Information and Entropy

Another proof of the second law of thermodynamics?

Friedrich Sösemann 11/2023

Terms

entropy, *second law*, *proof*, *subject*, *information*, *complexity*.

Abstract

Order, structure, informative states, changes more frequently to disorder, less informative states than vice versa, because information and probability are inverse. However, this does not apply objectively or in general, but is caused by subjective weighting and lack of environment information
All this is demonstrated by the attempt to prove the second law of thermodynamics based on probability and information theory.

Second Law

The first law of thermodynamics says that the *energy* is preserved in closed systems. Energy cannot simply be transformed into useful work. *Entropy* is a level of work ability. The *second law of thermodynamics* says that entropy never decreases in closed systems. To do work requires the use of energetic differences, but this increases entropy */1/*.

Ludwig Boltzmann recognized heat as the movement of atoms and defined entropy as a measure of the macroscopic state, with W possible microscopic states, to $S = K * \ln W$ and explained its increase by the higher probability of greater entropy. However, he failed to provide analytical proof of this */2/*.

Fruitful was the view of seeing entropy as missing information from the macro state to the micro state. *Leon Brillouin* even defined information as negative entropy, as *negentropy*. As a student, his book "Science and Information Theory" *(Brillouin 1963)* inspired me to take a closer look at the relationship between information and physical entropy *(Sösemann 1975)*.

Stephen Wolfram pushes the boundaries between mathematics, physics and computer science. In his book "The Second Law" *(Wolfram 2023)* he presents a "definitive" proof of the second law of thermodynamics as a consequence of the interplay between computational irreducibility and the limited computational boundeness of observers.

Reading this made me think again intensively about the connection between information and physical entropy.

Proof

Proofs are formal derivations of new or questionable laws from already proven ones. Depending on the perspective, chosen axioms and final chains, there are many different proofs of each law. It should preferred the more general and easier ones.

Here I try to derive the subjective aspect of the second law claimed in Stephen Wolfram's book with the help of *probability theory* and *information theory*. Therefore i use the form of a proof with *premises*, *axioms*, *conclusions*, *result* and *interpretation*.

In the view presented here *(Sösemann 2023)*, the second law says that informative states more frequently skips into less informative states than vice versa.

Premises

P1: The ***world*** consists of *values* in space and time. The values *causes* each other, makes them *dependent* on each other.

P2: The entirety of all values of a space area at a time is called a ***state***.

P3: Subjects S are space areas; the environment ¬S is the remaining rest of the world. Subjects depict their environment by assigning their states to those of the environment */3/*.

P4*:** The ***conditional probability of changing from one assumed state to another is the probability of the other state:

$$p_{n->m/n} = p_m.$$

So the probability of roll the dice on three after a six is 1/6.

P5: The following applies to *total probability*:

$$p_{n->m} = \sum_{n=1}^{N} p_{n->m/n} * p_n = \sum_{n=1}^{N} p_m * p_n$$

This can define the **transition probability** to higher $p_>$ or lower $p_<$ values:

$$p_> = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{N} p_{n->m/n} * p_n, \quad p_< = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{N} p_{m->n/m} * p_m.$$

The following applies */4/*: $p_> = p_<$.

P6: The ***information*** is a measure of dependence on states. The selection of a state with the relative frequency p_n from the set of possible states is:

$$I_n = \text{ld } 1/p_n.$$

P7: The **total information** is the weighted sum of the partial informations. It becomes maximum with uniform distribution $p_n = 1/N$:

$$I = \sum_{n}^{N} p_n \, ld \, 1/p_n = \sum_{n}^{N} 1/N \, ld \, N/1 = ld \, N. \quad /5/$$

P8: The ***complexity*** of a space or time area is its internal information and results from the maximum minus the external information:

$$I_{int} = I_{max} - I_{ext}.$$

Axioms

A1: Subjects *(P3)* are smaller than their environment and have fewer possible states than this:

$$N_S < N_{\neg S}.$$

A2: Subjects are more complex than their environment, their internal information is greater than zero:

$$I_{int} > 0.$$

Conclusions

C1: With *A1* it follows that several environmental states are assigned to the subject states:

$$N_{\neg Sn} >= 1 \text{ mit } \sum_{n=1}^{N_S} N_{\neg Sn} = N_{\neg S}.$$

C2: From *A2* and *P8* it follows that their external information is smaller than the maximum:

$$I_{ext} < I_{max}.$$

C3: *P7* states that submaximal information is achieved through unequal distribution */6/*:

$$p_n =/= p_m.$$

C4: *P4* transforms transition probabilities into simple ones */7/*. Therefore:

$$p_{n\text{->}m/n} > p_{m\text{->}n/m} \text{ if } p_n < p_m.$$

Nevertheless, striving towards states more probable only applies conditional and not to the entirety of all states:

C5: Improbable states tend strongly, but less often, to more probable ones and probable states tend weakly, but more often, towards less probable ones. This is taken into account by the total probability formula *(P5)*. Therefor the transition probabilities to lower $p_<$ and higher $p_>$ probabilities are equal:

$$p_> = p_<.$$

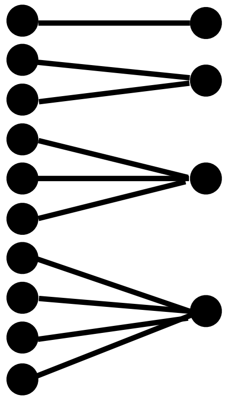
Only with a mean value using different weighting, such as the uniform distribution 1/N, is the transition probability upward $p_>^*$ greater than downward $p_<^*$; see also examples in */8/*:

$$p_> = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{N} p_{n->m/n} * 1/N \quad > \quad p_< = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{N} p_{m->n/m} * 1/N.$$

C6: *P6* contains the core idea of the proof: probability and information behave inversely*/9/*:

$$I_n = \mathrm{ld}\ 1/p_n \text{ mit } p_n = N_{\neg Sn} / N_{\neg S}.$$

Example:



$p_{env\ n}$	$p_{subj\ n}$	$I_{subj\ n}$
1/10	1/10	3,3
1/10		
1/10	2/10	2,3
1/10		
1/10	3/10	1,7
1/10		
1/10		
1/10		
1/10	4/10	1,3
1/10		

The maximum, external and internal information are than:

I_{Umg} = ld 10=3,3, I_{Subj} = 1/10 ld 10/1 + 2/10 ld 10/2 + 3/10 ld 10/3 + 4/10 ld 10/4 = 1,85,
I_{max} = ld 4 = 2, $I_{int} = I_{max} - I_{ext}$ = 2-1,85 = **0,15**.

Result

SL: States of higher information change into those of lower information more often than vice versa.

Wherever the observer looks, the change to disorder is more common than that to order.

Interpretation

Has the existence of the second law of thermodynamics been proven now?

Yes, for observers, subjects, from the perspective of individual states. The conditional probability tends towards less informative states *(C4)*.
No, for the totality of subjective states. The mean up and down transition probabilities are equal when non-conflicting distributions are used *(C5)*.

However, objectively, the effects between the values lead to dependencies, to information, to unequal probabilities of world states, i.e. to a preferential transition from ordered to disordered states, to heat and pressure equalization. But just locally *(C5)*, no "*heat death of the universe*".

In addition, processes that increase entropy also counteract processes that decrease it, such as *gravity*, *self-organization* or *evolution*. Whether structuring or disintegration, progress or *end times* remains uncertain.

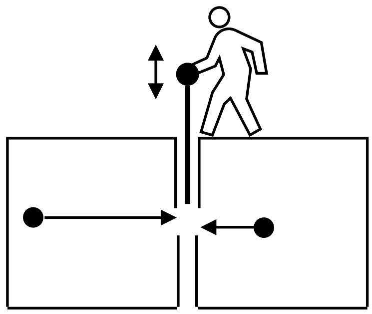
Thus, Stephen Wolfram's assertion of the subjectivity of the Second Law has been confirmed. The reason is a lack of information, as was previously suspected.

Notes

The notes have been relocated from the main text to make reading more fluid. Italic links make it easier to jump back and forth. Other italicized text passages refer to literature, external sources, such as Wikipedia entries or articles on the Internet, or link the premises and axioms with their use in the conclusions.

1:
A machine that does work without consuming energy, a *perpetuum mobile*, is prohibited by the law of conservation of energy. A perpetual motion machine of the second kind does work without devaluing energy but is forbidden by the second law.

The so-called *Maxwell's demon* lets fast gas atoms into one chamber and slow gas atoms into the other through a barrier, thus creating a temperature difference; or it only allows the moving atoms to pass in one direction, thus creating a pressure difference. Both could then do work. Where is the mistake?
The information required for this about the micro state, i.e. the position and momentum of the atoms, generates more entropy than the demon destroys.



2:
Boltzmann, Kinetic Gas Theory: "Already in his first work on statistical mechanics from 1866, Boltzmann claimed to provide "a purely analytical, completely general proof of the second law of heat theory, as well as to find the corresponding theorem of mechanics." Boltzmann later moved away rejected this claim and held that such a general proof would be impossible."

3:
The random allocation of N to M elements obeys the *multinomial distribution* with N> M, N as the number of elements and M as the number of dimensions. An example of this is N throws of a cube with M pages. Middle dominates peripheral, i.e. even before uneven distributions from N to M.

