld zur Zeit t lautet

$$\phi(f, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbf{a} \left(F_0^{-\frac{1}{4}} f, t \right) + \mathbf{a}^\dagger \left(F_0^{-\frac{1}{4}} f, t \right) \right), \quad \Pi(f) = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left(\mathbf{a} \left(F_0^{-\frac{1}{4}} f, t \right) - \mathbf{a}^\dagger \left(F_0^{-\frac{1}{4}} f, t \right) \right) \quad (4.4.1.12)$$

mit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Außerdem lassen sich Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren durch $\lambda(t)$ ausdrücken.

$$\mathbf{a}(f, t) = \mathbf{a} \left(\lambda_{11}(t)^T, f \right) + \mathbf{a}^\dagger \left(\lambda_{12}(t)^T, f \right) \quad (4.4.1.13)$$

$$\mathbf{a}^\dagger(f, t) = \mathbf{a} \left(\bar{\lambda}_{12}(t)^T, f \right) + \mathbf{a}^\dagger \left(\bar{\lambda}_{11}(t)^T, f \right) \quad (4.4.1.14)$$

4.5 Zweite Quantisierung des Sin-Gordon Modells

Die Prozedur der zweiten Quantisierung ist analog zu der des ϕ^4 -Modells. Es treten auf Grund der unterschiedlichen diskreten Spektren und der abweichenden Zustandsdichte der kontinuierlichen Moden leichte Differenzen auf. Der Vakuumsektor entspricht freien Bosonen mit Masse m . Also

$$\phi(x) = \int \frac{dk}{2\pi\sqrt{2\omega_k}} (a(k)e^{-ikx} + a^\dagger(k)e^{ikx}) \quad (4.5.1)$$

$$\Pi(x) = \int \frac{dk}{2\pi} (-i) \frac{\sqrt{\omega_k}}{2} (a(k)e^{-ikx} - a^\dagger(k)e^{ikx}) \quad (4.5.2)$$

mit $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$. Mit dem Hamilton

$$:H_0: = \frac{1}{2} \int : \pi^2 + \phi G_0 \phi : dx = \int \omega_k a_k^\dagger a_k dk \quad (4.5.3)$$

Die Beschreibung ist also bis auf die Frequenzen identisch zu der des Vakuumsektors der ϕ^4 -Theorie. Größere Unterschiede gibt es in der Kinkdarstellung. Hier lauten die operatorwertigen Distributionen ϕ und Π

$$\phi(x) = -\sqrt{M_{cl}} \mathcal{X} \psi_0(x) + \int \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (a_k Y_k(x) + a_k^\dagger \overline{Y_k(x)}) dk \quad (4.5.4)$$

$$\pi(x) = -\frac{\mathcal{P}}{\sqrt{M_{cl}}} \psi_0(x) - \int i \frac{\sqrt{\omega_m}}{\sqrt{2}} (a_k Y_k(x) - a_k^\dagger \overline{Y_k(x)}) dk \quad (4.5.5)$$

Man beachte die Abwesenheit von Teilchen im Angeregten Zustand ψ_1 . Die $Y_k(x)$ sind die verallgemeinerten Eigenfunktionen des Operators $G = -\partial_x^2 + m^2 - 2m^2 \operatorname{sech}^2 mx$ aus Kapitel 4.3. Der Fockraum auf dem a_k und a_k^\dagger operieren ist

$$\mathfrak{F} = \bigoplus \operatorname{Sym}^n \mathbb{P}_0^\perp(\mathcal{L}^2(\mathbb{R})) \quad (4.5.6)$$

\mathbb{P}_0 zeigt hier auf den Eigenraum von $\psi_0(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \operatorname{sech}(mx)$. Die verzernte Fouriertransformation wird diesmal durch die verallgemeinerten Eigenfunktionen von G erzeugt und die Darstellung einer \mathcal{L}^2 -Funktion hat die Form

$$U(x) = (\psi_0, U)_{\mathcal{L}^2} \psi_0(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \overline{Y_k(x)} U(y) Y_k(x) dy dk \quad (4.5.7)$$

Auch hier sieht man sofort, dass die Felder die kanonische Kommutatorrelation

$$[\phi(x), \pi(y)] = i\delta(x - y)$$

erfüllen.

