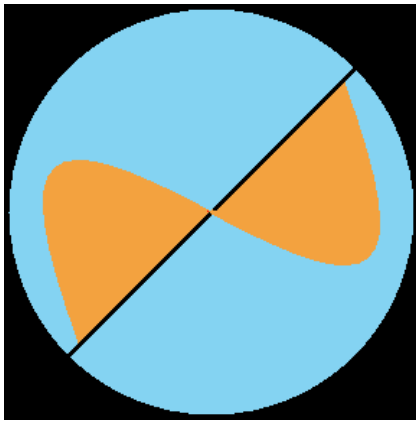


James Clerk Maxwell

conocimiento prohibido



Aviso

El abstracto, la bibliografía y otros ítems habituales faltan en este documento. El motivo no es descortesía. Es necesidad. Ruego ser disculpado.

CAPÍTULO 1 - Varias ondas en una

(1-a) ¿ Qué trataremos ?

- Ambiente : el vacío
- Fenómeno : propagación electromagnética
- Caso : onda plana monodimensional, sin polarización de tipo alguno en los campos transversales.
- Tarea : analizar el desplazamiento eléctrico

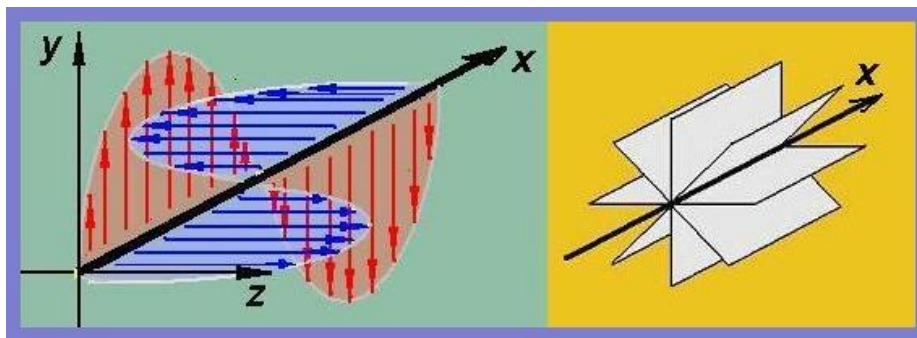
Pongamos en evidencia una mala costumbre muy frecuente en la aulas. Es insistir demasiado en las ondas de los campos \vec{E} y \vec{H} , sin prestar la atención debida a otros campos incluidos en la propagación electromagnética, que también ondulan.

La onda del campo \vec{D} (desplazamiento eléctrico) está incluida, pero no tengo noticias de alguien que en las aulas le dedique atención. Esto es raro pues específicamente Maxwell necesitó analizar a \vec{D} para formular una teoría completa, coherente y consistente. Nos enseñan que \vec{D} fue la llave que le permitió a Maxwell acceder a un ámbito nuevo y maravilloso, sin mostrarnos cómo aplica esa llave en cada caso específico, por ejemplo en la propagación de una onda. Con la intención de suplir esa falta estoy redactando este documento, destinado a personas que tienen conocimientos básicos de electrodinámica.

(1-b) ¿ Qué significa sin polarización ?

En las secciones siguientes nos esperan desarrollos matemáticos que no son difíciles, pero son largos y laboriosos. Entonces nos hará bien un poco de sustento conceptual, que es la mejor brújula para guiarnos en medio de la selva matemática.

La dirección de propagación es el eje x . El plano (x, y) contiene a ese eje. También el plano (x, z) . Y muchos otros planos lo mismo (hay infinitos planos que lo contienen).

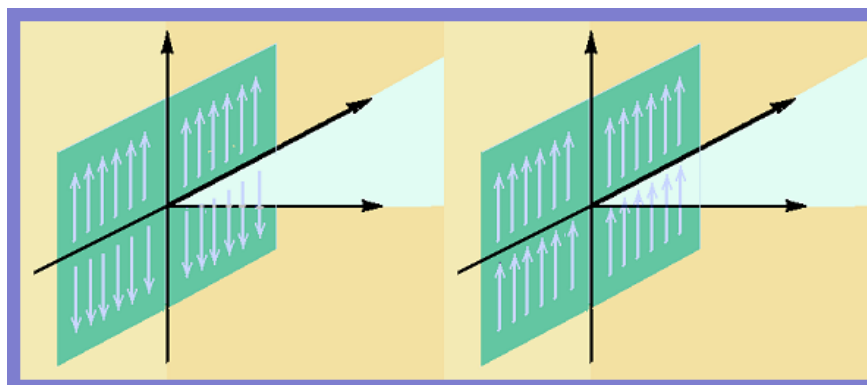


Consecuentemente hay infinitos pares de planos mutuamente perpendiculares, como esos que vemos a la izquierda de la imagen. Cada par de planos de ese tipo da lugar a una onda electromagnética, como esa que vemos en los planos (x, y) y (x, z) (campo eléctrico y campo magnético). La energía de la propagación está distribuida en todos esos infinitos planos. La onda elemental que opera en un par de planos mutuamente perpendiculares tiene una energía infinitesimal. Esto está implícito en la condición que nos interesa, *propagación sin polarización de tipo alguno*. Mencionarlo explícitamente es una necesidad conceptual.

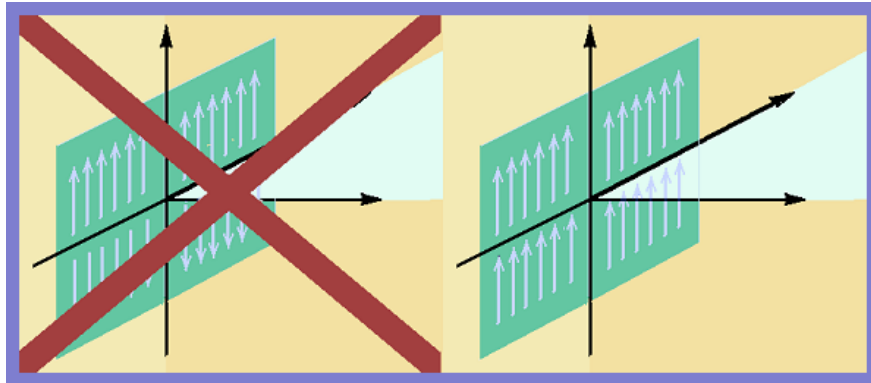
Los infinitos planos se intersectan mutuamente en una recta. Esa recta es el eje de simetría de la propagación. ¿ Desde ese eje hasta qué radio abarca el campo de la onda ? ¿ Hasta radio infinito o hasta un radio finito cuyo medida ignoramos ? No hago la pregunta para responderla en esta sección del documento. Solamente quiero motivar una reflexión en quien lee. Aunque ignoremos la medida del radio, es evidente la simetría cilíndrica. El campo de la onda forma un cilindro, cuyo radio debería estar determinado por las ecuaciones de Maxwell. Si la teoría maxwelliana es coherente, consistente y completa, entonces el radio del cilindro se deducirá de ella.

En cada uno de los infinitos planos coexisten el campo eléctrico de una onda elemental y el campo magnético de otra. Eso es inevitable porque ningún plano carece de campo eléctrico ni de campo magnético. ¿ Implica esa coexistencia alguna incompatibilidad ? Ambos campos son transversales. Entonces los vectores de ambos en un mismo plano son paralelos y dan un producto vectorial igual a cero. El teorema de Poynting indica que el flujo de potencia está dado por ese producto vectorial. Esto significa no hay potencia asociada con los vectores \vec{E} y \vec{H} de un mismo plano. La potencia está dada por los vectores \vec{E} y \vec{H} ubicados en planos distintos, como aprendemos en las aulas y en la bibliografía.

Podemos prever dos modos de simetría cilíndrica, por semiplanos (lo denominaremos modo SPL) y por planos (modo PL). En el modo SPL el sentido cambia en el eje de simetría (el sentido en un semiplano es inverso al sentido en el otro). En el modo PL el campo tiene el mismo sentido en todo el plano.

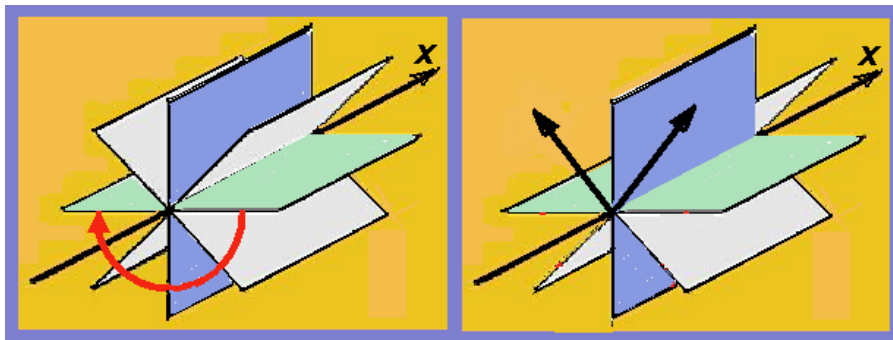


¿ Puede existir el modo SPL físicamente ? En este modo cada vector de un semiplano tiene un compañero igual y opuesto en el otro semiplano. Entonces la suma vectorial es cero.



Sin campos netos distintos de cero perpendiculares a la dirección de propagación, el vector de Poynting es igual a cero. No hay flujo de potencia, no hay energía y no hay onda. Por esa razón el modo SPL no es posible físicamente. La única posibilidad es el modo PL.

¿ Qué haríamos para construir un modelo tridimensional del modo PL ? Una manera fácil sería poblar con vectores transversales del mismo sentido un plano que contiene al eje de propagación. Después rotamos ese plano media vuelta en torno al eje. Cada semiplano barre una mitad del volumen cilíndrico y con eso el cilindro queda completamente lleno de campo.



El gráfico de la izquierda muestra un plano verde y otro azul mutuamente perpendiculares. Poblamos con vectores al plano verde y lo rotamos media vuelta. Así generamos pares de vectores simétricos respecto al plano azul. Por ejemplo el par de vectores negros representado en el gráfico de la derecha.

Recordemos que la idea de poblar un plano con vectores y rotarlo sirve para describir coloquialmente como están dispuestos los campos en la simetría cilíndrica. No es la descripción de un giro físico. Es un recurso didáctico.

¿ Qué da en términos resultantes esa forma de llenar de campo todo el volumen alrededor del eje de propagación ? La resultante del par simétrico es perpendicular a la dirección de propagación y pertenece al plano azul. Lo mismo sucede con las resultantes de todos los pares simétricos. En términos resultantes, la onda con simetría cilíndrica admite la función de onda más simple que conocemos, con dos planos mutuamente perpendiculares, el campo eléctrico en uno de ellos y el campo magnético en el otro. Es la representación chata que aprendimos en las aulas.

En este documento analizaremos la función de onda resultante, sin olvidar que físicamente corresponde a simetría cilíndrica.

(1-c) Lo imposible y lo posible

En el caso que nos interesa \vec{E} y \vec{H} no pueden tener componente longitudinal. ¿ Puede tenerla \vec{D} ? Equivale a preguntar si es admisible lo siguiente.

$$\vec{D} = \vec{x} \hat{D} \cos(\omega t - kx) + \vec{y} \hat{D} \sen(\omega t - kx) \quad (1)$$

\vec{x} , \vec{y} son versores de los ejes de coordenadas

Recordando la identidad de De Moivre

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sen\varphi \quad (2)$$

notamos que (1) corresponde a la solución exponencial compleja de la ecuación de onda, pues en la representación geométrica de un complejo la parte real y la parte imaginaria son mutuamente perpendiculares, como las componentes longitudinal y transversal en (1). En el vacío \vec{E} y \vec{H} no pueden tener componente longitudinal y, por esa razón, no admiten la solución exponencial compleja. Queremos averiguar si \vec{D} la admite. Esa es la tarea.

Ahora podemos entender el título de este documento (Desde James Clerk Maxwell hasta Max Planck). En teoría cuántica las exponenciales complejas abundan. Si usamos el mismo tipo de función, preparémonos para el mismo tipo de resultados. Lo esencial es poner a prueba las consecuencias de (1) y averiguar si es una solución válida para \vec{D} .

(1-d) Algo evidente en la solución compleja

La divergencia se calcula derivando cada componente respecto del eje de coordenadas respectivo. En (1) ambas componentes son espacialmente funciones sólo de x . La derivada de la componente transversal respecto de su eje es igual a cero. La derivada de la componente longitudinal respecto de su eje es distinta de cero. Entonces D tiene divergencia distinta de cero. La divergencia de D es igual a la densidad de carga eléctrica en la región donde el campo está presente. Entonces (1) atribuye una densidad no nula de carga eléctrica a la región donde la onda se propaga. La solución compleja describe una onda en un espacio eléctricamente sensible y eléctricamente activo. A ese espacio sensible y activo lo denominamos vacío.

(1-e) ¿ Carga en el vacío ? ¿ Es posible ?

Para responder necesitamos partir de la definición de \vec{D} .

$$\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_o \vec{E} \quad \text{definición del desplazamiento eléctrico} \quad (3)$$

- El término $\varepsilon_o \vec{E}$ es transversal, porque \vec{E} lo es.
- Geométricamente, \vec{P} debe ser longitudinal para que haya correspondencia entre (1) y (3) . ¿ Es eso posible físicamente ?

En términos de resultantes locales, la polarización es un campo con simetría colineal que no altera la neutralidad eléctrica. Eso significa que, dentro de un segmento de longitud finita, hay un par de vectores iguales y opuestos, resultantes de todas las contribuciones locales.

En el caso que tratamos, ¿ podría la polarización ser transversal ? Imposible, pues dos vectores transversales que corresponden a valores de x distintos no son colineales. Sí lo son

dos vectores longitudinales correspondientes a valores de x distintos. Esta es la propiedad física que concuerda con la condición geométrica.

La polarización establece una densidad de carga, que corresponde a carga ligada. Pero estamos analizando la propagación en el vacío. ¿ Está preparada la electrodinámica maxwelliana para incluir la polarización del vacío ?

(1-f) Maxwell y el vacío

No interesa lo que Maxwell y otros científicos de la época pensaran respecto al vacío. Interesan las preguntas siguientes.

- La electrodinámica maxwelliana, ¿ tiene generalidad suficiente para incluir la polarización del vacío ?
- En el caso que nos interesa, ¿ implica la polarización algún movimiento de partículas cargadas, como por ejemplo electrones y positrones ?
- El valor finito de ϵ_o , ¿ exige concebir al vacío como un medio con propiedades dieléctricas reales, capaz de polarizarse como los dieléctricos conocidos ?

No podremos responder sin tener en cuenta todo a la vez. Y para tener en cuenta todo a la vez necesitaremos un poco de matemática.

CAPÍTULO 2 - La carga ligada del vacío

(2-a) Valor pico y vector giratorio del campo \vec{D}

Por comodidad repitamos aquí la ecuación (1) .

$$\vec{D} = \vec{x} \hat{D} \cos(\omega t - kx) + \vec{y} \hat{D} \sin(\omega t - kx) \quad (1)$$

Donde tengamos $(\omega t - kx) = (2n - 1)\frac{\pi}{2}$ tendremos

$$\vec{D} = \vec{y} \hat{D} \quad (\text{en los ceros de } \vec{P}) \quad (4)$$

Repitamos (3) .

$$\vec{D} = \vec{P} + \epsilon_o \vec{E} \quad (3)$$

Para $(\omega t - kx) = (2n - 1)\frac{\pi}{2}$ resulta $\vec{P} = 0$, entonces tenemos

$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} \quad (\text{en los ceros de } \vec{P}) \quad (5)$$

En esos lugares el módulo de \vec{E} tiene el valor pico. Entonces tenemos

$$\vec{E} = \vec{y} \hat{E} \quad (\text{en los ceros de } \vec{P}) \quad (6)$$

En (5) reemplazamos \vec{E} como indica (6)

$$\vec{D} = \vec{y} \epsilon_o \hat{E} \quad (\text{en los ceros de } \vec{P}) \quad (7)$$

En (7) reemplazamos al vector \vec{D} como indica (4) y después simplificamos

$$\hat{D} = \varepsilon_o \hat{E} \quad (8)$$

¡ Demasiados pasos para llegar a (8) , que es trivial ! Es verdad. Solicito ser disculpado.

Reemplacemos en (1) \hat{D} como indica (8)

$$\vec{D} = \vec{x} \varepsilon_o \hat{E} \cos(\omega t - kx) + \vec{y} \varepsilon_o \hat{E} \sen(\omega t - kx) \quad (9)$$

Extraigamos factor común $\varepsilon_o \hat{E}$

$$\vec{D} = \varepsilon_o \hat{E} [\vec{x} \cos(\omega t - kx) + \vec{y} \sen(\omega t - kx)] \quad (10)$$

El corchete del miembro derecho de (10) es una suma vectorial cuya resultante tiene siempre módulo igual a 1 . Lo único que cambia es el ángulo que forma la resultante con la dirección de propagación. Un detector situado en un punto fijo del eje x ve simplemente un vector giratorio de módulo $\varepsilon_o \hat{E}$, cuya velocidad angular es igual a ω . En una animación gráfica, el vector parecería una aguja de reloj. Si un detector pudiese viajar en el vacío con la misma velocidad que la onda, vería un vector que no gira. Parecería la aguja de un reloj detenido. Y si el detector viajase en la dirección de propagación con una velocidad intermedia entre 0 y C vería al vector girar, pero más lentamente que cuando el detector está fijo en un punto del eje x . Si alguien usase como reloj un detector así, los tiempos medidos dependerían de la velocidad del reloj respecto al origen de coordenadas.

(2-b) Densidad de carga

Recordemos la definición de divergencia ($div \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad (11)$$

La parte en coordenada z no existe. La derivada respecto de y es igual a cero. Entonces queda

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} \quad (12)$$

Por comodidad repetimos aquí la ecuación (1) .

$$\vec{D} = \vec{x} \hat{D} \cos(\omega t - kx) + \vec{y} \hat{D} \sen(\omega t - kx) \quad (1)$$

Según (1) tenemos

$$D_x = \hat{D} \cos(\omega t - kx) \quad (13)$$

Efectuamos la derivada indicada en (12)

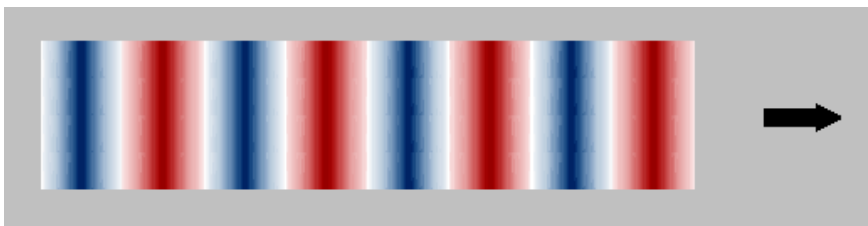
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \hat{D} k \sen(\omega t - kx) \quad (14)$$

- Vemos en (14) que la densidad de carga obedece a una función de onda.
- ¿ Implica eso movimiento de carga en la dirección de propagación?

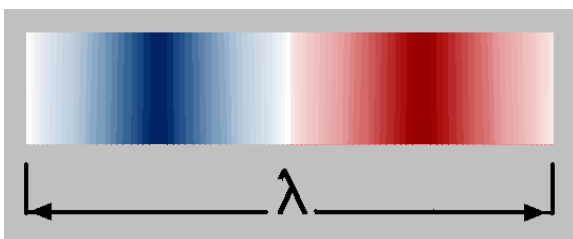
- La ecuación (14) no implica movimiento de carga de tipo alguno. Esa ecuación describe cómo funciona la polarización.
- En la región donde una onda se propaga, la polarización del vacío no es estática, es dinámica. Por eso la densidad de carga en cada punto del eje x varía periódicamente. En este caso senoidalmente. Cada punto del vacío es un lugar donde la densidad de carga cambia continuamente.
- ¿ Son algunos efectos de la polarización dinámica equivalentes a los efectos de las cargas móviles ?
- Sí, algunos efectos son equivalentes y con una analogía comprenderemos mejor.

(2-c) Analogía del anuncio luminoso

Pensemos en un anuncio luminoso de esos que vemos en las calles de la ciudad. Es un tablero que contiene muchísimas celdas pequeñas capaces de iluminarse. Un dispositivo electrónico programable se encarga de controlar la iluminación de cada celda. Eso permite formar imágenes móviles. Las imágenes se mueven sin que las celdas se muevan. Se puede programar una función de onda en dos colores, rojo para el semiciclo positivo y azul para el semiciclo negativo. Veremos en ese caso un tren de semiciclos rojos y azules alternados, que se mueven en la dirección de propagación. Los colores viajan. Las celdas no. Lo visto es muy parecido a ver pasar un tren de ferrocarril. Cada color parece un vagón que mantiene su forma y sus medidas geométricas mientras viaja. El color es muy intenso en el pico de la función y se atenúa gradualmente hacia los nodos. Algo parecido a la figura siguiente.



Si la intensidad de color representa el valor de la densidad de carga y el color representa el signo, entonces la figura da idea de cómo funciona la polarización en el vacío. No hay movimiento real de carga. Hay un tren de dipolos eléctricos virtuales viajando en la dirección de propagación. El segmento que cada dipolo abarca en el eje x mide una longitud de onda. Es decir cada dipolo abarca un ciclo espacial entero, como sugiere la figura siguiente.



Notemos algo. El sistema emisor inicia su funcionamiento emitiendo el primer ciclo. Cuando emite el segundo, desde cualquier punto del segundo ciclo la polarización del primero da resultante nula y la carga neta del primero es igual a cero. Eso es recíproco. Desde cualquier punto del primer ciclo la polarización del segundo ciclo entero da resultante nula y la carga neta es cero. Es decir cada ciclo entero es físicamente autónomo e independiente de los otros.

(2-d) Pausa para reflexionar

Estamos empezando a tomar conciencia de lo que implica la solución exponencial compleja de la ecuación de onda en el vacío.

- Implica la polarización del vacío con cargas ligadas inmóviles.
- Implica una distribución continua de carga en la región donde la onda está presente.
- Su dinámica equivale virtualmente a dipolos que viajan en la dirección de propagación.
- En ese viaje virtual, la geometría y las medidas de cada dipolo se mantienen constantes.

Una dosis de matemática tan pequeña como calcular la divergencia ha puesto en evidencia propiedades físicas profundas. La densidad de carga de la onda que analizamos no puede ser producida por partículas dispersas en la región de propagación. La ecuación (14) expresa una distribución continua, sea cual fuere la longitud de onda. Para longitudes de onda muy pequeñas, un conjunto de partículas dispersas no puede dar una distribución continua. Y para una longitud de onda menor que el tamaño de la partícula, no podría haber ni una sola partícula en la región abarcada por un semiciclo. Definitivamente se impone lo siguiente.

- La polarización dinámica del vacío corresponde a una densidad de carga físicamente continua.
- La continuidad no es un promedio estadístico. Es una realidad física.
- En cada punto de la región donde la onda está presente hay una porción infinitesimal de carga eléctrica.

¡ Error a la vista ! Se sabe que la carga está cuantizada y que solamente puede aparecer como un número entero de unidades e iguales a la carga del electrón. ¡ Una distribución de carga físicamente continua hasta nivel infinitesimal es absurda ! ¡ Ya podemos dejar esto ! Verdad, podemos. Con la misma vehemencia hubiésemos podido dejarlo desde la primera palabra. Me gustaría, antes de dejarlo, analizar en qué se basa la idea de que lo previo es erróneo.

- *Se sabe que la carga es una magnitud cuantizada. ¿ Qué omitimos al decir se sabe ?* Expresemos en forma completa el conocimiento disponible respecto a la carga eléctrica.
- Experimentos basados en la ionización de la materia han detectado partículas que no son neutras. En ese tipo de partículas, la carga neta es múltiplo de una unidad mínima igual a e .
- La información obtenida con materia ionizada, ¿ puede ser extrapolada al vacío ?
- Esa es la pregunta basada legítimamente en el conocimiento disponible.
- ¿ Qué sabemos al respecto ?
- ¿ Tiene o no fundamento una extrapolación como esa ?

Ahora sí. Podemos dejar esto. También podemos continuarlo, porque una pregunta legítima puede conducir a una respuesta legítima. Mi decisión fue continuar. Este documento muestra lo hallado en el camino.

(2-e) Verificar los rotores

La ecuación de onda electromagnética se deduce de las ecuaciones de Maxwell. La deducción se basa en los rotores de los campos \vec{E} y \vec{B} . Si la componente longitudinal alterase un rotor o ambos estaríamos en problemas. En caso de no alterarlos, sabremos que esa componente es coherente con las ecuaciones de Maxwell.

Rotor del campo magnético

En el vacío tenemos

$$\vec{B} = \mu_o \vec{H} \quad (15)$$

Por ser μ_o constante se cumple

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_o (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \quad (16)$$

$\vec{\nabla} \times \vec{B}$ no se altera si $\vec{\nabla} \times \vec{H}$ no se altera. Por comodidad analizaremos $\vec{\nabla} \times \vec{H}$.

En la dirección de propagación hay movimiento virtual de carga eléctrica. Es decir hay una corriente virtual. Decimos virtual porque basamos el concepto en la polarización del vacío. Un instrumento sensible a las corrientes detectará los mismos efectos que detecta en casos vulgares. En términos efectivos, la corriente virtual cumple las mismas leyes que todas las corrientes. Por el modo de llegar al concepto, difícilmente olvidaremos que la polarización dinámica produce una corriente virtual. Por eso propongo denominarla simplemente corriente y simbolizarla i . Esa corriente está presente en todos los puntos de la región donde la onda se propaga. Tenemos entonces una densidad de corriente \vec{j} , igual a la densidad de carga multiplicada por la velocidad de propagación \vec{v}_p .

$$\vec{v}_p \rightarrow \text{velocidad de propagación} \quad (17)$$

$$i \rightarrow \text{corriente} \quad (\text{polarización dinámica}) \quad (18)$$

$$\vec{j} \rightarrow \text{densidad de corriente} \quad (\text{polarización dinámica}) \quad (19)$$

$$\vec{j} = \vec{v}_p \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \quad (20)$$

En (20) reemplazamos $\vec{\nabla} \cdot \vec{D}$ como indica (14)

$$\vec{j} = \vec{v}_p \hat{D} k \text{ sen}(\omega t - kx) \quad (21)$$

Aplicamos $\vec{v}_p = \vec{x} C$

$$\vec{j} = \vec{x} C \hat{D} k \text{ sen}(\omega t - kx) \quad (22)$$

Aplicamos $C k = \omega$

$$\vec{j} = \vec{x} \omega \hat{D} \text{ sen}(\omega t - kx) \quad (23)$$

$\vec{\nabla} \times \vec{H}$ está dado por la ley de Ampere-Maxwell.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (24)$$

En (24) reemplazamos \vec{j} como indica (23)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{x} \omega \hat{D} \text{ sen}(\omega t - kx) + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (25)$$

\vec{D} está dado por la ecuación (1) , que por comodidad repetiremos aquí.

$$\vec{D} = \vec{x} \hat{D} \cos(\omega t - kx) + \vec{y} \hat{D} \sin(\omega t - kx) \quad (1)$$

Derivamos respecto del tiempo, como indica (25).

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\vec{x} \omega \hat{D} \sin(\omega t - kx) + \vec{y} \omega \hat{D} \cos(\omega t - kx) \quad (26)$$

En (25) reemplazamos $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ como indica (26)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{x} \omega \hat{D} \sin(\omega t - kx) - \vec{x} \omega \hat{D} \sin(\omega t - kx) + \vec{y} \omega \hat{D} \cos(\omega t - kx) \quad (27)$$

- En (27) hay dos densidades de corrientes longitudinales que tienen sentidos opuestos y módulos iguales. Obviamente la suma de ambas da cero, pero hay un detalle físico esencial, que comentaremos en otro apartado.

Ahora simplifiquemos y observemos como queda $\vec{\nabla} \times \vec{H}$.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{y} \omega \hat{D} \cos(\omega t - kx) \quad (28)$$

En (28) reemplazamos \hat{D} por $\varepsilon_o \hat{E}$, como indica (8) .

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{y} \omega \varepsilon_o \hat{E} \cos(\omega t - kx) \quad (29)$$

Notamos en (29) que el rotor del campo magnético es idéntico al resultado que se obtiene suponiendo que la componente longitudinal no existe. Es decir es el mismo rotor que se usa para deducir la ecuación de onda partiendo de las ecuaciones de Maxwell.

La componente longitudinal, por definición, no altera al campo eléctrico. Consecuentemente no altera a $\vec{\nabla} \times \vec{E}$.

Ambos rotores tienen la forma que conocemos tradicionalmente. Esto significa que la solución exponencial compleja es coherente con las ecuaciones de Maxwell.

CAPÍTULO 3 - Inductancia de la propagación

(3-a) Las dos densidades de corriente longitudinales

Por comodidad repitamos aquí la ecuación (27) .

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{x} \omega \hat{D} \sin(\omega t - kx) - \vec{x} \omega \hat{D} \sin(\omega t - kx) + \vec{y} \omega \hat{D} \cos(\omega t - kx) \quad (27)$$

Simolicemos \vec{j}_a al primer monomio de (27) , \vec{j}_b al segundo y \vec{j}_c al tercero.

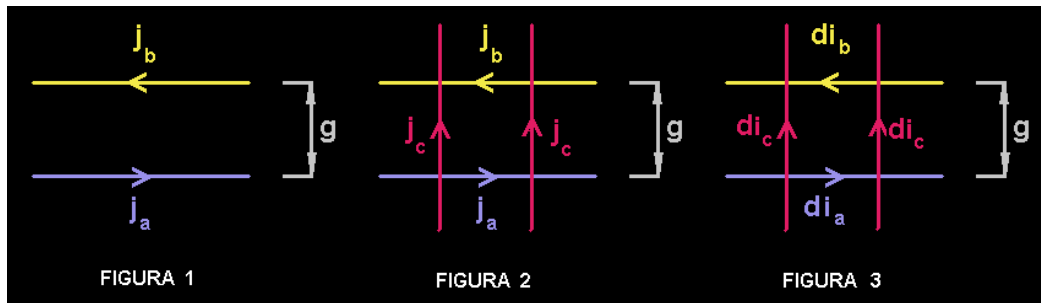
$$\vec{j}_a = \vec{x} \omega \hat{D} \sin(\omega t - kx) \quad (30)$$

$$\vec{j}_b = -\vec{x} \omega \hat{D} \sin(\omega t - kx) \quad (31)$$

$$\vec{j}_c = \vec{y} \omega \hat{D} \cos(\omega t - kx) \quad (32)$$

\vec{j}_a y \vec{j}_b son dos densidades de corriente longitudinales, que tienen sentidos opuestos y valores absolutos iguales. Son simétricas. ¡ Entonces podemos ignorarlas, porque la suma vectorial da cero ! Un momento. ¿ Ignorar algo que aparece explícitamente en la ley de Ampere - Maxwell ? ¡ Sí ! ¡ Aunque quisiéramos hacer algo con ese par simétrico no podemos, porque sobre cualquier recta longitudinal la suma vectorial es nula ! ¡ Una recta es una recta ! ¡ No hay escapatoria !

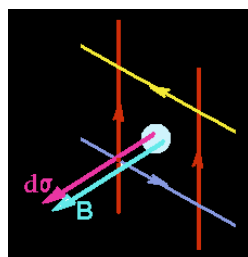
- Esa protesta da la clave. *Una recta es una recta...*
- En modo estático, donde todo está dado y finalizado de antemano, es verdad. Una recta es una sola recta.
- En modo analítico, donde hay términos algebraicos y geométricos que son llevados hasta el límite infinitesimal, una recta es tantas rectas como necesitemos.
- En el caso que tratamos, necesitamos solamente dos rectas paralelas, una para j_a y otra para j_b .
- Comenzamos con dos rectas paralelas separadas por una distancia g , hacemos el planteo necesario y después pasamos al límite para $g \rightarrow 0$, que convierte a las dos rectas en la misma recta (FIGURA 1) .



En el caso de j_c también podemos comenzar con dos rectas paralelas transversales, separadas por una distancia igual a g . Se puede suponer la misma distancia en ambos casos y ahorramos nomenclatura. En dirección transversal hay una sola densidad de corriente y en ambas rectas tendrá el mismo sentido. Entonces tendremos un cuadrado con densidades de corriente en sus lados (FIGURA 2) .

Físicamente podemos y debemos pensar que una recta equivale a una varilla cuya sección transversal es infinitesimal. No interesa la forma de la sección y podemos imaginarla como mejor convenga, sección cuadrada, circular, rectangular, elíptica, lo que sea, porque en el límite infinitesimal todas las formas terminan dando una sección infinitesimal que, obviamente, tiene un área infinitesimal $d\sigma$.

Una densidad de corriente finita que atraviesa un área infinitesimal da una corriente infinitesimal . En los lados longitudinales del cuadrado tenemos dos corrientes infinitesimales de sentidos contrarios. En los lados transversales dos del mismo sentido (FIGURA 3) . Representemos en perspectiva la dinámica infinitesimal.



(\vec{B} y $\vec{d\sigma}$ pertenecen al mismo punto)

(3-b) Significado físico del (27) y cálculo de la inductancia

El campo magnético es perpendicular a la superficie del cuadrado representado en la figura 3. Es decir el vector de superficie y el campo magnético son paralelos. En el límite para $g \rightarrow 0$ tenemos un cuadrado infinitesimal atravesado normalmente por el campo magnético.

Entonces el flujo magnético infinitesimal $d\phi_B$ es

$$d\phi_B = \vec{B} \cdot \vec{d\sigma} \quad (33)$$

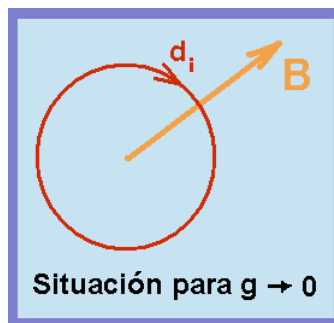
$d\sigma \rightarrow$ área infinitesimal

Por ser \vec{B} y $\vec{d\sigma}$ paralelos queda

$$d\phi_B = B d\sigma \quad (34)$$

$B \rightarrow$ módulo de \vec{B}

- El conjunto de corrientes infinitesimales representado en la figura 3 es la causa del campo magnético dentro del cuadrado infinitesimal.
- En el límite para $g \rightarrow 0$, la distancia entre el centro del cuadrado y uno de los lados es infinitesimal.
- En un punto situado a distancia infinitesimal de una corriente infinitesimal, la inducción magnética debida a esa corriente es finita.
- Cada lado del cuadrado produce, con su corriente infinitesimal, una inducción finita en el centro del cuadrado.
- Las inducciones producidas por las corrientes transversales di_c son iguales y opuestas. Por eso ese par de corrientes infinitesimales no contribuye a la inducción en términos netos.
- Las inducciones producidas por di_a y di_b son iguales y del mismo sentido. Entonces el par longitudinal es responsable de la inducción neta.
- En el límite para $g \rightarrow 0$, el camino infinitesimal de di_a se continúa en el camino de di_b y viceversa. Es decir ese par de corrientes infinitesimales equivale a una espira de radio infinitesimal recorrida por una corriente infinitesimal $di = di_a = di_b$. Es este el significado físico de la ecuación (27), cuya discusión fue iniciada previamente.



Escribamos la definición de inductancia.

$$\mathcal{L} = \frac{d\phi_B}{di} \quad (35)$$

En el contexto del cuadrado infinitesimal, la derivada indicada en (35) es igual al cociente

incremental entre el flujo y la corriente. Entonces tenemos un numerador y un denominador que son términos individuales. En (35) reemplazamos $d\phi_B$ como indica (34) .

$$\mathcal{L} = \frac{B d\sigma}{di} \quad (36)$$

En módulos tenemos

$$j_a = j_b = j \quad (37)$$

En (36) el denominador di es el flujo de \vec{j} a través de una superficie infinitesimal, cuya área es $d\sigma$ (todas las áreas infinitesimales miden lo mismo, es decir, son infinitésimos del mismo tipo y del mismo orden).

$$di = j d\sigma \quad (38)$$

En (36) reemplazamos di como indica (38) . Después simplificamos.

$$\mathcal{L} = \frac{B}{j} \quad (39)$$

En (37) indicamos que j , j_a y j_b son módulos iguales, es decir, el mismo módulo. Miremos por ejemplo la ecuación (30) que expresa \vec{j}_a , para tomar de ella el módulo.

$$\vec{j}_a = \vec{x} \omega \hat{D} \text{sen}(\omega t - kx) \quad (30)$$

En módulo tenemos

$$j = \omega \hat{D} \text{sen}(\omega t - kx) \quad (40)$$

En (39) reemplazamos j como indica (40) .

$$\mathcal{L} = \frac{B}{\omega \hat{D} \text{sen}(\omega t - kx)} \quad (41)$$

Repitamos aquí la ecuación (8) .

$$\hat{D} = \varepsilon_o \hat{E} \quad (8)$$

En (41) reemplazamos \hat{D} como indica (8) .

$$\mathcal{L} = \frac{B}{\omega \varepsilon_o \hat{E} \text{sen}(\omega t - kx)} \quad (42)$$

En el tipo de onda que analizamos el módulo E campo eléctrico está dado por la expresión siguiente.

$$E = \hat{E} \text{sen}(\omega t - kx) \quad (43)$$

En (42) reemplazamos según lo indicado en (43) .

$$\mathcal{L} = \frac{B}{\omega \varepsilon_o E} \quad (44)$$

En el vacío tenemos

$$B = \mu_o H \quad (45)$$

En (44) reemplazamos B como indica (45).

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_o H}{\omega \varepsilon_o E} \quad (46)$$

En el vacío tenemos

$$\omega = k C \quad (47)$$

En (46) reemplazamos ω como indica (47) .

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_o H}{k C \varepsilon_o E} \quad (48)$$

La definición de k es

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (49)$$

En (48) reemplazamos k como indica (49) y ordenamos.

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_o \lambda}{2\pi} \frac{H}{\varepsilon_o C E} \quad (50)$$

En (50) el segundo cociente es la resistencia de radiación R_0 dividida por sí misma. Veamos por qué.

$$R_0 = \frac{1}{\varepsilon_o C} = \frac{E}{H} \quad (51)$$

Entonces,

$$\frac{1}{\varepsilon_o C} = \frac{E}{H}$$

Pasaje de términos.

$$\frac{H}{\varepsilon_o C E} = 1 \quad (52)$$

En (50) aplicamos lo expresado en (52) .

$$\mathcal{L} = \mu_o \frac{\lambda}{2\pi} \quad (53)$$

(3-c) Anticipar el final de la película

Estoy escribiendo esto con un plan previo. En el plan original puse la cláusula de no anticipar resultados, para obtenerlos paso a paso y permitir que los resultados hablen por sí mismos. Pero soy lector de muchos documentos y el esfuerzo me desalienta cuando no intuyo el objetivo. Por eso asumiré el riesgo de la anticipación.

Si a Usted le desagrada que le relaten el final de una película antes de verla, entonces puede omitir esta sección. Todo lo que en ella se menciona es tratado paso a paso en el resto del documento. Después de este párrafo está descripto el final. Las secciones que siguen a esta contienen lo necesario para justificarlo y comprenderlo.

¿ Para qué sirve conocer la inductancia de la propagación ? Ignorándola no podremos llegar hasta lo que el título de este documento sugiere. ¿ Qué imaginamos leyendo el título, James

Clerk Maxwell *conocimiento prohibido* ? Tal vez nada, porque da la sensación de una anécdota histórica similar a otras. Pero Planck declaró que se había esforzado mucho para deducir de las ecuaciones de Maxwell las propiedades discretas. En las aulas nos dicen que eso es imposible. ¿ Imposible ? ¿ Entonces Planck desperdició ingenuamente su esfuerzo ? Para la máquina que empaca 20 latas de aceite rodeándolas con una lámina plástica, cada lata es un ente discreto de forma cilíndrica. Dentro de cada lata hay algo que la teoría de fluidos, con funciones continuas, permite formular muy bien.