Example:
Ratio of the central (n/2) to the middle (n/4) probability of binomial distribution over n:

$\mathbf{p_{n/2} / p_{n/4}}$ = (n/4)! * (3n/4)! / (n/2)! * (n/2)! with Stirling's formula $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$\approx$ $(2pi\ n/4)^{1/2}(n/4e)^{n/4}$ * $(2pi\ 3n/4)^{1/2}(3n/4e)^{3n/4}$ / (2pi n/2)*$(n/2e)^n$

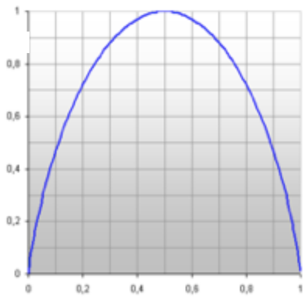
$= (n/4)^{1/2}*(n/4)^{n/4} * (3n/4)^{1/2}*(3n/4)^{3n/4} / (n/2)*(n/2)^n$
$= (n/4)^{1/2} * (n/4)^{1/2} * 3^{1/2} *(n/4)^{n/4} *(n/4)^{3n/4} *3^{3n/4} / (n/2)*(n/2)^n$
$= n/4 * 3^{1/2} *(n/4)^n *3^{3n/4} / (n/2)*(n/2)^n$
$= 3^{1/2} *(n/4)^{n+1} *3^{3n/4} / (n/2)^{n+1}$
$\mathbf{= 3^{3n/4+1/2} / 2^{n+1}}$

n	4	8	12	16	20	40	60	100
$p_{n/2}/p_{n/4}$	1,5	2,5	4,2	7,1	12	162	2223	416013

4:
With *P4*: $p_{n\text{->}m/n} = p_m$ becomes *P5*: $\mathbf{p_>} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{N} p_m * p_n$ and $\mathbf{p_<} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{N} p_n * p_m$

and with $p_m*p_n = p_n*p_m$ the following applies: $p_> = p_<$.

5:
Example for N=2:

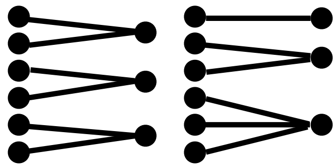


$I = p_1 \operatorname{ld} 1/p_1 + p_2 \operatorname{ld} 1/p_2$, $p_2 = 1-p_1$:

$p_1=1/2$, $p_2=1/2$: $I = 1/2 \operatorname{ld} 2 + 1/2 \operatorname{ld} 2 = 1$,
$p_1=1/4$, $p_2=3/4$: $I = 1/4 \operatorname{ld} 4 + 3/4 \operatorname{ld} 4/3 = 0{,}81$.

6:
Example of the ratios of multinomial probabilities with equal and unequal distribution of assignments:

equal unequal



$p_{equal} = N_O! / ((N_O/N_S)!^{N_S} * N_S^{N_O}$,
$p_{unequal} = N_O! / (N_1!*N_2!*..*N_M! * N_S^{N_O})$,
$p_{equal} / p_{unequal} = (N_1!*N_2!*..*N_M!) / (N_O/N_S)!^{N_S}$:

$N_S=4$:

p(8; 4:2,2,2,2) / p(8; 4:1,2,2,3)	=	1,5
p(12;4:3,3,3,3) / p(12;4:1,2,3,6)	=	6,7
p(16;4:4,4,4,4) / p(16;4:1,3,5,7)	=	10,9
p(20;4:5,5,5,5) / p(20;4:1,4,6,9)	=	30,2
p(24;4:6,6,6,6) / p(24;4:1,4,8,11)	=	144
p(28;4:7,7,7,7) / p(28;4:1,5,9,13)	=	420

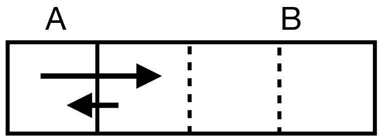
$N_O=N_S^2$:

p(9; 3:3,3,3) / p(9; 3:1,3,5)	=	3,3
p(16;4:4,4,4,4) / p(16;4:1,3,5,7)	=	10,9
p(25;5:5,5,5,5,5) / p(25;5:1,3,5,7,9)	=	52,9
p(36;6:6,6,6,6,6,6)/p(36;6:1,3,5,7,9,11)	=	377

7:
With the law of total probability:

$$p_{A\text{->}B} = p_{A\text{->}B/A}*p_A + p_{A\text{->}B/\neg A}*p_{\neg A} \quad \text{and} \quad p_{A\text{->}B/\neg A} = 0$$

it follows that: From a less probably state (A), the change (A->B) to a more probably state (B) is itself more probably than the other way around:



$p_A = 1/4 \quad < \quad p_B = 3/4,$

$\mathbf{p_{A\text{->}B/A} = 3/4} \quad > \quad \mathbf{p_{B\text{->}A/B} = 1/4},$

$p_{A\text{->}B} = P_{A\text{->}B/A} * p_A = 3/4 * 1/4 =$

$p_{B\text{->}A} = p_{B\text{->}A/B} * p_B = 1/4 * 3/4$

8:

Example of uneven subjective $p_{\uparrow u}{}^*$ and objective $p_{\uparrow u}$ and uniform objective distribution $p_{\uparrow e}$ for N=3, N=4 and N=5:

n	1	2	3
$p_{n\ uneq.}$	1/6	2/6	3/6
$p_{n\ equal}$	2/6	2/6	2/6

$p_{3\uparrow u}{}^* = 2/6*3+3/6*3+3/6*3-1/6*3-2/6*3-1/6*3 \qquad = 4/18$

$p_{3\uparrow u} = 2/6*6+3/6*6+3*2/6*6-1*2/6*6-2*3/6*6-3/6*6 = 0$

$p_{3\uparrow g} = 4/6*6+4/6*6+4/6*6 -4/6*6-4/6*6-4/6*6 \qquad = 0$

n	1	2	3	4
$p_{n\ uneq.}$	1/16	3/16	5/16	7/16
$p_{n\ equal}$	4/16	4/16	4/16	4/16

$p_{4\uparrow u}{}^* = 15/16*4+12/16*4+7/16*4-9/16*4-4/16*4-1/16 = 5/16$

$p_{4\uparrow g} = 1*15/16^2+2*12/16^2+3*7/16^2-7*9/16^2-5*4/16^2-3*1/16^2 = 0$

$p_{4\uparrow g} = 3*4/16^2+2*4/16^2+1*4/16^2-3*4/16^2-2*4/16^2-1*4/16^2 \qquad = 0$

n	1	2	3	4	5
$p_{n\ uneq}$	1/15	2/15	3/15	4/15	5/15
$p_{n\ equal}$	3/15	3/15	3/15	3/15	3/15

$p_{5\uparrow u}{}^* = 14/15*5+12/15*5+9/15*5+5/15*5-10/15*5 -6/15*5 -3/15*5 -1/15*5 = 4/15$

$p_{5\uparrow e}=1*14/15*5+2*12/15*5+3*9/15*5+4*5/15*5-5*10/15*5-4*6/15*5 -3*3/15*5 -2*1/15*5 = 0$

$p_{5\uparrow e} = 3*12/15^2+3*9/15^2+3*6/15^2+3*3/15^2-3*12/15^2-3*9/15^2-3*6/15^2-3*3/15^2 = 0$

9:

Example of binary Function:

X_1	X_2	X_3	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$Y = X_1$ (as object identifier)

0: ordered, I_{int} = ld 4/2 =1 bit, p_0=1/3,
(with $X_2=X_3$ as object state)

1: unordered, I_{int} = ld 4/4 =0 bit, p_1=2/3,

$I_0 > I_1 \iff p_0 < p_1$.

References

- *Brillouin*, Leon: Science and information theory. Academic Press Inc. New York 1963. *https://www.amazon.com/-/de/dp/B00GXV7KJO/ref=tmm_kin_swatch_0?_encoding=UTF8&qid=&sr=*

- *Sösemann*, Friedrich: Information, physikalische Entropie und Objektivität. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt 1975/1. *https://friedrich-soesemann.de/data/documents/InfEntObj1975.pdf*

- *Sösemann*, Friedrich: Information, knowledge and intelligence as a hierarchy of relations. 2023. *https://vixra.org/pdf/2304.0089v2.pdf*

- *Wolfram,* Stephen: The Second Law: Resolving the Mystery of the Second Law of Thermodynamics. Wolfram Media 2023. *https://writings.stephenwolfram.com/2023/02/computational-foundations-for-the-second-law-of-thermodynamics/*

Information und Entropie

Noch ein Beweis des Zweiten Hauptsatzes der Wärmelehre ?

Friedrich Sösemann 11/2023

Begriffe

Entropie, *Zweiter Hauptsatz*, *Beweis*, *Subjekt*, *Information*, *Komplexität*.

Zusammenfassung

Ordnung, Struktur, informative Zustände, wechseln häufiger zu Unordnung, zu minder informativen Zuständen, als umgekehrt, da sich Information und Wahrscheinlichkeit invers verhalten. Dies gilt aber weder objektiv noch allgemein, sondern wird durch subjektive Gewichtung, durch fehlende Umgebungs-Information, hervorgerufen.
Das demonstriert der Versuch eines Beweises des Zweiten Hauptsatzes der Wärmelehre auf der Grundlage von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Informationstheorie.

Zweiter Hauptsatz

Der Erste Hauptsatz der Wärmelehre besagt, dass in geschlossenen Systemen die *Energie* erhalten bleibt. Energie kann nicht einfach in nützliche *Arbeit* verwandelt werden. Die *Entropie* S ist ein Maß der Arbeitsfähigkeit von Energie.
Der *Zweite Hauptsatz der Wärmelehre* besagt, dass in geschlossenen Systemen die Entropie nie abnimmt. Arbeit zu leisten erfordert den Ausgleich energetischer Unterschiede, das aber erhöht die Entropie */1/*.

Ludwig Boltzmann erkannte die Wärme als Bewegung von Atomen und definierte die Entropie als ein Maß des makroskopischen Zustandes, bei W möglichen mikroskopischen Zuständen, zu $S = k * \ln W$ und erklärte deren Zunahme durch höhere Wahrscheinlichkeit grösserer Entropie. Doch scheiterte er an einem analytischen Beweis dafür */2/*.

Befruchtend war die Idee, Entropie als fehlende Information des Makro- über den Mikro-Zustand zu sehen. *Leon Brillouin* definierte gar Information als negative Entropie, die *Negentropie*. Sein Buch "Science and information theory" *(Brillouin 1963)* regte mich schon als Student an, mich näher mit dem Verhältnis von Information und physikalischer Entropie zu befassen *(Sösemann 1975)*.