$$:H_0^{kink}: = \frac{1}{2} \int : \pi^2 + \phi G \phi : dx = \frac{\lambda \mathcal{P}^2}{2M_{cl}} + \int \omega_k a_k^\dagger a_k \quad (4.5.8)$$

operiert auf dem Hilbertraum $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, d\mathcal{X}) \otimes \mathfrak{F}$ und erzeugt die unitäre Zeitentwicklung durch

$$\exp(-it : H_0^{kink} :) = \exp\left(-it \frac{\mathcal{P}^2}{M_{cl}}\right) \otimes \Gamma(\exp(-it\omega_{\blacksquare})). \quad (4.5.9)$$

Für beliebige Zeiten t im Heisenbergbild gilt analog

$$\phi(f, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbf{a}\left(G^{-\frac{1}{4}}f, t\right) + \mathbf{a}^\dagger\left(G^{-\frac{1}{4}}f, t\right) \right) \quad (4.5.10)$$

und

$$\Pi(f, t) = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left(\mathbf{a}\left(G^{-\frac{1}{4}}f, t\right) - \mathbf{a}^\dagger\left(G^{-\frac{1}{4}}f, t\right) \right) \quad (4.5.11)$$

$$\phi^H(t, x) = -\sqrt{M_{cl}}(\mathcal{X} + vt)\psi_0(x) + \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(\mathbf{a}_k(t)Y_k(x) + \mathbf{a}_k^\dagger(t)\overline{Y_k(x)} \right) dk \quad (4.5.12)$$

Allgemein lässt sich für Pöschl-Teller-Potentiale mit N diskreten Zuständen die quantenfeldtheoretische Beschreibung nach folgendem Muster skizzieren. Die Vakuumsektoren der Theorien beschreiben Bosonen mit Energie $\omega_k = \sqrt{k^2 + (Nm)^2}$. Die Fluktuationen um die kinkartige Lösung stellen Mesonen im Potential

$$V(x) = -N(N+1)m^2 \operatorname{sech}^2(mx). \quad (4.5.13)$$

dar. Für die Felder folgt allgemein die Heisenberg-Darstellung

$$\begin{aligned} \phi(x) &= -\sqrt{M_{cl}}\mathcal{X}\psi_0(x) + \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\omega_m}} (a_m + a_m^\dagger)\psi_m + \int \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (a_k Y_k(x) + a_k^\dagger \overline{Y_k(x)}) dk \\ \phi^H(t, x) &= -\sqrt{M_{cl}}(\mathcal{X} + vt)\psi_0(x) + \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\omega_m}} \left(\mathbf{a}_m(t) + \mathbf{a}_m^\dagger(t) \right) \psi_m \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(\mathbf{a}_k(t)Y_k(x) + \mathbf{a}_k^\dagger(t)\overline{Y_k(x)} \right) dk \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

und

$$\pi(x) = -\frac{\mathcal{P}}{\sqrt{M_{cl}}}\psi_0 - \left(\sum_{m=1}^{N-1} \frac{i\sqrt{\omega_m}}{\sqrt{2}} (a_m - a_m^\dagger)\psi_m \right) - \int i \frac{\sqrt{\omega_k}}{\sqrt{2}} (a_k Y_k(x) - a_k^\dagger \overline{Y_k(x)}) dk \quad (4.5.15)$$

$$\begin{aligned} \pi^H(x, t) &= -\frac{\mathcal{P}}{\sqrt{M_{cl}}} \psi_0 - \left(\sum_{m=1}^{N-1} \frac{i\sqrt{\omega_m}}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_m(t) - \mathbf{a}_m^\dagger(t)) \psi_m \right) \\ &\quad - \int i \frac{\sqrt{\omega_k}}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_k(t) Y_k(x) - \mathbf{a}_k^\dagger(t) \overline{Y_k(x)}) dk \\ \vdots H_0^{kink} &:= \frac{\lambda \mathcal{P}^2}{2M_{cl}} + \sum_{m=1}^{N-1} \omega_m a_m^\dagger a_m + \int \omega_k a_k^\dagger a_k dk \end{aligned}$$

Die $Y_k(x)$ sind die verallgemeinerten Eigenfunktionen der Pöschl-Teller-Operatoren der SUSY Kette

$$F_{N-} = -\partial_x^2 + \frac{N^2 m^2}{v_N^2} - N(N+1) m^2 \operatorname{sech}^2(mx) \quad (4.5.16)$$

Die Leiterstruktur schlägt sich also auch in der zweiten Quantisierung der Systeme nieder. Im folgenden Kapitel wollen wir die halbklassische Massenkorrektur berechnen. Auch 1-loop Massenkorrektur genannt. Die Arbeit bezieht sich dabei auf die Werke von Dashen et al. (1974) und Rajaraman (1982).

