ATTEMPT TO FIND QUANTUM GROUP

ALEXEY KUZMIN

Abstract. I have tried to find a new compact matrix quantum group within actions on a braided noncommutative quadric associated to a solution of Yang-Baxter equation outside of the 8-vertex model. The result appeared to be isomorphic to the circle group.

I call a complex $*$-algebra with alphabet a, b and grammar rules given by

$$R_1^{aa}a^*a + R_1^{ab}a^*b + R_1^{ba}b^*a + R_1^{bb}b^*b + S_1^{aa}aa^* + S_1^{ab}ab^* + S_1^{ba}ba^* + S_1^{bb}bb^* = \lambda_1 \cdot 1$$
$$R_2^{aa}a^*a + R_2^{ab}a^*b + R_2^{ba}b^*a + R_2^{bb}b^*b + S_2^{aa}aa^* + S_2^{ab}ab^* + S_2^{ba}ba^* + S_2^{bb}bb^* = \lambda_2 \cdot 1$$
$$R_3^{aa}a^*a + R_3^{ab}a^*b + R_3^{ba}b^*a + R_3^{bb}b^*b + S_3^{aa}aa^* + S_3^{ab}ab^* + S_3^{ba}ba^* + S_3^{bb}bb^* = \lambda_3 \cdot 1$$
$$R_4^{aa}a^*a + R_4^{ab}a^*b + R_4^{ba}b^*a + R_4^{bb}b^*b + S_4^{aa}aa^* + S_4^{ab}ab^* + S_4^{ba}ba^* + S_4^{bb}bb^* = \lambda_4 \cdot 1$$

a noncommutative quadric. Under conditions on rank of the matrix of coefficients, such grammar can be morphed by linear transformations to

$$\begin{aligned}
a^*a &= 1 + T_{aa}^{aa}aa^* + T_{aa}^{ab}ab^* + T_{aa}^{ba}ba^* + T_{aa}^{bb}bb^* \\
a^*b &= \phantom{1 +{}} T_{ab}^{aa}aa^* + T_{ab}^{ab}ab^* + T_{ab}^{ba}ba^* + T_{ab}^{bb}bb^* \\
b^*a &= \phantom{1 +{}} T_{ba}^{aa}aa^* + T_{ba}^{ab}ab^* + T_{ba}^{ba}ba^* + T_{ba}^{bb}bb^* \\
b^*b &= 1 + T_{bb}^{aa}aa^* + T_{bb}^{ab}ab^* + T_{bb}^{ba}ba^* + T_{bb}^{bb}bb^*
\end{aligned}$$

For this grammar to be consistent with the involution, the coefficient operator

$$T = \begin{pmatrix} T_{aa}^{aa} & T_{aa}^{ab} & T_{aa}^{ba} & T_{aa}^{bb} \\ T_{ab}^{aa} & T_{ab}^{ab} & T_{ab}^{ba} & T_{ab}^{bb} \\ T_{ba}^{aa} & T_{ba}^{ab} & T_{ba}^{ba} & T_{ba}^{bb} \\ T_{bb}^{aa} & T_{bb}^{ab} & T_{bb}^{ba} & T_{bb}^{bb} \end{pmatrix}$$

has to be self-adjoint - satisfy $T^* = T$.

On the contrary to commutative quadrics, noncommutative quadrics might be topologically empty, i.e. have no points in any of the known generalized senses of a point. However, when T satisfy Yang-Baxter equation

$$(1 \otimes T)(T \otimes 1)(1 \otimes T) = (T \otimes 1)(1 \otimes T)(T \otimes 1)$$

the associated noncommutative quadric is topologically nontrivial: it has representations by operators on a separable Hilbert space.

According to the classification of 2-dimensional solutions of the Yang-Baxter equation, there are 5 parametric families of self-adjoint solutions up to a unitary equivalence by action of $U(2)$, 4 of which fit into the 8-vertex model: solutions of the form

$$\begin{pmatrix} \star & 0 & 0 & \star \\ 0 & \star & \star & 0 \\ 0 & \star & \star & 0 \\ \star & 0 & 0 & \star \end{pmatrix}$$

The only family outside of the 8-vertex model is

$$\begin{pmatrix} 2r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & r \\ 0 & 0 & 2r & 0 \\ 0 & r & 0 & r \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

The noncommutative quadric associated to this solution is

$$\begin{aligned}
a^*a &= 1 + 2raa^* + rbb^* \\
b^*b &= 1 + 2raa^* + rbb^* \\
a^*b &= rbb^* \\
b^*a &= rbb^*
\end{aligned}$$

In my notes and in my further works I call this $*$-algebra $マ_r$. According to my considerations the following statements about noncommutative topology of $マ_r$ should hold:

(1) $マ_{\frac{1}{2}}$ has no bounded points ($*$-representations by bounded operators on a separable Hilbert space).
(2) $C^*(マ_r) \simeq C^*(マ_0)$ for $|r| < \frac{1}{2}$. This isomorphism has been already established for $|r| < 0.205$.
(3) $マ_{-\frac{1}{2}}$ has rich structure of ideals and nontrivial noncommutative topology.

