Cycles universels et cycles dérivés en $3x + 1$ généralisé

Pierre Lamothe

Février 2020

1 Résumé

Dans les suites finies de Collatz-Kakutani généralisées à $px + q$, le début et la fin d'une suite sont reliés par une équation diophantienne de la forme $p^m x - 2^d y + qc = 0$, où m et d sont les nombres de multiplications et de divisions. On a un cycle $(x = y)$ si qc est divisible par $\delta = 2^d - p^m$. On montre que tous les c sont inclus dans des cycles paramétriques de rotation $(c_1\ c_2\ ...\ c_m)$ avec $px + \delta$, et que les rares cycles numériques $(x_1\ x_2\ ...\ x_m)$ en dérivent, lorsque les $x_i = qc_i/\delta$ sont des entiers. Si les cycles dérivés résultent d'une coïncidence numérique, les cycles universels de rotation sont par contre de nature purement algébrique. Enfin, sous l'hypothèse que les valeurs possibles de qc mod δ sont équiprobables, un calcul de probabilité d'existence des cycles dérivés est formulé.

2 Du numérique au fonctionnel

2.1 Définitions préalables

Définition 1. *Une suite de Collatz-Kakutani (CK) est une suite d'entiers relatifs où le successeur de x est*

$$D(x) = x/2 \quad \text{si } x \text{ est pair} \tag{1}$$

$$C(x) = 3x + 1 \quad \text{si } x \text{ est impair} \tag{2}$$

Définition 2. *Une suite générale (SG) est une suite CK balisée et généralisée définie comme une suite finie, débutant et se terminant par un impair, et utilisant $C(x) = px + q$ où p et q sont deux entiers positifs impairs tels que $p > q$.*

Pour passer en douce des nombres aux fonctions nous allons d'abord partitionner les suites SG en classes dites de parité. Le vecteur de parité (Lagarias) d'une suite numérique S est une suite parallèle de 1 et de 0 qui définit l'ordre des impairs et des pairs dans S. Le 1 signifie impair et le 0 pair.

Définition 3. *Une classe de parité (CP) est l'ensemble de toutes les suites générales SG qui ont le même vecteur de parité.*

Le vecteur de parité d'une classe CP débute et se termine toujours par 1 car les suites SG débutent et se terminent par un impair. Il existe une infinité de suites numériques dans chaque classe CP et on représente normalement la classe par sa suite minimale, celle dont la valeur absolue des termes est la plus petite. Par exemple, dans la classe CP ayant le vecteur de parité 1010010001 on a (11 34 17 52 26 13 40 20 10 5) qui est sa suite minimale dans $3x+1$. Cette classe comprend toutes les suites de longueur 10 qui commencent par $128k+11$ où k est un entier relatif quelconque.

Convention. *Nous adoptons la convention suivante pour la composition des fonctions afin que les suites SG et les suites de fonctions progressent dans le même sens. Soient f et g deux fonctions :*

$$fg(x) = g(f(x)) \tag{3}$$

La suite de fonctions C et D entre le début $(x = 11)$ et la fin $(y = 5)$ est $CDCDDCDDD$. La composée ω de ces fonctions permet d'écrire l'équation diophantienne $y = \omega(x)$ dont la solution générale (x, y) peut s'écrire $(128k + 11,\ 54k + 5)$. Une solution (x, y) isolée ne détermine pas complètement sa suite car y pourrait être répété dans un cycle. Toutefois le couple paramétrique détermine ses suites car on peut tirer des multiples du paramètre k (ici 128 et 54) le nombre de divisions et le nombre de multiplications. Finalement on peut aussi associer à une suite de fonctions un vecteur de 1 et de 0 qui représente la suite des types de fonctions.

Définition 4. *Le vecteur des types de fonctions (TF) d'une suite de C et de D est une suite parallèle de* 1 *et de* 0 *qui définit l'ordre des types de fonctions dans cette suite. Le* 0 *signifie une division* (D) *par 2 et le* 1 *signifie qu'il y a une multiplication* (C) *par p.*

Le vecteur TF de l'exemple est 101001000. En fait, il suffit d'ôter le dernier 1 du vecteur de parité d'une suite numérique SG pour obtenir le vecteur TF de la suite de fonctions. Soit, à présent, la fonction $T = CD$. On a $T(x) = (px + q)/2$.