4.6 1-Loop Massenkorrektur

Die klassischen Lösungen sind zwar nichtperturbativ, jedoch wurden sie in der quantenfeldtheoretischen Beschreibung perturbativ behandelt. Deswegen sind auftretenden Unendlichkeiten nicht außergewöhnlich. Glücklicherweise wird die UV-Divergenz der Hamiltonoperatoren in 1 + 1 Dimensionen durch die Normalordnung eliminiert. Die nackte Kink-Massenkorrektur, die als additiver Term beim Übergang von der Vakuumdarstellung zur Kinkdarstellung auftritt hat die Form

$$\Delta M_{bare} = \frac{1}{2} \sum_n \omega_n - \frac{1}{2} \sum_k \omega_k^0 \quad (4.6.1)$$

Die ω_n sind die Energien der Quantenfluktuationen um den Kink und ω_k^0 representieren die Energien im Vakuumsektor. Aus der spektralen Dekomposition ist bekannt, dass das Spektrum im Kinksektor in ein diskreten und einen kontinuierlichen Teil zerfällt.

$$\Delta M_{bare} = \frac{1}{2} \sum_m \omega_m + \frac{1}{2} \sum_k \omega_q - \frac{1}{2} \sum_k \omega_k^0 \quad (4.6.2)$$

Wir umschließen das System mit einer Box der Länge L , führen periodische Randbedingungen ein und machen den Übergang $L \rightarrow \infty$. Aufgrund des asymptotischen Verhaltens nehmen die Impulse

$$k_n = \frac{2\pi n}{L} \quad (4.6.3)$$

als Werte an. Die Zustandsdichte beträgt

$$\frac{1}{(k_{n+1} - k_n)} = \frac{L}{2\pi}. \quad (4.6.4)$$

Andererseits liefern die Randbedingungen

$$q_n = \frac{2\pi n}{L} - \frac{\delta(q_n)}{L} = k_n - \frac{\delta(k_n)}{L} + \mathcal{O}(L^{-2}) \quad (4.6.5)$$

Es folgt

$$\omega_q = \sqrt{q_n^2 + m^2} = \sqrt{k_n^2 + m^2} - \frac{k_n \delta(k_n)}{L \sqrt{k_n^2 + m^2}} + \mathcal{O}(L^{-2}) \quad (4.6.6)$$

und unter Verwendung der freien Zustandsdichte, des Einsetzens dieses Ausdrucks in den der nackten Masse und dem Übergang $L \rightarrow \infty$ ergibt sich nach partieller Integration.

$$\Delta M_{bare} = \frac{1}{2} \sum_m \omega_m - \frac{\omega_k \delta(k)}{4\pi} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \omega(k) \frac{d}{dk} \delta(k) \quad (4.6.7)$$

Für allgemeine Potentiale $U''(\phi_{cl}(x))$ lässt sich der Phasenshift durch die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten ausdrücken. Die mit diesem Problem assoziierte S -Matrix lautet [30]

$$S(k) = \begin{pmatrix} T(k) & -\frac{R^*(k)T(k)}{T^*(k)} \\ R(k) & T(k) \end{pmatrix} \quad (4.6.8)$$

$$\delta(k) = \frac{1}{2i} \ln \det (S(k)) = \frac{1}{2i} \ln \left[\frac{T(k)}{T^*(k)} \right] \quad (4.6.9)$$

$\Delta\mathbb{M}_{bare}$ ist wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta(k) = \infty$ logarithmisch divergent und muss renormiert werden. $\Delta\mathbb{M}_{bare}$ kann allgemeiner in Feynman-Graphen expandiert werden. Der sogenannte „tadpole“- Graph ist der einzige divergente Graph mit einer logarithmischen Divergenz. Die Regularisierung der Massenkorrektur erfolgt über Subtraktion und Addition des Ausdrucks $\Delta\mathbb{M}_{bare}$ mit diesem.