Hemos analizado la solución exponencial compleja de la onda de desplazamiento eléctrico en el vacío. Y hemos deducido algunas propiedades omitidas en la enseñanza pública como la densidad de carga, la autonomía física de cada ciclo entero, el conjunto de densidades de corriente y su significado físico, la inductancia de la propagación. Para quien ha transitado solamente por las aulas públicas, todo eso es novedoso y tal vez sorprendente. Aunque no avanzásemos más, esos resultados contienen lo suficiente para chocar contra un muro de hábitos rígidos. El choque se refuerza, porque también obtendremos lo siguiente.

- Una onda plana monodimensional en el vacío es un conjunto de cilindros autónomos, como las latas de aceite mencionadas. Y como en ellas, el volumen cilíndrico está ocupado por algo continuo, que es el campo electromagnético. El radio del cilindro es $\frac{\lambda}{4\pi}$ y la longitud del cilindro es igual a la longitud de onda λ , es decir un ciclo espacial entero. Cada semiciclo abarca una mitad del cilindro.
- Por la densidad de carga existente, cada mitad contiene una carga finita del signo correspondiente. La carga Q_o del semiciclo no depende de variable alguna. Es una constante universal.
- Cada cilindro es un ente autónomo constituido por dos cargas enfrentadas, estabilizadas por la propiedad dieléctrica del vacío expresada en ϵ_o . Eso, en términos físicos, es un capacitor. Podemos agregar el adjetivo *virtual* si tranquiliza nuestras conciencias, pero es un capacitor que cumple todas las leyes correspondientes. Su capacidad es

$$\mathcal{C} = \epsilon_o \frac{\lambda}{2\pi}$$

- \mathcal{L} y \mathcal{C} forman un circuito resonante de tipo paralelo, cuya frecuencia de resonancia es igual a la frecuencia de la onda. La frecuencia de resonancia es la frecuencia de funcionamiento natural del sistema resonante, denominada *eigenfrecuencia*. Cada cilindro es un sistema resonante autónomo. Esto explica, por ejemplo, por qué cuando la luz pasa de un medio a otro cambia la velocidad de propagación sin cambiar la frecuencia. El sistema resonante LC la mantiene constante.
- La energía W_E del campo eléctrico es formulable como la energía del capacitor formado por ambos semiciclos del cilindro, cuya capacidad es \mathcal{C} :

$$W_E = \frac{Q_o^2}{2\mathcal{C}} \quad \text{que reemplazando términos por sus expresiones da :}$$

$$W_E = \left[\frac{\pi Q_o^2}{\epsilon_o C} \right] \nu \quad (\nu \text{ es la frecuencia de la onda}). \text{ El corchete es una constante}$$

universal porque dentro hay solamente constantes universales. Entonces la solución exponencial compleja de la onda de desplazamiento determina, para el campo eléctrico del cilindro autónomo, una energía que depende solamente de la frecuencia ν y es

directamente proporcional a ella. En la onda plana la energía del campo magnético y la energía del campo eléctrico son iguales. Entonces la energía total del cilindro es :

$W = \left[\frac{2\pi Q_o^2}{\epsilon_o C} \right] \nu$, en acuerdo formal con la ley de Planck. Cuando avancemos comprobaremos que el acuerdo es también cuantitativo.

- La espira infinitesimal correspondiente a $g \rightarrow 0$ equivale a una carga infinitesimal giratoria en el punto donde está ubicado \vec{B} . La energía del campo magnético es de tipo cinético. Entonces la energía del campo magnético en el entorno de un punto es energía cinética rotacional, porque \vec{B} es producido por una carga infinitesimal giratoria. El momento angular infinitesimal es un pseudovector transversal perfectamente calculable. Tenemos en cada punto del volumen cilíndrico un giróscopo infinitesimal. Existe una densidad de momento angular en el volumen cilíndrico, es decir, hay una cantidad de movimiento angular finita distribuida en el volumen. Integrando calculamos ese valor finito, cuya expresión es :

$$\left[\frac{Q_o^2}{\epsilon_o C} \right] , \text{ igual a } \frac{W}{\omega} \text{ (spin).}$$

- Ese cilindro es análogo a una nave que viaja inercialmente en el vacío y tiene dentro una multitud de giróscopos pequeños, con todos los ejes de rotación perpendiculares a la velocidad de la nave. Alguien podría sentir curiosidad por la rectitud perfecta de la trayectoria, sin saber que los giróscopos logran eso. La carga puntual giratoria, presente en cada punto del volumen cilíndrico, determina la propagación rectilínea en el vacío. La relatividad especial asume la propagación rectilínea como postulado. Ahora sabemos que no necesitamos postularla, pues podemos deducirla de las ecuaciones de Maxwell.
- El cilindro tiene todas las propiedades del fotón y así lo denominaremos en el final del documento.
- La inductancia y la capacitancia son importantes, pues facilitan el cálculo de valores totales en casos más complicados que la propagación rectilínea, por ejemplo, en la colisión frontal mutua de dos fotones para formar un electrón y un positrón. El planteo de valores totales permite determinar el cociente entre Q_o y la carga e del electrón. Es un cálculo puramente teórico, que se hace sin intervención de datos empíricos. Ese cociente es una propiedad intrínseca del sistema de ecuaciones de Maxwell.

El cociente de dos magnitudes del mismo tipo, en este caso el cociente de dos cargas, es adimensional. Calcularlo sin intervención de datos empíricos es una señal de coherencia y consistencia de la teoría maxwelliana. La expresión del cociente es :

$$\frac{e}{Q_o} = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$$

- La constante α de acoplamiento es función de ese cociente solamente:

$$\alpha = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e}{Q_o} \right)^2$$

La fórmula muestra que α es un número irracional.

Conociendo el cociente calculamos α y obtenemos :

$$\alpha = 0,007295112456675778672162576823729\dots$$

$$\frac{1}{\alpha} = 137,0780787738093174013763321834\dots$$

El valor teórico difiere levemente del valor empírico aceptado. Eso implica dos posibilidades. Una es que el cálculo de valores totales basado en \mathcal{L} y \mathcal{C} sea la simplificación de otro procedimiento más complicado y más adecuado. La otra posibilidad es que el cálculo de valores totales esté bien y sea necesaria una mejora de los métodos empíricos.

- Hay más propiedades que el mismo esquema permite analizar, explicar y formular, proveyendo en todos los casos el significado físico.

Ciertamente, los resultados anticipados chocan contra la costumbre adquirida en las aulas. Por eso en el plan original estaba la cláusula de no anticiparlos. Espero que el plan modificado sirva de estímulo para quienes, como yo, se desaniman leyendo algo sin saber de antemano qué obtendrán con el esfuerzo. ¿Cuál es la tarea restante? Es mostrar las deducciones omitidas en la anticipación, apreciar el significado físico y efectuar los cálculos respectivos.

CAPÍTULO 4 - Autocontención

(4-a) ¿Qué significa eso?

Esta vez cumplamos la cláusula y no anticipemos. Recorramos paso a paso el planteo, que no tiene complicaciones y en el final premia nuestra dedicación. Hemos calculado la inductancia de la propagación. Por eso tenemos a disposición dos modos de calcular la energía del campo magnético. Uno es el modo aprendido en las aulas, que por brevedad denominaremos planteo densidad. El otro se basa en la inductancia y lo denominaremos planteo inductancia.

: Modos de calcular la energía del campo magnético :	
Planteo densidad	Planteo inductancia
Plantear la densidad de energía e integrar en el volumen	Plantear la diferencial de energía e integrar en el tiempo



Ambos modos calculan la misma energía. Igualando los resultados hallaremos una propiedad fundamental.

(4-b) Planteo densidad

La densidad de energía U_B del campo magnético es

$$U_B = \frac{B^2}{2\mu} \tag{54}$$

La onda que nos interesa es plana y se propaga en el vacío.

$$\mu_{(\text{vacío})} = \mu_0 \quad (55)$$

Aplicamos a (54) lo indicado en (55) .

$$U_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (56)$$

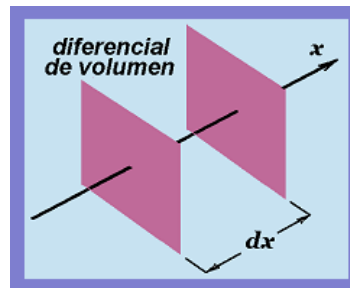
La solución exponencial compleja no altera los rotores habituales. Entonces B tiene la forma habitual.

$$B = \hat{B} \text{ sen}(\omega t - kx) \quad (57)$$

Aplicamos a (56) lo indicado en (57) y ordenamos.

$$U_B = \frac{\hat{B}^2}{2\mu_0} \text{ sen}^2(\omega t - kx) \quad (58)$$

Para integrar necesitamos definir la diferencial de volumen, es decir, un volumen infinitesimal. La forma más sencilla de hacerlo es definir dos superficies idénticas, ambas perpendiculares a la dirección de propagación, separadas por una distancia infinitesimal dx .



Los dos rectángulos dibujados en perspectiva solamente dan idea de los planos que contienen al par de superficies asociado con dV_x . De esas superficies ignoramos todo, menos las condiciones obvias de ser ambas perpendiculares a la dirección de propagación y ser constante el área S de cada una en toda la longitud del ciclo. Expresemos la diferencial de volumen.

$$dV_x = S dx \quad (59)$$

En el vacío la velocidad de propagación C es constante. Entonces tenemos

$$dx = C dt \quad (60)$$

En (59) aplicamos lo indicado en (60).

$$dV_x = S C dt \quad (61)$$

En cada intervalo dt hay una energía dW_B contenida entre ambas superficies, cuya expresión es

$$dW_B = U_B dV_x \quad \textit{infinitésimo de energía del campo magnético} \quad (62)$$

En (62) aplicamos lo indicado en (61) y ordenamos

$$dW_B = S C U_B dt \quad (63)$$

En (63) aplicamos lo indicado en (58) y ordenamos

$$dW_B = \frac{\hat{B}^2}{2 \mu_o} S C \text{ sen}^2(\omega t - kx) dt \quad (64)$$

Para calcular la energía del campo magnético en un ciclo entero integramos dW_B entre $t = 0$ y $t = T$.

$$W_B = \int_{t=0}^{t=T} \frac{\hat{B}^2}{2 \mu_o} S C \text{ sen}^2(\omega t - kx) dt \quad (65)$$

W_B energía del campo magnético en un ciclo entero

Ponemos las constantes fuera de la integral

$$W_B = \frac{\hat{B}^2}{2 \mu_o} S C \int_{t=0}^{t=T} \text{ sen}^2(\omega t - kx) dt \quad (66)$$

El cálculo de la integral está en el APÉNDICE 1. Aquí simplemente pondremos el resultado.

$$\int_{t=0}^{t=T} \text{ sen}^2(\omega t - kx) dt = \frac{\pi}{\omega} \quad (67)$$

T período de la onda

La referencia para el APÉNDICE 1 es el retrato de Katherine Mary Dewar, esposa de Maxwell.



En (66) aplicamos lo indicado en (67) y ordenamos

$$W_B = \frac{\pi S C \hat{B}^2}{2 \omega \mu_o} \quad (68)$$

(4-c) Planteo inductancia

El capítulo 3 nos ha enseñado que la onda posee inductancia. Esa propiedad es independiente de la presencia y de la ausencia de materia. En todos los casos la inducción y la inductancia

cumplen las mismas leyes. Lo aprendido en el caso de un inductor material es válido en la onda. Son las leyes que se aprenden en electrotecnia para régimen variable. Entonces tenemos lo siguiente.

$$dW_B = \mathcal{L} i di \quad (69)$$

La densidad de corriente es la densidad de carga $\vec{\nabla} \cdot \vec{D}$ multiplicada por la velocidad C de la onda.

$$\vec{j} = C \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \quad (70)$$

La corriente i es el flujo de \vec{j} a través de la superficie de referencia, que es perpendicular a \vec{j} . Entonces tenemos

$$i = S C \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \quad (71)$$

Repitamos aquí la ecuación (14)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \hat{D} k \text{sen}(\omega t - kx) \quad (14)$$

Aplicamos a (71) lo indicado en (14)

$$i = S C \hat{D} k \text{sen}(\omega t - kx) \quad (72)$$

Escribamos la definición matemática de di es

$$di = \frac{\partial i}{\partial t} dt + \frac{\partial i}{\partial x} dx$$

La definición física de corriente toma en cuenta la carga que atraviesa una superficie fija en un tiempo dado. Superficie fija significa x constante. Entonces $\frac{\partial i}{\partial x} dx = 0$ y queda

$$di = \frac{\partial i}{\partial t} dt \quad (73)$$

Derivamos ambos miembros de (72) respecto de t

$$\frac{\partial i}{\partial t} = S C \hat{D} k \cos(\omega t - kx) \omega \quad (74)$$

Aplicamos a (73) lo indicado en (74)

$$di = S C \hat{D} k \cos(\omega t - kx) \omega dt \quad (75)$$

Por comodidad repitamos aquí (69) y (72)

$$dW_B = \mathcal{L} i di \quad (69)$$

$$i = S C \hat{D} k \text{sen}(\omega t - kx) \quad (72)$$

En (69) reemplazamos i como indica (72) y di como indica (75)

$$dW_B = \mathcal{L} S C \hat{D} k \text{sen}(\omega t - kx) S C \hat{D} k \cos(\omega t - kx) \omega dt$$

Agrupamos

$$dW_B = \mathcal{L} S^2 C^2 \hat{D}^2 k^2 \text{sen}(\omega t - kx) \cos(\omega t - kx) \omega dt \quad (76)$$

Integramos para calcular la energía W_B del campo magnético en el ciclo entero.

$$W_B = \int_{t=0}^{t=T} \mathcal{L} S^2 C^2 \hat{D}^2 k^2 \text{sen}(\omega t - xk) \cos(\omega t - kx) \omega dt$$

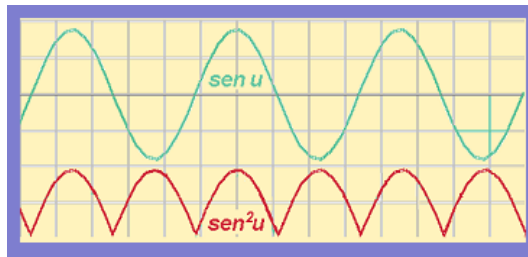
Ponemos las constantes fuera de la integral.

$$W_B = \mathcal{L} S^2 C^2 \hat{D}^2 k^2 \int_{t=0}^{t=T} \text{sen}(\omega t - kx) \cos(\omega t - kx) \omega dt \quad (77)$$

La integral es muy conocida y directamente pondremos el resultado.

$$\int \text{sen}(\omega t - kx) \cos(\omega t - kx) \omega dt = \frac{1}{2\omega} \text{sen}^2(\omega t - kx) + cte \quad (78)$$

El cuadrado del seno tiene signo positivo en todo el recorrido, como muestra la gráfica de la función.



El área bajo la curva de $\text{sen}^2 u$ no es cero. Entonces la integral definida para un ciclo entero no puede dar cero. Eso significa que debemos hacer 4 integrales, una para cada cuarto de ciclo, pues el intento de abarcar todo el ciclo en una integral sola da resultado cero.

$$\int_{t=0}^{t=\frac{T}{4}} \text{sen}(\omega t - kx) \cos(\omega t - kx) \omega dt = \frac{1}{2} \quad (79)$$

Cada una de las otras 3 integrales también da $\frac{1}{2}$. Entonces tenemos

$$\int_{t=0}^{t=T} \text{sen}(\omega t - kx) \cos(\omega t - kx) \omega dt = 2 \quad (80)$$

Aplicamos en (77) el resultado indicado en (80).

$$W_B = 2 \mathcal{L} S^2 C^2 \hat{D}^2 k^2 \quad (81)$$

(4-d) Igualar los planteos

Repitamos aquí la expresión de W_B obtenida en el planteo densidad.

$$W_B = \frac{\pi S C \hat{B}^2}{2 \omega \mu_o} \quad (68)$$

Igualamos el miembro derecho de (81) con el miembro derecho de (68) .

$$2 \mathcal{L} S^2 C^2 \hat{D}^2 k^2 = \frac{\pi S C \hat{B}^2}{2 \omega \mu_o}$$

Simplificamos respecto a $S C$.

$$2 \mathcal{L} S C \hat{D}^2 k^2 = \frac{\pi \hat{B}^2}{2 \omega \mu_o} \quad (82)$$

Las densidades de energía del campo eléctrico y del campo magnético en el vacío son iguales. Entonces tenemos

$$\frac{D^2}{2 \varepsilon_o} = \frac{B^2}{2 \mu_o}$$

Despejamos.

$$D^2 = \frac{\varepsilon_o}{\mu_o} B^2$$

La misma relación se cumple para los valores picos.

$$\hat{D}^2 = \frac{\varepsilon_o}{\mu_o} \hat{B}^2 \quad (83)$$

Aplicamos a (82) lo indicado en (83) .

$$2 \mathcal{L} S C \frac{\varepsilon_o}{\mu_o} \hat{B}^2 k^2 = \frac{\pi \hat{B}^2}{2 \omega \mu_o}$$

Simplificamos respecto de \hat{B}^2 y de μ_o .

$$2 \mathcal{L} S C \varepsilon_o k^2 = \frac{\pi}{2 \omega} \quad (84)$$

Por comodidad repitamos aquí la ecuación (53) .

$$\mathcal{L} = \mu_o \frac{\lambda}{2\pi} \quad (53)$$

En (84) reemplazamos \mathcal{L} como indica (53) .

$$2 \mu_o \frac{\lambda}{2\pi} S C \varepsilon_o k^2 = \frac{\pi}{2 \omega} \quad (85)$$

Recordemos la definición de k .

$$k = \frac{2 \pi}{\lambda} \quad (86)$$

Aplicamos a (85) lo indicado en (86) .

$$2 \mu_o \frac{\lambda}{2\pi} S C \varepsilon_o \left(\frac{2 \pi}{\lambda} \right)^2 = \frac{\pi}{2 \omega}$$

Simplificamos.

$$2 \mu_o S C \varepsilon_o \frac{2}{\lambda} = \frac{1}{2 \omega}$$

Ordenamos

$$2 \mu_o \varepsilon_o C S \frac{2}{\lambda} = \frac{1}{2 \omega} \quad (87)$$

Recordemos la fórmula de la velocidad C de propagación en el vacío.

$$C = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}}$$

Entonces

$$\mu_o \varepsilon_o = \frac{1}{C^2} \quad (88)$$

Aplicamos a (87) lo indicado en (88) .

$$2 \frac{1}{C^2} C S \frac{2}{\lambda} = \frac{1}{2 \omega}$$

Simplificamos

$$2 \frac{1}{C} S \frac{2}{\lambda} = \frac{1}{2 \omega}$$

Despejamos S .

$$S = \frac{C \lambda}{8 \omega} \quad (89)$$

Recordamos la definición de ω .

$$\omega = \frac{2 \pi}{T} \quad (90)$$

Aplicamos a (89) lo imndicado en (90) .

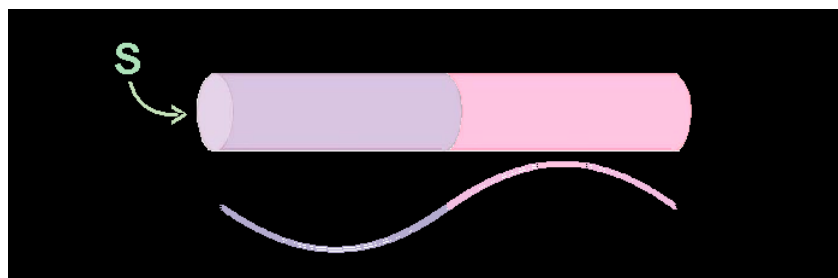
$$S = \frac{C T \lambda}{16 \pi}$$

Recordamos $C T = \lambda$.

$$S = \frac{\lambda^2}{16 \pi} \quad (91)$$

¿ Es coherente la ecuación (91) con la simetría cilíndrica ?

¿ Expresa con sencillez el área de un círculo ?



Recordemos la fórmula de la superficie del círculo.

$$S_{(circulo)} = \pi r^2$$

Si la ecuación (91) corresponde a un círculo tenemos

$$S_{(circulo)} = S$$

Es decir

$$\pi r^2 = \frac{\lambda^2}{16\pi}$$

Depejamos r

$$r = \frac{\lambda}{4\pi} \quad (92)$$

Notamos que (92) expresa el radio en forma puramente aritmética. Es el cuarto de longitud de onda dividido por la constante π de la simetría circular. En el inicio del documento hemos notado que la simetría cilíndrica es físicamente necesaria. El cilindro es la forma más simple compatible con la onda de desplazamiento eléctrico en el vacío.

(4-3) Repasemos lo hecho hasta aquí

1

No hubo innovación teórica. Simplemente utilizamos la electrodinámica de Maxwell en su forma original, es decir, con el desplazamiento eléctrico incluido.

2

Hallamos la densidad de carga correspondiente al desplazamiento. Esa densidad viaja con la velocidad de la onda y produce una densidad de corriente, que coopera con la densidad de corriente de desplazamiento. La cooperación da como resultado en cada punto una espira de corriente infinitesimal, productora del campo magnético. Ese fenómeno determina la inductancia de la propagación y es un giróscopo infinitesimal. El conjunto de todos los giróscopos infinitesimales mantiene recta la trayectoria en el vacío.

3

Conociendo la inductancia tenemos dos modos de calcular la energía del campo magnético. La igualdad de ambas expresiones determina el área de la sección transversal de la configuración. Es el área de un círculo con $r = \frac{\lambda}{4\pi}$, coherente con la simetría cilíndrica mencionada en el inicio del documento.

4

Eso significa que las ecuaciones de Maxwell especifican la forma y las medidas de una configuración autónoma, que mantiene sus propiedades mientras viaja en el vacío.

5

Dentro de la configuración autónoma todas las variables son continuas. Fuera de ella el vacío no está polarizado, es decir, la densidad de carga es igual a cero en todos los puntos del vacío que no pertenecen a una de esas configuraciones autónomas.

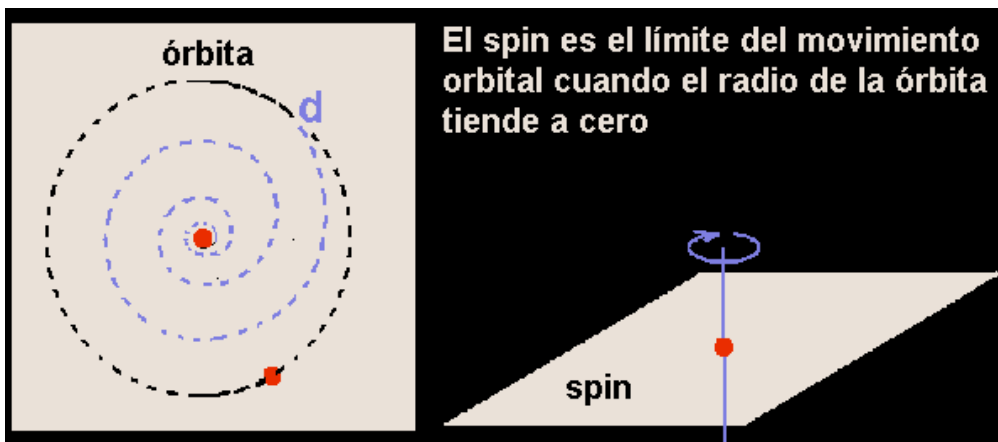
Las propiedades de la configuración autónoma invitan a pensar en el fotón. No hemos llegado aún a resultados que justifiquen ese nombre. Pero la frase *configuración autónoma* es demasiado tediosa cuando necesitamos repetirla. Hagamos una contracción con las tres primeras letras de cada palabra, es decir, conaut.

conaut \Rightarrow configuración autónoma

Usaremos la contracción conaut y reservaremos la palabra fotón para una instancia posterior.

CAPÍTULO 5 - Rotación infinitesimal

(5-a) Carga puntual giratoria

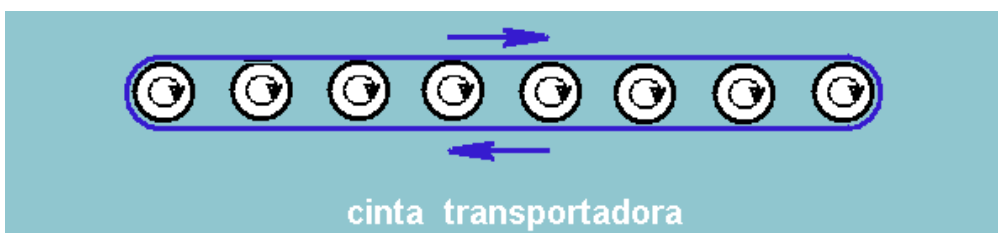


La figura representa una esferita roja que inicialmente describía una órbita en forma de circunferencia. En algún momento, desde el punto d , inicia una disminución progresiva del radio de la órbita hasta llegar a un radio infinitesimal. Si el plano de la órbita fuese el piso, la parte izquierda de la figura sería la vista desde arriba, como vería una persona erguida. La parte derecha muestra una vista lateral de la esferita en la condición límite, cuando el radio de la órbita es infinitesimal.

¿ A qué equivale una órbita de radio infinitesimal ? Equivale al giro de la esferita respecto a un eje que pasa por su centro. Un ejemplo vulgar es el giro de una ruleta de casino. Rotación pura, sin traslación orbital.

(5-b) El giro de la carga puntual

En cada punto del volumen de la conaut hay una carga infinitesimal dQ . El rotor del campo magnético expresado en (27) muestra dos densidades de corriente simétricas en la dirección de propagación. ¿ Qué significa esa simetría físicamente ?



Se puede construir una cinta transportadora utilizando rodillos. Cada rodillo gira y es coherente con ambos sectores de cinta, uno que va hacia derecha por arriba y otro que va hacia izquierda por abajo. Llevemos el modelo al límite, es decir, el radio de cada rodillo y la separación entre rodillos son infinitesimales. En ese límite ambos sectores de cinta ocupan la misma recta. Reaparece lo expuesto en el cálculo de la inductancia cuando comprendimos que, en términos de límite, una recta es todas las rectas que necesitemos.

Reemplacemos los rodillos infinitesimales por cargas puntuales giratorias. ¿ Qué significa *carga puntual* en este contexto ? Cuando por primera vez necesité responder esa pregunta, opté por la idea más vulgar. Es decir una esfera de radio infinitesimal dr cuya carga infinitesimal es dQ ¿ Y qué leyes cumplen los objetos infinitesimales ? Si las leyes electromagnéticas son independientes del tamaño del sistema, entonces valen las mismas leyes que aplicamos en casos macroscópicos. Esto no es solamente un artificio de cálculo. Es un rasgo fundamental del campo electromagnético. Recuadremos eso pues tiene dos consecuencias. Posibilita nuestra tarea y define el enfoque epistemológico.

Si las leyes electromagnéticas son independientes del tamaño del sistema, entonces los sistemas macroscópicos y sus análogos infinitesimales cumplen las mismas leyes.

Si la cinta no estuviese y los rodillos tuviesen carga eléctrica, producirían el mismo efecto que un par de corrientes simétricas, análogas a las corrientes longitudinales de la propagación. En el espacio comprendido entre dos rodillos las corrientes de ambos se oponen mutuamente y el efecto neto es nulo. Sobre las rectas donde estaba la cinta, las corrientes rotativas de todos los rodillos tienen el mismo sentido y no se anula el efecto neto. La forma geométrica no interesa cuando el tamaño es infinitesimal. En vez de pensar en rodillos podemos pensar en cargas puntuales giratorias. Esas cargas producen el mismo efecto que el par de corrientes longitudinales de la propagación.

(5-c) ¿ En qué forma el giro puntual produce el campo magnético ?

El modelo adoptado para la carga puntual es una esfera de radio infinitesimal dr cuya carga es dQ ¿ Cómo está distribuida la carga, sobre la superficie o llenando el volumen de la esfera infinitesimal ? Cuando nada la obliga a llenar el volumen, la carga se aloja en la superficie para minimizar la energía. Para obligarla se requiere una estructura con cargas de ambos signos, compensando las repulsiones con atracciones. La carga infinitesimal que nos interesa es de un signo exclusivamente. Por eso la condición válida es la distribución superficial. ¡ Pero entonces en vez de una densidad de carga continua tendremos burbujas ! Reflexionemos. En el límite para $r \rightarrow 0$ la burbuja no existe, porque todo se reduce a un punto. Entonces la distribución de carga es continua e idéntica a $\nabla \cdot \vec{D}$.

El campo eléctrico de una esfera macroscópica de radio r con carga superficial Q tiene una energía W_E que se expresa en la forma siguiente.

$$W_e = \frac{Q^2}{8 \pi \epsilon_o r}$$

Para su análoga infinitesimal tenemos

$$dW_E = \frac{(dQ)^2}{8 \pi \epsilon_o dr} \quad (93)$$

El numerador es un infinitésimo de segundo orden y el denominador de primer orden. El cociente incremental dW_E es entonces un infinitésimo de primer orden, como corresponde.

¿ Qué forma tiene y cuánto vale el volumen donde se aloja dW_E ? Recordemos aquello que recuadramos. Por ser las mismas leyes, podemos comparar el caso infinitesimal con el caso macroscópico. En términos macroscópicos tendríamos un cascarón esférico hueco cuyo espesor, medido en la dirección del radio, es infinitesimal. La energía del campo eléctrico se calcula integrando la densidad de energía desde el radio del cascarón hasta infinito. Lo mismo corresponde en el caso infinitesimal. Cuando la carga es finita, el módulo del campo eléctrico es finito a distancias finitas alrededor de la esfera. Con una carga infinitesimal, a distancia finitas ese módulo es un infinitésimo de segundo orden. A distancia infinitesimal es de primer orden. Entonces el volumen ocupado por la energía en el caso infinitesimal es un cascarón esférico de espesor infinitesimal y, obviamente, radio infinitesimal. Entonces

$$\begin{aligned} dV &= [\textit{superficie}] \cdot [\textit{espesor}] \\ dV &= [(4 \pi (dr)^2)] [dr] \\ dV &= 4 \pi (dr)^3 \end{aligned} \tag{94}$$

El giro puntual equivale a una órbita de radio infinitesimal. La carga puntual giratoria produce una corriente infinitesimal, que recorre una circunferencia de radio infinitesimal. En ese límite la circunferencia se reduce a un punto y la corriente es uniforme en toda la circunferencia. Tenemos una espira infinitesimal. El campo magnético \vec{B} de la onda es el campo que la corriente infinitesimal produce en el centro de la espira infinitesimal.

Para una espira macroscópica la Ley de Biot y Savart da

$$B_{\text{espira}} = \frac{\mu_o i}{2 r}$$

Para su análoga infinitesimal tenemos

$$B = \frac{\mu_o di}{2 dr} \tag{95}$$

Simbolocemos t_o al tiempo de una vuelta entera del giro puntual. La carga que pasa por una sección de la espira en ese tiempo es dQ . Entonces la corriente infinitesimal que recorre la espira es

$$di = \frac{dQ}{t_o} \tag{96}$$

Recordemos que la continuidad y la independencia del tamaño requieren tratar matemáticamente a los infinitésimos físicos como tratamos a los valores físicos finitos en sistemas macroscópicos.

En (95) reemplazamos di como indica (96) .

$$B = \frac{\mu_o \frac{dQ}{t_o}}{2 dr}$$

Ordenamos

$$B = \frac{\mu_o}{2 t_o} \frac{dQ}{dr} \tag{97}$$

Repitamos aquí la ecuación (93) .

$$dW_E = \frac{(dQ)^2}{8 \pi \varepsilon_o dr} \quad (93)$$

Reordenamos

$$\frac{dQ}{dr} = 8 \pi \varepsilon_o \frac{dW_E}{dQ} \quad (98)$$

En (97) reemplazamos $\frac{dQ}{dr}$ como indica (98) .

$$B = \frac{\mu_o}{2 t_o} 8 \pi \varepsilon_o \frac{dW_E}{dQ}$$

Reordenamos

$$B = 2 \mu_o \varepsilon_o \frac{dW_E}{dQ} \frac{2 \pi}{t_o} \quad (99)$$

Recordemos la fórmula de la velocidad de propagación en el vacío.

$$C = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}}$$

Entonces se cumple

$$\mu_o \varepsilon_o = \frac{1}{C^2} \quad (100)$$

En (99) reemplazamos $\mu_o \varepsilon_o$ como indica (100) .

$$B = 2 \frac{1}{C^2} \frac{dW_E}{dQ} \frac{2 \pi}{t_o}$$

Ordenamos

$$B = \frac{2 dW_E}{C^2} \frac{1}{dQ} \frac{2 \pi}{t_o} \quad (101)$$

En una onda plana que se propaga en el vacío son iguales las energías del campo eléctrico y del campo magnético. Entonces

$$2 dW_E = dW \quad (102)$$

$dW \rightarrow$ infinitésimo de energía total en el entorno del punto

Aplicamos en (101) lo indicado en (102)

$$B = \frac{dW}{C^2} \frac{1}{dQ} \frac{2 \pi}{t_o} \quad (103)$$

Maxwell demostró que la cantidad de movimiento lineal de una onda plana propagada en el vacío es

$$p = \frac{W}{C} \quad (104)$$

Esta fórmula fue verificada haciendo incidir radiación sobre un espejo de masa muy pequeña. El espejo reaccionó como lo hace un cuerpo impactado por otro. Las mediciones resultaron plenamente acordes con la fórmula de Maxwell. En términos mecánicos esa fórmula y ese experimento exigen atribuirle masa a la radiación, para poder formular la conservación del momento lineal. Simbolizando m a la masa de la radiación tenemos

$$p = m C \quad (105)$$

Ahora lo obvio. Igualar el miembro derecho de (104) con el miembro derecho de (105) y después dejar.

$$\frac{W}{C^2} = m \quad (106)$$

En términos infinitesimales tenemos

$$\frac{dW}{C^2} = dm \quad (107)$$

Aplicamos en (103) lo indicado en (107)

$$B = dm \frac{1}{dQ} \frac{2 \pi}{t_o}$$

Ordenamos

$$B = \frac{dm}{dQ} \frac{2 \pi}{t_o} \quad (108)$$

El término $\frac{2 \pi}{t_o}$ es la velocidad angular del giro puntual.

$$\frac{2 \pi}{t_o} = \omega_o \quad (109)$$

$\omega_o \rightarrow$ velocidad angular del giro puntual

En (108) reemplazamos $\frac{2 \pi}{t_o}$ como indica (109)

$$B = \frac{dm}{dQ} \omega_o \quad (110)$$

Despejamos ω_o

$$\omega_o = \frac{dQ}{dm} B \quad (111)$$

La ecuación (110) informa que el campo magnético está vinculado con la carga infinitesimal que gira en el punto y con la masa correspondiente a esa carga. ¿ La masa también gira ? El giro de la carga produce una corriente rotativa infinitesimal, cuya energía está en movimiento rotativo. Entonces la masa gira, porque es directamente proporcional a la energía. A una masa que gira le corresponde una cantidad de movimiento angular. En este caso hay una cantidad infinitesimal de movimiento angular en cada punto de la región donde la onda está presente. Específicamente, en cada punto de la conaut.

La ecuación (111) informa que la velocidad angular del giro puntual es directamente proporcional a dos propiedades. Una es la relación carga/masa en el punto. Otra es el módulo del campo magnético en ese mismo punto. Hay un efecto giromagnético en la propagación.

(5-d) Propiedades mecánicas de la propagación

Repitamos aquí la ecuación (56)

$$U_B = \frac{B^2}{2 \mu_o} \quad (56)$$

La energía magnética en un volumen infinitesimal dV es

$$dW_B = U_B dV$$

Reemplazamos U_B como indica (56) .

$$dW_B = \frac{B^2}{2 \mu_o} dV$$

Reemplazamos B como indica (110) .

$$dW_B = \frac{\left(\frac{dm}{dQ} \omega_o\right)^2}{2 \mu_o} dV$$

Ordenamos

$$dW_B = \frac{1}{2} \left[\frac{dV}{\mu_o} \left(\frac{dm}{dQ}\right)^2 \right] \omega_o^2 \quad (112)$$

La ecuación (112) tiene todas las características de la energía cinética rotacional. Para un objeto macroscópico la fórmula de la energía cinética rotacional es

$$W_r = \frac{1}{2} \mathcal{M} \omega_o^2$$

$W_r \rightarrow$ energía cinética rotacional

$\mathcal{M} \rightarrow$ momento de inercia

En términos infinitesimales tenemos

$$dW_r = \frac{1}{2} d\mathcal{M} \omega_o^2 \quad (113)$$

$dW_r \rightarrow$ energía cinética rotacional infinitesimal

$d\mathcal{M} \rightarrow$ momento de inercia infinitesimal

Las ecuaciones (112) y (113) parecen dos expresiones de la misma energía. ¿ Realmente lo son ? Igulemos los miembros derechos de ambas y veamos qué se obtiene.

$$\frac{1}{2} d\mathcal{M} \omega_o^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{dV}{\mu_o} \left(\frac{dm}{dQ}\right)^2 \right] \omega_o^2$$

Simplificamos

$$d\mathcal{M} = \frac{dV}{\mu_o} \left(\frac{dm}{dQ}\right)^2$$

Reordenamos

$$d\mathcal{M} = \frac{dV}{\mu_o} \frac{dm}{(dQ)^2} dm \quad (114)$$

Por la igualdad entre las densidades de energía de los campos eléctrico y magnético tenemos

$$dW = 2dW_E$$

Por (107)

$$dm = \frac{2 dW_E}{C^2}$$

Y por (100)

$$dm = \mu_o \varepsilon_o 2 dW_E \quad (115)$$

Repetamos aquí la ecuación (93)

$$dW_E = \frac{(dQ)^2}{8 \pi \varepsilon_o dr} \quad (93)$$

En (115) reemplazamos dW_E como indica (93)

$$dm = \mu_o \varepsilon_o 2 \frac{(dQ)^2}{8 \pi \varepsilon_o dr}$$

Simplificamos y ordenamos.

$$dm = \frac{\mu_o (dQ)^2}{4 \pi dr}$$

Despejamos

$$\frac{dm}{(dQ)^2} = \frac{\mu_o}{4 \pi dr} \quad (116)$$

En (114) reemplazamos $\frac{dm}{(dQ)^2}$ como indica (116).

$$d\mathcal{M} = \frac{dV}{\mu_o} \frac{\mu_o}{4 \pi dr} dm$$

Simplificamos

$$d\mathcal{M} = \frac{dV}{4 \pi dr} dm \quad (117)$$

Repetamos aquí (94).

$$dV = 4 \pi (dr)^3 \quad (94)$$

En (117) reemplazamos dV como indica (94).

$$d\mathcal{M} = \frac{4 \pi (dr)^3}{4 \pi dr} dm$$

Simplificamos y ordenamos.

$$d\mathcal{M} = dm (dr)^2 \quad (118)$$

El momento de inercia expresado en (118) corresponde a una masa infinitesimal que recorre una circunferencia infinitesimal, con el centro de la circunferencia como eje de rotación. Esto concuerda plenamente con el giro puntual descrito en la sección (5-a). ¿ Hay algo relevante en esa concordia ? Sí. Lo comentaremos en la sección siguiente.

(5-e) Descanso y meditación

- Nos interesó el significado físico del par de corrientes infinitesimales simétricas que operan en la dirección de propagación y determinan la inductancia.
- Notamos que para comprender el significado físico necesitamos un modelo.
- Hemos decidido comenzar con el modelo más simple y más vulgar. Los cálculos mostraron que ese modelo se adecua plenamente.