Stephen Wolfram sprengt die Grenzen zwischen Mathematik, Physik und Informatik. In seinem Buch "The Second Law" *(Wolfram 2023)* stellt er seinen "endgültigen" Beweis des Zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik als Konsequenz des Zusammenspiels zwischen Berechnungs-Irreduzibilität und begrenzter Berechnungskapazität von Beobachtern vor.

Diese Lektüre hat mich erneut intensiv über den Zusammenhang zwischen Information und physikalische Entropie nachdenken lassen.

Beweis

Beweise sind formale Ableitungen neuer oder fraglicher Gesetze aus bereits bewährten. Je nach Sichtweise, gewählten Axiomen und Schlussketten gibt es zu jedem Gesetz viele verschiedene Beweise. Dabei sind allgemeinere und einfachere den anderen vorzuziehen.

Hier versuche ich nun den subjektiven Aspekt des Zweiten Hauptsatzes aus Stephen Wolframs Buch "The Second Law" mit Hilfe von *Wahrscheinlichkeitsrechnung* und meiner Sicht der *Informationstheorie* abzuleiten. Dabei verwende ich die Form eines Beweises mit *Prämissen*, *Axiomen*, *Schlüssen*, *Konklusion* und *Interpretation*.

In der hier vertretenen Sicht *(Sösemann 2023)* besagt dieser, dass informative Zustände häufiger in weniger informative Zustände übergehen als umgekehrt.

Prämissen

P1: Die ***Welt*** besteht aus *Werten* in Raum und Zeit. Die Werte *wirken* aufeinander ein, sind dadurch voneinander *abhängig*.

P2: Die Gesamtheit aller Werte eines Raum-Bereiches zu einer Zeit nennt sich ***Zustand***.

P3:* *Subjekte S sind Raum-Bereiche; ihre Umwelt ¬S ist der verbleibende Rest zur Welt. Subjekte bilden ihre Umwelt ab, sie ordnen ihre Zustände denen der Umwelt zu */3/*.

P4*:** Die ***bedingte Wahrscheinlichkeit von einen eingenommenen Zustand zu einem anderen zu wechseln, ist die Wahrscheinlichkeit des anderen:

$$p_{n\text{->}m/n} = p_m.$$

So ist die Wahrscheinlichkeit nach einer Sechs eine Drei zu würfeln gleich 1/6.

P5: Für die *totale Wahrscheinlichkeit* gilt:

$$p_{n\text{->}m} = \sum_{n=1}^{N} p_{n\text{->}m/n} * p_n = \sum_{n=1}^{N} p_m * p_n$$

Damit kann die **Übergangs-Wahrscheinlichkeit** zu höheren $p_>$ oder niederen $p_<$ Werten definiert werden zu:

$$\mathbf{p_>} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{N} p_{n\text{->}m/n} * p_n, \quad \mathbf{p_<} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{N} p_{m\text{->}n/m} * p_m.$$

Wobei gilt */4/*: $p_> = p_<$.

P6: Die ***Information*** ist ein Maß der Abhängigkeit von Zuständen. Die Auswahl eines Zustandes mit der relativen Häufigkeit p_n aus der Menge möglicher Zustände ist:

$$I_n = \text{ld } 1/p_n.$$

P7: Die **Gesamtinformation** ist die gewichtete Summe der Teilinformationen. Sie wird maximal bei Gleichverteilung $p_n = 1/N$:

$$I = \sum_n^N p_n \, ld \, 1/p_n = \sum_n^N 1/N \, ld \, N/1 = ld \, N. \; /5/$$

P8: Die ***Komplexität*** eines Raum- oder Zeit-Bereiches ist seine interne Information und ergibt sich aus der maximalen vermindert um die externe Information:

$$I_{int} = I_{max} - I_{ext}.$$

Axiome

A1: Subjekte *(P3)* sind kleiner als ihre Umwelt, besitzen daher weniger mögliche Zustände als diese:

$$N_S < N_{\neg S}.$$

A2: Subjekte sind komplexer als ihre Umgebung, ihre interne Information ist grösser Null:

$$I_{int} > 0.$$

Schlüsse

S1: Aus *A1* folgt, dass den Subjekt-Zuständen mehrere Umgebungs-Zustände zugeordnet sind:

$$N_{\neg Sn} >= 1 \text{ mit } \sum_{n=1}^{N_S} N_{\neg Sn} = N_{\neg S}.$$

S2: Aus *A2* und *P8* folgt, dass ihre externe Information kleiner als die maximale ist:

$$I_{ext} < I_{max}.$$

S3: *P7* besagt, dass submaximale Information durch Ungleich-Verteilung erreicht wird */6/*:

$$p_n =/= p_m.$$

S4: *P4* verwandelt Übergangs-Wahrscheinlichkeiten in einfache */7/*. Somit gilt:

$$p_{n->m/n} \; > \; p_{m->n/m} \; \text{ wenn } \; p_n < p_m.$$

Dennoch gilt das Streben zu Wahrscheinlicherem nur bedingt, nicht für die Gesamtheit aller Zustände:

S5: Unwahrscheinliche Zustände streben stark, aber seltener zu wahrscheinlicheren und wahrscheinliche Zustände streben schwach, aber häufiger zu unwahrscheinlicheren. Das berücksichtigt die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit (*P5*). Dadurch werden aber die Übergangs-Wahrscheinlichkeiten zu niederen $p_<$ und höheren $p_>$ Wahrscheinlichkeiten gleich:

$$p_> = p_<.$$

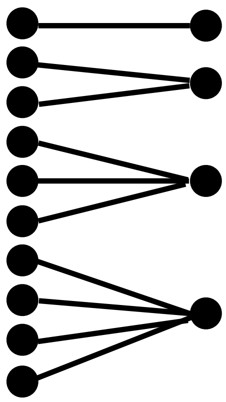
Nur bei einem Mittelwert mit abweichender Wichtung, wie beispielsweise die Gleichverteilung 1/N, ist die Übergangs-Wahrscheinlichkeit nach oben $p_{>}$* grösser als die nach unten $p_{<}$*; siehe auch Beispiele in */8/*:

$$p_{>} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{N} p_{n->m/n} * 1/N \quad > \quad p_{<} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{N} p_{m->n/m} * 1/N.$$

S6: *P6* enthält den Kern-Gedanken des Beweises: Wahrscheinlichkeit und Information verhalten sich invers */9/*:

$$I_n = \mathrm{ld}\ 1/p_n \text{ mit } p_n = N_{\neg Sn} / N_{\neg S}.$$

Beispiel:



$p_{Umg\ n}$	$p_{Subj\ n}$	$I_{Subj\ n}$
1/10	1/10	3,3
1/10		
1/10	2/10	2,3
1/10		
1/10	3/10	1,7
1/10		
1/10		
1/10		
1/10	4/10	1,3
1/10		

Die maximale, externe und interne Information sind dabei:

I_{Umg} =ld 10=3,3, I_{Subj} = 1/10 ld 10/1 + 2/10 ld 10/2 + 3/10 ld 10/3 + 4/10 ld 10/4 = 1,85,
I_{max} = ld 4 = 2, $I_{int} = I_{max} - I_{ext}$ = 2-1,85 = **0,15.**

Konklusion

2.HS: Zustände höherer Information gehen häufiger in solche geringerer Information über als umgekehrt.

Wo immer der Beobachter hinschaut, ist der Wechsel zu Unordnung häufiger als der zu Ordnung.

Interpretation

Ist nun die Existenz des Zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik bewiesen?

Ja, für Beobachter, für Subjekte aus Sicht einzelner Zustände. Deren bedingte Wahrscheinlichkeit strebt zu weniger informativen Zuständen (*S4*).
Nein, für die Gesamtheit subjektiver Zustände. Die mittleren Übergangs-Wahrscheinlichkeiten nach oben und unten sind gleich, wenn nicht widersprüchliche Verteilungen benutzt werden (*S5*).

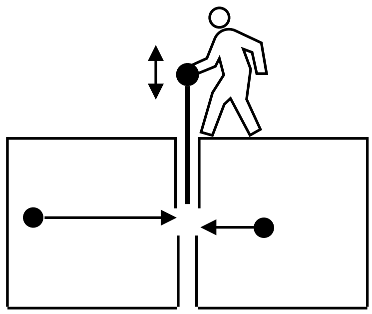
Jedoch auch objektiv führen die Wirkungen zwischen den Werten zu Abhängigkeiten, zu Information, zu ungleichen Wahrscheinlichkeiten der Welt-Zustände, also zu bevorzugtem Übergang geordneter in ungeordnete Zustände, zu Wärme- und Druck-Ausgleich. Aber eben nur lokal, kein "Wärmetod des Weltalls".
Zudem stehen den Entropie erhöhenden auch sie verringernde Prozesse, wie *Gravitation*, *Selbstorganisation* oder *Evolution* entgegen. Ob Strukturierung oder Zerfall, Fortschritt oder Endzeit bleibt ungewiss.

Somit hat sich Stephen Wolframs Behauptung der Subjektivität des Zweiten Hauptsatzes bestätigt. Ursache ist fehlende Information, wie das auch schon früher vermutet wurde.

Anmerkungen

Die Anmerkungen sind aus dem Haupttext verlagert, um das Lesen dort flüssiger zu gestalten. Dabei erleichtern kursive Links die Hin- und Rücksprünge. Andere kursive Textstellen verweisen auf Literaturstellen, externen Quellen, wie Wikipedia-Einträge oder Fachartikeln im Internet, beziehungsweise verlinken die Prämissen oder Axiome mit deren Verwendung in den Schlüssen.

1:
Eine Maschine, die ohne Energieverbrauch Arbeit leistet, ein *Perpetuum mobile*, verbietet der Energie-Erhaltungssatz. Ein Perpetuum mobile der zweiten Art leistet Arbeit ohne Energie zu entwerten, wird aber durch den zweiten Hauptsatz verboten.