Définition 5. *Notons TF* le vecteur des types de fonctions d'une suite de T et de D où $T = CD$.*

Les suites de fonctions $CDCDDCDDD$ et $TTDTDD$ de l'exemple sont équivalentes car elles ont la même composée ω et ainsi la même classe solution CP. Un vecteur TF*, comparé au vecteur TF équivalent, a un 0 de moins entre chaque 1. Le vecteur TF* est ici 110100. Quel est l'utilité du vecteur TF* ? Il permet d'ordonner les TF. En effet, toutes les combinaisons de C et de D ne sont pas possibles : C doit être suivi de D car $C(x)$ est pair. Mais il y a une seule contrainte sur les combinaisons de T et de D qui engendrent les classes CP : elles doivent commencer par T. Et on verra (théorème 2) que l'équation diophantienne correspondante a toujours une solution. Les suites de 1 et de 0 qui commencent par 1 sont celles de l'énumération en binaire (1 10 11 100 101 110 111 1000 ...). On peut ainsi énumérer les classes CP et ce qui leur correspond : vecteur TF, fonction ω, équation diophantienne $y = \omega(x)$, suite minimale, etc. Leur rang ρ en binaire est précisément TF*.

2.2 Monoïde des fonctions de transition entre impairs

Soit Ω l'ensemble des fonctions ω de transition entre impairs de suites SG. Les suites SG de même classe CP correspondent à la même fonction de transition ω. L'ensemble Ω muni de la loi de composition des fonctions, selon la convention (3), et adjoint à la fonction identité I forme le monoïde libre $(\Omega, \circ, I)$ dont la base est le sous-ensemble $\{\beta_d\}$ des fonctions $\beta_d = CD^d$ entre impairs conjoints où $d > 0$ est le nombre fini de divisions entre eux. Les vecteurs TF de la base sont $\{10\ \ 100\ \ 1000\ ...\}$ ou $\{10^1\ \ 10^2\ \ 10^3\ ...\}$. Pour calculer ω on a besoin seulement de la suite $(d_i)_m$ du nombre de divisions entre chaque impair et on peut extraire cette suite du rang ρ de la suite qui vaut TF* en binaire ; il suffit d'ajouter 1 au nombre de 0 successifs entre les 1 de TF*. Ainsi $52 \to 110100 \to (123)$.

Soient $(x_1\ x_2\ ...\ x_{m+1})$ la suite des impairs d'une suite SG et $(10^{d_1}\ 10^{d_2}\ ...\ 10^{d_m})$ la suite des équivalents TF des fonctions de transition $(CD^{d_1}\ CD^{d_2}\ ...\ CD^{d_m})$ = $(\beta_{d_1}\ \beta_{d_2}\ ...\ \beta_{d_m})$.

$$x_1 \xmapsto{10^{d_1}} x_2 \xmapsto{10^{d_2}} x_3 \cdots x_m \xmapsto{10^{d_m}} x_{m+1}$$

Ω est l'ensemble des composées de toutes les combinaisons finies d'éléments de la base.

$$\Omega = \left\{ \prod_{i=1}^{m} \beta_{d_i} \right\} \quad (m \text{ et } d_i > 0) \tag{4}$$

2.3 Composition des fonctions

Théorème 1. *Soient $f_i(x) = (a_i x + c_i)/b_i$ alors*

$$\left(\prod_{i=1}^{m} f_i \right)(x) = (ax + c)/b \quad \textit{où :}$$

$$a = \prod^{m} a_i$$

$$b = \prod^{m} b_i$$

$$c = \begin{array}{rcc} c_1\, a_2\, a_3\, a_4 & \cdots & a_m \\ +\, b_1\, c_2\, a_3\, a_4 & \cdots & a_m \\ +\, b_1\, b_2\, c_3\, a_4 & \cdots & a_m \\ +\, b_1\, b_2\, b_3\, c_4 & \cdots & a_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ +\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4 & \cdots & c_m \end{array} \tag{5}$$

Démonstration. (En Annexe) □

Une classe CP est déterminée par son vecteur de parité ou son vecteur TF ou son rang, qui fournissent chacun la suite $(d_i)_m$ et donc la suite des $\beta_{d_i}(x) = (px+q)/2^{d_i}$ à composer.