- Hemos entendido que en la electrodinámica de Maxwell valen las mismas leyes para sistemas macroscópicos y para sistemas infinitesimales, horrorizando a nuestro espíritu purista de las matemáticas, porque tratamos a los valores infinitesimales de las magnitudes físicas con las mismas reglas de los valores finitos. Y todo eso ha sido coherente. Es decir que en la electrodinámica maxwelliana los sistemas macroscópicos y los sistemas infinitesimales tienen la misma realidad física.
- Los campos continuos que son soluciones de la ecuación de onda determinan varias densidades finitas, de carga, de corriente, de energía, de momento lineal, de masa, etc. En las aulas adquirimos una idea vaga de ellas, que nos lleva a concebirlas como densidades nebulosas, abstractas, más parecidas a un artificio matemático que a un fenómeno existente. Ahora sabemos que esas densidades contienen sistemas físicos normales de tamaño infinitesimal, que operan con las mismas reglas que sus parientes macroscópicos. Independencia de escala ilimitada. Desde la pequeñez extrema hasta la grandeza extrema todo cumple las mismas leyes.
- En el cálculo de las propiedades del campo magnético estuvo incluido el campo eléctrico, con su carga puntual esférica y su energía coulombiana. La inclusión resultó coherente. Eso es otro beneficio de las leyes de Maxwell, que expresan correlaciones coherentes entre campos, entre formas de planteo distintas, entre referenciales distintos y entre órdenes distintos de tamaño. Por eso con libertad plena pudimos utilizar el modelo de la esfera eléctrica infinitesimal para calcular las propiedades de la corriente infinitesimal cerrada en el entorno de un punto, con su campo magnético incluido. Hemos aplicado la fórmula coulombiana, la ley de Biot y Savart, etc. , como se aplican a un sistema que está en reposo respecto al referencial escogido. El único referencial donde la carga de la onda aparece en reposo es uno que tiene la misma velocidad que la onda respecto a un referencial material. Es decir que implícitamente hemos fijado la referencia en un punto que viaja en el vacío con velocidad igual a C . Y todo ha salido bien. Finalmente, para que no dudemos de la existencia física de todo eso, Maxwell nos obsequia el momento de inercia del sistema rotativo infinitesimal. Una propiedad mecánica, presente en la materia y también en las ondas.

La lista anterior no está completa ni se aproxima a estarlo, pero es suficiente para invitarnos a meditar.

(5-f) Densidad de momento angular

¿ Qué letra usaremos para el momento angular ? La letra habitual ha sido usada para la inductancia. Propongo usar \mathcal{A} , una A en estilo manuscrito. Repitamos aquí la ecuación (118) , que expresa el momento de inercia infinitesimal $d\mathcal{M}$.

$$d\mathcal{M} = dm (dr)^2 \quad (118)$$

El momento angular infinitesimal es

$$d\mathcal{A} = d\mathcal{M} \omega_o \quad (119)$$

Hemos visto que la energía del campo magnético en el entorno de un punto es formulable como energía cinética rotacional, en la forma siguiente.

$$dW_B = \frac{1}{2} d\mathcal{M} \omega_o^2 \quad (120)$$

En (120) despejamos $d\mathcal{M}$

$$d\mathcal{M} = \frac{2 dW_B}{\omega_o^2} \quad (121)$$

El campo magnético y el campo eléctrico tienen densidades de energía iguales en la onda que analizamos. Entonces se cumple

$$2 dW_B = dW_B + dW_E$$

Es decir

$$2 dW_B = dW \quad (122)$$

$dW \rightarrow$ densidad de energía total

En (121) reemplazamos $2 dW_B$ como indica (122).

$$d\mathcal{M} = \frac{dW}{\omega_o^2} \quad (123)$$

En (120) reemplazamos $d\mathcal{M}$ como indica (123).

$$d\mathcal{A} = \frac{dW}{\omega_o^2} \omega_o$$

Simplificamos

$$d\mathcal{A} = \frac{dW}{\omega_o} \quad (124)$$

El momento angular infinitesimal expresado en (124) corresponde a un punto de la conaut. Y todos los puntos tienen esa propiedad. Hay una densidad de momento angular, es decir, una distribución continua en todo el volumen de la conaut. Integrando hallamos el monto total \mathcal{A} de momento angular distribuido en la conaut.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{\omega t - kx = 0}^{\omega t - kx = 2\pi} \frac{dW}{\omega_o} \\ \mathcal{A} &= \frac{1}{\omega_o} \int_{\omega t - kx = 0}^{\omega t - kx = 2\pi} dW \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = \frac{W}{\omega_o} \quad (125)$$

¿ Hay relación entre la velocidad angular ω_o del giro puntual y la frecuencia angular ω de la propagación ? Hagamos la comprobación.

Repitamos aquí la ecuación (111).

$$\omega_o = \frac{dQ}{dm} B \quad (111)$$

Esta ecuación está basada plenamente en el concepto de la carga puntual giratoria. Ese concepto y el modelo sencillo que adoptamos se basan en las leyes más simples de la

electrodinámica maxwelliana. Entonces esperamos que al reemplazar en (111) dQ , dm y B por sus expresiones ondulatorias resulte $\omega_o = \omega$. Caso contrario (111) sería incompatible con las ecuaciones de Maxwell. Hagámoslo y veamos el resultado.

La expresión ondulatoria de dQ es

$$dQ = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dV \quad (126)$$

Repitamos aquí (14) .

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \hat{D} k \text{sen}(\omega t - kx) \quad (14)$$

En (126) reemplazamos $\vec{\nabla} \cdot \vec{D}$ como indica (14) .

$$dQ = \hat{D} k \text{sen}(\omega t - kx) dV \quad (127)$$

La densidad total de energía es el doble de U_B . Dividiendo por C^2 obtenemos la densidad de masa. Entonces la masa infinitesimal es

$$dm = \varepsilon_o B^2 dV \quad (128)$$

La ecuación (128) está explicada en el APÉNDICE 2 .



En (111) reemplazamos dQ como indica (127) y dm como indica (128) .

$$\omega_o = \frac{\hat{D} k \text{sen}(\omega t - kx)}{\varepsilon_o \hat{B} \text{sen}(\omega t - kx)}$$

El término $\text{sen}(\omega t - kx)$ expresa localidad. Es decir expresa lo que corresponde a un punto específico en un instante específico. Esos términos se simplifican para dar una velocidad angular uniforme y única en toda la conaut. La velocidad angular es la misma en todos los puntos y en todos los instantes. Simplificando queda

$$\omega_o = \frac{\hat{D} k}{\varepsilon_o \hat{B}}$$

Ordenamos

$$\omega_o = \frac{k}{\varepsilon_o} \frac{\hat{D}}{\hat{B}} \quad (129)$$

De $\frac{D^2}{2\varepsilon_o} = \frac{B^2}{2\mu_o}$ se deduce

$$\frac{\hat{D}}{\hat{B}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}} \quad (130)$$

En (129) reemplazamos $\frac{\hat{D}}{\hat{B}}$ como indica (130) .

$$\omega_o = \frac{k}{\varepsilon_o} \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}$$

Operamos

$$\omega_o = k \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_o^2 \mu_o}}$$

$$\omega_o = k \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_o \mu_o}}$$

$$\omega_o = k \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}}$$

Recordamos $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}} = C$

$$\omega_o = k C$$

Recordamos $k C = \omega$

$$\omega_o = \omega$$

(131)

Informa (131) que la velocidad angular ω_o (propiedad electromecánica) y la frecuencia angular ω (propiedad ondulatoria) son iguales. Físicamente significa lo siguiente.

La onda electromagnética es una onda electromecánica.

En el inicio preguntamos ¿ hay relación entre la velocidad angular ω_o del giro puntual y la frecuencia angular ω de la propagación ?

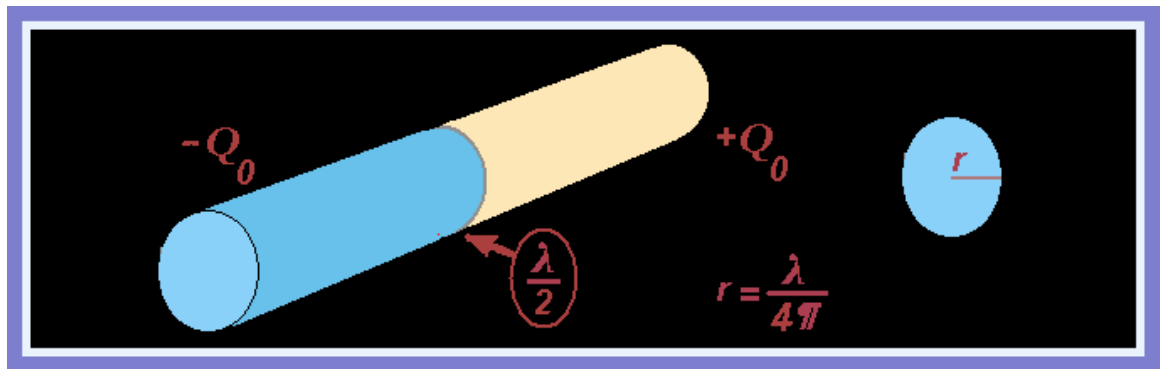
- Hemos respondido la pregunta
- Hemos comprobado que el concepto de la carga puntual giratoria es válido.
- Viendo cómo se simplifican los dos términos $\text{sen}(\omega t - kx)$, hemos comprendido por qué ω es uniforme en la propagación y por qué ω_o y ω son iguales.
- Hemos averiguado cómo funciona físicamente una onda electromagnética, es decir, hemos comprendido su naturaleza.
- Hemos comprendido la función del vacío en la propagación. Donde la onda se propaga el vacío se polariza dinámicamente, es decir, la polarización varía obedeciendo a una función de onda. La analogía del anuncio luminoso se ha convertido en mucho más que un recurso didáctico.

Cuanto más avanzamos, más evidente resulta lo siguiente.

Entre la matemática y el mundo físico hay similitud. La matemática es una multitud de maneras. ¿Maneras de qué? De expresar el conjunto vacío. ¿Cuántas hay? Infinitas. ¿Por qué? Porque cada ecuación tiene dos miembros que restados dan cero. La condición de coherencia es, precisamente, que todas las ecuaciones puedan reducirse a $0 = 0$. La matemática existe porque el cero rige siempre, independientemente de lo complicada o extensa que sea la estructura desarrollada. En el mundo físico, la radiación es vacío polarizado. La polarización no altera la neutralidad global, porque $+q - q = 0$. La radiación es la manera más simple de mantener la carga neta igual a cero. Y recordemos algo más. La colisión mutua dos fotones en condiciones adecuadas forma una partícula y una antipartícula. Las partículas se asocian formando átomos, moléculas, cuerpos, astros, etc. El cosmos entero nace de la radiación. Y la radiación existe sin alterar el cero del vacío. El cosmos es el conjunto de todas las maneras posibles de mantener la neutralidad eléctrica. Es decir, todas las maneras de cumplir físicamente la condición de coherencia $0 = 0$.

CAPÍTULO 6 - Propiedades finitas de la conaut

(6-a) Carga en cada semiciclo



- La autonomía de la conaut está planteada.
- La densidad de carga está formulada.
- El área S está determinada.
- Podemos entonces formular la carga Q_o del semiciclo.

El área S corresponde al frente de onda de la conaut. La densidad de carga es uniforme en todos los puntos del frente de onda, porque todos corresponden al mismo valor de x . Entonces el volumen infinitesimal dV_x que nos interesa es

$$dV_x = S dx \quad (132)$$

La carga infinitesimal contenida en dV_x es

$$dQ_o = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dV_x \quad (133)$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} \rightarrow$ densidad de carga

En (133) reemplazamos dV_x como indica (132) .

$$dQ_o = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} S dx \quad (134)$$

Repitamos aquí la ecuación (14) .

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \hat{D} k \text{sen}(\omega t - kx) \quad (14)$$

En (134) reemplazamos $\vec{\nabla} \cdot \vec{D}$ como indica (14) .

$$dQ_o = \hat{D} k \text{sen}(\omega t - kx) S dx$$

Ordenamos.

$$dQ_o = k \hat{D} S \text{sen}(\omega t - kx) dx \quad (135)$$

Integrando entre los límites de un semiciclo obtenemos la carga finita Q_o contenida en un semiciclo de la conaut.

$$Q_o = k \hat{D} S \int_{(\omega t - kx)=0}^{(\omega t - kx)=\pi} \text{sen}(\omega t - kx) dx \quad (136)$$

En el APÉNDICE 3 está el desarrollo de la integral. Aquí pondremos directamente los resultados.



$$\int_{(\omega t - kx)=0}^{(\omega t - kx)=\pi} \text{sen}(\omega t - kx) dx = -\frac{2}{k} \quad (137)$$

$$\int_{(\omega t - kx)=\pi}^{(\omega t - kx)=2\pi} \text{sen}(\omega t - kx) dx = \frac{2}{k} \quad (138)$$

Las expresiones (137) y (138) muestran algo esencial. Entre $(\omega t - kx) = 0$ y $(\omega t - kx) = \pi$ la carga Q_o es negativa. Y es positiva entre $(\omega t - kx) = \pi$ y $(\omega t - kx) = 2\pi$. Las ecuaciones de Maxwell especifican que la conaut viaja con su semiciclo negativo adelante y su semiciclo positivo atrás. Razonemos un poco. La onda se forma porque la densidad de carga se aparta de cero gradualmente hasta el valor pico, después pasa por cero sin quedar en ese valor, porque sigue variando y cumple todo el ciclo. La densidad de carga no puede ser cosenoidal, pues para serlo necesitaría en el inicio tomar abruptamente el valor pico. En un cambio abrupto, todas las derivadas primeras respecto del tiempo son infinitas. Eso es físicamente imposible. La densidad de carga es inevitablemente senoidal y, para ella, las ecuaciones de Maxwell especifican que el semiciclo negativo precede al semiciclo positivo en el sentido de avance de la propagación. Recordemos esta propiedad, porque explica detalles esenciales en la colisión mutua de dos fotones para formar una partícula con su antipartícula.

Aplicamos en (136) lo indicado en (137) . Omitimos el signo, porque nos interesa el valor absoluto de la carga en un semiciclo de la conaut.

$$Q_o = k \hat{D} S \frac{2}{k}$$

Simplificamos y ordenamos.

$$Q_o = 2 S \hat{D} \quad (139)$$

(6-b) Capacitancia de la conaut

Queremos conocer la capacitancia \mathcal{C} de la conaut. Compararemos dos modos de calcular la energía del campo eléctrico.

: Modos de calcular la energía del campo eléctrico :

Planteo densidad	Planteo capacitancia
Plantear la densidad de energía e integrar en el volumen	Plantear la energía de un capacitor con cargas Q_o en ambas placas



Ambos modos calculan la misma energía. Igualando los resultados hallaremos la capacitancia.

(6-c) Planteo densidad

La densidad de energía U_E del campo magnético es

$$U_E = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \quad (140)$$

En la dirección de propagación \vec{D} tiene una componente perpendicular a \vec{E} , cuyo aporte al producto escalar planteado en (140) es nulo. Solamente aporta la componente transversal de \vec{D} . Entonces tenemos

$$\begin{aligned} U_E &= \frac{1}{2} (\varepsilon \vec{E}) \cdot \vec{E} \\ U_E &= \frac{1}{2} \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E} \\ U_E &= \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \end{aligned} \quad (141)$$

La onda que nos interesa es plana y se propaga en el vacío.

$$\varepsilon_{(vacío)} = \varepsilon_o \quad (142)$$

Aplicamos a (141) lo indicado en (142) .

$$U_E = \frac{1}{2} \varepsilon_o E^2 \quad (143)$$

La solución exponencial compleja no altera al campo eléctrico. Entonces E tiene la forma habitual.

$$E = \hat{E} \operatorname{sen}(\omega t - kx) \quad (144)$$

Aplicamos a (143) lo indicado en (144) y ordenamos.

$$U_E = \frac{1}{2} \varepsilon_o \hat{E}^2 \operatorname{sen}^2(\omega t - kx) \quad (145)$$

La diferencial de volumen dV_x es la misma que definimos para el campo magnético, dada por (61). Por comodidad repetimos aquí la ecuación (61).

$$dV = S C dt \quad (61)$$

En cada intervalo dt hay una energía dW_E contenida entre ambas superficies, cuya expresión es

$$dW_E = U_E dV_x \quad \textit{infinitésimo de energía del campo eléctrico} \quad (146)$$

En (146) aplicamos lo indicado en (61) y ordenamos

$$dW_E = S C U_E dt \quad (147)$$

En (147) aplicamos lo indicado en (145) y ordenamos

$$dW_E = \frac{1}{2} \varepsilon_o S C \hat{E}^2 \operatorname{sen}^2(\omega t - kx) dt \quad (148)$$

Para calcular la energía del campo eléctrico en un ciclo entero integramos dW_E entre $t = 0$ y $t = T$.

$$W_E = \int_{t=0}^{t=T} \frac{1}{2} \varepsilon_o S C \hat{E}^2 \operatorname{sen}^2(\omega t - kx) dt \quad (149)$$

W_E energía del campo eléctrico en un ciclo entero



Ponemos las constantes fuera de la integral

$$W_E = \frac{1}{2} \varepsilon_o S C \hat{E}^2 \int_{t=0}^{t=T} \operatorname{sen}^2(\omega t - kx) dt \quad (150)$$

El cálculo de la integral está en el APÉNDICE 1. Aquí simplemente pondremos el resultado.

$$\int_{t=0}^{t=T} \operatorname{sen}^2(\omega t - kx) dt = \frac{\pi}{\omega} \quad (151)$$

T período de la onda

		<p>Ella estaba en actividad científica y así sucedió el encuentro con James. Amor, casamiento y vida en pareja sin separación. Colaboraron en varias investigaciones. James reconoció que algunas, como la teoría del color aún vigente, fueron obra de Katherine casi totalmente.</p>
<p><i>Katherine Mary Dewar</i></p>	<p><i>Ecuaciones de Maxwell</i></p>	

En (150) aplicamos lo indicado en (151) y ordenamos

$$W_E = \frac{\pi}{2 \omega} \varepsilon_o S C \hat{E}^2 \quad (152)$$

(6-d) Planteo capacitancia

La energía del campo eléctrico de un par de cargas siempre es directamente proporcional al producto de las cargas.

$$W_E = f q_1 q_2 \quad (153)$$

$f \rightarrow$ factor de proporcionalidad

El factor de proporcionalidad depende de la geometría del campo. Para cargas libres en el vacío el factor es

$$f = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_o} \quad (154)$$

Para las cargas de un capacitor es

$$f = \frac{1}{2 \mathcal{C}} \quad (155)$$

La energía de un capacitor es entonces

$$W_{cap} = \frac{q_1 q_2}{2 \mathcal{C}} \quad (156)$$

¿ Cargas distintas en las placas ? ¡ Imposible, pues al conectar la batería la carga es perfectamente simétrica ! Razonemos. Hay un capacitor simétricamente cargado, con los terminales libres. Es decir el capacitor está cargado y sin conexión con otros objetos. Entonces tocamos una de las placas con un objeto electrizado, que cambia la carga de esa placa y no de la otra. Esa operación da como resultado un capacitor cargado asimétricamente. Es una operación sencilla, fácilmente verificable en un laboratorio. La capacidad depende de la geometría del sistema, que no ha cambiado. Entonces pasamos del caso particular de cargas simétricas a la expresión general de la energía capacitiva, apta para cargas simétricas y asimétricas.

En la conaut hay dos cargas simétricas, ambas iguales a Q_o . Y la energía capacitiva es la energía del campo eléctrico de la onda. Entonces tenemos

$$W_E = \frac{Q_o^2}{2 \mathcal{C}} \quad (157)$$

(6-e) Igualar ambos planteos

Por comodidad repitamos aquí (152) .

$$W_E = \frac{\pi}{2 \omega} \varepsilon_o S C \hat{E}^2 \quad (152)$$

Igualamos el miembro derecho de (152) con el miembro derecho de (157) .

$$\frac{\pi}{2 \omega} \varepsilon_o S C \hat{E}^2 = \frac{Q_o^2}{2 \mathcal{C}} \quad (158)$$

Repitamos aquí la ecuación (139) .

$$Q_o = 2 S \hat{D} \quad (139)$$

En (158) expresamos Q_o como indica (139) .

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2 \omega} \varepsilon_o S C \hat{E}^2 &= \frac{(2 S \hat{D})^2}{2 \mathcal{C}} \\ \frac{\pi}{2 \omega} \varepsilon_o S C \hat{E}^2 &= \frac{4 S^2 \hat{D}^2}{2 \mathcal{C}} \end{aligned}$$

En el vacío es

$$\hat{D} = \varepsilon_o \hat{E}$$

$$\frac{\pi}{2 \omega} \varepsilon_o S C \hat{E}^2 = \frac{4 S^2 (\varepsilon_o \hat{E})^2}{2 \mathcal{C}}$$

$$\frac{\pi}{2 \omega} \varepsilon_o S C \hat{E}^2 = \frac{4 S^2 \varepsilon_o^2 \hat{E}^2}{2 \mathcal{C}}$$

Simplificamos

$$\frac{\pi}{\omega} C = \frac{4 S \varepsilon_o}{\mathcal{C}}$$

Despejamos \mathcal{C}

$$\mathcal{C} = \frac{4 \omega S \varepsilon_o}{\pi C} \quad (159)$$

Repitamos aquí (91) .

$$S = \frac{\lambda^2}{16 \pi} \quad (91)$$

En (159) reemplzamos S como indica (91) .

$$\mathcal{C} = \frac{4 \omega \lambda^2 \varepsilon_o}{16 \pi^2 C} \quad (160)$$

La definición de ω es

$$\omega = \frac{2 \pi}{T} \quad (161)$$

En (160) reemplzamos ω como indica en (161) .

$$\mathcal{C} = \frac{8 \pi \lambda^2 \varepsilon_o}{16 \pi^2 C T}$$

$C T = \lambda$, entonces queda

$$\mathcal{C} = \frac{8 \pi \lambda^2 \varepsilon_o}{16 \pi^2 \lambda}$$

Simplificamos y ordenamos

$$\mathcal{E} = \varepsilon_o \frac{\lambda}{2\pi} \quad (162)$$

Repetamos aquí la ecuación (157) .

$$W_E = \frac{Q_o^2}{2 \mathcal{E}} \quad (157)$$

En la onda que analizamos es $W_B = W_E$. Entonces es $W = 2 W_E$, es decir el doble de lo expresado en (157) .

$$W = \frac{Q_o^2}{\mathcal{E}} \quad (163)$$

En (163) reemplazamos \mathcal{E} como indica (162) .

$$W = \frac{2 \pi Q_o^2}{\varepsilon_o \lambda} \quad (164)$$

Aplicamos $\lambda = C T$.

$$W = \frac{2 \pi Q_o^2}{\varepsilon_o C T} \quad (165)$$

Por definición es de frecuencia tenemos

$$T = \frac{1}{\nu} \quad (166)$$

$\nu \rightarrow$ frecuencia de la onda

Aplicamos en (165) lo indicado en (166) .

$$W = \frac{2 \pi Q_o^2}{\varepsilon_o C} \nu \quad (167)$$

¿ Qué sabemos de Q_o ? Si fuese una constante universal, como ε_o y C , la energía total de la conaut sería directamente proporcional a la frecuencia. ¿ Permite algún razonamiento averiguar algo respecto a Q_o ?

(6-f) Descender del vehículo y caminar un poco

Lo hecho hasta el momento fue jugar a la matemática. ¿ Por qué la palabra jugar ? Porque viajando velozmente en el vehículo matemático no se aprecian detalles físicos tan elementales como la relación entre el tamaño de la conaut y el tamaño del objeto emisor, que puede ser un electrón acelerado o una antena de radio. ¿ Antena de radio ? Sí. Las leyes electromagnéticas son independientes del tamaño del sistema. Y esas leyes indican que la radiación existe en forma de conaut. En los puntos del vacío que no corresponden a una de esas conaut no hay polarización y no hay onda.

Una de las bandas de radioaficionados corresponde a longitudes de onda comprendidas entre 80 metros y 85,5 metros aproximadamente. Para emitir esas ondas los radioaficionados usan

antenas grandes en las instalaciones domiciliarias. También instalan equipos portátiles en los automóviles, que logran emitirlos con antenas más cortas que un automóvil. ¿ Puede una antena más pequeña que la conaut emitir conauts ? ¡ Obviamente sí, porque los aficionados transmiten exitosamente desde sus automóviles ! , es la respuesta que daríamos con vehemencia. Pero la conaut es un sistema resonante, cuya frecuencia de resonancia está dada por la misma fórmula que se usa en electrotecnia.

$$\nu_{(res)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}} \quad (168)$$

En (168) reemplazamos \mathcal{L} y \mathcal{C} como indican (53) y (162) respectivamente.

$$\nu_{(res)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu_o \frac{\lambda}{2\pi} \varepsilon_o \frac{\lambda}{2\pi}}} \quad (169)$$

Simplificamos

$$\nu_{(res)} = \frac{1}{\lambda \sqrt{\mu_o \varepsilon_o}}$$

Recordamos lo siguiente

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}} = C \quad ; \quad \frac{C}{\lambda} = \nu$$

Entonces queda

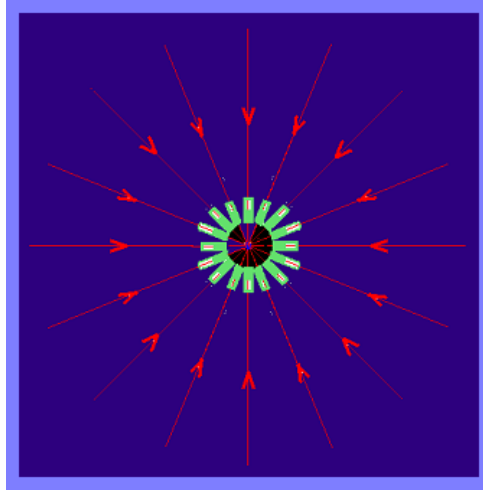
$$\boxed{\nu_{(res)} = \nu} \quad (170)$$

La frecuencia de resonancia de la conaut es la frecuencia de la onda. Si la conaut no puede formarse con el tamaño necesario, no puede tener la inductancia y la capacidad necesarias para cumplir la condición (170) . Una antena más pequeña que la conaut no puede emitir conauts que tengan la frecuencia adecuada. Eso es inevitable. ¡ Pero los radioaficionados emiten ! Es verdad. Eso es un hecho. Y otro hecho es que las leyes de Maxwell no permiten que esas antenas pequeñas emitan conauts.

¿ Dónde está el problema ? Lejos de las antenas no hay problema, porque sobra espacio para formar todas las conauts necesarias para totalizar la potencia irradiada. Pero cerca de la antena no puede haber conauts. ¿ Qué puede haber en vez de conauts ? Si la emisión de radio pudiese ser filmada, tal vez entenderíamos lo que sucede cerca de la antena, es decir en la región denominada técnicamente *zona cercana* . Podríamos ver la filmación todas las veces que deseásemos, a velocidad muy lenta para ver mejor, verla al derecho y al revés, etc. Pero no tenemos esa ventaja porque no hay tecnología suficiente.

¡ Un momento ! ¿ Ver la película al revés ? No hay tecnología pero podemos razonar al revés, como si realmente viésemos la filmación invertida. Recuerdo la filmación de una persona que enciende un cigarrillo, lo fuma y finalmente lo apaga en el cenicero, pasada al revés. La risa me hacía doler el abdomen. En general todas las secuencias inversas nos resultan hilarantes y absurdas, pero son formulables con las mismas leyes que rigen las secuencias normales. Sin cambiar las leyes, podemos imaginar que desde una zona lejana las conauts retroceden hacia la antena.

La potencia irradiada corresponde, en la zona lejana, a innumerables conauts que viajan como cilindros mutuamente paralelos. Si el origen de coordenadas esféricas está en la antena, para cada valor del radio hay un conjunto numeroso de Q_o del mismo signo con la misma fase $(\omega t - kx)$.



Todas las conautes retroceden a la misma velocidad y llegan con la misma fase a la zona cercana, donde por escases de lugar se unen, formando un cascarón de carga continuo alrededor del origen de coordenadas. Si retroceden n conautes, por conservación de la carga ese cascarón tiene una carga igual a $n Q_o$. Es decir

$$Q_A = n Q_o \quad (171)$$

$Q_A \rightarrow$ carga total antes de la formación de las conautes

Aunque estamos razonando al revés, el cascarón continuo es realmente lo que hay *antes* de alcanzar la zona lejana. Por eso el subíndice es A .

La suma de cargas equivale a conectar en paralelo inductancias y capacitancias. La zona cercana equivale a ese tipo de conexión circuital. Entonces ahí tenemos

$$\mathcal{L}_A = \frac{\mathcal{L}}{n} \quad (172)$$

$$\mathcal{C}_A = n \mathcal{C} \quad (173)$$

La frecuencia de resonancia en la zona cercana es

$$\nu_{A(res)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mathcal{L}_A\mathcal{C}_A}} \quad (174)$$

En (174) reemplazamos \mathcal{L}_A y \mathcal{C}_A como indican (172) y (173) . respectivamente.

$$\nu_{A(res)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{L}}{n} n \mathcal{C}}}$$

Simplificamos

$$\nu_{A(res)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mathcal{L} \mathcal{C}}} \quad (175)$$

Repitamos aquí la ecuación (168) .

$$\nu_{(res)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mathcal{L} \mathcal{C}}} \quad (168)$$

Según (175) y (168) se cumple

$$\nu_{A(res)} = \nu_{(res)} \quad (176)$$

Vemos en (176) que el cascarón continuo resuena a la misma frecuencia que las conauts. Es decir, la frecuencia no se altera cuando se forman las conauts.

¿ Se conserva la energía cuando el cascarón continuo se divide para formar las conauts ? Para responder necesitamos hacer, para el cascarón, cálculos análogos a esos que hicimos para la conaut. Podemos evitar la repetición de aquellos pasos notando lo siguiente.

La carga está multiplicada por n . Consecuentemente, la corriente está multiplicada por n . Lo mismo sucede con el diferencial de corriente. Y la inductancia está dividida por n . Entonces

$$dW_{BA} = \frac{\mathcal{L}}{n} n i n di$$

Simplificamos y ordenamos

$$dW_{BA} = n \mathcal{L} i di \quad (177)$$

Repitamos aquí la ecuación (69) , correspondiente a la diferencial de energía del campo magnético de la conaut.

$$dW_B = \mathcal{L} i di \quad (69)$$

En (177) reemplazamos $\mathcal{L} i di$ como indica (69) .

$$dW_{BA} = n dW_B \quad (178)$$

Integramos

$$W_{BA} = n W_B \quad (179)$$

Vemos en (179) que la energía del campo magnético se conserva cuando se forman las conauts.

Para el campo eléctrico del cascarón de la zona cercana tenemos

$$W_{EA} = \frac{(n Q_o)^2}{2 n \mathcal{C}}$$

Simplificamos y ordnamos.

$$W_{EA} = n \frac{Q_o^2}{2 \mathcal{C}} \quad (180)$$

Repitamos aquí la ecuación (157) , que expresa la energía del campo eléctrico de la conaut.

$$W_E = \frac{Q_o^2}{2 \mathcal{C}} \quad (157)$$

En (180) reemplazamos $\frac{Q_o^2}{2 \mathcal{C}}$ como indica (157) .

$$W_{EA} = n W_E \quad (181)$$

Sumamos M.A.M. (179) y (181) .

$$W_{BA} + W_{EA} = nW_B + nW_E$$

$$W_{BA} + W_{EA} = n (W_B + W_E)$$

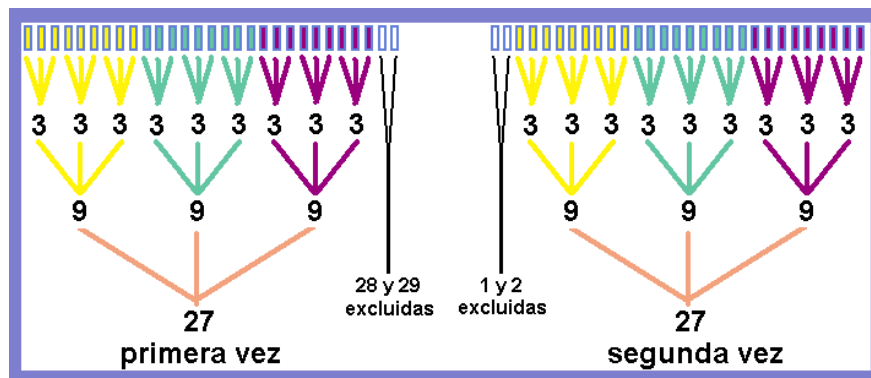
$$W_A = n W$$

(182)

Vemos en (182) que la energía total se conserva cuando se forman las conauts.

¡ Un momento ! Lo anterior no demuestra la conservación de la energía. Demuestra que se conserva en caso de ser iguales las cargas de todas las conauts. ¿ Hay algo que las obligue a ser iguales ? Una manera de averiguarlo es plantear el retroceso de n conauts, utilizando para la carga de cada una un símbolo distinto, es decir Q_1 , Q_2 , Q_3 etc.

He intentado el planteo general para n arbitrario y se complica mucho. Después entendí que no necesitamos esa complicación. En el retroceso, la energía de 3 conauts se conserva solamente si son iguales las cargas de las tres. Después lo plantearé detalladamente. Ahora razonemos un poco más. Si retroceden por ejemplo 29 conauts, podemos formar 9 ternas y quedan 2 conauts sin ternar, es decir excluidas de formar ternas.



Las 3 conauts de cada terna están obligadas a tener cargas iguales. Las leyes que valen para unir 3 conauts en una terna, valen también para unir 3 ternas en una novena, tres novenas en un grupo de 27 y así sucesivamente si hubiese más de 29 conauts. 29 no es múltiplo de 3 y quedan dos conauts excluidas. Nadie, exceptos nosotros, escoge cuáles quedarán excluidas. Entonces hacemos el procedimiento dos veces. La primera vez excluimos por ejemplo a las conauts 28 y 29 . Luego demostramos que las conauts desde 1 hasta 27 tienen cargas iguales. La segunda vez excluimos a 1 y 2 para incluir a 28 y 29 . Demostramos que las conauts desde 3 hasta 29 tienen cargas iguales. En dos etapas, el método de las ternas da la demostración para todas las conauts, sea cual fuere el número total de conauts. Ese número habitualmente es enorme, pero eso no es obstáculo, pues interesa solamente la estructura lógica del procedimiento, que garantiza la igualdad de todas las cargas, porque en cada etapa de agrupamiento la conservación de la energía exige cargas iguales. En matemática se utiliza el Principio de Inducción Completa, porque su estructura lógica permite tratar conjuntos tan numerosos como se desee, hasta conjuntos de infinitos elementos. El procedimiento de las cargas tiene una estructura lógica similar, es decir pasos sucesivos que repiten las mismas leyes.

Basta analizar una terna para obtener la condición general.

El procedimiento lógico sucesivo podría basarse perfectamente en pares de conauts, en vez de ternas. Bastaría demostrar que las leyes de Maxwell exigen igualdad de cargas cuando retroceden dos conauts. Haremos ambas demostraciones porque son ejercicios de matemática bonitos.

(6-g) Retroceso de 3 conauts y de 2

Repitamos aquí la ecuación (167) .

$$W = \frac{2 \pi Q_o^2}{\varepsilon_o C} \nu \quad (167)$$

Supongamos que tres conauts de la misma frecuencia, provenientes de un mismo emisor, tienen cargas distintas q_1 , q_2 , q_3 . Según (167) las energías respectivas serían

$$W_1 = \frac{2 \pi \nu}{\varepsilon_o C} q_1^2 \quad (183)$$

$$W_2 = \frac{2 \pi \nu}{\varepsilon_o C} q_2^2 \quad (184)$$

$$W_3 = \frac{2 \pi \nu}{\varepsilon_o C} q_3^2 \quad (185)$$

Simolicemos \mathcal{T} al término que aparece en los tres casos.

$$\mathcal{T} = \frac{2 \pi \nu}{\varepsilon_o C} \quad (186)$$

Aplicamos en (183) , (184) y (185) lo indicado en (186)

$$W_1 = \mathcal{T} q_1^2 \quad (187)$$

$$W_2 = \mathcal{T} q_2^2 \quad (188)$$

$$W_3 = \mathcal{T} q_3^2 \quad (189)$$

Antes de la unión en paralelo la energía del sistema es

$$W_S = W_1 + W_2 + W_3 \quad (190)$$

Es decir

$$W_S = \mathcal{T} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \quad (191)$$

Después de la unión en paralelo hay un sistema cuya carga es

$$q_p = q_1 + q_2 + q_3 \quad (192)$$

$q_p \rightarrow$ carga del sistema paralelo

La energía del campo eléctrico de ese sistema es

$$W_{Ep} = \frac{q_p^2}{2 \mathcal{C}_p} \quad (193)$$

En paralelo las capacitancias se suman y tenemos

$$\mathcal{C}_p = 3 \mathcal{C} \quad (194)$$

Aplicando en (193) lo indicado en (194) tenemos.

$$W_{Ep} = \frac{q_p^2}{6 \mathcal{C}} \quad (195)$$

Repitamos (162) .

$$\mathcal{E} = \varepsilon_o \frac{\lambda}{2 \pi} \quad (162)$$

Aplicamos en (195) lo indicado en (162)

$$W_{Ep} = \frac{q_p^2}{6 \left(\varepsilon_o \frac{\lambda}{2 \pi} \right)}$$

$$W_{Ep} = \frac{1}{3} \frac{\pi q_p^2}{\varepsilon_o \lambda}$$

Recordamos $\lambda = \frac{C}{\nu}$

$$W_{Ep} = \frac{1}{3} \frac{\pi \nu}{\varepsilon_o C} q_p^2$$

La energías del campo eléctrico y del campo magnético son iguales. Entonces la energía total del sistema paralelo es

$$W_p = \frac{1}{3} \frac{2 \pi \nu}{\varepsilon_o C} q_p^2 \quad (196)$$

Repitamos (186) .

$$\mathcal{J} = \frac{2 \pi \nu}{\varepsilon_o C} \quad (186)$$

Según (186) , la ecuación (196) queda en la forma siguiente.

$$W_p = \frac{1}{3} \mathcal{J} q_p^2 \quad (197)$$

Repitamos (192) .

$$q_p = q_1 + q_2 + q_3$$

Elevamos ambos miembros al cuadrado.

$$q_p^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + 2(q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_3 q_1) \quad (198)$$

Aplicamos en (197) lo indicado en (198).

$$W_p = \mathcal{J} \frac{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + 2(q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_3 q_1)}{3} \quad (199)$$

La conservación de la energía impone

$$W_S = W_p \quad (200)$$

En (200) aplicamos (191) y (199) .

$$\mathcal{J} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = \mathcal{J} \frac{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + 2(q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_3 q_1)}{3}$$

Simplificamos

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \frac{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + 2(q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_3 q_1)}{3}$$

Operamos

$$\frac{2}{3} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = \frac{2}{3} (q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_3 q_1)$$

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_3 q_1$$

Reordenamos

$$q_1 (q_1 - q_2) + q_2 (q_2 - q_3) + q_3 (q_3 - q_1) = 0 \quad (201)$$

Para no tener tres cargas iguales hay dos maneras posibles. Una manera es dos iguales entre sí con la otra diferente. Por ejemplo

$$q_2 = q_3 \quad \leftarrow \text{hipótesis para examinar} \quad (202)$$

Aplicamos (202) en (201) .

$$q_1 (q_1 - q_2) + 0 + q_3 (q_3 - q_1) = 0$$

$$q_1 (q_1 - q_2) + q_3 (q_3 - q_1) = 0$$

Si $q_2 = q_3$ podemos reemplazar una por otra.

$$q_1 (q_1 - q_3) + q_3 (q_3 - q_1) = 0$$

Pasaje de términos.

$$q_1 (q_1 - q_3) = q_3 (q_1 - q_3)$$

Simplificamos.

$$q_1 = q_3$$

Por ser $q_2 = q_3$ tenemos

$$q_1 = q_2 = q_3$$

Hemos comprobado que con dos cargas iguales entre sí, la tercera no puede ser distinta. Entonces examinemos el caso de tres cargas todas distintas entre ellas. Simbolicemos q_1 a la mayor, q_2 a la intermedia y q_3 a la menor.

$$q_1 > q_2 > q_3 \quad \leftarrow \text{hipótesis para examinar} \quad (203)$$

Repitamos aquí (201)

$$q_1 (q_1 - q_2) + q_2 (q_2 - q_3) + q_3 (q_3 - q_1) = 0 \quad (201)$$

En vez de q_1, q_2, q_3 pongamos simplemente x, y, z .

$$x(x - y) + y(y - z) + z(z - x) = 0 \quad (204)$$

$$x > y > z \quad (205)$$

En el tercer paréntesis de (204) podemos invertir el orden y cambiar al signo, pues $x > y$.

$$x(x - y) + y(y - z) - z(x - z) = 0 \quad (206)$$

Despejamos $(x - z)$.

$$(x - z) = \frac{x}{z}(x - y) + \frac{y}{z}(y - z) \quad (207)$$

Según (205) tenemos

$$\frac{x}{z} > 1 \quad ; \quad \frac{y}{z} > 1 \quad (208)$$

Aplicamos en (207) las condiciones indicadas en (208) .

$$(x - z) > (x - y) + (y - z) \quad (209)$$

Simplificamos

$$x - z > x - z \quad \leftarrow \textit{absurdo} \quad (210)$$

Vemos en (210) que las tres cargas no pueden ser todas distintas. Y antes vimos que si dos de ellas son iguales entre sí, la tercera es igual a ellas dos y son las tres iguales. Está demostrado lo que expresamos en el inicio de este apartado. Si en el retroceso se unen 3 conauts para formar el cascarón de la zona cercana, la conservación de la energía exige que tengan cargas iguales. Y en la película vista normalmente, si de un emisor nace un cascarón que después forma tres conauts en la zona lejana, las tres tienen cargas iguales por conservación de la energía.