Der so genannte *Maxwellsche Dämon* lässt durch eine Schranke schnelle Gasatome in die eine, langsame in die andere Kammer, schafft so eine Temperatur-Differenz; oder er lässt die bewegten Atome nur in eine Richtung passieren und schafft so eine Druck-Differenz. Beides könnte dann Arbeit verrichten. Wo liegt der Fehler?
Die dafür erforderliche Information über den Mikrozustand, also Position und Impuls der Atome, erzeugt mehr Entropie als der Dämon vernichtet.

2:
Boltzmann, Kinetische Gastheorie: "Bereits in seiner ersten Arbeit zur statistischen Mechanik aus dem Jahr 1866 behauptete Boltzmann 'einen rein analytischen, vollkommen allgemeinen Beweis des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie zu liefern, sowie den ihm entsprechenden Satz der Mechanik aufzufinden'. Später rückte Boltzmann von dieser Behauptung ab und vertrat die Meinung, dass solch ein allgemeiner Beweis unmöglich wäre."

3:
Die zufällige Zuordnung von N zu M Elementen gehorcht der *Multinomial-Verteilung* mit N>M, N als Anzahl und M als Dimensionszahl. Ein Beispiel dazu sind N Würfe eines Würfels mit M Seiten. Dabei dominieren mittlere gegenüber peripheren, also gleichmäßige vor ungleichmäßigen Verteilungen von N auf M.

Beispiel:
Verhältnis der zentralen (n/2) zur mittleren (n/4) Häufigkeit der Binomial-Verteilung über n:

$\mathbf{p_{n/2} / p_{n/4}}$ = (n/4)! * (3n/4)! / (n/2)! * (n/2)! mit *Stirlingformel* $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ gilt

$\approx (2pi\ n/4)^{1/2}(n/4e)^{n/4} * (2pi\ 3n/4)^{1/2}(3n/4e)^{3n/4} / (2pi$

$= (n/4)^{1/2}*(n/4)^{n/4} * (3n/4)^{1/2}*(3n/4)^{3n/4} / (n/2)*(n/2)^n$

$= (n/4)^{1/2} * (n/4)^{1/2} * 3^{1/2} *(n/4)^{n/4} *(n/4)^{3n/4} *3^{3n/4} / (n/2)*(n/2)^n$

$= n/4 * 3^{1/2} *(n/4)^n *3^{3n/4} / (n/2)*(n/2)^n$

$= 3^{1/2} *(n/4)^{n+1} *3^{3n/4} / (n/2)^{n+1}$

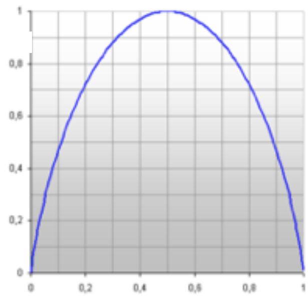
$\mathbf{= 3^{3n/4+1/2} / 2^{n+1}}$

n	4	8	12	16	20	40	60	100
$p_{n/2}/p_{n/4}$	1,5	2,5	4,2	7,1	12	162	2223	416013

4:
Mit D4: $p_{n\text{->}m/n} = p_m$ wird D5: zu $\mathbf{p_>} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{N} p_m * p_n$ und $\mathbf{p_<} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{N} p_n * p_m$.

Mit $p_m*p_n = p_n*p_m$ gilt: $p_> = p_<$.

5:
Beispiel für N=2:

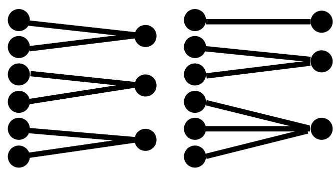


$I = p_1 \text{ ld } 1/p_1 + p_2 \text{ ld } 1/p_2$, $p_2 = 1-p_1$:

$p_1=1/2$, $p_2=1/2$: I = 1/2 ld 2 + 1/2 ld 2 = 1,
$p_1=1/4$, $p_2=3/4$: I = 1/4 ld 4 + 3/4 ld 4/3 = 0,81.

6:
Beispiel der Verhältnisse multinomialer Wahrscheinlichkeiten bei gleicher und ungleicher Verteilung der Zuordnungen:

gleichmäßig ungleichmäßig



mit
$p_{gleichmäßig} = N_O! / ((N_O/N_S)!^{NS} * N_S^{NO}$,
$p_{ungleichmäßig} = N_O! / (N_1!*N_2!*..*N_M! * N_S^{NO})$,
$p_{gleichmäßig} / p_{ungleichmäßig} = (N_1!*N_2!*..*N_M!) / (N_O/N_S)!^{NS}$.

ergeben sich:

N_S=4:
p(8; 4:2,2,2,2) / p(8; 4:1,2,2,3) = 1,5
p(12;4:3,3,3,3) / p(12;4:1,2,3,6) = 6,7
p(16;4:4,4,4,4) / p(16;4:1,3,5,7) = 10,9
p(20;4:5,5,5,5) / p(20;4:1,4,6,9) = 30,2
p(24;4:6,6,6,6) / p(24;4:1,4,8,11) = 144
p(28;4:7,7,7,7) / p(28;4:1,5,9,13) = 420