Théorème 2. *L'équation diophantienne associée à la suite $(d_i)_m$ est*

$$p^m x - 2^d y + qc = 0 \quad où \tag{6}$$

$$d = \sum_{i=1}^{m} d_i \tag{7}$$

$$c = \sum_{i=1}^{m} p^{m-i} 2^{\sigma_i} \quad où \tag{8}$$

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{i} d_{j-1} \tag{9}$$

Démonstration. Dans le théorème 1, si on remplace $f_i(x)$ par $\beta_{d_i}(x) = (px+q)/2^{d_i}$ on obtient

$$\omega(x) = \left(\prod_{i=1}^{m} \beta_{d_i}\right)(x) = (p^m x + qc)/2^{\sum d_i} \text{ où} \tag{10}$$

$$c = \begin{array}{l} 1 \;\; p \;\; p \; \cdots p\, + \\ 2^{d_1}\, 1 \;\; p \; \cdots p\, + \\ 2^{d_1} 2^{d_2}\, 1 \; \cdots p\, + \\ \vdots \;\;\; \vdots \;\;\; \vdots \;\; \ddots \; \vdots\, + \\ 2^{d_1} 2^{d_2} 2^{d_3} \cdots 1 \end{array} \tag{11}$$

D'où on tire immédiatement l'équation $y = \omega(x)$ et les composantes d, c et σ_i de même que la certitude que l'équation a toujours une solution car 2 et p sont premiers entre eux. □

3 Cycles

La solution cyclique $(x = y)$ de l'équation (6) est immédiate : $x = qc/(2^d - p^m)$, ce qu'on peut reformuler, en posant $\delta = (2^d - p^m)$:

$$x = qc/\delta \tag{12}$$

À première vue on pourrait n'apercevoir là que la condition nécessaire et suffisante de l'existence d'un cycle qui pourrait, tout au plus, rendre compte du fait qu'on trouve des cycles surtout dans les suites très courtes. On n'y reviendra dans [4.1]. Mais cette formule recèle bien davantage. En effet, posant $q = \delta$, on constate que le paramètre c

devient forcément cyclique pour $px+\delta$. Alors si on examine de près on découvre la source des cycles : les cycles universels de rotation des paramètres c, dont dérivent les cycles numériques lorsque par coïncidence numérique, les valeurs du cycle $(c_1\ c_2\ ...\ c_m)$ sont divisibles par δ. Voyons cela.

Pour bien montrer que les cycles paramétriques de rotation sont de nature purement algébrique, le théorème qui suit a été généralisé en remplaçant, dans c et δ, le nombre 2 par le paramètre k. Seul l'aspect formel de c est considéré.

Théorème 3. *Soient p et k deux entiers positifs premiers entre eux et $(d_i)_m$ une suite d'entiers positifs de longueur m dont la somme vaut d. Posons $\delta = k^d - p^m$. On obtient un cycle de longueur m avec une procédure de type Collatz-Kakutani où $C(x) = px+\delta$ et $D(x) = x/k$ pour tout entier x de la forme*

$$x = \begin{matrix} 1 & p & p & \cdots & p\ + \\ k^{d_1} & 1 & p & \cdots & p\ + \\ k^{d_1} & k^{d_2} & 1 & \cdots & p\ + \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\ + \\ k^{d_1} & k^{d_2} & k^{d_3} & \cdots & 1 \end{matrix} \tag{13}$$

Démonstration. L'expression de x au départ est :

$$p^{m-1} + p^{m-2}k^{d_1} + p^{m-3}k^{d_1+d_2} + \cdots + pk^{d-d_{m-1}-d_m} + k^{d-d_m} \tag{14}$$

On multiplie par p, et lorsque δ est ajouté, p^m est retiré au début et k^d ajouté à la fin :

$$p^{m-1}k^{d_1} + p^{m-2}k^{d_1+d_2} + p^{m-3}k^{d_1+d_2+d_3} + \cdots + pk^{d-d_m} + k^d \tag{15}$$

L'expression est dès lors divisible par k^{d_1} seulement car p et k sont premiers entre eux. En divisant par k^{d_1} on a :

$$p^{m-1} + p^{m-2}k^{d_2} + p^{m-3}k^{d_2+d_3} + \cdots + pk^{d-d_m-d_1} + k^{d-d_1} \tag{16}$$