Si en vez de 3 cargas tenemos 2, la ecuación análoga a (201) es

$$q_1(q_1 - q_2) + q_2(q_2 - q_1) = 0$$

En el segundo paréntesis invertimos orden y signo.

$$q_1(q_1 - q_2) - q_2(q_1 - q_2) = 0$$

Simplificamos.

$$q_1 - q_2 = 0$$

$$q_1 = q_2$$

Estas demostraciones para 3 y para dos cargas, más el método de agrupamiento establecen lo siguiente.

El monto de carga emitido por un sistema irradiante es igual a un número natural de cuotas Q_o . En la zona lejana, cuando el área del cascarón es suficiente, ese monto se reparte en un número de conauts igual al número de cuotas Q_o contenidas en el monto.

Es decir el diagrama de agrupamiento, mirado en el sentido de la propagación, es un diagrama de fraccionamiento del cascarón para formar las conauts.

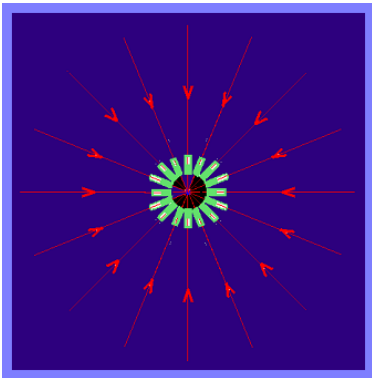
(6-h) Lo más importante respecto a Q_o

Hemos visto que un espejo ultraliviano reacciona ante la radiación que incide sobre él, como lo haría si fuese golpeado por un cuerpo. Maxwell calculó la transferencia de momento lineal y de eso se deduce la masa de la conaut. Es decir que las leyes de los choques entre objetos aplican al choque de una conaut con un espejo. Y aplican al choque entre dos conauts.

Los choques transfieren energía. Hemos visto que en la conaut energía y frecuencia son directamente proporcionales. Entonces la frecuencia de una conaut puede cambiar después de un choque. Las leyes físicas permiten e implican esto, independientemente de lo fácil o difícil que sea conseguirlo y observarlo en la práctica. Estamos analizando fundamentos teóricos. Las limitaciones tecnológicas no afectan a nuestra tarea.

Lo anterior significa que la radiación, después de emitida, puede sufrir un cambio de frecuencia. Pensemos en dos emisores. Uno emite radiación de frecuencia ν_a y otro emite radiación de frecuencia ν_b . Esta segunda radiación, después de emitida, sufre un cambio de frecuencia y queda $\nu_b = \nu_a$. El cambio de frecuencia no altera las cargas de las conauts. Solamente altera el radio y la longitud del cilindro, que ahora son iguales al radio y la longitud del grupo a . ¿Hay algo que obligue a los dos grupos a tener el mismo valor de Q_o ? Dentro de cada grupo las cargas son todas iguales. Eso está demostrado. Falta averiguar qué sucede si comparamos las cargas provenientes de dos o más emisores distintos.

Las conauts son manipulables una por una. Entonces, después de igualar las frecuencias de ambos grupos, las conauts de ambos pueden converger en fase hacia un mismo punto. Realmente pueden, porque tienen las mismas medidas geométricas y la misma velocidad.



La misma figura de antes sirve para ilustrar la convergencia de los grupos a y b . Cuando se unan para formar el cascarón se repetirá lo que analizamos, es decir, la conservación de la energía exigirá que sean iguales todas las cargas. Esto significa que las cargas del grupo a deben ser iguales a las cargas del grupo b . Por esa razón, las leyes de Maxwell más la conservación de la energía establecen lo siguiente.

La carga Q_o es una constante universal.

Repetamos aquí la ecuación (167).

$$W = \frac{2 \pi Q_o^2}{\epsilon_o C} \nu \quad (167)$$

También puede ser escrita en la forma siguiente.

$$W = 2 \pi \mu_o C Q_o^2 \nu \quad (211)$$

En (211) la única variable es ν . Todos los otros términos son constantes universales. En (211) está expresada la energía del fotón. Podemos darle ahora el nombre habitual. Ese conjunto de constantes universales es igual a la constante h de Planck.

$$h = 2 \pi \mu_o C Q_o^2 \quad (212)$$

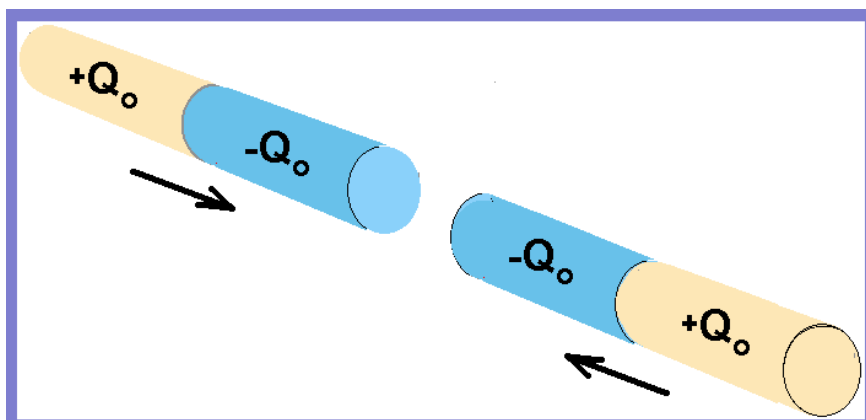
CAPÍTULO 7 - Relación entre Q_o y e

(7-a) ¿ Hasta dónde podremos llegar con teoría pura ?

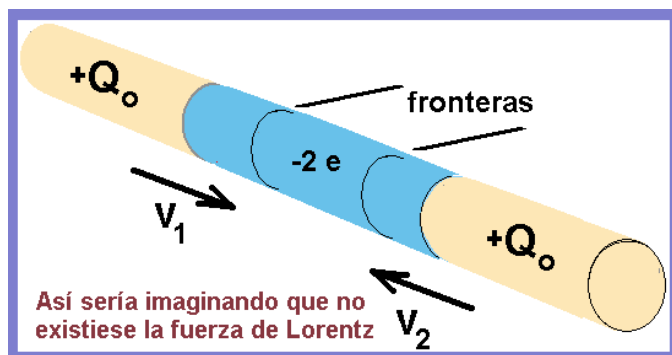
Cuando uno llega a (212) , el primer deseo es tomar el valor empírico de la constante de Planck y ver qué valor resulta para Q_o . El entusiasmo dura poco . ¿ Poco ? ¿ Por qué ? Porque estamos acomodando arbitrariamente el valor de Q_o . Debemos evitar eso. Significa que debemos proceder como si nadie hubiese logrado valuar experimentalmente la constante de Planck. ¿ Valor de h ? No lo sabemos. ¿ Podemos hacer algo sin conocer el valor ? Sí. Analizar la colisión mutua de dos fotones para formar un par electrón+positrón.

Cuando llegamos a las ecuaciones (138) y (139) comprendimos que los fotones viajan con la carga negativa en la parte delantera. Entonces en la colisión formadora del par electrón+positrón quedan enfrentadas las cargas negativas de ambas conauts, como muestra la primera figura después de este párrafo.

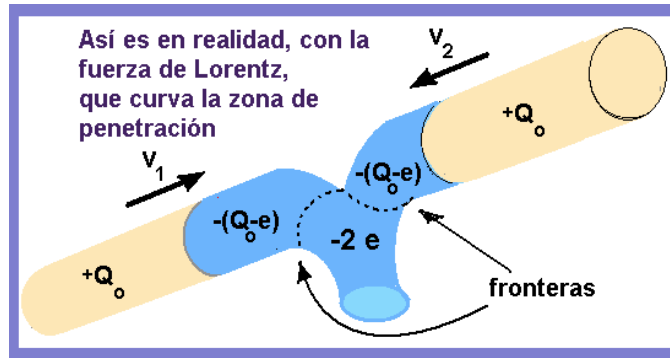
Cuando la separación entre cilindros se reduce a cero, se forma un objeto único y se inicia la penetración mutua. A veces vemos en el cielo algo análogo, cuando dos nubes se interpenetran y forman una nube grande. Los fotones se interpenetran y la carga de cada fotón interactúa con los campos del otro. La fuerza de Lorentz producida por esa interacción es transversal. ¿ Qué consecuencias tiene ?



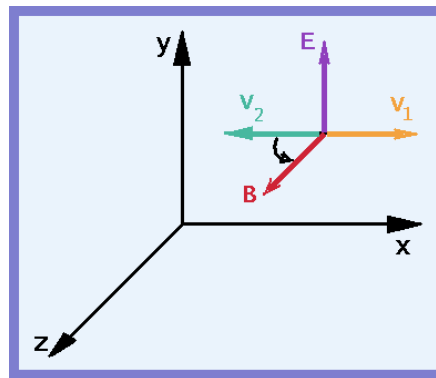
Imaginemos que no existiese la fuerza de Lorentz. En ese caso la penetración sería recta, como en la figura siguiente.



Ahora intentemos comprender el caso verdadero, con la Fuerza de Lorentz desviando a los fotones transversalmente.



Mientras se interpenetran, ambos fotones aportan carga a la zona compartida. Cuando la suma de los aportes llega a $-2e$ sucede un colapso. Después lo analizaremos. Ahora representemos los campos causantes de la fuerza transversal.



En la figura están representados los campos \vec{E} y \vec{B} del fotón 1, la velocidad v_1 del fotón 1 y la velocidad v_2 del fotón 2. La fuerza de Lorentz que recibe cada infinitésimo de carga del fotón 2 es

$$dF = -dq \left(\vec{E} + \vec{v}_2 \times \vec{B} \right) \quad (213)$$

Notamos en la figura que ambas componentes de la fuerza de Lorentz tienen la dirección del eje y , con sentido opuesto a la flecha de ese eje. Entonces colaboran para desviar transversalmente al fotón 2. El fotón 1 es desviado en la misma forma.

La fuerza de Lorentz crece gradualmente, hasta quebrar al objeto único que se había formado en la colisión. En las partes no penetradas, el tubo cilíndrico aún es recto. En cada lado hay una frontera donde la rectitud finaliza y comienza la curvatura. En algún momento el objeto único se fragmenta. Esas fronteras son lugares aptos para la quebradura. ¿ Se quiebra una de las fronteras o las dos ?

Si se quebrasen ambas, la zona entre fronteras quedaría como una carga negativa solitaria de valor $-2e$. Y quedarían formados otros dos objetos, ambos con carga neta positiva, pues cada uno contendría una carga positiva Q_0 y una carga negativa $Q_0 - e$. ¿ Hay en esto algún problema ? Sí. La carga solitaria $-2e$ no tiene cohesión interna, porque la cohesión requiere cargas de ambos signos. Entonces $-2e$ se esparce en el ambiente y ninguno de los otros dos objetos puede absorberla. Cada uno de ellos es apto para formar un positrón y no hay objeto apto para formar un electrón.

Imaginemos que una quebradura doble origina dos positrones. Aunque no altera la neutralidad global del universo, la quebradura doble produce un colapso en la neutralidad local. El colapso implica derivadas primeras con valores enormes. En cambio, la quebradura simple minimiza esas derivadas. Por eso admitiremos que es la única posibilidad física.

Supondremos imposible la quebradura doble, porque implica un colapso en la neutralidad local.

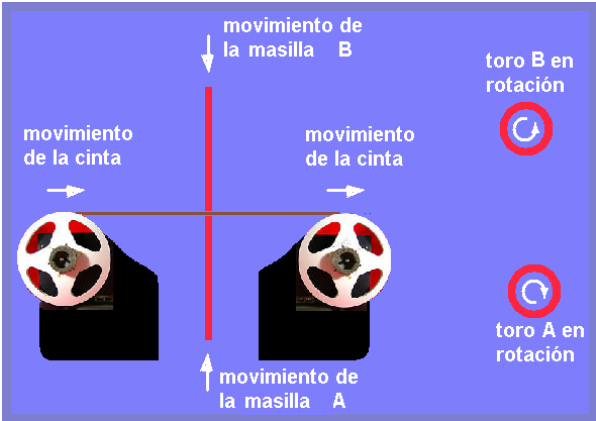
¿ Qué cargas tienen las partes producidas por quebradura simple ? Una parte tiene $-(Q_o + e)$, $+Q_o$. La otra tiene $-(Q_o - e)$, $+Q_o$. Necesitaremos recordar esto en la sección siguiente.

(7-b) Otras onsecuencias de la colisión

En esta sección mezclaremos conocimiento adquirido y conjeturas.

Es un procedimiento objetable. Muy objetable cuando conduce a un esquema ciego, que no da pautas para llegar en el futuro a un enfoque mejor. La objeción es menos severa si el esquema da pautas para llegar en el futuro a teoremas y/o fundamentos que reemplacen a las conjeturas. Sin avanzar no podremos saber en cuál caso estamos. Pero avanzar exige esfuerzo y el resultado no está garantido. ¿ Qué haremos ? ¿ Abandonar o continuar ? Mi decisión ha sido continuar.

El efecto de la fuerza de Lorentz se comprende mejor con una analogía.



Dos cilindros de masilla muy veloces chocan frontalmente contra una cinta móvil. Pensemos en la masilla industrial que es sólida, blanda y fácilmente moldeable. Excepta la cinta intererpuesta entre los cilindros, es un choque frontal como en el caso de los fotones.

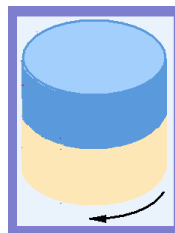
La velocidad de la cinta y las velocidades de ambos cilindros tienen módulos iguales. La cinta tiene fuerza de arrastre suficiente para curvar la masilla. El resultado final es dos toros de masilla que giran. La velocidad tangencial en el borde exterior de cada toro es igual al módulo de la velocidad rectilínea previa al choque.

En el caso de los fotones, la fuerza de Lorentz produce un efecto análogo al efecto de la cinta en la masilla. La fuerza de Lorentz curva a los fotones, tendiendo a la forma toroidal. Pero ambos semiciclos no pueden estar en un mismo toro. ¿ Por qué no ? Porque las cargas de signos opuestos no tienen el mismo valor absoluto. Entonces la amplitud sería distinta en cada semiciclo y habría un cambio de amplitud abrupto en cada nodo. Las derivadas primeras de las magnitudes físicas toman valores infinitos en un cambio abrupto. Esa

incoherencia no permite poner ambos semiciclos en un mismo toro. Entonces se forman dos toros, cada uno con carga de un signo. ¡ Pero en ese caso ningún toro tendría una onda de ciclo completo ! Es verdad. También es verdad que medio ciclo de amplitud constante no produce cambio abrupto. Y las cargas no peligran, pues la propiedad dieléctrica las estabiliza.



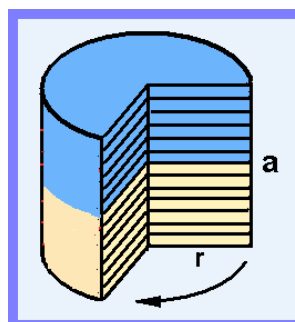
En cada plano perpendicular al eje de rotación tenemos una sección del objeto. En cada sección, los puntos más alejados del eje tienen la velocidad tangencial máxima. Esos puntos están expuestos al vacío. Entonces todos ellos tenderán a moverse a la velocidad típica de la propagación en el vacío. La forma bitoroidal no cumple esa condición. Para poder cumplirla, el objeto se remodela. ¿Cuál es en este caso la forma coherente? Las normas básicas se cumplen si la propagación rotativa llena un volumen cilíndrico, con las cargas de signos opuestos separadas por una frontera circular.



También es circular la frontera dieléctrica en el fotón. Sabemos que la propagación es rectilínea en el fotón y rotativa en las partículas formadas por colisión. Eso no afecta a la capacitancia, que se relaciona con la geometría y no con el tipo de propagación.

Hagamos una lista con las propiedades de la partícula cilíndrica.

- Propagación rotativa.
- Sin giro puntual, pues en caso de haberlo la propagación sería restilínea.
- Todos los puntos se propagan con la misma velocidad angular.
- Velocidad tangencial igual a C en todos los puntos de la superficie tubular.
- Frente de onda rectangular. Un lado del rectángulo es igual al radio del cilindro y el otro lado igual a la medida axial a .



¿ Valor de r ? Razonemos. La superficie tubular está expuesta al vacío. Por eso la velocidad tangencial en la superficie tubular es igual a la velocidad de propagación en el vacío, es decir igual a C . Ese tubo da una vuelta completa cada medio período de la onda. ¿ Por qué cada medio período ? Porque cada parte contiene carga de un signo solo y la función senoidal no puede alternar signos para dar dos semiciclos. Entonces el perímetro de la superficie tubular es igual a media longitud de onda y tenemos

$$2 \pi r = \frac{\lambda}{2}$$

$r \rightarrow$ radio del cilindro

Despejamos

$$r = \frac{\lambda}{4 \pi} \quad (214)$$

En (214) vemos que el radio del cilindro es igual al radio del fotón. Eso equivale, en términos capacitivos, a placas que cumplen la misma ley en ambos casos. Usé la palabra placas para simplificar la redacción. Sabemos que no hay placas en estas ondas, pero existen regiones que alojan cargas de signos opuestos, como en un capacitor constituido por placas.

Propongo denominar placas a las regiones que alojan cargas de signos opuestos, en cualquier configuración de tipo capacitivo.

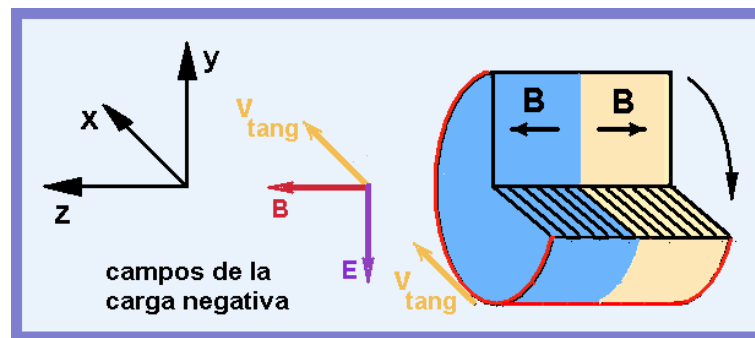
La inductancia está relacionada con densidades de corrientes y no con las medidas geométricas del cilindro. La capacitancia está relacionada con esas medidas, que tomarán los valores necesarios para lograr la resonancia. Aunque en el comienzo ignoremos las medidas, sabemos que la inductancia y la capacitancia de la onda rotativa se expresan con las mismas fórmulas que usamos para el fotón.

$$\mathcal{L} = \mu_o \frac{\lambda}{2 \pi} \quad (215)$$

$$\mathcal{C} = \varepsilon_o \frac{\lambda}{2 \pi} \quad (216)$$

(7-c) Poner a prueba el esquema

La fuerza de Lorentz forma ondas toroidales que tienen el campo magnético en la dirección del eje de rotación. El diagrama vectorial que vimos antes ayuda a comprender eso. La forma después cambia y se hace cilíndrica, pero el campo magnético mantiene la dirección axial.



La fuerza de Lorentz que curvó los cilindros tuvo la dirección del campo eléctrico. Por eso en cada partícula el campo magnético es axial. Los campos magnéticos producidos por las cargas de ambos signos fluyen a través de la frontera que separa las cargas. Esos flujos magnéticos están enlazados completamente. Y ambos lados tienen inductancias iguales. Entonces la inductancia mutua tiene el mismo valor que las otras dos.

$$M = \mathcal{L} \quad (217)$$

$M \rightarrow$ inductancia mutua de las partes que alojan cargas de signos opuestos

Esta vez no plantearemos la densidad de energía del campo magnético. Haremos el cálculo basado en la inductancia. ¿ Cuáles detalles difieren de lo hecho para el fotón ? Hagamos la lista de diferencias.

- Analizaremos una configuración propuesta por conjetura. Eso significa que las funciones de onda para las cargas no están dadas por teoremas. Las determinaremos analizando la configuración.
- En vez de un ciclo entero tenemos dos semiciclos separados, uno con carga negativa y otro con carga positiva.
- Ignoramos la relación de fases entre esos dos semiciclos separados. ¿ Qué significa ? Imaginemos un detector que ve rotar al cilindro entero, como una persona ve rotar a una rueda. La onda de la parte positiva tiene una cresta y la onda de la parte negativa tiene otra. ¿ Pasarán ambas crestas simultáneamente frente al detector ? Ignoramos la respuesta. Cualitativamente parece irrazonable creer que la crestas pasarán juntas. Es decir, parece irrazonable creer que la diferencia de fases entre ambas ondas rotativas es igual a cero. Cuando formulemos las diferenciales de las corrientes necesitaremos incluir una variable φ para expresar la diferencia de fases.
- Hay inductancia mutua.
- Los detalles mencionados exigen plantear para cada corriente dos diferenciales de energía , una basada en la inductancia individual y otra basada en la inductancia mutua.
- Para la energía del campo eléctrico basaremos el cálculo en la capacitancia. Esta vez tenemos un capacitor cargado asimétricamente.

(7-d) Funciones de ondas para las cargas

Comencemos con el cilindro que tiene cargas $-(Q_o + e)$, $+Q_o$. Una de las cargas de este cilindro supera al valor Q_o de la carga fotónica. Por eso diremos que la carga neta en este caso se produce por exceso. Y en el cilindro que tiene cargas $-(Q_o - e)$, $+Q_o$ se produce por defecto. Después veremos que ambas partículas no son igualmente tenaces. La energía potencial de cohesión es proporcionalmente mayor en el caso de la carga por exceso.

Usemos los símbolos siguientes.

- $q_a = -(Q_o + e)$
- $q_b = +Q_o$

- $i_a \rightarrow$ corriente producida por la rotación de q_a
- $i_b \rightarrow$ corriente producida por la rotación de q_b

Sabemos que el cilindro gira una vuelta entera cada medio periodo de la onda. Entonces fácilmente podemos expresar el valor medio de cada corriente.

$$\overline{i_a} = \frac{-(Q_o + e)}{\frac{T}{2}}$$

$$\overline{i_b} = \frac{+Q_o}{\frac{T}{2}}$$

$\overline{i_a} \rightarrow$ valor medio de i_a

$\overline{i_b} \rightarrow$ valor medio de i_b

Ordenamos

$$\overline{i_a} = \frac{-2(Q_o + e)}{T} \quad (218)$$

$$\overline{i_b} = \frac{+2Q_o}{T} \quad (219)$$

Muchas propiedades del cilindro son heredadas del fotón. En realidad todas las propiedades que no necesitan modificación se mantienen. Parece razonable conjeturar que las funciones de ondas de las cargas son senoidales.

Supondremos que las corrientes del cilindro tienen funciones de ondas senoidales

El teorema del valor medio da la relación entre el valor medio y el valor pico.

$$\hat{i}_a = \frac{\pi}{2} \overline{i_a} \quad (220)$$

$$\hat{i}_b = \frac{\pi}{2} \overline{i_b} \quad (221)$$

$\hat{i}_a \rightarrow$ valor pico de i_a

$\hat{i}_b \rightarrow$ valor pico de i_b

Aplicamos (218) y (219) respectivamente en (220) Y (221) .

$$\hat{i}_a = -\frac{\pi(Q_o + e)}{T} \quad (222)$$

$$\hat{i}_b = +\frac{\pi Q_o}{T} \quad (223)$$

Ahora podemos formular las funciones de ondas de las corrientes.

$$i_a = \hat{i}_a \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\theta}{2}\right) \quad (224)$$

$$i_b = \hat{i}_b \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\theta}{2} + \varphi\right) \quad (225)$$

$\theta \rightarrow$ coordenada cilíndrica angular

$\varphi \rightarrow$ diferencia de fase entre i_a e i_b

Recordemos que en una vuelta entera del cilindro cada onda cumple medio semicírculo. Por eso en los argumentos de las funciones de ondas tenemos $\frac{\theta}{2}$. Derivamos a (224) y a (225) respecto del tiempo.

$$\frac{\partial i_a}{\partial t} = \omega \hat{i}_a \cos\left(\omega t - \frac{\theta}{2}\right) \quad (226)$$

$$\frac{\partial i_b}{\partial t} = \omega \hat{i}_b \cos\left(\omega t - \frac{\theta}{2} + \varphi\right) \quad (227)$$

Escribamos la variación de cada corriente en un tiempo infinitesimal dt .

$$di_a = \frac{\partial i_a}{\partial t} dt \quad (228)$$

$$di_b = \frac{\partial i_b}{\partial t} dt \quad (229)$$

Aplicamos (226) en (228) y (227) en (229).

$$di_a = \omega \hat{i}_a \cos\left(\omega t - \frac{\theta}{2}\right) dt \quad (230)$$

$$di_b = \omega \hat{i}_b \cos\left(\omega t - \frac{\theta}{2} + \varphi\right) dt \quad (231)$$

¿Qué efecto tiene φ en la energía del campo magnético? Hay un valor de φ que maximiza la energía del campo magnético y otro que la minimiza. Todos los valores intermedios dan valores intermedios de la energía. ¿Por qué sucede eso? Porque las corrientes pueden estar en fase, en contrafase o tener una relación de fase intermedia. ¿Qué podemos hacer para tener en cuenta la relación de fase en el cálculo de la energía? Podemos aplicar las identidades trigonométricas para seno y coseno de la suma de ángulos.

Antes de eso simplifiquemos un poco las fórmulas, aprovechando el hecho de ser el tiempo única variable de derivación y posteriormente de integración. Esto significa que en los argumentos de senos y cosenos podemos omitir la parte $-\frac{\theta}{2}$. Repitamos las ecuaciones (224), (225), (230) y (231), esta vez sin esa parte.

$$i_a = \hat{i}_a \operatorname{sen}(\omega t) \quad (232)$$

$$i_b = \hat{i}_b \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \quad (233)$$

$$di_a = \omega \hat{i}_a \cos(\omega t) dt \quad (234)$$

$$di_b = \omega \hat{i}_b \cos(\omega t + \varphi) dt \quad (235)$$

Para formular la energía necesitaremos multiplicar a cada corriente por su variación. Hagámoslo ahora, que tenemos todo a la vista.

$$i_a di_a = \hat{i}_a \operatorname{sen}(\omega t) \omega \hat{i}_a \cos(\omega t) dt$$

$$i_b di_b = \hat{i}_b \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \omega \hat{i}_b \cos(\omega t + \varphi) dt$$

Agrupamos y ordenamos.

$$i_a di_a = \hat{i}_a^2 \operatorname{sen}(\omega t) \cos(\omega t) \omega dt \quad (236)$$

$$i_b di_b = \hat{i}_b^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \varphi) \omega dt \quad (237)$$

Escribamos las identidades trigonométricas mencionadas.

$$\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = \operatorname{sen}(\omega t) \cos\varphi + \cos(\omega t) \operatorname{sen}\varphi$$

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \cos\varphi - \operatorname{sen}(\omega t) \operatorname{sen}\varphi$$

Multiplicamos M.A.M. esas identidades.

$$\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \varphi) = [\operatorname{sen}(\omega t) \cos\varphi + \cos(\omega t) \operatorname{sen}\varphi] [\cos(\omega t) \cos\varphi - \operatorname{sen}(\omega t) \operatorname{sen}\varphi]$$

Aplicamos propiedad distributiva.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \varphi) &= \operatorname{sen}(\omega t) \cos(\omega t) \cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2(\omega t) \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \\ &\quad + \cos^2(\omega t) \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi - \operatorname{sen}(\omega t) \cos(\omega t) \operatorname{sen}^2\varphi \end{aligned}$$

La ecuación no cabe en una línea. Aparece enmarcada, para indicar que todo el contenido del marco pertenece a la misma ecuación. Repetiremos ese criterio cada vez que una ecuación abarque más de una línea.

Agrupamos y ordenamos.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \varphi) &= \operatorname{sen}(\omega t) \cos(\omega t) (\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi) \\ &\quad + [\cos^2(\omega t) - \operatorname{sen}^2(\omega t)] \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \quad (238) \end{aligned}$$

Simbolizaremos z a una parte de la ecuación anterior.

$$z = [\cos^2(\omega t) - \operatorname{sen}^2(\omega t)] \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \quad (239)$$

Entre $\omega t = 0$ y $\omega t = \pi$ las integrales $\int \operatorname{sen}^2(\omega t) \omega dt$ y $\int \cos^2(\omega t) \omega dt$ dan el mismo resultado. Entonces la resta de ambas integrales da cero. Es decir

$$\int_{\omega t=0}^{\omega t=\pi} z \omega dt = 0 \quad (240)$$

Cuando integremos para calcular la energía, recordemos que esta integral da cero.

En (238) reemplazamos por z la parte indicada en (239) .

$$\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{sen}(\omega t) \cos(\omega t) (\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi) + z \quad (241)$$

Repitamos aquí la ecuación (237).

$$i_b di_b = \hat{i}_b^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \varphi) \omega dt \quad (237)$$

En (237) aplicamos lo indicado en (241) .

$$i_b di_b = \hat{i}_b^2 \left[\operatorname{sen}(\omega t) \cos(\omega t) \left(\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi \right) + z \right] \omega dt \quad (242)$$

(7-e) Partícula con carga neta por exceso

A cada corriente le corresponden dos inductancias, \mathcal{L} y M , como hemos señalado previamente. Entonces la energía del campo magnético en la partícula está formada por 4 energías parciales. Formulemos las diferenciales de esas 4 energías.

$$dW_{B_1} = \mathcal{L} i_a di_a \quad (243)$$

$$dW_{B_2} = M i_a di_a \quad (244)$$

$$dW_{B_3} = \mathcal{L} i_b di_b \quad (245)$$

$$dW_{B_4} = M i_b di_b \quad (246)$$

En (243) y en (244) aplicamos (236) .

$$dW_{B_1} = \mathcal{L} \hat{i}_a^2 \operatorname{sen}(\omega t) \cos(\omega t) \omega dt \quad (247)$$

$$dW_{B_2} = M \hat{i}_a^2 \operatorname{sen}(\omega t) \cos(\omega t) \omega dt \quad (248)$$

En (245) y en (246) aplicamos (242) .

$$dW_{B_3} = \mathcal{L} \hat{i}_b^2 \left[\operatorname{sen}(\omega t) \cos(\omega t) \left(\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi \right) + z \right] \omega dt \quad (249)$$

$$dW_{B_4} = M \hat{i}_b^2 \left[\operatorname{sen}(\omega t) \cos(\omega t) \left(\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi \right) + z \right] \omega dt \quad (250)$$

Sumamos (247) y (248) . Después ordenamos.

$$dW_{B_1} + dW_{B_2} = (\mathcal{L} + M) \hat{i}_a^2 \operatorname{sen}(\omega t) \cos(\omega t) \omega dt \quad (251)$$

Sumamos (249) y (250) . Después ordenamos.

$$dW_{B_3} + dW_{B_4} = (\mathcal{L} + M) \hat{i}_b^2 \left[\operatorname{sen}(\omega t) \cos(\omega t) \left(\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi \right) + z \right] \omega dt \quad (252)$$

En (251) integramos.

$$W_{B_1} + W_{B_2} = (\mathcal{L} + M) \hat{i}_a^2 \int_{\omega t=0}^{\omega t=\pi} \operatorname{sen}(\omega t) \cos(\omega t) \omega dt \quad (253)$$

En (252) integramos.

$$W_{B_3} + W_{B_4} = (\mathcal{L} + M) \hat{i}_b^2 \int_{\omega t=0}^{\omega t=\pi} \left[\operatorname{sen}(\omega t) \cos(\omega t) \left(\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi \right) + z \right] \omega dt$$

Por lo indicado en (240) no necesitamos integrar la parte donde está z . Entonces la integral equivale a

$$W_{B_3} + W_{B_4} = (\mathcal{L} + M) \hat{i}_b^2 \int_{\omega t=0}^{\omega t=\pi} \text{sen}(\omega t) \cos(\omega t) (\cos^2\varphi - \text{sen}^2\varphi) \omega dt$$

La diferencia de fase φ no es variable de integración. Entonces tenemos

$$W_{B_3} + W_{B_4} = (\mathcal{L} + M) \hat{i}_b^2 (\cos^2\varphi - \text{sen}^2\varphi) \int_{\omega t=0}^{\omega t=\pi} \text{sen}(\omega t) \cos(\omega t) \omega dt \quad (254)$$

En (253) y en (254) aparece el mismo tipo de integral que encontramos en caso del fotón. Esta vez integramos medio ciclo y, en vez de dar el resultado igual a 2 indicado en (80), la integral definida es igual a 1 . Entonces tenemos

$$W_{B_1} + W_{B_2} = (\mathcal{L} + M) \hat{i}_a^2 \quad (255)$$

$$W_{B_3} + W_{B_4} = (\mathcal{L} + M) \hat{i}_b^2 (\cos^2\varphi - \text{sen}^2\varphi) \quad (256)$$

Repitamos aquí las ecuaciones (222) y (223) .

$$\hat{i}_a = -\frac{\pi(Q_o + e)}{T} \quad (222)$$

$$\hat{i}_b = +\frac{\pi Q_o}{T} \quad (223)$$

En (255) aplicamos (222) y en (256) aplicamos (223) .

$$W_{B_1} + W_{B_2} = (\mathcal{L} + M) \left(\frac{\pi(Q_o + e)}{T} \right)^2 \quad (257)$$

$$W_{B_3} + W_{B_4} = (\mathcal{L} + M) (\cos^2\varphi - \text{sen}^2\varphi) \left(\frac{\pi Q_o}{T} \right)^2 \quad (258)$$

La inductancia \mathcal{L} y la inductancia mutua M son iguales. Entonces tenemos

$$\mathcal{L} + M = 2\mathcal{L} \quad (259)$$

Repitamos aquí (53) .

$$\mathcal{L} = \mu_o \frac{\lambda}{2\pi} \quad (53)$$

En (259) aplicamos (53) .

$$\mathcal{L} + M = \mu_o \frac{\lambda}{\pi} \quad (260)$$

En (257) y en (258) aplicamos lo indicado en (260) .

$$W_{B_1} + W_{B_2} = \mu_o \frac{\lambda}{\pi} \left(\frac{\pi (Q_o + e)}{T} \right)^2$$

$$W_{B_3} + W_{B_4} = \mu_o \frac{\lambda}{\pi} (\cos^2\varphi - \sen^2\varphi) \left(\frac{\pi Q_o}{T} \right)^2$$

Simplificamos.

$$W_{B_1} + W_{B_2} = \pi \mu_o \frac{\lambda}{T^2} (Q_o + e)^2$$

$$W_{B_3} + W_{B_4} = \pi \mu_o (\cos^2\varphi - \sen^2\varphi) \frac{\lambda}{T^2} Q_o^2$$

Recordamos $\frac{\lambda}{T^2} = C \nu$

$$W_{B_1} + W_{B_2} = \pi \mu_o C (Q_o + e)^2 \nu \quad (261)$$

$$W_{B_3} + W_{B_4} = \pi \mu_o C (\cos^2\varphi - \sen^2\varphi) Q_o^2 \nu \quad (262)$$

La energía completa del campo magnético es la suma de las 4 contribuciones. Entonces es la suma de los miembros derechos de (261) y (262) .

$$W_B = \pi \mu_o C (Q_o + e)^2 \nu + \pi \mu_o C (\cos^2\varphi - \sen^2\varphi) Q_o^2 \nu \quad (263)$$

Agrupamos

$$W_B = \pi \mu_o C [(Q_o + e)^2 + (\cos^2\varphi - \sen^2\varphi) Q_o^2] \nu \quad (264)$$

La energía de un sistema, sea cual fuere su tamaño, tiene un valor comprendido entre un máximo y un mínimo compatibles con la existencia del sistema. Cuando la energía supera el mínimo, si el sistema puede, libera energía hasta llegar al mínimo. En el caso que analizamos, la energía de la partícula es mínima cuando el campo magnético tiene su energía mínima. ¿ Por qué ? Porque la energía del campo eléctrico depende solamente de las cargas y de la capacitancia. Por esa razón es independiente de la relación de fase. La energía del campo magnético depende de la relación de fase.

Supondremos que la partícula con carga neta por exceso tiene la relación de fase que minimiza la energía. ¿ Es adecuada esa conjetura ? Sin completar los cálculos no podemos responder. Los completaremos y después juzgaremos.

En (264) aparece el término $(\cos^2\varphi - \sen^2\varphi)$, cuyos extremos son 1 y -1 . El segundo extremo minimiza la energía.

$$W_B = \pi \mu_o C [(Q_o + e)^2 - Q_o^2] \nu$$

Desarrollamos el cuadrado del binomio. Después simplificamos y ordenamos.

$$W_B = \pi \mu_o C (2Q_o e + e^2) \nu \quad (265)$$

La energía del campo eléctrico se expresa como la energía de un capacitor cargado asimétricamente. La energía acumulada en un capacitor tiene signo positivo. Por eso prescindimos del signo de la carga negativa.

$$W_E = \frac{Q_o (Q_o + e)}{2 \mathcal{C}}$$

Aplicamos propiedad distributiva de la multiplicación.

$$W_E = \frac{Q_o^2 + Q_o e}{2 \mathcal{C}} \quad (266)$$

Repetamos aquí (162) .

$$\mathcal{C} = \epsilon_o \frac{\lambda}{2 \pi} \quad (162)$$

En (266) aplicamos (162) . Después simplificamos y ordenamos.

$$W_E = \pi \frac{Q_o^2 + Q_o e}{\epsilon_o \lambda}$$

Recordamos $\lambda = C T$,

$$W_E = \pi \frac{Q_o^2 + Q_o e}{\epsilon_o C T}$$

Recordamos $\frac{1}{\epsilon_o C} = \mu_o C$ y $\frac{1}{T} = \nu$

$$W_E = \pi \mu_o C (Q_o^2 + Q_o e) \nu \quad (267)$$

La energía total de la partícula es

$$W = W_B + W_E \quad (268)$$

En (268) aplicamos (265) y (267) .

$$W = \pi \mu_o C (2Q_o e + e^2) \nu + \pi \mu_o C (Q_o^2 + Q_o e) \nu$$

Agrupamos.

$$W = \pi \mu_o C (Q_o^2 + 3Q_o e + e^2) \nu \quad (269)$$

Estamos analizando una colisión ideal. ¿ Qué significa ? Que ambos fotones iniciadores del proceso tienen energías iguales, inciden en forma perfectamente frontal uno sobre otro y la suma de las energías de ambos fotones es igual a la suma de las energías de las partículas formadas. No interesa que la colisión ideal sea difícil en la práctica. Nuestra tarea es averiguar qué relación entre Q_o y e implican los principios físicos básicos. ¿ Cuáles ? Por ejemplo conservación de la carga, de la energía, de la cantidad de movimiento lineal, de la cantidad de movimiento angular. Buscamos coherencia en el cumplimiento de esos principios. La

colisión ideal es un proceso que no deja parámetros libres. Entonces todo está determinado y eso permite determinar la relación entre Q_o y e .