$$\Delta\mathbb{M}_s = \frac{1}{2} \sum_m \omega_m - \frac{\omega_k \delta(k)}{4\pi} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \omega(k) \frac{d}{dk} \delta(k) - \frac{\langle V \rangle}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \quad (4.6.10)$$

mit

$$\langle V \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx V(x) . \quad (4.6.11)$$

Die Annahme besteht nun daran, dass sich die logarithmische Divergenz mit Termen der klassischen nackten Masse kürzt. Die endliche und renormierte Massenkorrektur der Ordnung 1-loop nach Born-Approximation des Oberflächenterms durch

$$\delta^1(k) = -\frac{\langle V \rangle}{2k} \quad (4.6.12)$$

lautet

$$\Delta\mathbb{M}_s = \frac{1}{2} \sum_m \omega_m + \frac{\langle V \rangle}{2k} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \omega(k) \frac{d}{dk} \delta(k) - \frac{\langle V \rangle}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \quad (4.6.13)$$

Sin-Gordon Modell:

Es ist

$$U(\phi) = \frac{m^4}{\lambda} \left\{ \cos \left[\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m} \right) \phi \right] - 1 \right\}$$

$$V(x) = -2 m^2 \operatorname{sech}^2(mx)$$

$\omega_0^2 = 0$ ist die diskrete Eigenmode von $V(x)$. Der Phasenshift beträgt $\delta(k) = 2 \tan^{-1} \left(\frac{m}{k} \right)$ und für $\langle V \rangle$ findet man $\langle V \rangle = -4m$. $\Delta\mathbb{M}_s$ berechnet sich damit zu

$$\Delta\mathbb{M}_s = -\frac{m}{\pi} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{2m}{\sqrt{k^2 + m^2}} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{m}{\sqrt{k^2 + m^2}} = -\frac{m}{\pi} \quad (4.6.14)$$

ϕ^4 -Modell:

Der Phasenshift ist $\delta(k) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{3mk}{m^2 - 2k^2} \right]$ und $\langle V \rangle = -6m$. Das System besitzt einen angeregten Zustand $\omega_1 = \sqrt{3}m$

$$\begin{aligned} \Delta\mathbb{M}_s &= \frac{\sqrt{3}m}{2} - \frac{3m}{2\pi} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{6m(2k^2 + m^2)}{(4k^2 + m^2)\sqrt{k^2 + m^2}} - \frac{3m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}m}{2} - \frac{3m}{2\pi} - \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{m^3}{(4k^2 + m^2)\sqrt{k^2 + m^2}} = -\frac{3m}{2\pi} + \frac{\sqrt{3}m}{2} - \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (4.6.15)$$

Bibliographie

- [1] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*, Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p
- [2] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, third edition, Columbia, South Carolina, July (2000)
- [3] E. J. Weinberg, *Classical Solutions in Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, (2012)
- [4] S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press, (1985)
- [5] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, Amsterdam, North-Holland, (1987)
- [6] V. Caudrelier, *Multisymplectic approach to integrable defects in the sine-Gordon model*, arXiv:1411.5171, *J. Phys. A* 48 (2015) 195203
- [7] L. D. Faddeev and L. Takhtajan, *Hamiltonian methods in the theory of solitons*, doi:10.1007/978-3-540-69969-9, (1987) – 38 –
- [8] S. Coleman, *The quantum sine-Gordon equation as the massive Thirring model*, *Phys. Rev. D* 11, 2088 (1975). T. H. R 1991.
- [9] L. D. Faddeev, V. E. Korepin, *Quantum theory of solitons*, *Phys. Rep.* 42C (1978) 1-87. 29
- [10] S. F. Coleman, *Classical lumps and their quantum descendants*, 1975 Erice Lectures, in *Aspects of symmetry*, Cambridge University Press, 1985, New York.
- [11] J. Goldstone, R. Jackiw, *Quantization of non-linear waves*, *Phys. Rev. D* 11 (1975) 1486-1498.
- [12] R. Jackiw, *Quantum meaning of classical field theory*, *Rev. Mod. Phys.* 49 (1977) 681-706.
- [13] N.H. Christ, T.D. Lee, *Quantum expansions of soliton solutions*, *Phys. Rev. D* 12 (1975) 1606- 1627.
- [14] E. Witten, *Dynamical breaking of supersymmetry*, *Nucl. Phys. B* 188 (1981) 513-554.
- [15] G. Junker, *Supersymmetric methods in quantum and statistical physics*, Springer-Verlag, 1966, Berlin.
- [16] R. Dashen, B. Hasslacher, A. Neveu, *Particle spectrum in model field theories from semiclassical functional integral techniques*, *Phys. Rev. D* 11 (1975) 3424-3450.
- [17] R. Dashen, B. Hasslacher, A. Neveu, *Semiclassical bound states in an asymptotically free theory*, *Phys. Rev. D* 12 (1975) 2443-2458.