Si on compare cette expression à celle d'origine on voit qu'il y a eu rotation des exposants : $(d_1\ d_2\ d_3\ ...\ d_{m-1})$ est devenu $(d_2\ d_3\ d_4\ ...\ d_m)$. L'indice du début est disparu de la suite et un nouvel indice est apparu à la fin. Au prochain tour on aura $(d_2\ d_3\ d_4\ ...\ d_m\ d_1)$. Enfin, si on applique la procédure m fois on retrouvera l'expression d'origine. Dès lors, de la rotation cyclique des indices découle la rotation cyclique des expressions. □

Définition 6. *On a un cycle trivial si $|\delta| = q$.*

Ainsi les δ unitaires (2^1-3^1) (2^2-3^1) (2^3-3^2) de $3x+1$ entraînent les cycles triviaux (-1) (1) (-5 -7) mais $(2^{11}-3^7) = -139$ entraîne un cycle non trivial où $-17 = 2363/-139$. Dans $5x+3$ le $\delta = (2^7-5^3) = 3$ entraîne 5 cycles universels (et triviaux car $\delta < p$)

(39 99 249) (43 109 137) (51 129 81) (53 67 169) (61 77 97)

alors que les 2 seuls cycles fortuits $(c_i/3)$ qui en dérivent en $5x+1$ ne sont pas triviaux

(13 33 83) (17 43 27).

4 Complément

Cet article ne visait qu'à expliciter le lien entre les cycles universels et les cycles dérivés. C'est l'aspect algébrique de la solution cyclique cq/δ. Ce qui suit n'est qu'un simple aperçu de l'aspect complémentaire, cette fois numérique. Il a été abordé dans « Approche algébrique du problème $3n + 1$ généralisé », (voir [5] Références) *d'où ces quelques notes sont tirées.*

4.1 Probabilités

La divisibilité de qc par δ apparaît fortuite. On peut penser que les δ valeurs possibles $qc \bmod \delta$ sont équiprobables. Le sont-elles ? Y aurait-il une raison simple à cela ? Je ne sais pas. J'ai simplement fait l'hypothèse de cette équiprobabilité et établi le calcul de probabilité qui en découlerait.

Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas de cycle dans une classe $K[d, m]$ où les suites ont d divisions et m multiplications ? Pour répondre à cette question il faut connaître ces propositions établies dans l'article source :

1. Dans les classes $K[d, m]$ où le rationnel d/m est réductible par k, seules des spirales de k tours sont possibles.
2. On considère donc les seuls d/m irréductibles où se retrouvent les cycles simples, ayant m valeurs c_i distinctes.
3. Le nombre de c distincts dans la classe $K[d, m]$ est égal à $\binom{d-1}{m-1}$.
4. Le nombre de c divisé par m est le nombre précis de cycles si d/m est irréductible.
5. La probabilité qu'un cycle universel n'ait pas de cycle dérivé est $1 - \delta^{-1}$.
6. Si δ divise l'un des c il divise son cycle $(c_i)_m$ et ainsi le nombre d'« essais » est le nombre de cycles.

Exprimons d'abord la probabilité P_{non} qu'il n'y ait pas de cycle dans une classe $K[d, m]$:

$$P_{non} = \left(1 - \frac{1}{2^d - p^m}\right)^{\frac{1}{m}\binom{d-1}{m-1}} \tag{17}$$

La probabilité qu'il y ait au moins un cycle dans cette classe est $P_{oui} = 1 - P_{non} = 1/N$ qui se dit « une chance sur N ». Lorsque m est grand on peut user d'une approximation (où l'erreur est d'à peu près 1% à 84/53, et négligeable avec les grands nombres). Soit e le nombre des « essais » qui est le nombre de cycles dans le calcul de P_{non}.