Se forman dos partículas rotativas, una con carga neta por exceso y otra con carga neta por defecto. Antes de la colisión los fotones no rotaban y la cantidad de movimiento angular era cero. Por conservación, la suma de las cantidades de movimiento angular de las partículas formadas debe ser también igual a cero. Eso es posible únicamente si ambas partículas tienen masas iguales, medidas cilíndricas iguales, distribuciones de masa iguales y frecuencias iguales en sus ondas. ¡ Eso es imposible porque no tienen cargas iguales ! , protestaríamos con vehemencia. Las cargas diferentes implican valores diferentes en la energía del campo eléctrico. La partícula con carga neta por defecto tiene menos energía en el campo eléctrico. Pero tiene más energía en el campo magnético. ¿ Cómo es posible eso ? La relación de fase entre corrientes lo hace posible. Este detalle es doblemente importante, pues también implica que el cociente entre energía potencial (eléctrica) y energía cinética (magnética) es menor en la partícula con carga neta por defecto. Esta partícula es menos tenaz que la otra. Es decir que el positrón es menos tenaz que el electrón. Después calcularemos en ambos casos el cociente entre energía del campo eléctrico y energía del campo magnético.

La suma de energías de los fotones iniciales es igual a la suma de energías de las partículas formadas. Y ambas partículas tienen energías iguales, porque sus masas deben ser iguales por conservación del momento angular. Entonces la energía de cada partícula es igual a la energía de uno de los fotones iniciales, dada por (167).

$$W = \frac{2 \pi Q_o^2}{\epsilon_o C} \nu \quad (167)$$

Recordamos $\frac{1}{\epsilon_o C} = \mu_o C$

$$W = 2 \pi \mu_o C Q_o^2 \nu \quad (270)$$

Igualemos los miembros derechos de (269) y (270).

$$\pi \mu_o C (Q_o^2 + 3Q_o e + e^2) \nu = 2 \pi \mu_o C Q_o^2 \nu$$

Simplificamos los términos que no son cargas

$$Q_o^2 + 3Q_o e + e^2 = 2Q_o^2$$

Simplifiquemos cargas y escribamos la ecuación igualada a cero.

$$-Q_o^2 + 3Q_o e + e^2 = 0 \quad (271)$$

Dividimos ambos miembros por Q_o^2 . Después simplificamos y ordenamos.

$$\left(\frac{e}{Q_o}\right)^2 + 3 \frac{e}{Q_o} - 1 = 0 \quad (272)$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado. Corresponde la solución positiva porque operamos con los valores absolutos de las cargas.

$$\frac{e}{Q_o} = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4}}{2}$$

$$\frac{e}{Q_o} = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \quad (273)$$

Simbolicemos γ (gamma) al cociente de cargas.

$$\gamma = \frac{e}{Q_o} \quad (274)$$

En (273) aplicamos lo indicado en (274) .

$$\gamma = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \quad (275)$$

Hemos supuesto que la partícula con carga neta por exceso minimiza su energía. ¿ Implica esa hipótesis algo que podamos comprobar ? Recordemos que estamos procediendo como si la constante de Planck nunca hubiese sido valuada en la práctica. ¿ Valor de esa constante ? Lo ignoramos. Sin ese dato, ¿ podemos contrastar nuestra hipótesis con algo conocido ?

Reflexionemos. Todo lo hecho desde el comienzo del documento ha conducido a (275) , que expresa un cociente de cargas. Es decir, expresa un término adimensional. En electrodinámica existe la constante de estructura fina α , que también es adimensional. Su definición es

$$\alpha = \frac{e^2}{2 \epsilon_o C h} \quad (276)$$

Recordamos $\epsilon_o C = \frac{1}{\mu_o C}$

$$\alpha = \frac{\mu_o C e^2}{2 h} \quad (277)$$

Repitamos aquí la ecuación (212) .

$$h = 2 \pi \mu_o C Q_o^2 \quad (212)$$

En (277) reemplazamos h como indica (212) . Después simplificamos.

$$\alpha = \frac{e^2}{4 \pi Q_o^2}$$

Ordenamos

$$\alpha = \frac{1}{4 \pi} \frac{e^2}{Q_o^2} \quad (278)$$

En (278) reemplazamos el cociente de cargas como indica (274) .

$$\alpha = \frac{1}{4 \pi} \gamma^2 \quad (279)$$

Aplicamos (275) . Después operamos.

$$\alpha = \frac{11 - 3\sqrt{13}}{8\pi} \quad (280)$$

En numeración decimal es

$$\text{teórico} \rightarrow \alpha = 0,00729511245667577867216257682 \dots \quad (281)$$

El valor empírico aceptado es

$$\text{empírico} \rightarrow \alpha = 0,0072973525664 \pm 0,0000000000017 \quad (282)$$

El valor teórico expresado en (281) y el valor empírico expresado en (282) difieren mutuamente. En forma porcentual la diferencia es

$$\frac{\alpha_{(\text{empírico})} - \alpha_{(\text{teórico})}}{\alpha_{(\text{empírico})}} 100 = 0,0306975674237765418 \quad (283)$$

Ese 0,03 por ciento merece atención. ¿ Por qué hay diferencia ? Una posibilidad es que nuestros cálculos den simplemente una aproximación. Otra es que los métodos empíricos necesiten más refinamiento.

Sea cual fuere el caso, entre el valor teórico y el valor empírico hay un grado de coincidencia suficiente para apoyar las conjeturas.

¿ Cuánto vale Q_o ?

$$Q_o = \frac{1}{\gamma} e = \frac{2}{-3 + \sqrt{13}} e = 3,302775637731994646 \dots e \quad (284)$$

Es decir que Q_o es próxima a 3,3 veces la carga del electrón. Las fuerzas electromagnéticas dependen del producto de las cargas. Y tenemos

$$\left(\frac{Q_o}{e}\right)^2 = \left(\frac{2}{-3 + \sqrt{13}}\right)^2 \quad (285)$$

$$\left(\frac{Q_o}{e}\right)^2 = 10,908326913195983939 \dots \quad (286)$$

Las interacciones entre dos cargas Q_o son casi 11 veces más fuertes que las interacciones entre dos cargas e . A eso se agrega otro detalle. La fuerza eléctrica entre cargas Q_o funciona como la fuerza entre las placas de un capacitor material. Entonces depende solamente de las cargas y del área de la placa. Y es independiente de la distancia.

¿ Conocemos algún tipo de fuerza independiente de la distancia y más fuerte que la fuerza entre cargas e , con un factor cercano a 11 ? Esa descripción concuerda con la fuerza denominada fuerte, que en el modelo atómico actual aparece como fuerza entre nucleones.

¿ Por qué la fuerza entre placas de un capacitor es independiente de la distancia ? Para entenderlo, comencemos expresando la energía del capacitor.

$$W_{(\text{capacitor})} = \frac{q^2}{2\mathcal{C}} \quad (287)$$

La capacitancia está dada por

$$\mathcal{C} = \epsilon_o \frac{A}{d} \quad (288)$$

$A \rightarrow$ área de la placa

$d \rightarrow$ distancia entre placas

En (287) reemplazamos \mathcal{C} como indica (288) .

$$W_{(capacitor)} = \frac{q^2}{2 \epsilon_o A} d \quad (289)$$

La fuerza es la derivada de la energía respecto de la distancia. Derivando obtenemos

$$F_{(capacitiva)} = \frac{q^2}{2 \epsilon_o A} \quad (290)$$

Vemos en (290) que la fuerza capacitiva es independiente de la distancia. Podemos reflexionar lo siguiente.

Cargamos un capacitor y después separamos mucho las placas. Por ejemplo que la distancia mutua sea de orden astronómico. Después achicamos una de las placas, por ejemplo cortando un trozo. ¿ Cuánto tarda el capacitor para cambiar el valor de la fuerza ? ¿ Puede depender del tiempo un fenómeno que no depende de la distancia ? Si hubiese alguna demora para establecer el valor nuevo de fuerza, ¿ sería violada alguna ley física en el transcurso ? En ese lapso las leyes conocidas no se cumplirían. ¿ Es posible un lapso de incumplimiento de las leyes físicas ? En caso de ser imposible, el valor nuevo de la fuerza debería establecerse simultáneamente en ambas placas. Esta conclusión es por ahora especulativa. Pero amerita un estudio detallado, no incluido en este documento.

Recordemos la analogía del anuncio luminoso mencionada en la sección (2-c). Las imágenes se mueven. Las celdillas no. Análogamente, las ondas se mueven pero el vacío no. Y todo lo existente está hecho de ondas electromagnéticas, incluyendo la materia. Lo único que cada porción del vacío hace es variar su densidad de carga. Así se producen polarizaciones que se propagan ondulatoriamente. El anuncio está controlado por un programa que puede cambiar simultáneamente los estados de dos celdillas mutuamente distantes. El programa del anuncio cumple leyes informáticas. El vacío cumple las leyes físicas denominadas ecuaciones de Maxwell. ¿ Puede el vacío controlar simultáneamente puntos distantes ? Para hacerlo necesita ondas planas que se propaguen en dirección perpendicular al segmento que media entre dos puntos. ¿ Analogía sencilla ? Una ola con frente plano viaja en dirección perpendicular a la costa. Cuando llega a la costa moja simultáneamente puntos distantes entre sí. El vacío cambia simultáneamente la fuerza en ambas placas del capacitor, aunque estén muy separadas. La simultaneidad se puede lograr con ondas planas perpendiculares al segmento que media entre las placas. Es decir que el vacío puede actuar a la vez en dos direcciones mutuamente perpendiculares. No hay algo que vaya con velocidad infinita desde una placa hasta la otra. Las dos son afectadas por algo que actúa en dirección perpendicular a la fuerza capacitiva.

Los dispositivos actuales de telecomunicaciones operan con los dos campos transversales de la onda electromagnética, que son \vec{E} y \vec{B} . Podrían ser diseñados dispositivos que operen con

el desplazamiento eléctrico expresado en la ecuación (1) , cuya componente longitudinal tiene propiedades capacitivas. Información, acciones, energía y materia podrían replicarse simultáneamente en dos puntos distantes entre sí. Tan distantes como deseemos.

Las ecuaciones de Maxwell son asombrosas. Parecen aptas para formular todo lo existente, con la variedad entera de posibilidades.

(7-e) Partícula con carga neta por defecto

No necesitamos repetir todos los pasos. Reemplazando $(Q + e)$ por $(Q - e)$ en el inicio del desarrollo, en vez de llegar a (266) y a (269) llegamos a las ecuaciones siguientes.

$$W_B = \pi \mu_o C [(Q_o - e)^2 + (\cos^2\varphi - \text{sen}^2\varphi) Q_o^2] \nu \quad (291)$$

$$W_E = \pi \mu_o C (Q_o^2 - Q_o e) \nu \quad (292)$$

La energía W de la partícula es la suma de ambas energías.

$$W = \pi \mu_o C [(Q_o - e)^2 + (\cos^2\varphi - \text{sen}^2\varphi) Q_o^2] \nu + \pi \mu_o C (Q_o^2 - Q_o e) \nu \quad (293)$$

Agrupamos.

$$W = \pi \mu_o C \nu [(2 + \cos^2\varphi - \text{sen}^2\varphi) Q_o^2 - 3 Q_o e + e^2] \quad (294)$$

Exceptuando el valor de la carga negativa y la relación de fase, todas las otras propiedades de esta partícula tienen los mismos valores que en la partícula analizada previamente. Es decir que como antes, la energía de la partícula es igual a la energía de uno de los fotones precursores, es decir

$$W = 2 \pi \mu_o C Q_o^2 \nu \quad (295)$$

Igualemos los miembros derechos de (294) y de (295) .

$$\pi \mu_o C \nu [(2 + \cos^2\varphi - \text{sen}^2\varphi) Q_o^2 - 3 Q_o e + e^2] = 2 \pi \mu_o C Q_o^2 \nu$$

Simplificamos todo lo que no es cargas.

$$(2 + \cos^2\varphi - \text{sen}^2\varphi) Q_o^2 - 3 Q_o e + e^2 = 2 Q_o^2$$

Simplificamos cargas

$$(\cos^2\varphi - \text{sen}^2\varphi) Q_o^2 - 3 Q_o e + e^2 = 0 \quad (296)$$

El acuerdo entre los valores teórico y empírico de la constante de estructura fina respalda el planteo del caso anterior, es decir, el planteo de la partícula con carga neta por exceso. Eso significa que la determinación de Q_o ha quedado establecida y no admite duda. En (294) notamos que la partícula con carga neta por defecto no puede minimizar su energía, porque ese mínimo es incoherente con el conjunto de condiciones que incluye a las magnitudes conservadas y a Q_o .

Una partícula que no tiene la energía mínima es sensible a cualquier interacción que le permita liberar energía. ¿ Sensible comparada con qué ? Comparada con una partícula que tiene la energía mínima. Por eso la configuración del positrón es menos tenaz que la configuración del electrón.

En (296) despejamos

$$(\cos^2\varphi - \text{sen}^2\varphi) = \frac{3 Q_o e - e^2}{Q_o^2}$$

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 3 \frac{e}{Q_o} - \left(\frac{e}{Q_0}\right)^2 \quad (297)$$

En (291) reemplazamos $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ como indica (297) .

$$W_B = \pi \mu_o C \left\{ (Q_o - e)^2 + \left[3 \frac{e}{Q_o} - \left(\frac{e}{Q_0}\right)^2 \right] Q_o^2 \right\} \nu \quad (298)$$

Dividimos M.A.M. (298) por (295) .

$$\begin{aligned} \frac{W_B}{W} &= \frac{\pi \mu_o C \left\{ (Q_o - e)^2 + \left[3 \frac{e}{Q_o} - \left(\frac{e}{Q_0}\right)^2 \right] Q_o^2 \right\} \nu}{2 \pi \mu_o C Q_o^2 \nu} \\ \frac{W_B}{W} &= \frac{(Q_o - e)^2 + \left[3 \frac{e}{Q_o} - \left(\frac{e}{Q_0}\right)^2 \right] Q_o^2}{2 Q_o^2} \\ \frac{W_B}{W} &= \frac{\left(1 - \frac{e}{Q_o}\right)^2 + 3 \frac{e}{Q_o} - \left(\frac{e}{Q_0}\right)^2}{2} \end{aligned}$$

Después de desarrollar el cuadrado del binomio y simplificar queda

$$\text{positrón} \quad \rightarrow \quad \frac{W_B}{W} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{e}{Q_o}\right) \quad (299)$$

Expresado como número decimal es

$$\text{positrón} \quad \rightarrow \quad \frac{W_B}{W} = 0,651387818 \dots \quad (300)$$

¿ Qué significa (300) ? Significa que en el positrón más del 65 por ciento de la energía total está en el campo magnético. Y menos del 35 por ciento en el campo eléctrico. Es decir que la energía cinética es casi el doble de la energía potencial. Esa configuración liberará una gran proporción de su energía en la primera interacción que lo permita. Por eso el positrón se descompone en poco tiempo cuando no está resguardado por condiciones especiales.

¿ Qué proporción de energías tiene el electrón ? La energía del campo magnético del electrón está dada por (265) .

$$W_B = \pi \mu_o C (2Q_o e + e^2) \nu \quad (265)$$

Dividimos M.A.M. (265) por (295) .

$$\begin{aligned} \frac{W_B}{W} &= \frac{\pi \mu_o C (2Q_o e + e^2) \nu}{2 \pi \mu_o C Q_o^2 \nu} \\ \frac{W_B}{W} &= \frac{2Q_o e + e^2}{2Q_o^2} \\ \text{electrón} \quad \rightarrow \quad \frac{W_B}{W} &= \frac{e}{Q_o} + \frac{1}{2} \left(\frac{e}{Q_o}\right)^2 \end{aligned} \quad (301)$$

En numeración decimal tenemos

$$\text{electrón} \rightarrow \frac{W_B}{W} = 0,348612181 \dots \quad (302)$$

¿ Qué significa (302) ? Significa que en el electrón menos del 35 por ciento de la energía total está en el campo magnético. Y más del 65 por ciento en el campo eléctrico. Es decir que la energía potencial es casi el doble de la energía cinética. Esa configuración ofrece una barrera de potencial que las interacciones deberán vencer antes de llegar a la descomposición de la partícula. En vez de estar listo para descomponerse y liberar energía, el electrón se opone a ser descompuesto.

La proporción de energía en el campo eléctrico del electrón es

$$\begin{aligned} \text{electrón} &\rightarrow \frac{W_E}{W} = \frac{\pi \mu_o C (Q_o^2 + Q_o e)}{2 \pi \mu_o C Q_o^2} \\ \text{electrón} &\rightarrow \frac{W_E}{W} = \frac{(Q_o^2 + Q_o e)}{2 Q_o^2} \\ \text{electrón} &\rightarrow \frac{W_E}{W} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{e}{Q_o} \right) \end{aligned} \quad (303)$$

El miembro derecho de (303) y el miembro derecho de (299) son iguales. Entonces el campo magnético del positrón y el campo eléctrico del electrón tienen la misma proporción de energía. Por consecuencia, el campo eléctrico del positrón y el campo magnético del electrón tienen proporciones de energía iguales. Merece atención el detalle siguiente.

La proporción de energía en el campo magnético del positrón es exactamente igual a la proporción de energía en el campo eléctrico del electrón y viceversa. Son dos casos completamente simétricos respecto a carga, momento angular y reparto de energía en los campos. Son idénticos en forma y medidas geométricas, en energía total y en distribución de masa. Si sumamos las energías de ambas partículas, es decir si el par de partículas es el sistema tomado en cuenta, la mitad de la energía está en el campo eléctrico y la otra mitad en el campo magnético. Lo mismo se observa en el fotón.

El vacío engendra fotones y éstos, por colisión mutua, engendran materia en forma de pares simétricos, semejantes al par formado por el electrón y el positrón. Todo lo existente está hecho de campos electromagnéticos ondulantes. Entonces el reparto simétrico es general. La mitad de la energía del universo está en el campo magnético y la otra mitad en el campo eléctrico. Esta simetría podría ser la base de algunos teoremas cosmológicos fundamentales.

CAPÍTULO 8 - Cantidad de movimiento angular

(8-a) Spin del fotón

Gran parte del tema fue tratada previamente. Repasemos lo tratado haciendo una lista.

- Las dos densidades de corriente simétricas que operan en la dirección de propagación son producidas por cargas puntuales giratorias.
- Cada carga puntual giratoria produce el campo magnético en el punto correspondiente y produce energía cinética rotacional.
- La relación entre energía y cantidad de movimiento demostrada por Maxwell implica la relación entre masa y energía propuesta por Einstein.
- La relación entre masa y energía implica propiedades mecánicas en la onda electromagnética.
- Una de las propiedades mecánicas es el momento angular infinitesimal del giro puntual, expresado en (124). El fotón no gira. Es análogo a un vehículo que viaja en línea recta y que, en su interior, contiene gran cantidad de giróscopos pequeños. Es decir que en el fotón hay una densidad de momento angular que llena todo el volumen.

Repitamos aquí la ecuación (124) .

$$d\mathcal{A} = \frac{dW}{\omega_o} \quad (124)$$

Integrando obtenemos el monto del momento angular distribuido.

$$\mathcal{A} = \frac{W}{\omega_o} \quad (304)$$

Repitamos aquí la ecuación (270) .

$$W = 2 \pi \mu_o C Q_o^2 \nu \quad (270)$$

En (304) reemplazamos W como indica (270) .

$$\mathcal{A} = \frac{2 \pi \mu_o C Q_o^2 \nu}{\omega_o}$$

Recordamos $\omega_o = \omega = 2 \pi \nu$ y simplificamos.

$$\mathcal{A} = \mu_o C Q_o^2 \quad (305)$$

El término $\mu_o C$ es la resistencia de radiación (se expresa en ohm en el sistema MKS). Entonces (305) informa que el monto de momento angular distribuido en el fotón es igual a la resistencia multiplicada por el cuadrado de la carga contenida en cada semiciclo.

¿ Qué significa eso ? Significa que el momento angular distribuido es una propiedad puramente electromagnética. Eso es obvio cuando miramos la fórmula. Más profundamente implica un nexo entre mecánica y electrodinámica. Maxwell ideó un modelo mecánico muy refinado y muy sutil para formular en esos términos las leyes y las propiedades electromagnéticas. El modelo permitió sintetizar todo en un sistema de 20 ecuaciones fundamentales. Oliver Heavside demostró que si en vez de cuaterniones se utilizan vectores, las 20 ecuaciones pueden sintetizarse en 4 , denominadas actualmente ecuaciones de Maxwell. Sintetizar 20 ecuaciones en 4 es como disminuir la densidad del océano. Cada témpano descende. Entonces queda menos parte visible y más parte sumergida. En la analogía, la

parte visible es lo formulado explícitamente y la parte sumergida es lo implícito. Quien desee conocer lo implícito deberá bucear.

Cuando Maxwell obtuvo las 20 ecuaciones fundamentales decidió abandonar el modelo mecánico que le ayudó a obtenerlas. Básicamente comprendió que las leyes electromagnéticas no necesitan un sustento conceptual mecánico. James Clerk Maxwell necesitó ese sustento para abordar un tema nuevo. Y después, con mucho acierto, entendió que el modelo mecánico fue simplemente una necesidad personal. Tengamos en cuenta que, en la época de Maxwell, la mecánica era la teoría física mejor formulada. No es criticable la idea de crear un modelo basado en ella. En realidad, es admirable un modelo provisorio con ese grado de complejidad y con ese refinamiento. También es admirable reconocer la diferencia entre una necesidad personal y los fundamentos de la ciencia.

Repitamos aquí la ecuación (212) .

$$h = 2 \pi \mu_o C Q_o^2 \quad (212)$$

Despejamos.

$$Q_o^2 = \frac{h}{2 \pi \mu_o C} \quad (306)$$

En (305) reemplazamos Q_o como indica (306) .

$$\mathcal{A} = \mu_o C \frac{h}{2 \pi \mu_o C}$$

Simplificamos.

$$\mathcal{A} = \frac{h}{2 \pi} \quad (307)$$

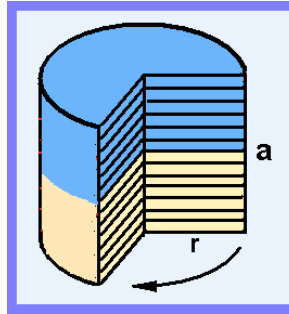
Vemos en (307) que el monto del momento angular distribuido en el fotón es lo que se denomina habitualmente spin del fotón.

Podemos notar algo. La teoría cuántica clasifica como bosones a todas las partículas que cumplen la estadística de Bose-Einstein. En esa estadística no está limitado el número de partículas que pueden habitar dentro de un volumen finito. Siempre es posible agregar más o quitar. Esa teoría atribuye a cada bosón un monto de momento angular que es múltiplo de $\frac{h}{2 \pi}$, sin describir el fenómeno que lo produce. Solamente da el valor.

Cuando planteamos la propagación en sentido inverso, como una película pasada al revés, entendimos que las cargas de los fotones convergentes se suman y todo queda en paralelo. No hay límites inferior ni superior para el número de fotones que pueden coexistir en la zona cercana. Cuando analizamos la razón de ser Q_o una constante universal, lo entendimos en un contexto más amplio. La teoría cuántica interpreta eso abstractamente, como una consecuencia obvia de la estadística de Bose-Einstein. Los fotones se clasifican como bosones y pueden acumularse sin límite en una región de tamaño finito. Si alguien pregunta por qué pueden acumularse ilimitadamente, la teoría cuántica responde en forma estadística. La electrodinámica maxwelliana responde en forma física, planteando la suma de cargas y asimilando la situación a una conexión en paralelo de inductores y capacitores.

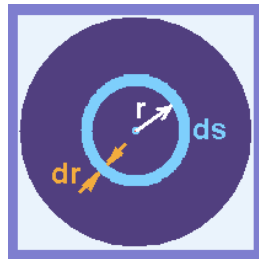
(8-b) Spin del electrón y del positrón

¿ Qué distribución de masa tiene el electrón ? En la sección (7-b) hemos analizado la forma cilíndrica, cuyo frente de onda es rectangular.



La densidad de energía es uniforme en todo el frente de onda. Entonces no es función de la coordenada radial. En cada frente de onda sucede lo mismo. Entonces podemos facilitar nuestro cálculo, procediendo como si la variación en función de la coordenada angular no existiese. ¿ Por qué ? Si tuviésemos en cuenta esa variación, al integrar en función del ángulo sumaríamos infinitésimos del mismo tipo, es decir infinitésimos con densidades de energía que no son funciones del radio. Y obtendríamos el mismo resultado que se obtiene omitiendo la variación angular de la densidad. Eso significa que el momento angular del electrón equivale al momento angular de un cilindro cuya densidad es uniforme en todo el volumen.

Para calcular el momento angular de un cilindro con densidad uniforme en todo el volumen, tampoco necesitamos tener en cuenta la coordenada axial. Es suficiente referir el cálculo a un círculo que tenga la misma masa que el electrón. Quien dude del cálculo abreviado, puede hacer el cálculo detallado y comprobar que da el mismo monto de momento angular.



No necesitamos plantear la densidad. Solamente necesitamos el cociente de la masa del cilindro dividida por la superficie total del círculo. A ese cociente lo simbolizaremos κ .

$$\kappa = \frac{m}{\pi R^2} \quad (308)$$

$m \rightarrow$ masa del electrón

$R \rightarrow$ radio del círculo (igual al radio del cilindro)

Entre r y $r + dr$ hay un anillo que tiene superficie infinitesimal ds .

$$ds = 2 \pi r dr \quad (309)$$

Ese anillo posee una masa infinitesimal dm cuya expresión es

$$dm = \kappa ds \quad (310)$$

En (310) aplicamos (308) y (309) .

$$dm = \frac{m}{\pi R^2} 2 \pi r dr$$

Simplificamos y ordenamos.

$$dm = \frac{2 m}{R^2} r dr \quad (311)$$

El momento angular $d\mathcal{A}$ de la masa dm es

$$d\mathcal{A} = dm v_r r$$

$v_r \rightarrow$ velocidad tangencial para el radio r

Recordamos $v_r = \omega r$

$$d\mathcal{A} = dm \omega r^2 \quad (312)$$

$\omega \rightarrow$ velocidad angular del círculo (es decir del cilindro)

En (312) reemplazamos dm como indica (311) .

$$d\mathcal{A} = \frac{2 m}{R^2} r dr \omega r^2$$

$$d\mathcal{A} = \frac{2 m \omega}{R^2} r^3 dr$$

Integramos

$$\mathcal{A} = \frac{2 m \omega}{R^2} \int_{r=0}^{r=R} r^3 dr$$

$$\mathcal{A} = \frac{2 m \omega}{R^2} \left[\frac{R^4}{4} \right]_{r=0}^{r=R}$$

$$\mathcal{A} = \frac{2 m \omega}{R^2} \frac{R^4}{4}$$

Simplificamos

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} m \omega R^2 \quad (313)$$

Como hemos razonado en la sección (7-b), el borde del cilindro está expuesto al vacío. Por eso la velocidad tangencial en ese borde es igual a la velocidad de propagación en el vacío. Es decir,

$$\omega R = C$$

Despejamos

$$R = \frac{C}{\omega} \quad (314)$$

En (313) reemplazamos R como indica (314) .

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} m \omega \frac{C^2}{\omega^2}$$

Simplificamos.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \frac{m C^2}{\omega} \quad (315)$$

En términos ondulatorios, ¿qué intervalo angular está contenido en una vuelta geométrica del cilindro? Para responder sin dificultad necesitamos comprender lo siguiente. Antes de formarse el cilindro había, en cada fotón, dos semiciclos desarrollados en trayectoria recta. Cada semiciclo abarca un intervalo angular igual a π en la función de onda. Ambos en conjunto abarcan 2π . Si desplegásemos en línea recta ambas cargas del cilindro, una siguiendo a otra, abarcarían un intervalo 2π . Entonces, ¿qué intervalo angular ondulatorio está contenido en una vuelta del cilindro? Debemos responder 2π , para que haya correlación entre los fotones precursores y los cilindros que la colisión ha formado. En cada vuelta del cilindro se desarrollan los mismos dos semiciclos que tendríamos desplegando la función de onda en línea recta. Eso significa que a la función de onda le corresponde la frecuencia angular siguiente.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (316)$$

$\omega \rightarrow$ frecuencia angular de la función de onda

$T \rightarrow$ tiempo de rotación del cilindro para una vuelta entera

El giro del cilindro como un todo recorre un ángulo 2π en el mismo tiempo T . Entonces el término ω expresado en (316) es igual a la velocidad angular de la rotación mecánica.

Recordamos lo siguiente.

$$m C^2 = h \nu \quad (317)$$

$$\omega = 2\pi \nu \quad (318)$$

En (315) reemplazamos $m C^2$ y ω como indican (317) y (318) respectivamente.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \frac{h \nu}{2\pi \nu}$$

$$\text{electrón} \rightarrow \mathcal{A} = \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi} \quad (319)$$

Notamos que (315) concuerda con el momento angular que la teoría cuántica atribuye al electrón. El electrón y el positrón tienen el mismo tipo de distribución de masa y son mecánicamente iguales. Por eso el resultado es el mismo.

$$\text{positrón} \rightarrow \mathcal{A} = \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi} \quad (320)$$

Cuando alguien pregunta por qué las partículas como el electrón y el positrón tienen ese monto de momento angular, la teoría cuántica responde que obedecen a la estadística de Fermi-Dirac, distinta de la estadística de Bose-Einstein. La electrodinámica maxwelliana da una respuesta física detallada.

Este contexto invita a preguntar lo siguiente.

¿Hay razones para entender que la estadística de Bose-Einstein es válida en los casos de giro puntual y que, en los casos de partículas que giran como un todo, vale la estadística de Fermi-Dirac?

Notamos que la pregunta contiene una conjetura. No intentaré analizarla.

(8-c) Carga neta y Fuerza de Lorentz

Denominamos carga neta a la suma algebraica de las cargas $-(Q_o + e)$ y $+Q_o$. ¿ Es la carga neta un artificio matemático o tiene atributos físicos que podamos reconocer ? En caso de tenerlos, ¿ dónde está alojada ?

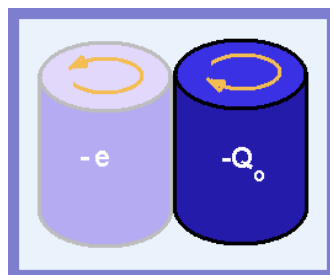
Cuando la respuesta no es evidente, lo típico es hacer una primera hipótesis y analizar las consecuencias. En caso de conducir a consecuencias incoherentes, desechamos la primera hipótesis y hacemos otra, si es incoherente otra más y así sucesivamente hasta encontrar una respuesta coherente.

Como primera hipótesis parece razonable suponer que está distribuida dentro del cilindro. La carga neta gira con el cilindro. Su velocidad tangencial y el campo magnético axial son mutuamente perpendiculares. El producto vectorial es distinto de cero. Específicamente tiene el valor máximo posible, por la perpendicularidad entre \vec{B} y la velocidad tangencial. Entonces la componente magnética de la fuerza de Lorentz es máxima. La componente eléctrica de la fuerza de Lorentz no existe, porque la carga ondulatoria no tiene interacción coulombiana consigo misma.

Si hacemos el diagrama vectorial, notamos que la fuerza $e (\vec{v}_r \times \vec{B})$ tiene dirección radial y apunta del centro al borde del cilindro. Es decir empuja a la carga neta hacia la fuera del cilindro. Esto significa que habitar dentro del cilindro es una condición inestable para la carga neta. Esa condición inestable se establece inmediatamente después de la colisión entre los fotones precursores, pero no puede perdurar. El interior del cilindro es zona prohibida para la carga neta e .

En el primer instante después de la colisión fotónica, la distribución de la carga neta tiene geometría cilíndrica. ¿ Conserva esa distribución cuando es desplazada hacia fuera del cilindro de propagación ? Nuevamente la analogía de la cinta, comentada en la sección (7-b), sugiere que la forma cilíndrica debería mantenerse, con las medidas y las propiedades cinemáticas originales. Entonces, en la condición estable, habría un cilindro de poca masa orbitando alrededor del cilindro principal. El cilindro liviano tiene la carga e distribuida dentro de él. El radio y la velocidad angular giroscópica del cilindro liviano son iguales al radio y la velocidad angular giroscópica del cilindro principal. ¿ Qué es la velocidad angular giroscópica ? Prefiero denominar así a la velocidad angular del giro del cilindro alrededor de su eje propio. Es una denominación breve y describe bien la idea.

La fuerza de Lorentz cesa cuando ninguna parte del cilindro liviano se interpenetra con el cilindro principal. Esto, en lenguaje coloquial, admite la descripción siguiente. Ambos cilindros se tocan tangencialmente, sin penetración mutua. Es decir, en cada instante tienen un solo segmento en común. Grafiquemos la idea. Representemos en la figura solamente la región de carga negativa.



Cuando el cilindro liviano es expulsado hacia la periferia, gira en el mismo sentido que el cilindro principal. El cilindro liviano se ubica alrededor de la parte negativa del cilindro principal, porque de ahí provino. Respecto a esa parte, el cilindro liviano se comporta como una espira y también sucede lo recíproco. Los campos magnéticos de ambas espiras no duran mucho apuntando en el mismo sentido. Entonces la parte más liviana se invierte. Por eso el giro de la parte liviana es inverso al giro de la parte principal.

Hay algo que no hemos tenido en cuenta aún. La energía del cilindro principal disminuye cuando la carga neta es expulsada hacia la periferia. En el transcurso de la expulsión ambos cilindros, liviano y principal, sufren un aumento del radio. Recordemos que en este tipo de objetos la longitud de onda aumenta cuando la energía disminuye. ¿ Cuánta energía tiene el cilindro liviano ? Si pudiésemos calcularla, podríamos determinar el aumento del radio.

¿ Podemos calcular algo sin conocer el aumento radial ? Sí, podemos calcular la cota inferior del momento magnético. Es decir calcular el momento magnético que tendría el electrón si la energía del cilindro liviano fuese igual a cero. Haciendo eso sabremos con seguridad que el momento magnético es superior a ese valor.

(8-d) Cota inferior del momento magnético del electrón

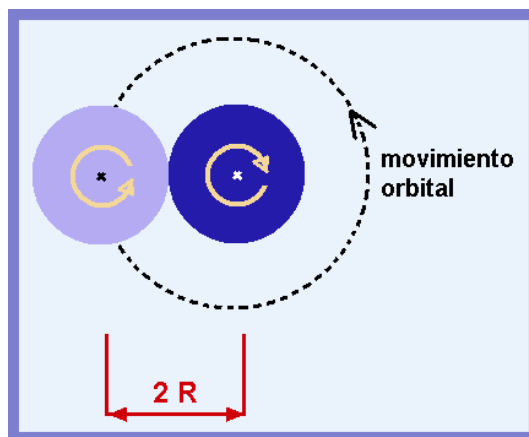
El cilindro liviano describe una órbita circular alrededor del cilindro principal. Eso genera una corriente con forma de circunferencia, es decir, una espira circular recorrida por una corriente. El valor medio de esa corriente es

$$i_m = \frac{e}{T}$$

i_m → valor medio de la corriente
 T → tiempo de una vuelta orbital entera

Recordamos $\frac{1}{T} = \nu$

$$i_m = e \nu \tag{321}$$



Para el cálculo de valores medios, el cilindro liviano con rotación giroscópica equivale a un cilindro con densidad de carga uniforme. Entonces equivale a una carga e que recorre una circunferencia de radio $2 R$. Esa circunferencia es el borde de un círculo, cuya área a es

$$a = \pi (2 R)^2$$

$$a = 4 \pi R^2 \quad (322)$$

El momento magnético de la espira equivalente es

$$\mu_i = a i_m \quad (323)$$

En (323) reemplazamos a como indica (322), i_m como indica (321).

$$\mu_i = 4 \pi R^2 e \nu$$

Recordamos $R = \frac{\lambda}{4 \pi}$

$$\mu_i = 4 \pi \left(\frac{\lambda}{4 \pi} \right)^2 e \nu$$

$$\mu_i = \frac{\lambda^2}{4 \pi} e \nu$$

En el miembro derecho multiplicamos por ν numerador y denominador.

$$\mu_i = \frac{\lambda^2}{4 \pi \nu} e \nu^2$$

Recordamos $\lambda \nu = C$

$$\mu_i = \frac{e C^2}{4 \pi \nu} \quad (324)$$

De $m_e C^2 = h \nu$ despejamos

$$C^2 = \frac{h \nu}{m_e} \quad (325)$$

$m_e \rightarrow$ masa del electrón

En (324) reemplazamos C^2 como indica (325).

$$\mu_i = \frac{e}{4 \pi \nu} \frac{h \nu}{m_e}$$

$$\mu_i = \frac{e h}{4 \pi m_e} \quad (326)$$

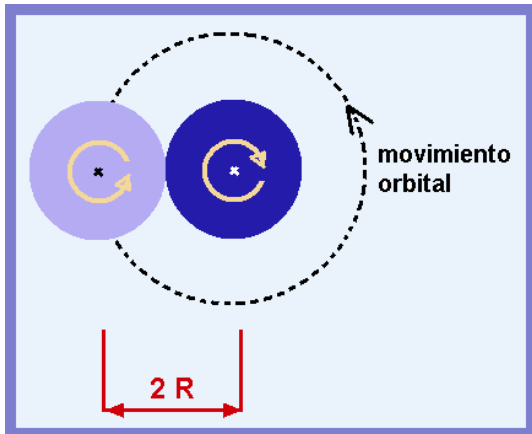
El miembro derecho de (326) es el magnetón de Bohr. La ecuación (326) informa que el magnetón de Bohr es la cota inferior del momento magnético del electrón. El momento magnético es mayor que esa cota.

(8-e) La energía del cilindro liviano

En el cilindro liviano hay carga de un signo solamente. Por esa razón la carga no llena el volumen del cilindro y se distribuye sobre la superficie tubular. Dentro del cilindro, por simetría, cada vector \vec{E} tiene un compañero igual y opuesto. Ese par de vectores da resultante nula. Consecuentemente,

Condición 1 : el campo eléctrico es igual a cero en todo el interior del cilindro liviano.

Si aplicamos el teorema de Gauss al cilindro liviano obtenemos que, para $r \geq R$, el campo eléctrico es idéntico al campo de una carga e distribuida en el eje del cilindro liviano. En una órbita entera, ese eje barre una superficie tubular de radio igual a $2R$.



Esa órbita es recorrida en el mismo tiempo T de una vuelta giroscópica entera. La corriente producida en esa órbita es

$$i = \frac{e}{T_p} \quad (327)$$

$i \rightarrow$ corriente producida por e en su órbita

$T_p \rightarrow$ período de la onda del cilindro principal (después de la expulsión)

Tenemos

$$\frac{1}{T_p} = \nu_p \quad (328)$$

$\nu_p \rightarrow$ frecuencia ondulatoria del cilindro principal (después de la expulsión)

En (327) reemplazamos $\frac{1}{T_p}$ como indica (328).

$$i = e \nu_p \quad (329)$$

¿ Es calculable el energía magnética de la carga e ? Si pensamos en algún cálculo basado en la ley de Biot y Savart o en algo similar, probablemente aparecerán complicaciones. ¿ Es posible otro tipo de cálculo ? Sí, basado en la inductancia. Recordemos que a la corriente constante también le corresponde una inductancia. ¿ Qué inductancia corresponde a la corriente constante i del electrón ? Razonemos. Si en las condiciones del cilindro liviano la inductancia fuese menor que en el cilindro principal, emigraría carga desde el cilindro principal hacia el cilindro liviano, para minimizar la energía. Y si en el cilindro liviano la inductancia fuese mayor que en cilindro principal, la expulsión sería imposible. La única condición que estabiliza al sistema de los dos cilindros es tener inductancias iguales.

Condición 2 : Las inductancias son iguales en ambos cilindros.

Todas las propiedades de este tipo de objetos se alojan dentro de algún volumen finito, porque son originadas por polarización del vacío. Por ejemplo, la energía del fotón está contenida dentro del volumen cilíndrico del fotón. En todos los puntos que no pertenecen al volumen de algún fotón, el vacío está en condición neutra. Es decir, no hay energía de

configuración. La misma condición se cumple en el cilindro principal del electrón. La energía está completamente contenida dentro de ese cilindro. El cilindro liviano debe cumplir esa condición. Es decir, todos los objetos de esta clase cumplen la condición siguiente.