Regardless of a definition of quantum group, there is an underlying $*$-algebra which is part of the quantum group structure. Assume that a quantum group as $*$-algebra is generated by 4 symbols

$$\text{ჵ} \qquad \text{ნ} \qquad \text{მ} \qquad \text{ტ}$$

I will allow this quantum group to act on $マ_r$ as follows

$$\delta : \begin{array}{l} a \mapsto a \otimes \text{ჵ} + b \otimes \text{ნ} \\ \\ b \mapsto a \otimes \text{მ} + b \otimes \text{ტ} \end{array}$$

For δ to be an action, it has to be a $*$-homomorphism. For $r = 0$, basic grammar rules of a compact 2×2 matrix quantum group are enough to ensure that δ is a $*$-homomorphism. In other words, every quantum group legitimately acts on $マ_0$ in the prescribed way.

My wish was to see which grammar rules should a quantum group satisfy to act on $マ_r$ for $r \neq 0$.

I extract these rules from equations which define homomorphism property of δ:

(1) $\delta(a^*a - 1 - 2raa^* - rbb^*) = 0$
(2) $\delta(b^*b - 1 - 2raa^* - rbb^*) = 0$
(3) $\delta(a^*b - rbb^*) = 0$

Below I will expand each of the equations:

$$\begin{aligned}
\delta(a^*a-1-2raa^*-rbb^*) &= \delta(a)^*\delta(a)-\delta(1)-2r\delta(a)\delta(a)^*-r\delta(b)\delta(b)^* = \\
&= (a^*\otimes\bar{\mathfrak{a}}+b^*\otimes\bar{\mathfrak{b}})(a\otimes\mathfrak{a}+b\otimes\mathfrak{b})-1\otimes 1- \\
&- 2r(a\otimes\mathfrak{a}+b\otimes\mathfrak{b})(a^*\otimes\bar{\mathfrak{a}}+b^*\otimes\bar{\mathfrak{b}})- \\
&- r(a\otimes\mathfrak{c}+b\otimes\mathfrak{d})(a^*\otimes\bar{\mathfrak{c}}+b^*\otimes\bar{\mathfrak{d}}) = \\
&= a^*a\otimes\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{a}+a^*b\otimes\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}+b^*a\otimes\bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}+b^*b\otimes\bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{b}-1\otimes 1- \\
&- 2raa^*\otimes\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}}-2rab^*\otimes\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}}-2rba^*\otimes\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{a}}-2rbb^*\otimes\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{b}}- \\
&- raa^*\otimes\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{c}}-rab^*\otimes\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{d}}-rba^*\otimes\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{c}}-rbb^*\otimes\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{d}} = \\
&= 1\otimes\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{a}+2raa^*\otimes\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{a}+rbb^*\otimes\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{a}+ \\
&+ rbb^*\otimes\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}+rbb^*\otimes\bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}+ \\
&+ 1\otimes\bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{b}+2raa^*\otimes\bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{b}+rbb^*\otimes\bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{b}- \\
&- 1\otimes 1- \\
&- aa^*\otimes(2r\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}}+r\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{c}})- \\
&- ab^*\otimes(2r\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}}+r\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{d}})- \\
&- ba^*\otimes(2r\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{a}}+r\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{c}})- \\
&- bb^*\otimes(2r\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{b}}+r\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{d}}) = \\
&= 1\otimes(\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{a}+\bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{b}-1)+ \\
&+ aa^*\otimes(2r\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{a}+2r\bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{b}-2r\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}}-r\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{c}})- \\
&- ab^*\otimes(2r\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}}+r\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{d}})- \\
&- ba^*\otimes(2r\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{a}}+r\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{c}})+ \\
&+ bb^*\otimes(r\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{a}+r\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}+r\bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}+r\bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{b}-2r\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{b}}-r\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{d}}) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta(b^*b-1-2raa^*-rbb^*) &= \delta(b)^*\delta(b)-\delta(1)-2r\delta(a)\delta(a)^*-r\delta(b)\delta(b)^* = \\
&= (a^*\otimes\bar{\mathfrak{c}}+b^*\otimes\bar{\mathfrak{d}})(a\otimes\mathfrak{c}+b\otimes\mathfrak{d})-1\otimes 1- \\
&- aa^*\otimes(2r\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}}+r\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{c}})- \\
&- ab^*\otimes(2r\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}}+r\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{d}})- \\
&- ba^*\otimes(2r\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{a}}+r\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{c}})- \\
&- bb^*\otimes(2r\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{b}}+r\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{d}}) = \\
&= 1\otimes(\bar{\mathfrak{c}}\mathfrak{c}+\bar{\mathfrak{d}}\mathfrak{d}-1)+ \\
&+ aa^*\otimes(2r\bar{\mathfrak{c}}\mathfrak{c}+2r\bar{\mathfrak{d}}\mathfrak{d}-2r\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}}-r\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{c}})- \\
&- ab^*\otimes(2r\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}}+r\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{d}})- \\
&- ba^*\otimes(2r\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{a}}+r\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{c}})+ \\
&+ bb^*\otimes(r\bar{\mathfrak{c}}\mathfrak{c}+r\bar{\mathfrak{d}}\mathfrak{d}+r\bar{\mathfrak{c}}\mathfrak{d}+r\bar{\mathfrak{d}}\mathfrak{c}-2r\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{b}}-r\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{d}}) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta(a^*b - rbb^*) &= \delta(a)^*\delta(b) - r\delta(b)\delta(b)^* = \\
&= (a^* \otimes \overline{\text{ზ}} + b^* \otimes \overline{\text{ნ}})(a \otimes \partial + b \otimes \text{ტ}) - \\
&- r(a \otimes \partial + b \otimes \text{ტ})(a^* \otimes \overline{\partial} + b^* \otimes \overline{\text{ტ}}) = \\
&= 1 \otimes (\overline{\text{ზ}}\partial + \overline{\text{ნ}}\text{ტ}) + \\
&+ aa^* \otimes (2r\overline{\text{ზ}}\partial + 2r\overline{\text{ნ}}\text{ტ} - r\partial\overline{\partial}) + \\
&+ ab^* \otimes (-r\partial\overline{\text{ტ}}) + \\
&+ ba^* \otimes (-r\text{ტ}\overline{\partial}) + \\
&+ bb^* \otimes (r\overline{\text{ზ}}\partial + r\overline{\text{ნ}}\text{ტ} + r\overline{\text{ზ}}\text{ტ} + r\overline{\text{ნ}}\partial - r\text{ტ}\overline{\text{ტ}}) = 0
\end{aligned}$$