$$P_{non} = \left(\frac{\delta - 1}{\delta}\right)^e = 1 - \binom{e}{1}\delta^{-1} + \binom{e}{2}\delta^{-2} - \cdots \tag{18}$$

$$1/N = P_{oui} \cong e\delta^{-1}$$

$$N \cong \delta/e \tag{19}$$

4.2 Exemples de calculs

Pour un nombre m donné, la plus forte chance de trouver un cycle dérivé se situe là où le $|\delta|$ est minimal, où d/m est le plus près de $\log_2 p$. Dans le cas de $p = 3$, partant de la fraction continue

$$[1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 3\ 1\ 5\ 2\ 23\ 2\ 2\ 1\ 1...]$$

on peut produire la suite des approximations rationnelles d/m de $\log_2 3$. Dans la table 1 qui suit ces valeurs d/m privilégiées sont mises en regard, entre autre, du δ où s'illustre assez bien sa croissance phénoménale (de l'ordre de la double exponentielle). On doit remarquer que les quatre cycles connus correspondent aux lignes 1, 2, 3 et 6.

d/m	c minimal	$\lvert\delta\rvert$	$[\lvert\mu_0\rvert]$
1/1	1	1	1
2/1	1	1	1
3/2	5	1	6
5/3	19	5	6
8/5	211	13	37
11/7	2 059	139	36
19/12	527 345	7 153	295
27/17	129 009 091	5 077 565	147
46/29	68 629 840 493 971	1 738 366 812 781	386
65/41	36 472 994 178 147 530 851	420 491 770 248 316 829	1192
84/53	19 383 245 658 672 820 642 055 731	40 432 553 845 953 101 497 907	8461

TABLE 1 – Approximations rationnelles de $\log_2 3$ et paramètres pertinents

Pour la suite, on va utiliser seulement les meilleures approximations, les réduites, qui correspondent aux troncages successifs de la fraction continue. Et pour débuter on va considérer 84/53 qui est la 6^e réduite. Dans la table 2, on compare le N de la probabilité $1/N$ qu'il y ait au moins un cycle pour (d, m) variant de $(82\,..\,86,\ 51\,..\,55)$.

4 044 932	1 341 819	441 311	·	35 977
·	208 151	·	11 1148	·
94 851	23167	37	6552	7641
·	4 480	·	6 810	·
5 901	6 455	·	5 048	4 280

TABLE 2 – Probabilités autour de la classe $K_{dm}[84, 53]$

On peut aussi mettre en évidence le caractère distinctif de la réduite 84/53 avec deux autres paramètres de sélection, soit δ et μ_0. Quoique la croissance de δ dans la table 1 ait l'allure d'une double exponentielle, les réduites correspondent aux minima positifs et négatifs successifs du δ. Ce qui est comparé, à gauche dans la table 3, ce sont les rapports (arrondis et en valeur absolu) du δ des classes voisines au δ de 84/53. Quant au μ_0, à droite, c'est la valeur centrale d'un cycle possible. Tous les cycles $(c_i)_m$ possède le même centre $c_M = \mu_0\delta$ où $\mu_0 = (2^{d/m} - p)^{-1}$. Cette valeur indique qu'il y a forcément des valeurs plus petites dans le cycle. Le μ_0 de la classe à 84/53 est ≈ 8461. Ce qui signifie qu'un cycle dérivé aurait eu des valeurs $x_i < 8461$. Les valeurs de μ_0 dans les classes voisines sont beaucoup plus petites.

4195	4075	3386	·	2401
·	1199	·	481	·
360	240	1	477	1434
·	79	·	796	·
66	186	·	904	1860

5	6	8	·	23
·	10	·	44	·
13	26	8461	25	13
·	43	·	9	·
21	11	·	6	5

TABLE 3 – Valeurs comparées δ et μ autour de la classe $K_{dm}[84, 53]$

4.3 Vers le zéro absolu

La puissance de calcul d'une calculatrice permet la comparaison directe de la 6^e à la 13^e réduite. La table 4 illustre la chute vertigineuse de la « probabilité » d'un cycle dérivé. Étant donné la croissance au moins exponentielle des valeurs, ce sont les logarithmes des valeurs qui sont comparées : $d + m$ pour la longueur du cycle, μ_0 pour le centre et N pour l'inverse de la probabilité.

n^e réduite	6^e	7^e	8^e	9^e	10^e	11^e	12^e	13^e	?
$\log(d + m)$	2.1	2.9	3.2	4.6	4.9	5.3	5.5	5.7	?
$\log(\mu_0)$	3.9	5.0	6.7	8.5	9.2	9.9	10	12	20
$\log(N)$	1.6	8.4	16.1	374	763	1897	2658	4458	?