Condición 3 : En los objetos elementales, como el fotón y electrón, la energía de configuración es el único tipo de energía existente.

Por configuración, el cilindro liviano tiene la energía magnética de la corriente constante i . Por la condición 1 , en ese cilindro no hay energía del campo eléctrico. Entonces tenemos lo siguiente.

Condición 4 : La única energía del cilindro liviano es la energía magnética de la corriente constante.

Entonces la energía del cilindro principal después de la expulsión es

$$W_p = W - W_e \quad (330)$$

W_p → energía del cilindro principal después de la expulsión

W → energía del cilindro principal antes de la expulsión (energía total del electrón)

W_e → energía de la carga e (energía de configuración del cilindro liviano)

En esta clase de objetos, la relación entre energía y frecuencia ondulatoria está dada por (211) . Repitamos aquí esa ecuación.

$$W = 2 \pi \mu_o C Q_o^2 \nu \quad (211)$$

W → energía total del electrón (correspondiente a su masa constitutiva)

ν → frecuencia ondulatoria del electrón (correspondiente a la energía de su masa constitutiva)

Y para el cilindro principal, después de la expulsión,

$$W_p = 2 \pi \mu_o C Q_o^2 \nu_p \quad (331)$$

ν_p → frecuencia ondulatoria del cilindro principal (después de la expulsión)

En (330) reemplazamos W_p como indica (331) y W como indica (211) .

$$2 \pi \mu_o C Q_o^2 \nu_p = 2 \pi \mu_o C Q_o^2 \nu - W_e \quad (332)$$

La energía magnética de una corriente constante es igual la mitad de la inductancia multiplicada por el cuadrado de la corriente. Entonces para la carga e tenemos

$$W_e = \frac{1}{2} \mathcal{L}_e i^2 \quad (333)$$

\mathcal{L}_e → inductancia de la corriente constante debida a e

Por la condición 2 tenemos

$$\mathcal{L}_e = \mu_o \frac{\lambda_p}{2 \pi} \quad (334)$$

λ_p → longitud de onda del cilindro principal (después de la expulsión)

En (333) reemplazamos \mathcal{L}_e como indica (334) .

$$W_e = \frac{1}{2} \mu_o \frac{\lambda_p}{2 \pi} i^2 \quad (335)$$

En (335) reemplazamos i como indica (329) .

$$W_e = \frac{1}{2} \mu_o \frac{\lambda_p}{2 \pi} (e \nu_p)^2$$

Ordenamos

$$W_e = \frac{\mu_o e^2}{4 \pi} \lambda_p \nu_p^2$$

Recordamos $\lambda_p \nu_p = C$

$$W_e = \frac{\mu_o C e^2}{4 \pi} \nu_p \quad (336)$$

En (332) reemplazamos W_e como indica (336) .

$$2 \pi \mu_o C Q_o^2 \nu_p = 2 \pi \mu_o C Q_o^2 \nu - \frac{\mu_o C e^2}{4 \pi} \nu_p$$

Dividimos ambos miembros por $2 \pi \mu_o C Q_o^2$. Después simplificamos.

$$\nu_p = \nu - \frac{1}{8 \pi^2} \left(\frac{e}{Q_o} \right)^2 \nu_p$$

Despejamos.

$$\nu_p = \frac{\nu}{1 + \frac{1}{8 \pi^2} \left(\frac{e}{Q_o} \right)^2} \quad (337)$$

No necesitamos repetir los pasos que hicimos para llegar a (324) . Si en esa ecuación cambiamos ν por ν_p , en vez de la cota inferior tendremos el momento magnético μ_e del electrón.

$$\mu_e = \frac{e C^2}{4 \pi \nu_p} \quad (338)$$

En (338) reemplazamos ν_p como indica (337) .

$$\mu_e = \frac{e C^2}{4 \pi \nu} \left[1 + \frac{1}{8 \pi^2} \left(\frac{e}{Q_o} \right)^2 \right] \quad (339)$$

Repitamos aquí la ecuación (325) .

$$C^2 = \frac{h \nu}{m_e} \quad (325)$$

En (339) reemplazamos C^2 como indica (325) . Después simplificamos.

$$\mu_e = \frac{e h}{4 \pi m_e} \left[1 + \frac{1}{8 \pi^2} \left(\frac{e}{Q_o} \right)^2 \right] \quad (340)$$

La definición del magnetón de Bohr μ_B es

$$\mu_B = \frac{e h}{4 \pi m_e} \quad (341)$$

Dividimos M.A.M. (340) por (341) . Después simplificamos.

$$\frac{\mu_e}{\mu_b} = 1 + \frac{1}{8 \pi^2} \left(\frac{e}{Q_o} \right)^2 \quad (342)$$

¿ Hay algún efecto no tenido en cuenta ? Es decir, ¿ es inexacta (342) porque hayamos omitido algún efecto ? En muchos casos conocidos la permeabilidad magnética es función de la densidad de energía. En el caso del electrón también debería serlo. Sería razonable una inexactitud en nuestro cálculo, porque está referido a μ_o en vez de μ_p . La dependencia de la permeabilidad magnética respecto a la densidad de energía es un tema que ignoro. Por eso no puedo juzgar la proporción de inexactitud de (342) .

En este esquema es evidente la relación entre g y α .

$$g = 2 \frac{\mu_e}{\mu_B} \quad (343)$$

En (343) reemplazamos el cociente como indica (342) .

$$g = 2 \left[1 + \frac{1}{8 \pi^2} \left(\frac{e}{Q_o} \right)^2 \right] \quad (344)$$

Repitamos aquí la ecuación (278) .

$$\alpha = \frac{1}{4 \pi} \left(\frac{e}{Q_o} \right)^2 \quad (278)$$

En (344) reemplazamos según lo indicado en (278) .

$$g = 2 \left(1 + \frac{\alpha}{4 \pi} \right) \quad (345)$$

Los experimentos dedicados a medir el factor g del electrón son aceptados como los experimentos más confiables y más exactos realizados hasta el presente. Esos experimentos han dado el valor siguiente.

$$experimental \rightarrow g = 2,00231930436182 \pm 0,000000000000052 \quad (346)$$

El cociente $\frac{e}{Q_o}$ está dado por (273) .

$$\frac{e}{Q_o} = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \quad (273)$$

Aplicando (274) en (344) resulta

$$g = 2 \left[1 + \frac{11 - 3\sqrt{13}}{(4 \pi)^2} \right] \quad (347)$$

En numeración de cimal tenemos

$$\text{según (344)} \rightarrow g = 2,00232210641578 \dots \quad (348)$$

Los experimentos miden $g - 2$. Entonces comparemos el valor de $g - 2$ dado por (344) con el valor experimental.

$$\frac{(g - 2)_{\text{teórico}} - (g - 2)_{\text{empírico}}}{(g - 2)_{\text{empírico}}} = 0,0012081 \dots \quad (349)$$

Notamos que (344) da un error relativo cercano al 0,12 por ciento. La causa más probable, comentada previamente, es la dependencia de la permeabilidad magnética respecto a la densidad de energía.

¿ Sirve para algo el error de (344) respecto al valor empírico ? Sí, para determinar el valor de μ_p con el mismo experimento que mide el factor g . ¿ En cuál energía interviene μ_p ? En la energía W_e , expresada por (336). Repitamos esa ecuación aquí.

$$\text{con permeabilidad equivocada} \rightarrow W_e = \frac{\mu_o C e^2}{4 \pi} \nu_p \quad (336)$$

En vez de μ_o tendría que ser μ_p .

$$W_e = \frac{\mu_p C e^2}{4 \pi} \nu_p \quad (350)$$

Los campos del cilindro principal dependen solamente de la polarización del vacío. ¿ Por qué ? Porque pertenecen a las cargas Q_o . Entonces en W y W_p interviene μ_o . La ecuación que sigue a (336) necesita ser corregida en la forma siguiente.

$$2 \pi \mu_o C Q_o^2 \nu_p = 2 \pi \mu_o C Q_o^2 \nu - \frac{\mu_p C e^2}{4 \pi} \nu_p \quad (351)$$

Dividimos ambos miembros de (351) por $2 \pi \mu_o C Q_o^2$

$$\nu_p = \nu - \frac{\mu_p}{\mu_o} \frac{1}{8 \pi^2} \left(\frac{e}{Q_o} \right)^2 \nu_p$$

Operamos

$$\frac{\mu_p}{\mu_o} \frac{1}{8 \pi^2} \left(\frac{e}{Q_o} \right)^2 \nu_p = \nu - \nu_p$$

$$\frac{\mu_p}{\mu_o} = 8 \pi^2 \left(\frac{Q_o}{e} \right)^2 \left(\frac{\nu}{\nu_p} - 1 \right) \quad (352)$$

En el miembro derecho de (352) ν es un dato experimental conocido.

$$\nu = \frac{m C^2}{h} \quad (353)$$

Entonces la única tarea experimental es determinar ν_p . Después de la expulsión se establece la condición estable. Cuando nada obliga al electrón a absorber energía, ν_p es la frecuencia de resonancia del electrón. ¿ Por qué solamente digo absorber energía ? Porque el electrón

tiene la energía mínima posible. No puede liberar energía sin descomponerse. Entonces el experimento debe medir la frecuencia de resonancia constitutiva del electrón, sin provocar un aumento en la energía constitutiva.

(8-f) Momento magnético del positrón

El mismo tipo de fenómeno que produce la expulsión de la carga neta en el electrón, produce la expulsión de la carga neta en el positrón. Y en ambos casos el cilindro principal y el cilindro liviano están obligados a tener inductancias iguales por la condición de estabilidad. Consecuentemente, según el esquema que hemos planteado, el factor g tiene en ambos casos el mismo valor. No hay necesidad de repetir los cálculos. Quien desee puede hacerlo.

Un detalle que no podemos omitir es la ubicación del cilindro liviano alrededor del hemcilindro donde se produjo la expulsión. Si esa conjetura es adecuada, entonces el electrón tiene un poco más de masa en su parte negativa y el positrón en su parte positiva. En algún tipo de situación eso podría ser puesto en evidencia.

CAPÍTULO 9 - Asuntos ligados al tema principal

(9-a) Contenido falsable

Karl Popper (1902-1994) mostró que son deseables resultados específicos, formulados nítidamente, aptos para ser sometidos a pruebas experimentales. Los resultados que concuerden con los experimentos pueden ser aceptados. Los otros deben ser declarados falsos. En eso se basa el criterio de falsabilidad.

¿ Hay contenido falsable en este documento ? Enlistemos algunos detalles evidentes que probablemente admitan falsación.

1

Modelo del vacío

Concebir al vacío como matriz de todo lo existente y admitir que el vacío está en reposo absoluto. El vacío es polarizable y las polarizaciones se propagan en forma ondulatoria. Analogía del anuncio luminoso en la sección (2-c) . Eso implica un tipo específico de cinemática, un tipo específico de dinámica y una teoría específica de la relación entre espacio y tiempo, que puede concordar o no con la teoría de Einstein.

2

Lema de la sección (5-b)

Si las leyes electromagnéticas son independientes del tamaño del sistema, entonces los sistemas macroscópicos y sus análogos infinitesimales cumplen las mismas leyes.

3

Ecuación del giro puntual

$$\omega = \frac{dQ}{dm} B$$

Permite poner a prueba el lema mencionado en el ítem anterior. La ecuación fue deducida en el contexto del giro puntual. Según ese lema, debe cumplirse también en sistemas macroscópicos.

▪ **4**

Modelo de radiación en zona lejana

Forma cilíndrica y medidas geométricas del fotón relacionadas con la longitud de onda.

▪ **5**

Modelo de la zona cercana

Las propiedades de la zona cercana al emisor de radiación corresponden a bosones acumulados en una región acotada, como vimos en la sección (6-f). Si en la zona lejana se forman n fotones, en la zona cercana la capacitancia se multiplica por n y la inductancia se divide por n , como al conectar en paralelo n resonadores básicos iguales. La idea es medir en la práctica los valores de la capacitancia grupal y de la inductancia grupal de la zona cercana.

▪ **6**

Cociente entre e y Q_o

$$\frac{e}{Q_o} = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$$

Permite discutir en términos experimentales la existencia de Q_o .

▪ **7**

Valor teórico de α

$$\alpha = \frac{1}{4 \pi} \left(\frac{e}{Q_o} \right)^2$$

$$\alpha = \frac{11 - 3\sqrt{13}}{8 \pi}$$

Es un detalle bastante rígido en el esquema propuesto. No da muchas oportunidades de ser modificado o llevado al valor experimental con algún factor de corrección. No afirmo que la modificación sea imposible. Solamente la encuentro difícil. Por eso supongo que investigar la discrepancia entre los valores teórico y empírico es una tarea interesante, que probablemente concluya en una de las dos consecuencias siguientes. Declarar falso al esquema o perfeccionar los métodos experimentales.

▪ **8**

El reparto de energía en el electrón y en el positrón

Ese reparto se vincula con la oposición del electrón a ser desintegrado y la tendencia del positrón a desintegrarse. En términos generales, se vincula con la oposición de la materia a ser desintegrada y con la tendencia de la antimateria a desintegrarse.

$$\begin{aligned} \text{positrón} &\rightarrow \frac{W_B}{W} = \frac{e}{Q_o} + \frac{1}{2} \left(\frac{e}{Q_o} \right)^2 \\ \text{electrón} &\rightarrow \frac{W_E}{W} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{e}{Q_o} \right) \end{aligned}$$

El reparto en el positrón es exactamente simétrico al reparto en el positrón, como vimos en la sección (7-e) .

9

Frecuencia de resonancia del electrón relajado

Rodeado por el vacío y con la carga e expulsada del cuerpo principal, la frecuencia de resonancia del electrón no es el cociente entre $m_o C^2$ y h . En ese caso específico está dada por la ecuación (337) .

$$\nu_p = \frac{\nu}{1 + \frac{1}{8 \pi^2} \left(\frac{e}{Q_o} \right)^2}$$

Los experimentos pueden confirmar o desechar este detalle.

10

Relación entre g y α

$$g = 2 \left(1 + \frac{\alpha}{4 \pi} \right)$$

No he hallado esa ecuación en otros documentos, aunque desde bastante tiempo atrás ha sido notada la coincidencia de valores.

(9-b) ¿ Cómo se formula el movimiento dentro de este esquema ?

Louis de Broglie, en su tesis doctoral, analizó el caso de una masa vinculada con un fenómeno periódico. ¿ Cuál es el vínculo ? Es la ecuación que todos conocemos.

$$m C^2 = h \nu$$

Si la masa está en reposo se agregan los subíndices correspondientes.

$$m_o C^2 = h \nu_o$$

¿ Qué demostró Luois de Broglie ? Demostró que si la masa cumple esa condición, el fenómeno periódico es un grupo de ondas. Y calculó la longitud de onda de fase λ_f del grupo.

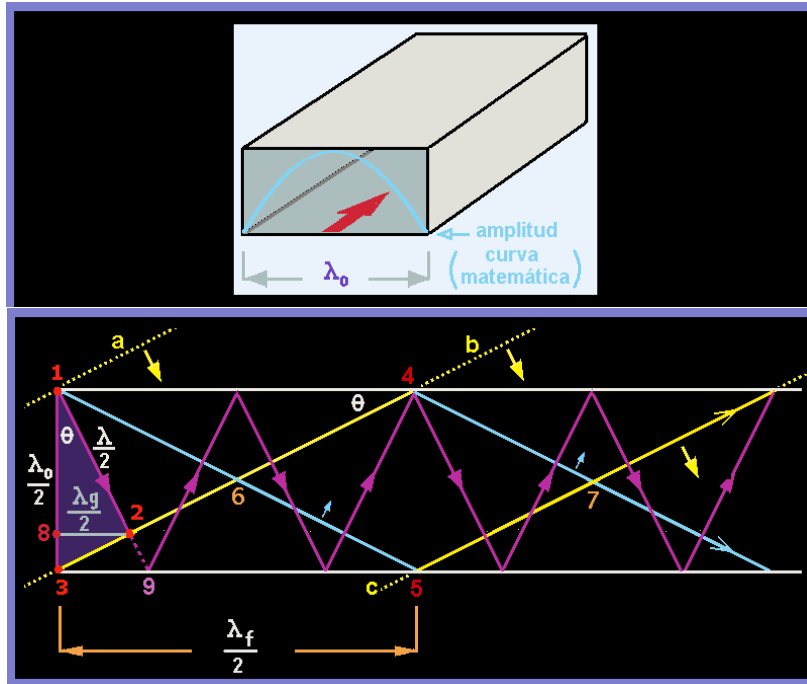
$$\lambda_f = \frac{h}{m v}$$

¿ Qué es la longitud de onda de fase ? ¿ En qué dirección se mide ? En la dirección del movimiento. En esa dirección, los valores de las variables se repiten cada vez que el grupo avanza una distancia igual a λ_f .

¿ Demostró algo más Louis de Broglie en su tesis doctoral ? Si. La masa que cumple esas condiciones no admite la mecánica de Newton. Admite la relatividad restringida.

En el apartado (8-c) comprendimos que el electrón, el positrón y las partículas de ese tipo son ondas rotativas. Es decir son masas ligadas a un fenómeno periódico, que cumplen la condición $m C^2 = h \nu$. Entonces cumplen $\lambda_f = \frac{h}{m v}$ y admiten la relatividad restringida.

Un ejemplo sencillo de lo demostrado por Louis de Broglie aparece cuando analizamos la guía de onda rectangular.



La primera figura representa la forma de la guía de onda que nos interesa. Es un tubo rectangular de material conductor, que se usa por ejemplo entre el transmisor y la antena. En esos casos la antena está instalada a varios metros del transmisor. El transmisor es un generador de corriente alterna, adecuado a la frecuencia de trabajo. El diseño del transmisor es todo lo complejo que se necesite, pero sigue siendo un generador eléctrico. Los terminales de salida del transmisor se insertan en la entrada de la guía. La reacción del espacio interior es formar ondas, que no pueden salir de la guía y viajan por dentro reflejándose en las paredes.

En la segunda figura vemos una línea en zigzag que comienza en el punto 1, se dirige al punto 2, ahí se refleja y llega a la otra pared de la guía, se refleja una vez más y así sucesivamente. Es la línea que en óptica geométrica denominamos rayo. La dirección del rayo es la dirección de propagación de las ondas elementales que componen al grupo. ¿ Grupo ? Si. En la segunda figura hemos mostrado un rayo que del punto 1 va al punto 2, continúa hasta la pared, se refleja, va hasta la otra pared y así sucesivamente. Hay otro rayo simétrico a ese, que no está mostrado en la figura. El otro rayo inicia su camino en el punto 3 , va oblicuamente hasta la otra pared, se refleja y continúa haciendo el mismo tipo de zigzag que el rayo dibujado. Ambos rayos cumplen las mismas relaciones geométricas. Por eso basta dibujar uno. Cada rayo representa una onda que se propaga con velocidad igual a C y se refleja en las paredes. Entonces la propagación dentro de la guía es el resultado de las dos ondas componentes. A esa propagación la denominamos *grupo de ondas* . Y a las componentes las denominamos *ondas elementales*.

El grupo y una onda estacionaria son fenómenos análogos. ¿ Por qué ? Por lo siguiente.

Dos ondas elementales que se reflejan simétricamente entre los mismos toques pueden formar una onda estacionaria o un grupo de ondas. Lo que se forma está determinado por la clase de toques. Si los toques no dejan libre ni una sola dirección para que la energía viaje, existe una onda estacionaria. Cuando hay alguna dirección libre, existe un grupo de ondas. Denominemos A y B a dos observadores con movimiento relativo mutuo. El fenómeno que ante uno de ellos aparece como una onda estacionaria, ante el otro aparece como un grupo de ondas cuya velocidad de grupo es igual a la velocidad relativa entre A y B . Louis de Broglie no usó esas palabras, pero demostró la relación matemáticamente.

Los toques de la onda estacionaria inhiben todas las direcciones posibles para mover energía. Las paredes de la guía son toques que dejan libertad a lo largo de la guía. En ambos casos las ondas elementales se reflejan simétricamente entre los toques. La guía de onda deja libre una dirección y la energía la recorre.

El frente de onda es perpendicular a la dirección de propagación de la onda elemental. Geométricamente, el frente de onda es parte de un plano infinito. En la figura indicamos con línea punteada la continuación del plano fuera de la guía. El rayo y el frente de onda son, respectivamente, análogos a un barco velero y su vela. El barco y la vela van juntos, a la misma velocidad. El rayo que inicia su recorrido en el punto 1 va acompañado por su frente de onda. En el punto 1 el frente está dibujado en línea punteada. Los puntos 1 y 3 son simétricos. El segmento comprendido entre ese par de puntos es perpendicular a las paredes de la guía. El frente de onda que pasa por el punto 1, después pasará por el punto 3 . El segmento $|1, 2|$ está ubicado en la dirección de propagación de la onda elemental. El segmento $|1, 3|$ es oblicuo respecto a esa dirección. Si el frente de onda fuese una superficie caliente, ambos segmentos se calentarían, pues ambos son barridos por el mismo frente de onda.

Notamos que el ancho de la guía fue simbolizado $\frac{\lambda_o}{2}$. ¿ Por qué ? Primero porque nos interesa el funcionamiento en modo dominante, que es el modo más sencillo. En ese caso el ancho de la guía aloja medio ciclo y hay que dividir por 2 . Segundo porque las ondas con $\lambda \geq \lambda_o$ no pueden propagarse dentro de la guía. Si una guía está transportando energía y gradualmente aumenta λ , cuanto más se aproxime a λ_o más lentamente se moverá la energía. Matemáticamente, para $\lambda = \lambda_o$ tendríamos la guía llena de energía en reposo. Eso, según $E = m C^2$, es análogo a una partícula o a un cuerpo en reposo. ¿ Como pasa del reposo al movimiento ? Generando una frecuencia mayor que ν_o . ¿ Qué es ν_o ? Es la frecuencia correspondiente a λ_o . Para que las ondas viajen dentro de la guía, se requiere una frecuencia superior a ν_o .

$$\nu_o = \frac{C}{\lambda_o} \quad (354)$$

En la práctica tendríamos grandes dificultades para encontrar una guía llena de energía que esté en reposo. Lo más parecido que podríamos lograr es energía que viaje con mucha lentitud. Pero en este documento analizamos los principios matemáticos y sus implicaciones. Matemáticamente, para $\nu = \nu_o$ hay energía en reposo dentro de la guía.

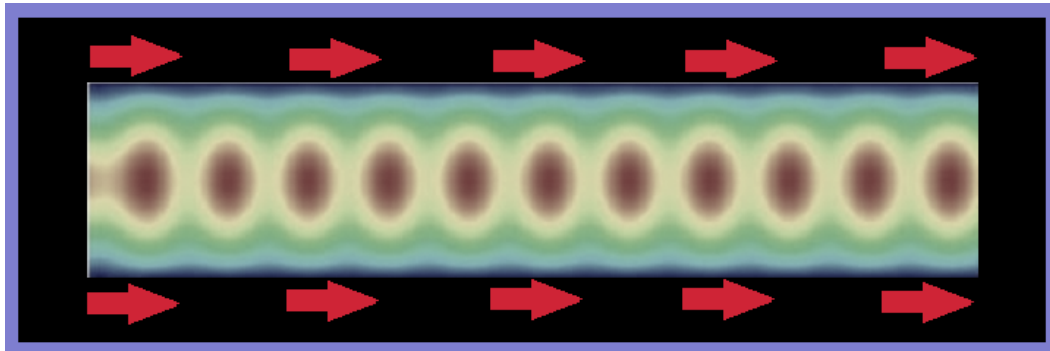
¿ Por qué en el análisis de la guía interviene más de una longitud de onda? ¿ Se mezclan ondas de frecuencias distintas ? No. La frecuencia es única. Por consecuencia, el período

también. La frecuencia es ν y le corresponde la longitud de onda λ , cuya expresión es

$$\lambda = \frac{C}{\nu} \quad (355)$$

¿Qué son los otros términos presentados como longitudes de ondas? Son intervalos de longitud, cada uno con un significado físico.

- *Longitud de onda de grupo*: Dentro de la guía se propagan grupos de ondas dispuestos uno tras otro, como los vagones ferroviarios.



Eso se denomina un tren de ondas. Cada grupo ocupa un segmento λ_g en la dirección del movimiento de energía, es decir, a lo largo de la guía. Longitud de onda de grupo es el nombre del segmento λ_g . Esos grupos viajan a lo largo de la guía pero no con velocidad C , porque las ondas elementales que los componen van oblicuamente de una pared a otra. La onda elemental recorre en el tiempo $\frac{T}{2}$ el segmento $\frac{\lambda}{2}$. En ese mismo tiempo, el grupo recorre el segmento $\frac{\lambda_g}{2}$. Entonces la velocidad de grupo es

$$v_g = \frac{\left(\frac{\lambda_g}{2}\right)}{\left(\frac{T}{2}\right)} \quad (356)$$

$$v_g = \frac{\lambda_g}{T} \quad (357)$$

$$\lambda_g = v_g T \quad (358)$$

Recordamos $T = \frac{\lambda}{C}$

$$\lambda_g = \frac{v_g}{C} \lambda \quad (359)$$

La energía es transportada por los grupos de ondas. La velocidad de grupo es la velocidad v del movimiento de energía, que por $E = m C^2$ es también un movimiento de masa.

$$v_g = v \quad (360)$$

$$\lambda_g = \frac{v}{C} \lambda \quad (361)$$

- *Longitud de onda de fase* : La propagación es un fenómeno periódico. Los valores que las variables tienen cuando la onda pasa por un punto p_1 se repetirán un poco más adelante, en un punto p_2 . La distancia entre ambos puntos es λ_f , denominada longitud de onda de fase.

En el diagrama de rayos y frentes de onda ha quedado sin dibujar el rayo que inicia su camino en el punto 3. Notemos que el par de rayos analizado inicia caminos en los puntos 1 y 3 , situados simétricamente sobre una misma recta perpendicular a las paredes reflectoras. Un frente de onda del rayo no dibujado es el segmento oblicuo comprendido entre los puntos 1 y 5 . El mismo frente después llega hasta el punto 4 . Este frente y su compañero simétrico se intersectan repetidamente en el centro de la guía. Lo hacen por ejemplo en los puntos 6 y 7 .

El segmento comprendido entre 6 y 7 es igual a media longitud de onda de fase. El mismo tamaño tiene el segmento comprendido entre los puntos 3 y 5 . El planteo trigonométrico es más fácil referido a este último segmento. Calculemos la medida del segmento $|1, 8|$.

$$S_{(1,8)} = \frac{\lambda}{2} \cos\theta \quad (362)$$

El ancho de la guía, es decir el segmento $|1, 3|$, es $\frac{\lambda_o}{2}$. Calculemos el segmento $|1, 9|$.

$$S_{(1,9)} = \frac{\frac{\lambda_o}{2}}{\cos\theta}$$

Y tenemos

$$S_{(3,9)} = S_{(1,9)} \operatorname{sen}\theta$$

Reemplazamos $S_{(1,9)}$ como indica la ecuación correspondiente.

$$S_{(3,9)} = \frac{\frac{\lambda_o}{2}}{\cos\theta} \operatorname{sen}\theta$$

Ordenamos.

$$S_{(3,9)} = \frac{\lambda_o}{2} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \quad (363)$$

El triángulo con vértices 1,5,3 y el triángulo con vértices 1,2,8 son semejantes. Entonces tenemos

$$\frac{\frac{\lambda_f}{2}}{\frac{\lambda_o}{2}} = \frac{\frac{\lambda_o}{2}}{S_{(3,9)}}$$

Despejamos

$$\frac{\lambda_f}{2} = \frac{\left(\frac{\lambda_o}{2}\right)^2}{S_{(3,9)}} \quad (364)$$

En (364) reemplazamos $S_{(3,9)}$ como indica (363) .

$$\frac{\lambda_f}{2} = \frac{\left(\frac{\lambda_o}{2}\right)^2}{\lambda_o \frac{\text{sen}\theta}{2 \cos\theta}}$$

Simplificamos y ordenamos.

$$\lambda_f = \lambda_o \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} \quad (365)$$

Hemos descrito el significado físico de los términos λ_o , λ , λ_g , λ_f . Hemos hallado las relaciones mutuas entre ellos. Falta enmarcar el tema dentro de nuestro objetivo, que son las leyes físicas. Para eso necesitamos notar que $\text{sen}\theta$ y $\cos\theta$ son funciones de una sola variable física. ¿Cuál? La velocidad v del movimiento de energía, que por $E = m C^2$ es también movimiento de masa. Hagamos esa tarea.

En el triángulo con vértices 1,2,8 tenemos

$$\text{sen}\theta = \frac{\frac{\lambda_g}{2}}{\frac{\lambda}{2}}$$

$$\text{sen}\theta = \frac{\lambda_g}{\lambda}$$

Por ser $\lambda_g = v T$ y $\lambda = C T$ tenemos

$$\text{sen}\theta = \frac{v T}{C T}$$

$$\boxed{\text{sen}\theta = \frac{v}{C}} \quad (366)$$

Analizamos un poco la onda estacionaria, que existe cuando es $\nu = \nu_o$. Las dos ondas elementales que la componen recorren el mismo camino en sentidos opuestos. El resultado es energía en reposo y cantidad de movimiento neta igual a cero. ¿Neta? Sí. Hay que destacar eso, porque el teorema de Maxwell especifica que cada onda elemental de la onda estacionaria tiene una cantidad de movimiento lineal dada por la ecuación siguiente.

$$p_{e_o} = \frac{\frac{1}{2}W_o}{C}$$

$$p_{e_o} = \frac{W_o}{2 C} \quad (367)$$

p_{e_o} → cantidad de movimiento de la onda elemental en condición estacionaria

W_o → energía de la onda estacionaria (energía en reposo)

¿Cómo se interpreta (367)? A cada onda elemental le corresponde la mitad de W_o . Y esa mitad dividida por C es la cantidad de movimiento lineal dada por el teorema de Maxwell.

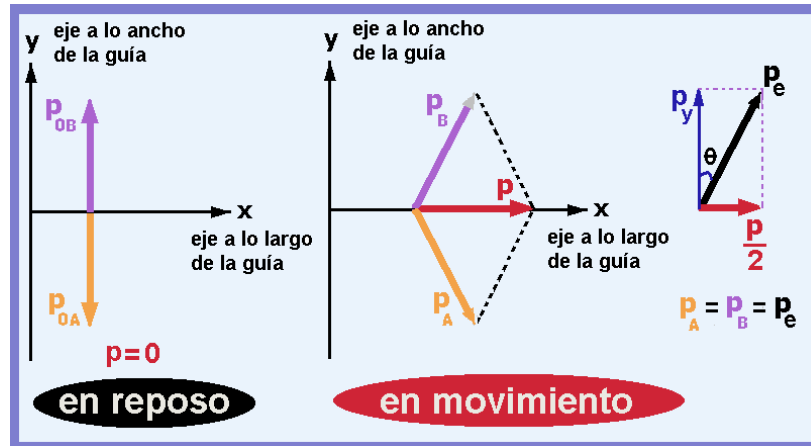
Cuando hay movimiento de energía, para cada onda elemental tenemos

$$p_e = \frac{W}{2C} \quad (368)$$

$p_e \rightarrow$ cantidad de movimiento de la onda elemental cuando la energía viaja por la guía
 $W \rightarrow$ energía que viaja por la guía (energía en movimiento)

En reposo, el vector \vec{p}_{oA} de la componente A y el vector \vec{p}_{oB} de la componente B se ubican en la misma recta, tienen módulos iguales y sentidos opuestos. Por eso dan resultante igual a cero.

En movimiento, el vector \vec{p}_A de la componente A y el vector \vec{p}_B de la componente B se ubican en rectas distintas. Entonces la resultante \vec{p} no es cero.



Podemos ver en el gráfico que \vec{p}_A y \vec{p}_B tienen módulos iguales. Al módulo que ambos tienen lo simbolizamos p_e .

$$p_e = p_A = p_B \quad (369)$$

En el gráfico vemos que se cumple

$$p_e^2 = p_y^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \quad (370)$$

¿Qué sabemos de p_y ? Ignoramos todo. De los otros vectores algo sabemos. Por ejemplo en módulos, $p_e > P_o$, porque al mover la energía crece la cantidad de movimiento. Por trigonometría sabemos que $p_e > \frac{p}{2}$. Pero respecto a p_y nada sabemos. ¿Es menor, igual o mayor que P_o ? Comparemos lo que ignoramos con lo que sabemos.

$$\text{sabemos} \rightarrow p_e - p_{e_o} > 0 \quad (371)$$

$$\text{ignoramos} \rightarrow p_y - p_{e_o}$$

Comparar matemáticamente dos términos es hacer la división.

$$u = \frac{p_y - p_{e_o}}{p_e - p_{e_o}} \quad (372)$$

En (371) hemos expresado que el denominador de (372) es mayor que cero. Entonces u tendrá el mismo signo que el numerador, en caso de ser $u \neq 0$. Tenemos que examinar dos casos.

- Caso 1 : $u \neq 0$

■ Caso 2 : $u = 0$

En el caso 1 el numerador de u no desaparece y podemos operar algebraicamente con esa ecuación. Repitamos aquí (372) y operemos.

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{p_y - p_{e_o}}{p_e - p_{e_o}} \\
 u(p_e - p_{e_o}) &= p_y - p_{e_o} \\
 u p_e - u p_{e_o} &= p_y - p_{e_o} \\
 u p_e - p_y &= u p_{e_o} - p_{e_o} \\
 u p_e - p_y &= p_{e_o} (u - 1)
 \end{aligned} \tag{373}$$

Por trigonometría tenemos

$$p_y = p_e \cos\theta \tag{374}$$

En (373) reemplazamos p_y como indica (374)

$$\begin{aligned}
 u p_e - p_e \cos\theta &= p_{e_o} (u - 1) \\
 p_e (u - \cos\theta) &= p_{e_o} (u - 1) \\
 \frac{u - \cos\theta}{u - 1} &= \frac{p_{e_o}}{p_e}
 \end{aligned}$$

Sabemos que $p_e > p_{e_o}$, entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{u - \cos\theta}{u - 1} &< 1 \\
 u - \cos\theta &< u - 1 \\
 -\cos\theta &< -1 \\
 1 &< \cos\theta \\
 \cos\theta &> 1
 \end{aligned} \tag{375}$$

Notamos que (375) es una consecuencia absurda, pues el coseno de un ángulo no puede ser mayor que 1 . ¿ Qué significa esto ? Que el caso 1 , $u \neq 0$, es incoherente con una condición fundamental. ¿Cuál ? La condición $p_e > p_{e_o}$. ¿ Es siempre verdadera esa condición ? Sí por el teorema de Maxwell, referido a la cantidad de movimiento lineal de las ondas electromagnéticas. ¿ Es la onda estacionaria el resultado de dos ondas componentes ? Si. ¿ Cumplen esas componentes lo enunciado en el teorema de Maxwell ? Sí. Entonces cada componente en reposo tiene su cantidad de movimiento lineal p_{e_o} . Cuando la energía se pone en movimiento, p_{e_o} se suma vectorialmente con $\frac{p}{2}$ y la resultante p_e tiene un módulo mayor que p_{e_o} . Por eso la condición fundamental es siempre verdadera y (375) es siempre absurda. Entonces el caso 1, $u \neq 0$, es absurdo. Es decir que u no puede ser distinto de cero.

El caso 2 es $u = 0$. Repitamos aquí la ecuación (372) .

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{p_y - p_{e_o}}{p_e - p_{e_o}} \\
 0 &= \frac{p_y - p_{e_o}}{p_e - p_{e_o}}
 \end{aligned}$$

Sabemos que $p_e - p_{e_0} > 0$. Entonces ,

$$p_y - p_{e_0} = 0$$

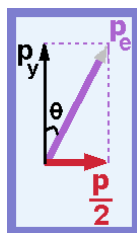
$$p_y = p_{e_0} \quad (376)$$

¿ Puede (376) ser incompatible con algo o tal vez absurda ? Reflexionemos. Uno de los casos fue eliminado por absurdo. Si el único caso que queda fuese inválido, entonces la electrodinámica maxwelliana entera lo sería. Y sin electrodinámica maxwelliana no hay relatividad restringida, no hay teorema de Maxwell de la cantidad de movimiento lineal, no hay $E = m C^2$... no hay física. A eso se agrega un detalle ligado a lo que habitualmente hacemos. ¿ Qué hacemos ? Aceptamos que la cantidad de movimiento lineal es una magnitud vectorial. ¿ Es eso coherente con las ecuaciones de Maxwell ? El caso 1, $u \neq 0$ quedó eliminado por absurdo. Y el caso 2 es coherente con la formulación vectorial. ¿ Por qué ? En reposo existe \vec{p}_{e_0} . En movimiento aparece \vec{p} , que es perpendicular a \vec{p}_{e_0} . Entonces la proyección de \vec{p} sobre la dirección de \vec{p}_{e_0} es nula. Esto significa que \vec{p} no proyecta incremento alguno sobre la dirección de \vec{p}_{e_0} y por eso \vec{p}_{e_0} permanece invariante, es decir, el mismo valor que tiene en reposo se mantiene cuando existe movimiento. Esto nos resulta familiar, pues lo aplicamos en todas las formulaciones vectoriales. No lo enunciamos explícitamente pero aplicamos esa propiedad. ¿ Cómo sería el enunciado explícito ?

Dos vectores perpendiculares uno al otro no proyectan incrementos mutuos. Ninguno de ellos puede causar un cambio en el otro.

Hemos comprobado que la física de Maxwell cumple perfectamente esa ley vectorial y no admite violaciones, pues la violación da resultado absurdo.

Hemos visto que \vec{p}_e es igual a la suma vectorial siguiente.



$$\vec{p}_e = \vec{p}_y + \frac{\vec{p}}{2}$$

Por ser \vec{p}_y y $\frac{\vec{p}}{2}$ mutuamente perpendiculares, los módulos cumplen el teorema de Pitágoras. Entonces tenemos,

$$p_e^2 = p_y^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

Según (376) es $p_y = p_{e_0}$.

$$p_e^2 = p_{e_0}^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \quad (377)$$

La energía de cada onda elemental es la mitad de la energía total en ambos casos, en movimiento y en reposo. Entonces por el teorema de Maxwell tenemos

$$p_e = \frac{W}{2C} \quad (378)$$

$$p_{e_o} = \frac{W_o}{2C} \quad (379)$$

Por la relación entre energía y masa tenemos

$$m = \frac{W}{C^2} \quad (380)$$

La mitad de la cantidad de movimiento neta es

$$\frac{p}{2} = \frac{m}{2} v \quad (381)$$

En (381) reemplazamos m como indica (380) .

$$\frac{p}{2} = \frac{W}{2 C^2} v \quad (382)$$

En (377) aplicamos lo indicado en (378) , (379) y (382) .

$$\left(\frac{W}{2C}\right)^2 = \left(\frac{W_o}{2C}\right)^2 + \left(\frac{W}{2 C^2} v\right)^2$$

$$W^2 = W_o^2 + W^2 \frac{v^2}{C^2}$$

$$W^2 - W^2 \frac{v^2}{C^2} = W_o^2$$

$$W^2 \left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right) = W_o^2$$

$$W \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} = W_o$$

$$W = \frac{W_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} \quad (383)$$

Por la relación entre energía y masa, (383) da

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} \quad (384)$$

Eso significa que la mecánica relativista es propia de los objetos totalmente constituidos por ondas electromagnéticas, como el grupo de ondas. El electrón y el positrón están completamente constituidos por ondas electromagnéticas, que son rotativas. Cuando esas partículas están en reposo, equivalen a ondas estacionarias. Es decir, son análogas la energía

en reposo de la guía de onda. Y cuando las partículas se mueven, son análogas a grupos de ondas. Eso fue demostrado en forma general por Louis de Broglie en su tesis doctoral. En esa tesis encontramos los mismos términos y las mismas relaciones matemáticas que en la guía de onda.