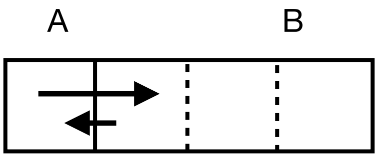
$N_O=N_S^2$:
p(9; 3:3,3,3) / p(9; 3:1,3,5) = 3,3
p(16;4:4,4,4,4) / p(16;4:1,3,5,7) = 10,9
p(25;5:5,5,5,5,5) / p(25;5:1,3,5,7,9) = 52,9
p(36;6:6,6,6,6,6,6)/p(36;6:1,3,5,7,9,11) = 377

7:

Mit dem *Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit*:

$$p_{A\text{->}B} = p_{A\text{->}B/A} {}^* p_A + p_{A\text{->}B/\neg A} {}^* p_{\neg A} \quad \text{und} \quad p_{A\text{->}B/\neg A} = 0$$

gilt, dass aus einem weniger wahrscheinlichen Zustand (A) der Wechsel (A->B) zu einem wahrscheinlicheren Zustand (B) wahrscheinlicher ist als umgekehrt. Beispiel:



$p_A = 1/4 \quad < \quad p_B = 3/4$,

$\mathbf{p_{A\text{->}B/A} = 3/4} \quad > \quad \mathbf{p_{B\text{->}A/B} = 1/4}$,

$p_{A\text{->}B} = P_{A\text{->}B/A} * p_A = 3/4 * 1/4 =$

$p_{B\text{->}A} = p_{B\text{->}A/B} * p_B = 1/4 * 3/4$

8:

Beispiel für ungleichmäßige subjektive $p_{\uparrow u^*}$ und objektive $p_{\uparrow u}$, und gleichmäßige objektive Verteilung $p_{\uparrow g}$ für N=3, N=4 und N=5:

n	1	2	3
$p_{n\ ungl.}$	1/6	2/6	3/6
$p_{n\ gleich}$	2/6	2/6	2/6

$p_{3\uparrow u^*} = 2/6*3+3/6*3+3/6*3-1/6*3-2/6*3-1/6*3 = 4/18$

$p_{3\uparrow u} = 2/6*6+3/6*6+3*2/6*6-1*2/6*6-2*3/6*6-3/6*6 = 0$

$p_{3\uparrow g} = 4/6*6+4/6*6+4/6*6 -4/6*6-4/6*6-4/6*6 = 0$

n	1	2	3	4
$p_{n\ ungl.}$	1/16	3/16	5/16	7/16
$p_{n\ gleich}$	4/16	4/16	4/16	4/16

$p_{4\uparrow u^*} = 15/16*4+12/16*4+7/16*4-9/16*4-4/16*4-1/16 = 5/16$

$p_{4\uparrow g} = 1*15/16^2+2*12/16^2+3*7/16^2-7*9/16^2-5*4/16^2-3*1/16^2 = 0$

$p_{4\uparrow g} = 3*4/16^2+2*4/16^2+1*4/16^2-3*4/16^2-2*4/16^2-1*4/16^2 = 0$

n	1	2	3	4	5
$p_{n\ ungl.}$	1/15	2/15	3/15	4/15	5/15
$p_{n\ gleich}$	3/15	3/15	3/15	3/15	3/15

$p_{5\uparrow u^*} = 14/15*5+12/15*5+9/15*5+5/15*5-10/15*5 -6/15*5 -3/15*5 -1/15*5 = 4/15$

$p_{5\uparrow g}=1*14/15*5+2*12/15*5+3*9/15*5+4*5/15*5-5*10/15*5-4*6/15*5 -3*3/15*5 -2*1/15*5 = 0$

$p_{5\uparrow g} = 3*12/15^2+3*9/15^2+3*6/15^2+3*3/15^2-3*12/15^2-3*9/15^2-3*6/15^2-3*3/15^2 = 0$

9:

Bsp. binäre Funktion:

X_1	X_2	X_3	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$Y = X_1$ (als Objekt-Identifikator)

0: geordnet, I_{int} = ld 4/2 =1 bit, p_0=1/3,
(mit X_2=X_3 als Objekt-Zustand)

1: ungeordnet, I_{int} = ld 4/4 =0 bit, p_1=2/3,

$I_0 > I_1 \iff p_0 < p_1$.

Literatur

- *Brillouin*, Leon: Science and information theory. Academic Press Inc. New York 1963. *https://www.amazon.com/-/de/dp/B00GXV7KJO/ref=tmm_kin_swatch_0?_encoding=UTF8&qid=&sr=*

- *Sösemann*, Friedrich: Information, physikalische Entropie und Objektivität. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt 1975/1. *https://friedrich-soesemann.de/data/documents/InfEntObj1975.pdf*

- *Sösemann*, Friedrich: Information, knowledge and intelligence as a hierarchy of relations. 2023. *https://vixra.org/pdf/2304.0089v2.pdf*

- *Wolfram,* Stephen: The Second Law: Resolving the Mystery of the Second Law of Thermodynamics. Wolfram Media 2023. *https://writings.stephenwolfram.com/2023/02/computational-foundations-for-the-second-law-of-thermodynamics/*