TABLE 4 – Chute vertigineuse de la probabilité $1/N$

Si les vérifications par ordinateur n'avaient atteint que les nombres qui avoisinent le $\mu_0 = 10^{12}$ on pourrait dire qu'il reste à peu près une chance sur $N = 10^{4458}$ de trouver un autre cycle. Mais on en est à l'ordre de $\mu_0 = 10^{20}$ et là, compte tenu des moyens de calculs limités dont on disposait, on a pu l'estimer que de manière indirecte et pas très fiable. De la 9^e à la 13^e réduite, les valeurs successives de $\log\log N / \log \mu_0$ sont : (0.303, 0.309, 0.330, 0.342, 0.304). En faisant l'hypothèse que $\log\log N / \log 10^{20} > 0.3$ on aurait une « probabilité » de l'ordre de

$$1 \ / \ 10^{5\,million}$$

Annexe

Composée de fonctions linéaires – *démonstration*

Cette démonstration est tirée de *Approche algébrique du problème* $3n+1$ *généralisé* [5]. Elle utilise l'**opérateur triplet** qui doit être défini d'abord. À la fonction $f(n) = (an+c)/b$ on associe l'opérateur $\langle f\rangle = \langle a,b,c\rangle$ équivalent à f.

$$\langle f\rangle\,(n) = \langle a,b,c\rangle\,(n) = (an+c)/b = f(n) \tag{20}$$

Et on associe une *loi de composition* à droite $\langle f\rangle\,\langle g\rangle = \langle fg\rangle$ équivalente à celle des fonctions. Soit $\langle g\rangle = \langle a',b',c'\rangle$, alors

$$\langle a,b,c\rangle\,\langle a',b',c'\rangle = \langle aa',bb',bc'+ca'\rangle \tag{21}$$

Ainsi, en tenant compte de la convention (3) :

$$fg(n) = g(f(n)) = (aa'n+bc'+ca')/bb' \equiv \langle fg\rangle\,(n) \tag{22}$$

Ces deux expressions sont ainsi équivalentes :

$$\begin{aligned} &\left(\prod_{i=1}^{m} f_i\right)(x) = (ax+c)/b \\ &\prod_{i=1}^{k}\langle a_i,b_i,c_i\rangle = \langle a,b,c\rangle \end{aligned} \tag{23}$$

Démontration. Tout l'intérêt de la proposition réside dans la disposition particulière des produits partiels de c sous forme de matrice. Il suffit d'exhiber comment évolue la matrice en passant d'un indice au suivant. Partons des trois premières étapes :

$$\begin{aligned} \langle a,b,c\rangle &= \langle a_1,b_1,c_1\rangle\,\langle a_2,b_2,c_2\rangle\,... \\ &= \langle a_1a_2,b_1b_2,(c_1a_2+b_1c_2)\rangle\,\langle a_3,b_3,c_3\rangle\,... \\ &= \langle a_1a_2a_3,b_1b_2b_3,(c_1a_2a_3+b_1c_2a_3+b_1b_2c_3)\rangle\,\langle a_4,b_4,c_4\rangle\,... \end{aligned}$$

Oublions a et b qui évoluent de façon simple, et calculons la prochaine valeur de c :

$$c = (c_1 a_2 a_3 + b_1 c_2 a_3 + b_1 b_2 c_3) a_4 + b_1 b_2 b_3 c_4 \tag{24}$$

Il suffit d'aligner les termes pour découvrir le schéma matriciel et son évolution :

$$c = \begin{array}{l} (\ \ c_1\, a_2\, a_3 \\ +\, b_1\, c_2\, a_3 \\ +\, b_1\, b_2\, c_3\,)\, a_4 \\ +\, b_1\, b_2\, b_3 \cdot c_4 \end{array}$$

Alors – ce qui est suffisamment probant – la somme de produits devient à l'étape 4 :

$$c = \begin{array}{r} c_1\, a_2\, a_3\, a_4 \\ +\, b_1\, c_2\, a_3\, a_4 \\ +\, b_1\, b_2\, c_3\, a_4 \\ +\, b_1\, b_2\, b_3\, c_4 \end{array} \tag{25}$$

5 Références

Pierre Lamothe, 2020, *Approche algébrique du problème* $3n + 1$ *généralisé*, `viXra:2002.0571`