Expresemos en lenguaje vulgar lo que hemos aprendido. En la guía, las paredes mantienen a las ondas y a la energía aglutinadas. Una onda rotativa no necesita paredes para mantenerse aglutinada en un volumen finito, pues lo hace sola. Es decir que una partícula no necesita paredes para lograr lo mismo que la guía de onda. Y ambos casos son completamente análogos. Por eso en ambos vale la mecánica relativista. Esa es la mecánica de los objetos completamente constituidos por ondas electromagnéticas. El 100 por ciento de $m C^2$ pertenece a ondas electromagnéticas. El organismo humano está hecho 100 por ciento de esas ondas. *Usted en realidad no camina. ¡ Se propaga !*

Repitamos aquí (366) .

$$\text{sen}\theta = \frac{v}{C}$$

Entonces, por $\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta = 1$ tenemos

$$\text{cos}\theta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}$$

Aplicamos eso en (383) .

$$W = \frac{W_o}{\text{cos}\theta}$$

$$\text{cos}\theta = \frac{W_o}{W} \tag{385}$$

En el diagrama de rayos de la guía de onda vemos lo siguiente.

$$\text{cos}\theta = \frac{\frac{\lambda}{2}}{\frac{\lambda_o}{2}}$$

$$\text{cos}\theta = \frac{\lambda}{\lambda_o} \tag{386}$$

Escribamos la igualdad entre (385) y (386) .

$$\frac{W_o}{W} = \frac{\lambda}{\lambda_o}$$

$$W_o \lambda_o = W \lambda \tag{387}$$

Recordemos lo siguiente.

$$\lambda_o = \frac{C}{\nu_o} \tag{388}$$

$$\lambda = \frac{C}{\nu} \tag{389}$$

En (387) aplicamos lo indicado en (388) y en (389) .

$$W_o \frac{C}{\nu_o} = W \frac{C}{\nu}$$

$$\boxed{\frac{W_o}{\nu_o} = \frac{W}{\nu}} \quad (390)$$

¿ Qué significa (390) ? Significa que la energía es directamente proporcional a la frecuencia dentro de la guía. Hemos visto, en partes del documento anteriores a esta, que la misma ley se verifica en el fotón, en el electrón y en el positrón.

El transmisor de telecomunicaciones inyecta mucha energía en la guía. En ese caso la constante de proporcionalidad entre energía y frecuencia es grande. En términos teóricos, nada prohíbe inyectar en la guía la energía mínima permitida por las ecuaciones de Maxwell. En ese caso la constante de proporcionalidad sería h , constante de Planck. Las leyes cuánticas y las leyes relativistas se cumplen juntas y coherentemente dentro de la guía. Entonces lo mismo sucede en el electrón, en el positrón y en las otras partículas elementales.

Cuando Louis de Broglie elaboró su tesis doctoral nadie podía garantizar que la relatividad y las leyes cuánticas pudiesen cumplirse juntas y en forma coherente. La tesis es el desarrollo matemático de la pregunta que en esa época suscitaba más interés y más discusiones. Es decir, ¿ qué obtenemos uniendo la relatividad con las leyes cuánticas ? Obtuvo lo mismo que vimos en la guía de onda, sin la guía y en forma general, aplicable a todas las partículas y a la materia macroscópica.

Repitamos aquí (387) .

$$W_o \lambda_o = W \lambda \quad (391)$$

Por el teorema de Maxwell tenemos

$$W_o = P_{e_o} C$$

$$W = P_e C$$

Reemplazando en (387) tenemos

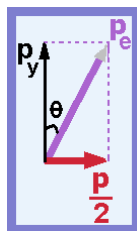
$$p_{e_o} \lambda_o = P_e \lambda$$

El producto $p_e \lambda$ es constante.

$$P_e \lambda = \frac{\mathcal{T}}{2} \quad (392)$$

$\mathcal{T} \rightarrow$ una constante

Dividimos a la constante por 2 porque en la guía hay dos ondas elementales y (392) corresponde a una, con la mitad de la energía total.

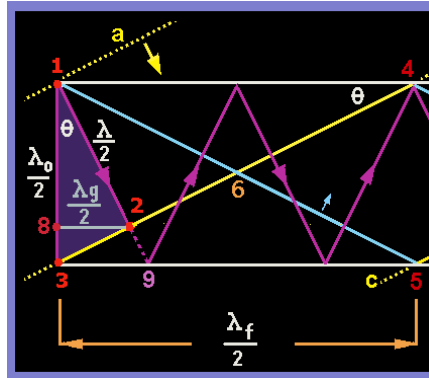


En la figura vemos que es

$$p_e = \frac{\frac{p}{2}}{\text{sen}\theta}$$

$$p_e = \frac{p}{2 \text{ sen}\theta}$$

$$\text{sen}\theta = \frac{p}{2 p_e} \quad (393)$$



En el diagrama de rayos vemos

$$\frac{\lambda_o}{2} \cos\theta = \frac{\lambda_f}{2}$$

$$\frac{\lambda_o}{2} \cos\theta = \frac{\lambda_f}{2}$$

En ese diagrama vemos que es $\frac{\lambda_o}{2} \cos\theta = \frac{\lambda}{2}$. Entonces tenemos

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda_f}{2}$$

$$\text{sen}\theta = \frac{\lambda}{\lambda_f} \quad (394)$$

Iguualamos (393) y (394)

$$\frac{p}{2 p_e} = \frac{\lambda}{\lambda_f}$$

$$\lambda_f = \frac{2 p_e \lambda}{p}$$

Reemplazamos $p_e \lambda$ como indica (392) .

$$\lambda_f = \frac{\mathcal{F}}{p} \quad (395)$$

Para la energía mínima permitida por las ecuaciones de Maxwell es $\mathcal{E} = h \nu$. Entonces tenemos

$$\lambda_f = \frac{h}{p} \quad (396)$$

Por ser $p = m v$ tenemos

$$\lambda_f = \frac{h}{m v} \quad (397)$$

Las ecuaciones (396) y (397) fueron obtenidas inicialmente por Louis de Broglie. Necesitaron prueba experimental para ser aceptadas oficialmente. La mentalidad de la época era creer que *la materia está constituida por materia*. Louis de Broglie demostró que la materia es algo que ondula y cumple las leyes de las ondas. Obviamente, todos sabemos que se producen ondas en los fluidos, en solidos flexibles, etc. En esos casos la materia posibilita la formación de ondas. Las ondas formuladas por Louis de Broglie no son ondas que la materia posibilita. Son ondas que pertenecen a la materia, como pertenece la energía $E = m C^2$. Esta energía corresponde a las ondas formuladas por Louis de Broglie. Entonces no se puede pensar que la materia simplemente posibilita estas ondas. La materia *es* estas ondas.

(9-c) ¿ Qué lugar ocupa la termodinámica en el esquema electromagnético ?

La conexión entre la termodinámica y la electrodinámica maxwelliana fue profundamente investigada en el siglo 19. Esa investigación fue necesaria para estudiar la radiación del cuerpo negro. Entre termodinámica y electrodinámica maxwelliana la relación es coherente y fructífera. La entropía es perfectamente formulable para la radiación, para un sistema de ondas estacionarias y para todas las configuraciones del campo electromagnético. Ambas teorías están mutuamente integradas.

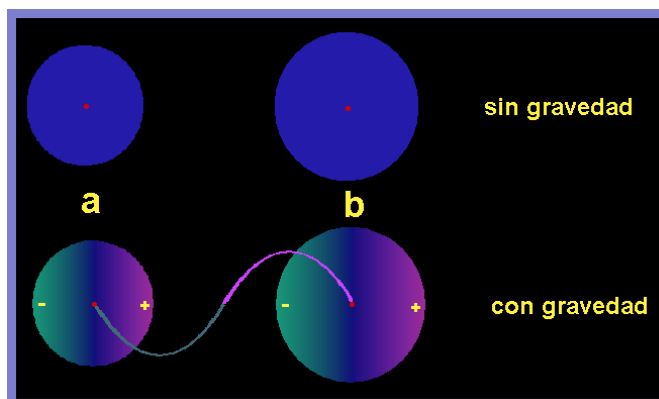
(9-d) ¿ Qué lugar ocupa la gravitación en el esquema electromagnético ?

Según la electrodinámica maxwelliana, la materia está competamente constituida por ondas electromagnéticas. La teoría gravitatoria coherente con ese marco es, inevitablemente, una teoría electrodinámica de la gravitación. ¿ Hay posibilidad de formularla ?

Razonemos. La materia es un conglomerado de cargas Q_o , más un enjambre de cargas e que revolotean ejecutando movimientos en todas las direcciones posibles, dentro de regiones simétricas denominadas orbitales. Cuando no actúan campos adicionales, esas condiciones logran que los electrones no contribuyan a la interacción *neta* entre dos cuerpos a y b mutuamente distantes. A ese caso, sin campos adicionales, denominémoslo gravitación básica.

Gravitación básica es la interacción entre los pares $(-Q_o, +Q_o)$ constituyentes de un cuerpo a y los pares $(-Q_o, +Q_o)$ constituyentes de un cuerpo b , sin campos adicionales que modifiquen las condiciones.

¿ Cómo pueden las Q_o de dos cuerpos distintos interactuar mutuamente ? La única posibilidad es que el espacio intermedio se polarice y obre como vínculo entre ambos cuerpos. Es decir que haya pares $(-Q_o, +Q_o)$ en el espacio intermedio. ¡ Pero donde hay Q_o hay ondas ! ¿ Admitiremos ondas electromagnéticas de longitud astronómica ? Sí. Los astrónomos han detectado esas ondas.



Si la carga $-Q_o$ del vínculo está del lado del cuerpo a , entonces $+Q_o$ del mismo vínculo está del lado del cuerpo b . Como consecuencia, cada cuerpo reacomoda sus cargas constituyentes, respondiendo a lo que el vínculo le ofrece.

- Respuesta del cuerpo $a \rightarrow$ aumentar la densidad de carga positiva en la parte de su volumen más próxima al vínculo
- Respuesta del cuerpo $b \rightarrow$ aumentar la densidad de carga negativa en la parte de su volumen más próxima al vínculo

Este comportamiento es un fenómeno común y bien conocido, denominado electrización inducida.

En cada extremo hay atracción entre el vínculo y el cuerpo situado en ese lado. El resultado neto es que los cuerpos a y b quedan sometidos a una fuerza de atracción mutua.

La distancia entre a y b puede cambiar. Supongamos que b es Sol y a es Tierra. En el transcurso de la órbita esa distancia nunca se mantiene constante y su variación es una función continua. ¿Puede ser continua la variación de un vínculo ondulatorio constituido por cargas Q_o ? La condición de continuidad es que la longitud de onda sea, en cada instante, igual a la distancia entre ambos cuerpos. Cuando la distancia disminuye, la energía del vínculo aumenta. Los cuerpos a y b proveen el incremento de energía. Cuando la distancia aumenta, el vínculo transfiere energía a los cuerpos a y b .

Notemos algo esencial. Alguien podría afirmar que todas las propiedades discretas deducidas de la ecuación (1) están tratadas en la teoría cuántica. Y que por ese motivo la ecuación (1) es superflua, como todo lo que de ella se deduce. ¿Es eso verdad? Razonemos. Sin la ecuación (1) ignoraríamos a las Q_o . Aunque nuestra idea fuese postular un vínculo gravitatorio que cumpla las leyes cuánticas, la naturaleza continua de la variación sería vista como un problema insoluble, pues la variación de distancia implica variación de energía y, en teoría cuántica, es imposible adscribir una función continua a la variación de energía. En la electrodinámica maxwelliana está el desplazamiento eléctrico, están las Q_o correspondientes y está la condición de continuidad que la gravedad requiere. Por eso no es un juego superfluo la ecuación (1), ni es la electrodinámica maxwelliana una teoría obsoleta y superada. Es la teoría que aún espera más dedicación y más expansión teórica.

Si la longitud de onda tiene medida astronómica, entonces el par mediador $(-Q_o, +Q_o)$ transmite una fuerza extremadamente pequeña, inferior a la fuerza gravitatoria en muchos

órdenes de magnitud. ¿ Es eso coherente ? Recordemos que los pares $(-Q_o, +Q_o)$ pueden unirse en paralelo, como vimos en la sección (6-f) . Es decir que en una región pueden coexistir todos los pares $(-Q_o, +Q_o)$ necesarios para lograr el valor normal de la fuerza gravitatoria. Los pocos conceptos expuestos bastan para llegar a la fórmula de Newton. Es un ejercicio bonito y lo haremos.

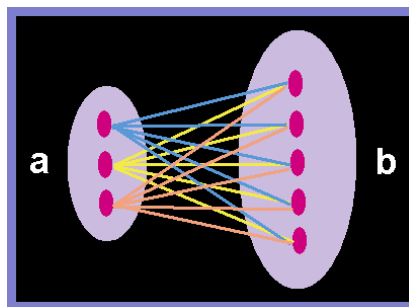
Hagamos una aproximación. Supongamos que los electrones no tienen masa y que son iguales las masas del protón y el neutrón. Es decir que tienen la misma masa m_i . En forma aproximada, el número de nucleones de cada cuerpo sería

$$n_a = \frac{m_a}{m_i} \quad (398)$$

$$n_b = \frac{m_b}{m_i} \quad (399)$$

La existencia de los electrones y la diferencia de masa entre protón y neutrón hacen inexacto a ese cálculo. La parte relacionada con los electrones provoca un error del orden de 0,1 por ciento en el número de partículas. Errores de ese orden y mayores fueron detectados en experimentos dedicados a comprobar la fórmula de Newton.

Cuando ningún campo adicional interfiere, el vínculo canaliza fielmente las acciones mutuas de los cuerpos a y b . Para facilitar el razonamiento imaginemos que el cuerpo a está constituido por 3 nucleones y el cuerpo b por 5.



Cada nucleón de a interactúa con los 5 nucleones de b y cada nucleón de b interactúa con los 3 nucleones de a . Entonces el número total de interacciones es

$$n_g = n_a n_b \quad (400)$$

$n_g \rightarrow$ número total de interacciones gravitatorias elementales

En (400) reemplazamos n_a y n_b como indican (398) y (399) respectivamente.

$$n_g = \frac{m_a}{m_i} \frac{m_b}{m_i} \quad (401)$$

Ahora necesitamos conocer el valor medio f_m de la fuerza elemental, para expresar a la fuerza gravitatoria F_g como

$$F_g = n_g f_m \quad (402)$$

¿ De qué depende ese valor medio ? De todo lo que sucede en la complejidad del entretejido de ondas que constituye a la materia. ¿ Ejemplo ? Las relaciones de fase, que regulan los módulos de las resultantes. Dos componentes muy intensas pueden dar una resultante

extremadamente débil, si la relación de fase es de oposición. Lo recíproco no sucede, pues dos componentes débiles dan siempre una resultante débil. Ignoro la variedad de condiciones que podemos encontrar. ¿Qué haremos? Una manera de continuar es introducir un factor de complejidad. Oportunamente lo haremos.

¿Incluiremos al vínculo en el planteo matemático? No necesitamos incluirlo, porque simplemente canaliza las acciones mutuas de los cuerpos a y b . Es como el taco de billar, que transmite a la bola lo que la mano hace. Si la mano estuviese al borde de la bola, el taco sería innecesario. El análisis aproximado no se altera por incluir o excluir al vínculo. No estoy afirmando que el vínculo es irrelevante, ni que analizarlo sea una tarea vana. Solamente estoy simplificando el planteo aproximado, en una forma que no altera el resultado final.

La fuerza de la interacción elemental equivale a la fuerza entre las placas de un capacitor. La energía de ese capacitor es

$$W_E = \frac{Q_o^2}{2 C}$$

La capacitancia es

$$C = \epsilon_o \frac{A}{d}$$

Entonces

$$W_E = \frac{Q_o^2}{2 \epsilon_o A} d$$

La fuerza es la derivada de W_E respecto de la distancia.

$$f = \frac{Q_o^2}{2 \epsilon_o A} \quad (403)$$

En zona lejana o en zona cercana, siempre se cumple

$$A = \mathcal{U} \lambda^2 \quad (404)$$

$\mathcal{U} \rightarrow$ factor adimensional

Entonces tenemos

$$f = \frac{Q_o^2}{2 \epsilon_o \mathcal{U} \lambda^2}$$

La condición de continuidad es

$$d = \lambda \quad (405)$$

Entonces resulta

$$f = \frac{Q_o^2}{2 \epsilon_o \mathcal{U} d^2} \quad (406)$$

El par de cuerpos analizado forma un sistema ondulatorio de gran complejidad. De ella depende el valor medio de f . ¿Qué efecto tiene esa complejidad? Produce diferencia entre f y el valor medio f_m . Entonces tenemos

$$f_m = \Re f \quad (407)$$

$\Re \rightarrow$ factor de complejidad En \Re hemos escondido la complejidad del entretejido ondulatorio que compone a la materia. Lo hicimos para evitar el análisis del vínculo.

En (407) reemplazamos f como indica (406) .

$$f_m = \Re \frac{Q_o^2}{2 \epsilon_o \mathcal{U} d^2}$$

Ordenamos.

$$f_m = \frac{\Re}{\mathcal{U}} \frac{Q_o^2}{2 \epsilon_o d^2} \quad (408)$$

Repitamos aquí (402) .

$$F_g = n_g f_m \quad (402)$$

En (402) reemplazamos f_m como indica (408) .

$$F_g = n_g \frac{\Re}{\mathcal{U}} \frac{Q_o^2}{2 \epsilon_o d^2} \quad (409)$$

Repitamos aquí (401) .

$$n_g = \frac{m_a}{m_i} \frac{m_b}{m_i} \quad (401)$$

En (409) reemplazamos n_g como indica (401) .

$$F_g = \frac{m_a}{m_i} \frac{m_b}{m_i} \frac{\Re}{\mathcal{U}} \frac{Q_o^2}{2 \epsilon_o d^2} \quad (410)$$

En (410) las variables son \Re , m_a , m_b , y d . Los otros términos son constantes. Agrupamos las constantes.

$$F_g = \frac{Q_o^2}{2 \mathcal{U} \epsilon_o m_i^2} \frac{\Re m_a m_b}{d^2} \quad (411)$$

¿ Qué sabemos de \Re ? En mi caso, ignoro todo. Pero noto que la fórmula de Newton corresponde a \Re constante. ¿ Es eso posible ? No, porque \Re depende de los fenómenos electrodinámicos que constituyen a la materia. ¿ Podría \Re variar muy poco en el transcurso de una órbita planetaria ? Sí, en casos similares a la órbita terrestre alrededor del Sol. En esos casos la interacción gravitatoria afecta poco a la constitución de la materia. Y son los casos que se pueden plantear con poco error usando la fórmula de Newton.

Hay otro detalle que merece discusión. Si \Re no puede ser constante, entonces es una función. Para afirmar que \Re es una función necesitamos admitir una hipótesis. ¿Cuál ? Suponer que la expresión electrodinámica completa es igual a la fórmula de Newton multiplicada por una función. ¡ Eso es obvio! , protestaríamos. Reflexionemos. Para llegar a (367) hemos tenido en cuenta solamente detalles obvios, como el número de interacciones elementales y la naturaleza capacitiva de la interacción elemental. La complejidad de la constitución material, analizada en detalle, ¿ podría conducir a un resultado irreconciliable con la fórmula de Newton ? No hemos hecho el análisis detallado. Entonces no podemos garantizar que la expresión completa sea igual a la fórmula de Newton multiplicada por una función. ¿ Hay en la electrodinámica algún antecedente de algo así ? Conozco uno que vale como ejemplo, porque las fórmulas y los postulados de la relatividad restringida son coherentes con la electrodinámica maxwelliana. Es lo siguiente.

En relatividad restringida, la energía cinética de un cuerpo se formula como

$$E_c = m_o C^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} - 1 \right) \quad (412)$$

La fórmula de la mecánica newtoniana es

$$E_c = \frac{1}{2} m_o v^2 \quad (413)$$

¿ Podemos garantizar que el miembro derecho de (412) sea igual al miembro derecho de (413) multiplicado por una función ? Nuestro primer impulso es creer que ambas fórmulas son irreconciliables. ¿ Lo son realmente ? ¡ Deben serlo, porque si bastase multiplicar por una función, en las aulas los docentes no utilizarían el desarrollo en serie para demostrar que con $v \ll C$ ambas fórmulas se aproximan mutuamente ! Con el primer impulso argumentaríamos eso. El caso parece desalentador. Pero solamente lo parece, pues tenemos lo siguiente.

$$E_c = m_o C^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} - 1 \right)$$

$$E_c = m_o C^2 \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}$$

$$E_c = m_o C^2 \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}$$

$$E_c = m_o C^2 \frac{1 - \left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}\right)}$$

$$E_c = m_o C^2 \frac{\frac{v^2}{C^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}\right)}$$

$$E_c = \frac{m_o v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}\right)} \quad (414)$$

Simolicemos f_r (factor relativista) a la función siguiente.

$$f_r = \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} \right)} \quad (415)$$

En (415) despejamos.

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} \right) = \frac{f_r}{2} \quad (416)$$

En (413) reemplazamos términos como indica (372) .

$$\text{relativista} \rightarrow E_c = f_r \frac{1}{2} m_o v^2 \quad (417)$$

En (415) es evidente que f_r tiende a 1 cuando $v \rightarrow 0$. Para demostrar la tendencia no es necesario el desarrollo en serie, que dificulta la interpretación porque el primer monomio del desarrollo es $m_o C^2$.

Hemos comprobado que la fórmula relativista de la energía cinética es igual a la fórmula de Newton multiplicada por una función. La relatividad restringida es localmente coherente con la relatividad general. Y hay publicaciones que muestran la deducción de la ecuaciones de Maxwell partiendo de la relatividad general. Eso nada garantiza antes de hacer el análisis detallado que adeudamos. Pero da un poco de esperanza respecto a comprobar, en el futuro, que la expresión electrodinámica completa de la interacción gravitatoria es igual a la fórmula de Newton multiplicada por una función.

Repitamos aquí la ecuación (411) .

$$F_g = \frac{Q_o^2}{2 \mathcal{U} \epsilon_o m_i^2} \frac{\Re m_a m_b}{d^2} \quad (411)$$

El símbolo G de la fórmula de Newton corresponde a la función siguiente.

$$G = \frac{Q_o^2}{2 \mathcal{U} \epsilon_o m_i^2} \Re \quad (418)$$

Sabemos que en el sistema solar y en otros casos similares, cometemos poco error considerando constante a la función G . En lo que sigue adoptaremos ese criterio provisoriamente.

En (418) despejamos $\frac{\Re}{\mathcal{U}}$.

$$\frac{\Re}{\mathcal{U}} = \frac{2 G \epsilon_o m_i^2}{Q_o^2} \quad (419)$$

La relación entre Q_o y la carga e del electrón está dada por (273) . Según (273) tenemos

$$Q_o^2 = \frac{2 e^2}{11 - 3\sqrt{13}} \quad (420)$$

Aplicando (420) en (419) obtenemos

$$\frac{\Re}{\mathcal{U}} = \frac{(11 - 3\sqrt{13}) G \epsilon_o m_i^2}{e^2} \quad (421)$$

Tengo a mano la publicación hecha por CODATA en 2008 , que indica

$$m_p = 1,67262158(13) \cdot 10^{-27} Kg$$

$$m_n = 1,67492716(13) \cdot 10^{-27} Kg$$

$$\epsilon_o = 8,854187817 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$$

$$G = 6,673(10) 10^{-11} \cdot \frac{N m^2}{Kg^2}$$

$$e = 1,602176462(63) \cdot 10^{-19} coul$$

Aunque es una decisión arbitraria, tomemos como m_i al promedio entre las masas del protón y del neutrón.

$$m_i = 1,67377437(13) \cdot 10^{-27} Kg$$

Aplicando esos valores en (371) obtenemos

$$\frac{\mathfrak{R}}{\mathcal{U}} \simeq 1,18 \cdot 10^{-38} \quad (422)$$

(9-d) ¿ Qué significa la pequeñez de $\frac{\mathfrak{R}}{\mathcal{U}}$?

Ese valor corresponde a la gravedad normal, sin campos adicionales que condicionen al vínculo. En ese caso, la magnitud del efecto transmitido por el vínculo depende solamente de la complejidad ondulatoria de la materia. Y esa complejidad minimiza el efecto resultante. Por eso la interacción gravitatoria es, comparativamente, más débil que la interacción electromagnética.

¿ Qué puede suceder si un campo adicional controla al vínculo ? En esa forma se puede lograr, por ejemplo, que un cuerpo determinado sea inmune a la gravedad, es decir, que no graveite.

¿ Se puede lograr algo más ? Sí. Hemos introducido el término \mathfrak{R} para evitar el estudio detallado de dos asuntos. Uno es la complejidad dentro de cada cuerpo. Otro es el vínculo. Omitir al vínculo fue un recurso simplificador. Pero el estudio del vínculo es tan importante como el estudio de la complejidad. Ignoro la manera de abarcarlos. Igualmente es evidente que controlando al vínculo se puede lograr también gravedad repulsiva y fundar una industria astronáutica sin cohetes.

¿ Qué se puede lograr estudiando detalladamente la complejidad ? Entre las partes constitutivas de la materia hay vínculos análogos al vínculo gravitatorio. Un dispositivo que resuene con esos vínculos puede lograr que las resultantes, en vez de ser pequeñas como en la gravedad normal, tengan la magnitud que el usuario decida. Esto significa que la gravedad, atractiva o repulsiva, puede ser reforzada. ¿ Hasta qué cota máxima ? El factor máximo de refuerzo no puede ser la inversa de $\frac{\mathfrak{R}}{\mathcal{U}}$, cercana a $8,4 \cdot 10^{37}$. Debe ser menor. ¿ Por qué ? Porque mucho antes de alcanzar la inversa de $\frac{\mathfrak{R}}{\mathcal{U}}$ la materia debe desintegrarse. Eso no significa que la cota superior sea pequeña, pues 20 órdenes de magnitud probablemente no sean destructivos. Una tecnología que logre eso posibilitaría fenómenos que hoy, al menos para mi, son inimaginables.

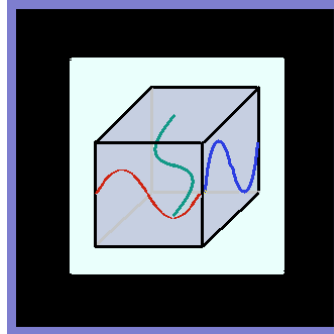
CAPÍTULO 10 - El vacío

(10-a) Intersticios dentro del cubo

El contorno de la guía de onda deja una dirección libre. Falta analizar ondas dentro de un contorno que limite las 3 direcciones del sistema de coordenadas cartesiano.

Para facilitar el análisis pensemos en un cubo de material conductor, con ondas electromagnéticas dentro, operando en el modo fundamental. En ese caso la longitud de onda λ y la arista a del cubo son iguales.

$$\lambda = a \quad (423)$$



En el análisis de la guía de onda hemos confirmado que dos vectores perpendiculares uno al otro no proyectan incrementos mutuos. Ninguno de ellos puede causar un cambio en el otro. En el cubo tenemos 3 direcciones mutuamente perpendiculares. Y ondas en cada una de ellas. Entonces ninguna de esas ondas altera las condiciones de las otras. Esto significa que dentro de cubo, la onda estacionaria de cada direcciónn tiene las mismas propiedades que la onda estacionaria de la guía. Es decir está compuesta por dos ondas elementales simétricas, cuyas cantidades de movimiento lineal tienen módulos iguales, están en la misma dirección y tienen sentidos opuestos.

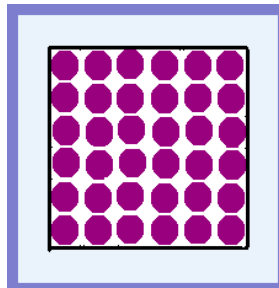
El frente de la onda elemental tiene el radio R que hallamos en el caso del fotón.

$$R = \frac{\lambda}{4\pi} \quad (424)$$

Entonces el diámetro \mathcal{D} es

$$\mathcal{D} = \frac{\lambda}{2\pi} \quad (425)$$

Analizando el fotón aprendimos que en la zona cercana a un emisor sucede lo siguiente. a) Se suman las cargas. b) Las inductancias y las capacitancias quedan en paralelo. Convengamos denominar superposición a ese tipo de situación, que puede suceder también dentro de un recinto, por ejemplo dentro del cubo.



El número de ondas estacionarias es natural. Notamos en (425) que la arista del cubo supera levemente 6 diámetros de frente de onda, sin llegar a 7 . Por eso, sin superposición, sobre una arista no caben más de 6 frentes de onda. Entonces, sin superposición, en cada cara del cubo no pueden alojarse más de 36 frentes de onda. Y quedará separación entre ellos, aunque haya 36 .

Contando las 3 direcciones del cubo, no puede haber dentro más de 108 ondas estacionarias. Y aunque hubiese 108, quedarían intersticios. ¿ Puede ser estable ese sistema sin una densidad de energía que llene los intersticios ? No, porque algunos cilindros se descompondrían para dar energía a los intersticios. El sistema es estable únicamente cuando la densidad media de los cilindros y la densidad media de los intersticios son iguales. Si hubiese desigualdad, habría intercambio de energía entre los intersticios y los cilindros. El sistema no es estable cuando sucede un intercambio así. ¿ Pero el fotón se mantiene estable mientras viaja en el vacío, rodeado por una densidad de energía igual a cero ¿ Entre el fotón y el vacío no hay transferencia de energía ! Eso es verdad, porque el fotón es un objeto dotado de autocontención. Su configuración se forma y se mantiene sin necesidad de un objeto adicional que establezca el contorno. La onda estacionaria existe dentro del contorno establecido por un objeto adicional, es decir un objeto distinto a la onda estacionaria. La onda estacionaria no autocontiene su campo ni su energía. Por eso es capaz de intercambiar energía con los intersticios. Destaquemos la condición de estabilidad.

Condición de estabilidad : el sistema de ondas estacionarias dentro del cubo es estable únicamente cuando son iguales la densidad media de los intersticios y la densidad media de los cilindros.

Cuando no hay superposición, el volumen de cada cilindro está ocupado por una onda estacionaria, compuesta por dos ondas elementales. Exceptuando la autocontención, las otras propiedades de la onda elemental coinciden con las propiedades del fotón. Entonces, la densidad media de cada cilindro estacionario es el doble de la densidad media del fotón.

En los intersticios no caben cilindros ondulatorios de largo λ y de de radio $\frac{\lambda}{4\pi}$. ¿ Podrían ser ondas estacionarias con λ pequeña ? Ninguna medida geométrica de los intersticios es igual a $\frac{a}{n}$. Eso significa que los intersticios no pueden alojar armónicas de la frecuencia fundamental. Y dentro del cubo solamente pueden establecerse ondas con $\lambda = a$ y con $\lambda = \frac{a}{n}$. Entonces los intersticios no pueden alojar ondas estacionarias. ¿ Qué tipo de campo electromagnético pueden alojar ? Ese campo no puede funcionar con pares de cargas $(-Q_o, +Q_o)$. Los pares de cargas del campo intersticial deben tener libertad para adoptar los valores que cada circunstancia requiera. Eso significa que en el espacio libre, donde no hay contorno, ni ondas estacionarias, ni intersticios, ese campo estará formado por cargas de todos los valores posibles.

Esas cargas formarán ondas de todas las frecuencias. El espectro deben ser continuo. Esas propiedades corresponden a un campo térmico. Por eso a la carga de ese tipo la simbolizaremos q_t . ¿ Cuáles son los valores posibles de q_t ? Son los valores que cumplen la condición siguiente.

$$0 \leq q_t < Q_o \quad (426)$$

$q_t \rightarrow$ carga del campo térmico

¿ Por qué q_t no puede superar a Q_o ? Porque al llegar al valor Q_o se forma un fotón, que no es parte del campo térmico. Es como preguntar por qué el nivel de líquido de un recipiente no puede superar la altura del recipiente. Cada porción de líquido que alcanza esa altura sale del recipiente y pasa a una situación nueva, donde no pertenece al recipiente.

¿ Puede haber relación entre este campo térmico y la radiación cósmica de fondo ? Muy probablemente sí. Lo esperable es que esa radiación sea precisamente el campo térmico que intentamos describir. Un campo que rellena intersticios, pequeños como en el cubo que estamos analizando y grandes como los intersticios interplanetarios, interestelares, intergalácticos, etc. Si eso es verdad, entonces la radiación cósmica de fondo debe tener un espectro perfectamente continuo, hasta el umbral de sensibilidad de los experimentos.

En condiciones normales, ningún lugar del universo podría tener una temperatura igual a $0 K$, pues en condiciones normales el campo térmico es inevitable. Para llegar a $0 K$ se requiere un agente adicional, que evite la presencia del campo térmico. La termodinámica garantiza que $0 K$ es una temperatura inalcanzable. Eso significa que el campo térmico se regenera cuando intentamos eliminarlo. Y esa regeneración es siempre más rápida que el proceso de eliminación más rápido permitido por las leyes físicas.

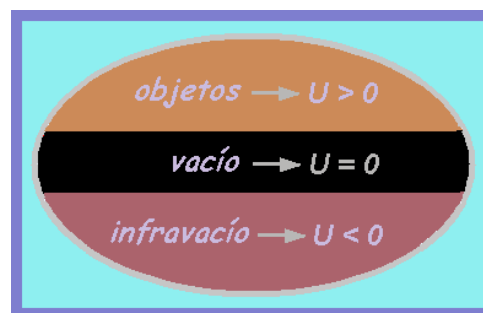
Un campo como el vacío, capaz de crear lo necesario para rellenar intersticios, ¿ podría crear campos en otras circunstancias ? Por ejemplo, si reemplazásemos una pared del cubo por un circuito LC que resuene a la frecuencia de las ondas estacionarias, podríamos extraer la energía de esas ondas. Eso dejaría un hueco cilíndrico cada vez que una onda estacionaria transfiriese su energía al circuito LC . ¿ Qué haría el vacío ? ¿ Permanecería inerte, permitiendo que la onda estacionaria desapareciera ? ¿ O reaccionaría, para energizar al circuito sin afectar a la onda estacionaria ? Debemos suponer esto último. ¿ Por qué ? Porque en caso contrario el vacío tampoco rellenaría los intersticios y la condición de estabilidad sería imposible.

(10-b) Intento de lograr coherencia

- Hipótesis A : El vacío es un campo cuya densidad de energía es igual a cero. Es el campo fundamental de la naturaleza. Para descomponerse no necesita la acción de algo que lo obligue. Es decir, no necesita un causante. ¿ Para nada necesita un agente causante ? El agente causante sería necesario si quisiéramos evitar la descomposición. Dentro de un recinto donde actúa un agente causante adecuado, el vacío puede permanecer sin descomponerse. Es decir, lo común es la descomposición. Para evitarla se requiere algo especial.
- Hipótesis B : Cuando el vacío se descompone forma dos campos, con energías simétricas. Uno tiene energía con signo negativo y otro con signo positivo. Es decir la sumatoria de energías nunca se aparta de cero.
- Hipótesis C : La energía con signo positivo forma objetos (fotones y partículas). Denominaremos *objetos* a un modo de existencia, cuya energía tiene signo positivo. Nuestros sentidos y nuestros instrumentos están especializados en detectar este modo.
- Hipótesis D : La energía con signo negativo no forma objetos. Forma un campo fluido que denominaremos *infravacío* . En este modo de existencia la energía tiene signo negativo. Nuestros sentidos y nuestros instrumentos no están especializados en detectar este modo.

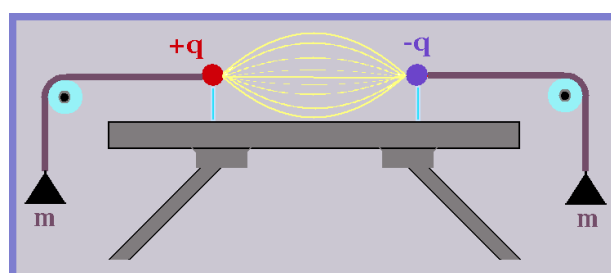
¿ Por qué el vacío, para descomponerse, no necesita un agente causante ? Porque la fuerza necesaria para acelerar una carga es proporcional a la carga. Un campo con densidad de energía igual a cero es el caso límite de un campo vulgar. ¿ Limite con qué tendencia ? Otra vez resulta útil el recurso de la película vista al derecho y al revés.

- Película vista al derecho → Neutralización mutua y gradual de dos cargas de signos opuestos. En el final del suceso no existen cargas eléctricas.
- Película vista al revés → En una región donde no existen cargas aparece, sin intervención de un agente causante adicional, un par de cargas de signos opuestos, ambas iguales a cero. ¿ Pero algo igual a cero no existe ! Sí, existe. La película vista al derecho *incluye* al instante final, cuando el valor cero se establece. En ese instante *existe* un par constituido por cargas iguales a cero. Y la energía de ese par es igual a cero. No necesitamos una discusión filisófica. Solamente necesitamos observar que energía igual a cero equivale a $-dW + dW$.
- Todo se resuelve con tres campos. Uno con densidad de energía negativa, otro con densidad de energía positiva y otro con densidad de energía igual a cero, que se descompone y modifica simétricamente las energías de los otros dos. Simétricamente significa $-dU + dU$ y $-\Delta U + \Delta U$.



Podemos intentar, en lenguaje vulgar, una comprensión intuitiva de la descomposición del vacío. Nace un par de cargas de signos opuestos, ambas iguales a cero. ¿ Qué fuerza requieren las cargas iguales a cero para ser aceleradas ? Requieren fuerza igual a cero. Notemos que estamos pensando en el instante inicial del suceso, no en los instantes siguientes. ¿ Hay disponible una fuerza igual a cero ? Siempre, existe en todos los puntos del vacío. Y siempre hay disponible un par de cargas iguales a cero, en todos los puntos del vacío. Entonces siempre se inicia el suceso, sin intervención de un agente causante adicional. Todo lo necesario para el inicio está en el vacío.

Aunque el instante inicial sea explicable, el fenómeno abarca más. ¿ Cómo continúa ? Antes de buscar una respuesta repasemos un caso conocido, donde las energías de ambos signos varían simétricamente.



La mesa tiene una guía sin rozamiento, que libremente permite a las cargas acercarse entre sí. Una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento une a cada carga con una masa m . Reduciendo la separación, el par de cargas realiza trabajo sobre las masas. Esas masas forman un sistema y el par de cargas otro. Cada incremento $+dW$ en la energía de las masas se compensa con un incremento $-dW$ en la energía del par de cargas. Podemos suponer que el infravacío es un sistema constituido por pares de cargas, que mientras ganan energía negativa proveen energía positiva a los objetos.

(10-c) Extracción de energía por resonancia

¿Cómo podríamos extraer energía de un cubo que contiene ondas de una frecuencia dada? Recordemos que esas ondas tienen inductancia y capacitancia. Son sistemas resonantes. Un circuito LC que resonase a la misma frecuencia absorbería energía del cubo. ¿Por qué? Porque entre sistemas que resuenan a la misma frecuencia hay transferencia de energía, desde el resonador activo al resonador pasivo.

Eso sucede con resonadores de todos los tipos. Cada cuerda de guitarra es un resonador mecánico. La caja de la guitarra es transductora entre dos formas de energía, mecánica y sonora. Hay un experimento bonito y asombroso, con dos guitarras A y B perfectamente afinadas en la misma forma. La 6^{ta} cuerda de A y la 6^{ta} cuerda de B resuenan a la misma frecuencia. Lo mismo sucede con la 5^{ta} cuerda de A y la 5^{ta} cuerda de B. Con las 6 cuerdas sucede lo mismo. Si pulsamos la 5^{ta} cuerda de B, inmediatamente aparece vibración en la 5^{ta} cuerda de A. Lo mismo sucede con las otras cuerdas. A es el sistema pasivo y B es el sistema activo. La energía se transfiere desde B hacia A.

Dentro del cubo que nos interesa, las ondas estacionarias se inician solamente si hacemos lo necesario para iniciarlas. Entonces en el primer instante las iniciamos con un generador. Este cubo con ondas estacionarias es el resonador activo.

¿Podemos construir el resonador pasivo con una bobina y un capacitor vulgares? Supongamos que la arista del cubo mide casi 3 m, exactamente 2,99792458 m. ¿Cuál es la frecuencia de las ondas en su interior?