-
- [18] S.E. Trullinger, R.J. Flesch, Parent potentials for an infinite class of reflectionless kinks, *J. Math. Phys.* 28 (1987) 1683-1690.
- [19] A. Alonso-Izquierdo, J. Mateos Guilarte, On a family of $(1 + 1)$ -dimensional scalar field theory models: Kinks, stability, one-loop mass shifts, *Annals of Physics* 327 (2012) 2251-2274.
- [20] H. Nastase, M. Stepanov, A. Rebhan, P. van Nieuwenhuizen, Topological boundary conditions, the BPS bound and elimination of ambiguities in quantum mass of solitons, *Nucl. Phys. B* 542 (1999) 471-514
- [21] Baez, John C., Segal, Irving E., and Zhou, Zheng-Fang, Introduction to algebraic and constructive quantum field theory, Princeton Series in Physics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992. MR1178936
- [22] R.F. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu, Nonperturbative methods and extended hadron models in field theory, parts i-iii, *Phys.Rev. D*10 (1974), 4114–4142.
- [23] Hörmander, Lars, The analysis of linear partial differential operators. ii, *Classics in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 2005. Differential operators with constant coefficients; Reprint of the 1983 original. MR2108588
- [24] N. Graham, R. Jaffe, Energy, central charge, and the BPS bound for 1+1 dimensional supersymmetric solitons, *Nucl. Phys. B* 544 (1999) 432-447.
- [25] A. Alonso-Izquierdo, J.M. Guilarte, M.A.G. Leon, W. G. Fuertes, One-loop corrections to classical masses of kink families, *Nucl. Phys. B* 681 (2004) 163-194
- [26] A. A. Andrianov, M. V. Ioffe, Nonlinear supersymmetric quantum mechanics: concepts and realizations, *J. Phys. A: Math. Theor.* 45 (2012) 503001 (62pp), [arXiv: 1211.1461].
- [27] N. Graham and R.L. Jaffe, *Phys.Lett. B*435, 145 (1998); arXiv:hep-th/9805150.
- [28] A. S. Goldhaber, A. Litvintsev, P. Van Nieuwenhuizen, *Phys.Rev. D*64, 045013 (2001); arXiv:hep-th/0011258.
- [29] A. Rebhan and P. van Nieuwenhuizen, *Nucl.Phys. B*508, 449 (1997); arXiv:hep-th/9707163
- [30] G. Barton, *J. Phys. A: Math. Gen.* 18, 479 (1985)
- [31] K. Cahill, A. Comtet and R. Glauber, *Phys.Lett. B*64, 283 (1976).
- [32] P.G. Drazin and R.S. Johnson, *Solitons: An Introduction*, Cambridge University Press, England (1993).

- [33] N. Straumann, Quantum mechanics, Springer-Verlag, 2002
- [34] D. M. A. Stuart arXiv:1904.02588 [math-ph]
- [35] O. Temkin, M.D., Forerunners of Darwin, 1745-1859, Johns Hopkins University Press, (1968)
- [36] E. B. Bogomolny, The stability of classical solutions, Sov. J. Nucl. Phys. 24, 449 (1976).
- [37] K. Fredenhagen, Algebraic quantum field theory, 2003
- [38] B. Chilian, Time layer axiom of interacting quantum field theories on globally hyperbolic space-time, University of Hamburg, 2008
- [39] N. Manton, P. Sutcliffe, Topological solitons, Cambridge, 2004
- [40] M. Plyushchay, The effect of scalings and translations on the supersymmetric structure of soliton systems, arXiv: 1210.3666 [math-ph].
- [41] J. Tolksdorf, Lectures and scripts of „Mathematical methods 2“, University of Leipzig, 2018
- [42] Methods of modern mathematical physics. iii, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1979. Scattering theory
- [43] Simon, Barry, The $p(\varphi)_2$ euclidean (quantum) field theory, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1974. Princeton Series in Physics. MR0489552