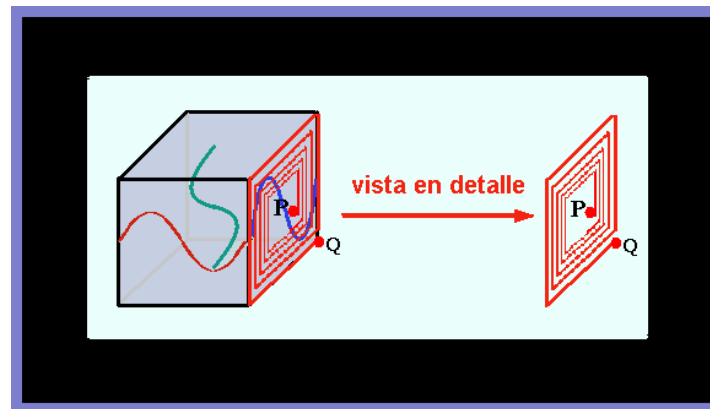
$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{299792458 \frac{m}{seg}}{2,99792458 m} = 100 MHz \quad (427)$$

Eso significa que un cubo de 3 m de arista resuena en radiofrecuencia. ¿Podría servir esa radiofrecuencia para alimentar los dispositivos eléctricos de la vida cotidiana? Sí. Actualmente hay tecnología que permite hacerlo.

En la historia de las radiocomunicaciones hay un detalle relevante. El primer receptor de radiocomunicaciones fue la radio a galena. ¿Sus partes constituyentes? Una antena para captar la radiofrecuencia, un trocito de sulfuro de plomo (denominado galena), un circuito resonante LC que resuena a la frecuencia de las ondas de radio, un capacitor para mejorar la experiencia auditiva y un auricular normal. Eso es todo. El auricular funciona con la energía captada por la antena. ¿Sin pilas ni baterías, sin servicio eléctrico domiciliario, sin dinamo, sin fuente adicional de energía? Así es, sin fuente adicional. El auricular es transductor entre dos formas de energía, electromagnética y mecánica. La parte mecánica mueve una membrana, que vibra y produce sonido como la cuerda de guitarra. Realmente es una

experiencia asombrosa. Ondas viajeras que excitan al circuito resonante del receptor, con el auricular conectado como carga.

Con dedicación y algunos recursos materiales, se puede optimizar un receptor para mover lo que sea. Por ejemplo una grúa, un automóvil, un barco, un equipo de aire acondicionado, un avión, etc. Lo más fácil es encender lámparas eléctricas, pues no necesitan transductor. Encienden muy bien con energía radiofrecuente.



La figura muestra algo que probablemente permitiría lograr la extracción resonante de energía. La idea es reemplazar cada cara del cubo por una bobina plana, cuadrada, de alambre conductor. La figura, por simplicidad gráfica, muestra una bobina de pocas vueltas con las espiras muy espaciadas. En la realización práctica, el número de vueltas y el espacio entre espiras deben ajustarse para que la bobina refleje las ondas tan bien como una pared metálica. Eso sucede cuando la separación entre espiras es bastante menor que λ . Entonces las variables de diseño de la bobina deben cumplir una condición determinada. En este documento nos interesa más analizar los fundamentos físicos que diseñar dispositivos prácticos. Solamente necesitamos entender que la extracción es posible con recursos normales.

Una bobina tiene en sí misma capacitancia, pues cada tramo de alambre funciona como una placa en relación con los otros tramos.

La inductancia es propia de la carga en movimiento. Existe inductancia aunque no haya un dispositivo material, como aprendimos en el análisis del fotón. Y en todos los casos, hay relación entre la trayectoria del movimiento y el valor de la inductancia. Cuando las cargas están obligadas a seguir un camino establecido, el valor de la inductancia está determinado. La bobina sirve para establecer el camino de la corriente. Por eso hay relación entre el diseño de la bobina y el valor de la inductancia. También hay relación entre el diseño de la bobina y la capacitancia. Lo esencial es saber que cada bobina, por tener capacitancia e inductancia, es un sistema resonante. Si la capacitancia y la inductancia propias de la bobina dan una frecuencia de resonancia igual a la frecuencia de las ondas que hay en el cubo, entonces la bobina es capaz de extraer energía de las ondas. En ese caso, si conectamos algo en los extremos de la bobina (puntos P y Q), lo que conectemos recibirá electricidad. Una lámpara encenderá, siempre que la energía sea suficiente y no tan grande como para quemarla. El rendimiento mejora cuando cada cara del cubo es reemplazada por una bobina, es decir, cuando utilizamos 6 bobinas.

¿ Hay relación entre la inductancia y el rendimiento ? Si el vacío se comporta como hemos descrito, es decir como proveedor ilimitado de energía, la respuesta más razonable es

afirmativa. ¿ Por qué ? Razonemos. Inductancia es la derivada del flujo magnético respecto de la corriente.

$$\mathcal{L} = \frac{d\phi_B}{di}$$

Cuando la inductancia es pequeña, la corriente es grande y el flujo magnético es pequeño. La inducción opera en ambos sentidos. Si alimentamos la bobina con corriente, aparece un campo magnético. Y si hay un campo magnético variable donde está la bobina, aparece una diferencia de potencial en los terminales de la bobina. Si entre los terminales algo cierra el circuito, circula corriente.

El fenómeno es reversible. La misma película vista en ambos sentidos. ¿ Qué sucede cuando una bobina de inductancia pequeña, con algo entre sus terminales que cierre el circuito, es excitada por un campo magnético pequeño ? Inductancia pequeña significa poco flujo magnético y mucha corriente, en ambos sentidos de la película. Es decir que por la carga circula mucha corriente. ¡ Pero eso viola la conservación de la energía ! En realidad no, pues todo proviene del sistema triple, *vacío* ↔ *objetos* ↔ *infravacío* . La energía aportada a los objetos se compensa con una energía negativa del mismo valor absoluto. Sin esa compensación sería imposible la reversibilidad de la inducción. Y esa reversibilidad es una ley bien comprobada. Por eso lo más razonable es aceptar que minimizando la inductancia maximizamos el rendimiento.

Las bobinas bifilares minimizan la inductancia porque, en cada tramo de alambre doble, la misma corriente pasa por un alambre en un sentido y por el otro alambre en sentido opuesto. Si los alambres están muy cercanos, el resultado es un campo magnético muy débil con una corriente grande. Y esto es reversible. Si excitamos a la bobina bifilar con un campo magnético débil, la bobina podrá entregar a la carga una gran corriente. Es decir, entregará gran energía. Y para iniciar el fenómeno basta un campo magnético variable muy débil, que deberemos producir en el primer instante. Después el flujo de energía se autosostiene, porque el vacío evita que la resonancia decaiga.

Hasta mediados del siglo 20 , los radioaficionados hacían una bobina pequeña con alambre conductor y conectaban los extremos a una lámpara eléctrica. Ese dispositivo sencillo es denominado aro de Hertz. La lámpara enciende puesta cerca de la antena emisora. La luminosidad aumenta cuando la potencia emitida aumenta. El aro de Hertz ayuda a buscar la mejor condición de acoplamiento entre generador y antena.

Aprovechar la energía de las ondas es tarea fácil, que ha sido hecha exitosamente desde el siglo 19, cuando Heinrich Hertz demostró que es posible en condiciones normales. Con el transcurso del tiempo han sido optimizadas las técnicas de aprovechamiento. Esa optimización demandó y demanda siempre mucha inteligencia y mucho esfuerzo. El método resonante para extraer energía funciona óptimamente en el vacío. Por eso sirve para impulsar vehículos astronáuticos de todas las clases.

CAPÍTULO 11 - Cohesión interna de una partícula

En la sección (7-3) hemos hecho una comparación entre positrón y electrón, que ayudó a comprender lo siguiente.

La cohesión interna de una partícula depende de $\frac{W_E}{W_H}$.

- ¿Cuál es la partícula que tiene la cohesión mínima posible ? Es el fotón, pues al chocar con algo que no sea un fotón se descompone inevitablemente. En colisión con otro fotón puede también descomponerse, como cuando se forman un electrón y un positrón.

- En el fotón es

$$\frac{W_E}{W_H} = 1$$

Entonces

$$\text{foton} \rightarrow \frac{W_E}{W_H} - 1 = 0$$

- En otras partículas

$$\text{otras partículas} \rightarrow \frac{W_E}{W_H} - 1 \neq 0$$

- El primer paso está dado. Tenemos algo que expresa una distinción entre el fotón y las otras partículas. Si eso fuese la definición de cohesión, sería absurda. ¿ Por qué ? Porque en algunos casos, por ejemplo en el caso del positrón, daría cohesión menor que cero. Y cero, que corresponde al fotón, es la cohesión mínima posible.
- ¿ Existe una función que siempre de valores positivos, que distinga entre el fotón y las otras partículas, respetando el mismo criterio de distinción ? Sí. Es lo siguiente.

$$\text{criterio} \rightarrow \left(\frac{W_E}{W_H} - 1 \right)^2 \quad (428)$$

Siempre da resultado positivo, da cero para el fotón y respeta lo que observamos cuando analizamos al electrón y al positrón. Hemos dado el segundo paso.

- La idea es coherente conceptualmente, pero expresada en esa forma conduce a cálculos muy difíciles. Para efectuarlos necesitaríamos una ley de permeabilidad magnética general, pues μ depende de la densidad de energía. Para cada partícula deberíamos hacer el mismo tipo de planteo que hicimos para el electrón y para el positrón. A eso se agregan más dificultades, como la configuración geométrica de cada partícula, el conjunto de partes componentes, las relaciones de fase, etc. El problema sería formidable en términos de W_E y W_H . ¿ Alternativas ?
- Cuando analizamos las dos densidades de corriente simétricas que operan en la dirección de propagación, comprendimos que la respuesta estaba implícita en la misma dificultad que estábamos señalando. ¡ Una recta es una recta ! , había sido nuestra protesta en ese caso. Y la clave estaba en el planteo infinitesimal, que permite definir tantas rectas como necesitemos para después pasar al límite y recuperar la recta única, con el funcionamiento físico bien comprendido y bien formulado.
- ¿ Hay una clave implícita en la dificultad que nos está deteniendo ? Hemos protestado porque el problema sería insoluble en términos de W_E y W_H . Entonces intentemos plantearlo en otros términos.
- ¿ Hay posibilidad de traducir a otros términos el mismo criterio de cohesión ? Razonemos.

Sabemos que μ depende de la densidad de energía electromagnética, es decir del cociente $\frac{W}{V}$, siendo $W = m C^2$ y V el volumen de la partícula. Más masa implica más W y a la vez menos volumen. ¿Por qué menos volumen? Porque todas las medidas geométricas de la partícula se relacionan con la longitud de onda. Veamos la ecuación siguiente.

$$m C^2 = h \nu \quad \Longrightarrow \quad m C^2 = h \frac{C}{\lambda} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{h}{m C}$$

Más masa implica λ más pequeña y, en consecuencia, menos volumen. Cuando la masa aumenta, también aumenta la densidad de energía. En consecuencia aumenta μ . Por esa razón, crece la fracción de energía correspondiente al campo magnético. Lo mismo que hemos expresado en términos de W_E y de W_H , podemos expresarlo en términos de m . ¡ Pero el cociente de energías es adimensional! ¡ Necesitamos una división entre dos masas para obtener un adimensional! ¡ No hay dos masas en la partícula, hay una sola!

- Razonemos. El cociente adimensional que nos interesa se forma con dos términos que tienen dimensiones de masa. Pero m contiene en sí misma todas las condiciones del criterio de cohesión. Para no alterar esas condiciones el otro término debe ser una constante con dimensiones de masa, de modo tal que el cociente dependa solamente de m y respete el criterio de cohesión. Ignoramos el valor de esa constante. ¿ Nos detendremos o hay alguna manera de continuar? La continuación sería una exploración conceptual, sin resultados cuantitativos. Igualmente prefiero avanzar.

Propongo simbolizar m_k a la constante con dimensiones de masa (cuyo valor ignoramos). Así podríamos formar el término adimensional con m y m_k .

La idea es formular un criterio en términos de masas, coherente con (428). Hemos comprendido que la proporción de energía magnética está relacionada con m . Entonces esta masa será denominador del cociente, por analogía con W_H .

$$criterio \rightarrow \left(\frac{m_k}{m} - 1 \right)^2 \quad (429)$$

El criterio (429) no es aplicable al fotón. ¿ Por qué? Porque la cohesión igual a cero corresponde a un valor específico de masa, $m = m_k$. Y no es verdad que m_k sea el único valor posible para la masa del fotón. Esto significa que (429) es aplicable solamente a partículas elementales que tienen masa en reposo distinta de cero. Notemos lo siguiente. Hemos llegado a (429) por analogía. Dos criterios análogos pueden tener ámbitos de aplicación distintos. Eso no invalida la analogía. Lo que razonemos en términos de W_E y de W_H tiene correspondencia en términos de masa.

La cohesión aumenta cuando la proporción de energía magnética disminuye. ¿Cuál es la proporción más pequeña compatible con la existencia de la partícula? Pregunto esto porque sin campo magnético no hay partícula. ¿Cuál es la proporción más grande de energía magnética compatible con la existencia? Lo pregunto porque sin campo eléctrico la partícula no existiría. Son preguntas que motivan la reflexión siguiente.

Los valores posibles de cohesión pertenecen a un intervalo acotado, cuyos extremos están dados por condiciones imprescindibles para la existencia de las partículas.

¿ Quedan detalles incoherentes o algo que necesite ser corregido ? No detecto más detalles de esa índole. Supongo que podemos dar el paso siguiente, es decir, proponer una definición de cohesión basada en el criterio (429) .

Si el criterio (429) es adecuado, podemos tomarlo directamente como definición de cohesión.

$$c_p = \left(\frac{m_k}{m} - 1 \right)^2 \quad (430)$$

c_p → cohesión interna de la partícula elemental

Para operar en forma concisa hagamos el cambio de variable siguiente.

$$\frac{m_k}{m} = z \quad (431)$$

En (430) cambiamos la variable como indica (431) .

$$c_p = (z - 1)^2 \quad (432)$$

Intentemos comprender un poco las propiedades de la función c_p . Formulemos la derivada primera.

$$\frac{dc_p}{dz} = 2(z - 1) \quad (433)$$

En (432) expresemos el cuadrado como multiplicación explícita.

$$c_p = (z - 1) (z - 1) \quad (434)$$

La idea es vincular a c_p con la derivada primera. Entonces en (433) despejemos $(z - 1)$.

$$\frac{1}{2} \frac{dc_p}{dz} = (z - 1) \quad (435)$$

En (434) reemplacemos solamente uno de los términos $(z - 1)$ como indica (435) . ¿ Por qué uno solo ? Porque eso posibilita separar variables y después integrar, en la forma siguiente.

$$c_p = \frac{1}{2} \frac{dc_p}{dz} (z - 1)$$

Separamos la variables.

$$\frac{dz}{z - 1} = \frac{1}{2} \frac{dc_p}{c_p} \quad (436)$$

Integramos.

$$\ln(z - 1) = \frac{1}{2} \ln c_p \pm k_1 \quad (437)$$

k_1 → constante de integración

Notamos en (437) que la constante de integración acota la diferencia entre dos términos. ¿ Por qué ? Por lo siguiente. Despejemos la constante.

$$\ln(z - 1) - \frac{1}{2} \ln c_p = \pm k_1$$

- ¿ Hay algo en esta ecuación que podamos relacionar con el concepto central de todo esto, que es el intervalo acotado compatible con la existencia de las partículas ? La diferencia entre las funciones del miembro izquierdo estaría acotada si la constante tuviese un máximo.
- ¿ En qué forma la constante podría tener un máximo ? La respuesta proviene de lo que siempre observamos cuando resolvemos ejercicios en la tarea estudiantil. Cuando resolvemos una integral, obtenemos una ecuación que incluye a la constante de integración. En física esa constante no es abstracta. Es una magnitud del mismo tipo que la parte variable. Y otro detalle. La parte variable y la constante tienen formas matemáticas análogas.
- ¿ Qué implica eso en este caso ? Si la parte variable es

$$\frac{1}{2} \ln c_p$$

la parte constante debe tener una forma del tipo siguiente.

$$k_1 = \frac{1}{k_2} \ln \beta \quad (438)$$

- ¡ No veo en (438) la posibilidad de un intervalo acotado ! Otra vez la época estudiantil nos ayuda, pues hay un ejercicio destinado a introducir intuitivamente el número e de Euler. Ejercicio: ¿ cuál es el valor de x que maximiza la función siguiente ?

$$y = x^{\frac{1}{x}} \quad (439)$$

En las aulas la consigna es hallar la respuesta por iteración, es decir, proponer un valor de x , calcular el valor correspondiente de y , proponer otro valor de x , calcular el valor nuevo de y , observar la tendencia, poco a poco proponer valores cada vez mayores hasta que un valor de x , mayor que el valor anterior, haga disminuir a y . Entonces, entre los dos últimos valores propuestos está el valor de x correspondiente al máximo de y . El ejercicio es bonito y en pocos pasos se obtiene la respuesta, con una aproximación muy aceptable. En este documento no rige la consigna de iteración. Hallaremos el extremo en la forma habitual.

$$y = x^{\frac{1}{x}} \quad (440)$$

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln x$$

Derivamos en ambos miembros.

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} (-\ln x + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2} (-\ln x + 1)$$

Igualando a cero tenemos

$$-\ln x_m + 1 = 0$$

$x_m \rightarrow$ valor de x correspondiente al máximo de y

$$\ln x_m = 1$$

$$x_m = e^1$$

$$\boxed{x_m = e} \quad (441)$$

Entonces,

$$\boxed{y_m = e^{\frac{1}{e}}} \quad (442)$$

$y_m \rightarrow$ valor máximo de y

Repetamos aquí (438)

$$k_1 = \frac{1}{k_2} \ln \beta \quad (438)$$

Observando a (438) comprendemos lo siguiente. La integral de cohesión, es decir (437), tendría un intervalo de operación acotado si fuese $k_2 = \beta$. ¿Por qué? Porque la resta de las partes variables, es decir

$$\ln(z-1) - \frac{1}{2} \ln c_p = \pm k_1$$

es igual a la constante. Y con $k_2 = \beta$, la constante no puede exceder el intervalo comprendido entre $+e^{\frac{1}{e}}$ y $-e^{\frac{1}{e}}$. Poniendo $k_2 = \beta$ tendríamos una función de cohesión acotada. Eso no garantiza la adecuación de la función a la realidad física. Pero, en el contexto de la definición propuesta, es la única manera de formar una función acotada. En consecuencia, es la única manera de continuar.

Repetamos aquí (438).

$$k_1 = \frac{1}{k_2} \ln \beta \quad (438)$$

Reemplazamos a k_2 por β .

$$k_1 = \frac{1}{\beta} \ln \beta \quad (443)$$

Repetamos aquí la ecuación (437).

$$\ln(z-1) = \frac{1}{2} \ln c_p \pm k_1 \quad (437)$$

En (437) reemplazamos a k_1 como indica (443).

$$\boxed{\ln(z-1) = \frac{1}{2} \ln c_p \pm \frac{1}{\beta} \ln \beta} \quad (444)$$

Repasemos lo hecho hasta aquí.

▪ **1**

Comprender que la densidad de energía de las partículas elementales depende solamente de la masa y que eso determina la permeabilidad magnética. En consecuencia, determina la proporción de energía magnética en la configuración constitutiva de la partícula.

- 2
Someter el criterio a crítica para detectar incoherencias e insuficiencias.
- 3
Adecuar el criterio hasta eliminar incoherencias e insuficiencias.
- 4
Comprender que en términos de campos la aplicación del criterio sería far-
ragosa y prácticamente imposible.
- 5
Reemplazar al criterio basado en campos por un criterio análogo basado en
la masa.
- 6
Formar el término adimensional del criterio dividiendo a la masa constante
 m_k por la masa de la partícula.
- 7
Cuando la adecuación del criterio quedó completa, definir la cohesión interna
de la partícula como la función presentada en el criterio.
- 8
Analizar la función de cohesión, vincularla con su derivada primera, separar
variables e integrar.
- 9
Interpretar físicamente a la constante de integración, notar que la función
opera dentro un intervalo acotado cuando la constante está acotada.
- 10
Asociar las propiedades de la constante con las propiedades de la función
 $y = x^{\frac{1}{x}}$, analizar a esta función y hallar su máximo.

Repitamos aquí (444) .

$$\ln(z - 1) = \frac{1}{2} \ln c_p \pm \frac{1}{\beta} \ln \beta \quad (444)$$

Operamos dentro de la ecuación.

$$\ln(z - 1) = \frac{1}{2} \ln c_p \pm \ln \beta^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\ln(z - 1) - \frac{1}{2} \ln c_p = \pm \ln \beta^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\ln(z - 1) - \ln c_p^{\frac{1}{2}} = \pm \ln \beta^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\ln \left(\frac{z-1}{(c_p)^{\frac{1}{2}}} \right) = \pm \ln \beta^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\frac{z-1}{(c_p)^{\frac{1}{2}}} = \pm \beta^{\frac{1}{\beta}}$$

$$z-1 = \pm (c_p)^{\frac{1}{2}} \beta^{\frac{1}{\beta}} \quad (445)$$

¡ La ecuación (445) es tautológica ! ¡ No contiene información ! Esa protesta es lo primero que surge al verla, por la razón siguiente. Repitamos aquí (432) .

$$c_p = (z-1)^2 \quad (432)$$

Entonces

$$(c_p)^{\frac{1}{2}} = z-1$$

Con eso en (445) se cancelan términos y resulta $\beta = 1$. La única información que obtenemos es la tautología $1 = 1$. ¡ Hemos dedicado esfuerzo a un asunto inútil !
¡ Abandonemos esto !

Así protestaríamos y abandonaríamos el tema si la única posibilidad fuese formar esa tautología. ¿ Es la única posibilidad ? ¡ Sí, está nítidamente demostrada !

Razonemos. ¿ Hemos demostrado que la única posibilidad es formar una tautología ? ¿ O hemos demostrado que para evitarla necesitamos más información ? Sucede lo segundo. ¿ Por qué ? Porque (445) pertenece a un contexto. ¿ Contiene ese contexto información que ha pasado inadvertida ? Sí. Ha pasado inadvertida porque está implícita. Y debemos convertirla en explícita.

¿ Como evitaremos la tautología ? Haremos lo siguiente. En vez de cancelar el término que aparece en ambos miembros y llegar a la tautología, en uno de los miembros reemplazaremos ese término por el resultado de la información implícita. Entonces, la primera tarea es formular explícitamente la información. ¿ Cómo lo haremos ? Intentaremos comprender bien las propiedades y las condiciones del fenómeno.

- La condición de existencia acota el intervalo de los valores posibles de z y de c_p . En un intervalo acotado, la diferencia entre c_p y z está acotada. ¿ Cómo se comporta esa diferencia ? ¿ Tiene algún máximo o algún mínimo ? Para responder necesitamos analizar a la resta como función matemática.

$$u = c_p - z \quad (446)$$

- No hay incompatibilidad física en la resta, porque los términos adimensionales admiten todas las operaciones. Para buscar extremos derivemos e igualemos a cero la derivada. En (446) expresamos c_p como indica (432) .

$$u = (z-1)^2 - z$$

Derivamos.

$$\frac{du}{dz} = 2(z-1) - 1$$

$$\frac{du}{dz} = 2z - 3$$

Notemos que la derivada segunda es mayor que cero. Entonces el extremo es un mínimo.

Igualamos a cero la derivada primera.

$$0 = 2 z_e - 3$$

$z_e \rightarrow$ valor extremo de z

Despejamos

$$z_e = \frac{3}{2} \tag{447}$$

- ¿ Para qué sirve saber eso ?

Razonemos. La diferencia $c_p - z$ está acotada porque tiene un mínimo y $\beta^{\frac{1}{\beta}}$ está acotado porque tiene un máximo. En un sistema coherente, las propiedades están correlacionadas. Entonces los extremos de ambas funciones deberían corresponder al mismo caso. ¿ A qué corresponde ese caso ? Al extremo del intervalo. ¿ Cuál intervalo ? El intervalo compatible con la existencia de las partículas elementales.

Los extremos de $c_p - z$ y de $\beta^{\frac{1}{\beta}}$ determinan el extremo del intervalo compatible con la existencia de las partículas elementales.

Repitamos aquí la ecuación (432) .

$$c_p = (z - 1)^2 \tag{432}$$

Para el caso que minimiza $c_p - z$ tenemos

$$c_e = (z_e - 1)^2$$

$c_e \rightarrow$ valor de c_p cuando $c_p - z$ es minimo

$$(c_e)^{\frac{1}{2}} = (z_e - 1) \tag{448}$$

Repitamos aquí la ecuación (447) .

$$z_e = \frac{3}{2} \tag{447}$$

En (448) reemplazamos z_e como indica (447) .

$$(c_e)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{2} - 1 \right)$$

$$(c_e)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \tag{449}$$

Repitamos aquí la ecuación (445) .

$$z - 1 = \pm (c_p)^{\frac{1}{2}} \beta^{\frac{1}{\beta}} \tag{445}$$

Para el caso que analizamos es

$$z_e - 1 = \pm (c_e)^{\frac{1}{2}} \beta_e^{\frac{1}{\beta_e}} \quad (450)$$

En (450) reemplazamos $(c_e)^{\frac{1}{2}}$ como indica (449) .

$$z_e - 1 = \pm \frac{1}{2} \beta_e^{\frac{1}{\beta_e}} \quad (451)$$

Vimos que el extremo de la constante corresponde a lo siguiente.

$$\beta_e = e \quad (452)$$

En (451) reemplazamos β_e como indica (452) .

$$z_e - 1 = \pm \frac{1}{2} e^{\frac{1}{e}}$$

$$z_e = 1 \pm \frac{1}{2} e^{\frac{1}{e}} \quad (453)$$

Repitamos aquí (431) .

$$\frac{m_k}{m} = z \quad (431)$$

Para el caso que analizamos es

$$\frac{m_k}{m_e} = z_e \quad (454)$$

$m_e \rightarrow$ masa en el extremo del intervalo existencial

En (453) reemplazamos z_e como indica (454) .

$$\frac{m_k}{m_e} = 1 \pm \frac{1}{2} e^{\frac{1}{e}} \quad (455)$$

Despejamos m_e .

$$m_e = \frac{m_k}{1 \pm \frac{1}{2} e^{\frac{1}{e}}} \quad (456)$$

En (456) notamos que el signo positivo de la constante corresponde a la masa mínima que una partícula elemental puede tener, según la definición de cohesión propuesta.

$$m_{(mín)} = \frac{m_k}{1 + \frac{1}{2} e^{\frac{1}{e}}} \quad (457)$$

$m_{(mín)} \rightarrow$ masa mínima compatible con la existencia de una partícula elemental

CAPÍTULO 12 - Unidad elemental de masa

En las aulas y en la bibliografía encontramos una unidad de masa convencional, la **uma**, cuya magnitud se adecua a las escalas atómica y subatómica. Por convención la uma es $\frac{1}{12}$ de la masa de un átomo de carbono 12 en condiciones específicas. Sería preferible una unidad de masa elemental que, por aplicación de leyes físicas, derive de constantes fundamentales. ¿ Es eso posible ? Sí, por ejemplo en la forma siguiente.

(12-a) Partícula elemental

En este contexto, partícula elemental es una onda rotativa, estructurada por cargas Q_o , que cumple la condición siguiente.

$$m C^2 = h \nu \quad (458)$$

Notemos que la definición se extiende naturalmente a sistemas de ondas rotativas.

La relación entre frecuencia y longitud de onda es

$$\nu = \frac{C}{\lambda} \quad (459)$$

En (458) reemplazamos ν como indica (459) .

$$\begin{aligned} m C^2 &= h \frac{C}{\lambda} \\ m C &= \frac{h}{\lambda} \\ m &= \frac{h}{\lambda C} \end{aligned} \quad (460)$$

La masa es la tasa de oposición mecánica y la impedancia es la tasa de oposición electromagnética. En (460) aparece una de ellas y la otra no. ¿ Podemos incorporar la tasa que falta sin alterar la ecuación ? Sí, haciendo lo siguiente.

$$\begin{aligned} m &= \frac{\mu_o C}{\mu_o C} \frac{h}{\lambda C} \\ m &= \frac{1}{\mu_o C \lambda C} \mu_o C h \end{aligned}$$

Por ser $\frac{1}{C^2} = \mu_o \epsilon_o$ tenemos

$$m = \frac{\epsilon_o}{\lambda} \mu_o C h \quad (461)$$

La ecuación (461) expresa la relación entre la tasa de oposición mecánica m y la tasa de oposición electromagnética $\mu_o C$.

Falta incluir en la relación la característica principal de las cargas Q_o , que es el comportamiento capacitivo. Repitamos aquí (162) .

$$\mathcal{C} = \epsilon_o \frac{\lambda}{2 \pi} \quad (162)$$

$$\frac{2 \pi \mathcal{C}}{\lambda} = \epsilon_o$$

$$\frac{2 \pi \mathcal{C}}{\lambda^2} = \frac{\epsilon_o}{\lambda} \quad (462)$$

En (461) reemplazamos $\frac{\epsilon_o}{\lambda}$ como indica (462) .

$$m = \frac{2 \pi \mathcal{C}}{\lambda^2} \mu_o C h$$

$$m = \frac{\mathcal{C}}{\lambda^2} 2 \pi \mu_o C h \quad (463)$$

El término λ^2 es el área de una superficie. Simbolizaremos A_S a ese término .

$$\lambda^2 = A_S \quad (464)$$

En (463) aplicamos (464) .

$$m = \frac{\mathcal{C}}{A_S} 2 \pi \mu_o C h \quad (465)$$

Repitamos aquí la ecuación (270) .

$$h = 2 \pi \mu_o C Q_o^2 \quad (270)$$

En (465) reemplazamos h como indica (270) .

$$m = 2 \pi \frac{\mathcal{C}}{A_S} \mu_o C 2 \pi \mu_o C Q_o^2$$

$$m = (2 \pi \mu_o C)^2 Q_o^2 \frac{\mathcal{C}}{A_S} \quad (466)$$

Repitamos aquí (273) .

$$\frac{e}{Q_o} = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \quad (273) \quad (467)$$

Despejamos.

$$Q_o = e \frac{2}{-3 + \sqrt{13}} \quad (468)$$

Aplicamos en (467) lo indicado en (468) .

$$m = (2 \pi \mu_o C)^2 e^2 \left(\frac{2}{-3 + \sqrt{13}} \right)^2 \frac{\mathcal{C}}{A_S} \quad (469)$$

Si el valor de \mathcal{C} y el valor de A_S fuesen datos, podríamos calcular el valor de la masa elemental m .

El valor de \mathcal{C} y el valor de A_S serían datos si decidiésemos definir la unidad de masa elemental del sistema de unidades utilizado. Por ejemplo, en sistema M.K.S. la unidad de capacitancia es 1 Farad y la unidad de área es $1 m^2$. Una definición así tendría en cuenta todas las propiedades características de las partículas elementales. Sería la unidad de masa elemental del sistema de unidades, adecuadamente definida, basada en las características constitutivas de las partículas elementales. Por eso propongo lo siguiente.

Unidad de masa elemental m_s del sistema M.K.S. es la masa dada por la ecuación (435) para $\mathcal{C} = 1Farad$ y $A_S = 1 m^2$.

Tengo a mano la tabla de valores de CODATA del año 2008, que especifica lo siguiente.

- $e = 1,60217646263$ coulomb (últimos dos decimales inciertos)
- $C = 299792458 \frac{metro}{segundo}$
- $\mu_o = 4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{Henry}{metro}$

Con esos valores (469) da el resultado siguiente.

$$m_s = 1,568916065 (...) 10^{-30} Kg \quad (470)$$

¿ Tiene m_s alguna propiedad que la uma no tenga ? Sabemos que m_s es una combinación de constantes universales basada en las leyes físicas y que la uma no tiene esa propiedad. Pero para poder avanzar necesitamos una respuesta más profunda. Por ejemplo, encontrar que algo esencial es coherente con m_s y no con la uma. En ese caso, habría fundamento para adoptar a m_s como unidad de masa elemental y abandonar a la uma.

CAPÍTULO 13 - Conclusión

Más que una labor analítica hemos hecho un trabajo de cerrajería, desoxidando cerraduras y destrabando puertas, sin explorar lo que hay tras ellas, apreciando simplemente lo que se ve desde los lugares donde fueron colocadas.

En esa forma hemos accedido a imágenes parciales, todas de la misma naturaleza y mutuamente coherentes, que probablemente puedan integrarse en una síntesis. Todo indica que el núcleo de la síntesis estará constituido por las ecuaciones de Maxwell.

En ese contexto el vacío aparece como substrato universal omnipresente, irreductible y polarizable, capaz únicamente de conmutar entre dos estados, sin polarización y polarizado. No hay más estados posibles para el vacío. Esa conmutación es necesaria y suficiente para engendrar todo lo que existe, es decir, para engendrar el cosmos entero. Parece un enunciado exagerado pero es justo, pues el vacío no necesita más que esa conmutación para generar fotones. Y los fotones se encargan de formar el resto.

Otro detalle remarcable es la simultaneidad de acciones en ambos extremos de un vínculo capacitivo o, si preferimos una denominación más general, de un vínculo establecido por la componente longitudinal del campo electromagnético. Es decir, eso que vulgarmente es descrito como acción a distancia sin demora, efectuada en tiempo igual a cero. Esta propiedad del vínculo longitudinal necesita explicación en términos físicos y en términos lógicos, para lograr una comprensión natural del fenómeno. Buscar esa comprensión podría ser el desafío más difícil en el transcurso de varias décadas después de esta. En el momento de alcanzarla, la recompensa será fascinante.

APÉNDICE 1



Resolución de la integral siguiente.

$$\mathcal{I} = \int_{t=0}^{t=T} \text{sen}^2(\omega t - kx) dt \quad (471)$$

Siendo x constante, la integral da el mismo resultado que esta otra :

$$\mathcal{I} = \int_{t=0}^{t=T} \text{sen}^2(\omega t) dt \quad (472)$$

Hagamos el cambio de variable siguiente.

$$\theta = \omega t \quad (473)$$

Despejamos.

$$t = \frac{1}{\omega} \theta$$

Por ser ω constante es

$$dt = \frac{1}{\omega} d\theta \quad (474)$$

En (472) aplicamos (473) y (474) .

$$\mathcal{I} = \int_{t=0}^{t=T} \text{sen}^2 \theta \frac{1}{\omega} d\theta$$

Ponemos la constante fuera de la integral.

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\omega} \int_{t=0}^{t=T} \text{sen}^2 \theta d\theta$$

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\omega} \int_{t=0}^{t=T} \text{sen} \theta \text{ sen} \theta d\theta$$

$$\omega \mathcal{I} = \int_{t=0}^{t=T} \text{sen} \theta \text{ sen} \theta d\theta$$

Podemos integrar por partes.

$$u = \text{sen} \theta$$

$$dv = \text{sen} \theta d\theta$$

$$\frac{du}{d\theta} = \cos \theta$$

$$v = \int \text{sen } \theta \, d\theta$$

$$\boxed{du = \cos \theta \, d\theta}$$

$$\boxed{v = -\cos \theta}$$

Escribamos la regla de integración por partes.

$$\omega \mathcal{I} = \int u \, dv = uv - \int v \, du$$

En la integral reemplazamos como muestran las expresiones enmarcadas.

$$\omega \mathcal{I} = -\text{sen } \theta \cos \theta + \int \cos \theta \cos \theta \, d\theta$$

$$\omega \mathcal{I} = -\text{sen } \theta \cos \theta + \int \cos^2 \theta \, d\theta$$

Por trigonometría tenemos

$$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 \theta = 1 - \text{sen}^2 \theta$$

Entonces

$$\omega \mathcal{I} = -\text{sen } \theta \cos \theta + \int (1 - \text{sen}^2 \theta) \, d\theta$$

Ordenamos

$$\omega \mathcal{I} = \int d\theta - \text{sen } \theta \cos \theta - \underbrace{\int \text{sen}^2 \theta \, d\theta}_{\omega \mathcal{I}}$$

$$2 \omega \mathcal{I} = \int d\theta - \text{sen } \theta \cos \theta$$

$$2 \omega \mathcal{I} = \theta - \text{sen } \theta \cos \theta$$

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2\omega} (\theta - \text{sen } \theta \cos \theta)$$

Según (473) es $\theta = \omega t$, entonces

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2\omega} (\omega t - \text{sen } \omega t \cos \omega t)$$

Evaluamos para los límites indicados.

$$\mathcal{I} = \left[\frac{1}{2\omega} (\omega t - \text{sen } \omega t \cos \omega t) \right]_{\omega t=0}^{\omega t=2\pi}$$

$$\mathcal{I} = \left[\frac{1}{2\omega} (2\pi - 0) \right] - \left[\frac{1}{2\omega} (0 - 0) \right]$$

$$\mathcal{I} = \left[\frac{1}{2\omega} (2\pi) \right]$$

$$\mathcal{I} = \frac{\pi}{\omega}$$

Reemplazamos \mathcal{I} como indica (471) .

$$\int_{t=0}^{t=T} \text{sen}^2(\omega t - kx) dt = \frac{\pi}{\omega}$$

La ecuación (67) , mostrada en la página (20) y la ecuación (151) , mostrada en la página 41, han quedado verificadas.

APÉNDICE 2



Prueba de la ecuación siguiente.

$$dm = \varepsilon_o B^2 dV$$

Por la relación entre masa y energía tenemos

$$dm = \frac{dW}{C^2}$$

$$dm = \frac{U dV}{C^2}$$

$$dm = \frac{(U_E + U_B) dV}{C^2}$$

En el tipo de onda que analizamos es $U_E = U_B$. Entonces

$$dm = \frac{2 U_B dV}{C^2}$$

Sabemos $U_B = \frac{B^2}{2 \mu_o}$. Entonces

$$dm = \frac{2 B^2 dV}{2 \mu_o C^2}$$

Simplificamos

$$dm = \frac{B^2 dV}{\mu_o C^2}$$

Sabemos $C^2 = \frac{1}{\mu_o \varepsilon_o}$. Entonces

$$dm = \frac{\mu_o \varepsilon_o B^2 dV}{\mu_o}$$

$$dm = \varepsilon_o B^2 dV$$

La ecuación (128) , mostrada en la página 35, ha quedado verificada.

APÉNDICE 3



Resolución de la integral siguiente.

$$\mathcal{I} = \int_{\omega t - kx=0}^{\omega t - kx=\pi} \text{sen}(\omega t - kx) dx \quad (475)$$

Siendo t constante, la integral da el mismo resultado que esta otra :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_{kx=0}^{kx=\pi} \text{sen}(-kx) dx \\ \mathcal{I} &= \int_{kx=0}^{kx=\pi} -\text{sen}(kx) dx \end{aligned} \quad (476)$$

Hagamos el cambio de variable siguiente.

$$\theta = kx \quad (477)$$

Despejamos.

$$x = \frac{1}{k} \theta$$

Por ser k constante es

$$dx = \frac{1}{k} d\theta \quad (478)$$

En (476) aplicamos (477) y (478) .

$$\mathcal{I} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} -\text{sen}\theta \frac{1}{k} d\theta$$

Ponemos la constante fuera de la integral.

$$\mathcal{I} = \frac{1}{k} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} -\text{sen}\theta d\theta$$

Resolvemos la integral.

$$\mathcal{I} = \frac{1}{k} \left[\cos\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$

$$\mathcal{I} = \frac{1}{k} [-1] - [1]$$

$$\mathcal{I} = \frac{-2}{k}$$

Reemplazamos \mathcal{I} como indica (475) .

$$\int_{\omega t - kx = 0}^{\omega t - kx = \pi} \text{sen}(\omega t - kx) dx = -\frac{2}{k}$$

Para el otro semiciclo tenemos

$$\int_{\omega t - kx = \pi}^{\omega t - kx = 2\pi} \text{sen}(\omega t - kx) dx = \frac{2}{k}$$

Las ecuaciones (136) , (137 y (138) mostradas en la página 38, han quedado verificadas.

Los derechos de este documento están reservados bajo licencia COPYLEFT . Por esa razón cualquier persona puede distribuir gratuitamente todas las copias que desee, siempre que lo haga sin alterar detalle alguno en el contenido y en la edición, cumpliendo la norma de incluir los datos de identificación y de contacto del autor original.