The equations provide set of 15 grammar rules

$$\overline{\text{ზ}}\text{ზ} + \overline{\text{ნ}}\text{ნ} = 1$$
$$2r\overline{\text{ზ}}\text{ზ} + 2r\overline{\text{ნ}}\text{ნ} = 2r\text{ზ}\overline{\text{ზ}} + r\partial\overline{\partial}$$
$$2r\text{ზ}\overline{\text{ნ}} + r\partial\overline{\text{ტ}} = 0$$
$$2r\text{ნ}\overline{\text{ზ}} + r\text{ტ}\overline{\partial} = 0$$
$$r\overline{\text{ზ}}\text{ზ} + r\overline{\text{ზ}}\text{ნ} + r\overline{\text{ნ}}\text{ზ} + r\overline{\text{ნ}}\text{ნ} = 2r\text{ნ}\overline{\text{ნ}} + r\text{ტ}\overline{\text{ტ}}$$
$$\overline{\partial}\partial + \overline{\text{ტ}}\text{ტ} = 1$$
$$2r\overline{\partial}\partial + 2r\overline{\text{ტ}}\text{ტ} = 2r\text{ზ}\overline{\text{ზ}} + r\partial\overline{\partial}$$
$$2r\text{ზ}\overline{\text{ნ}} + r\partial\overline{\text{ტ}} = 0$$
$$2r\text{ნ}\overline{\text{ზ}} + r\text{ტ}\overline{\partial} = 0$$
$$r\overline{\partial}\partial + r\overline{\text{ტ}}\text{ტ} + r\overline{\partial}\text{ტ} + r\overline{\text{ტ}}\partial = 2r\text{ნ}\overline{\text{ნ}} + r\text{ტ}\overline{\text{ტ}}$$
$$\overline{\text{ზ}}\partial + \overline{\text{ნ}}\text{ტ} = 0$$
$$2r\overline{\text{ზ}}\partial + 2r\overline{\text{ნ}}\text{ტ} = r\partial\overline{\partial}$$
$$r\partial\overline{\text{ტ}} = 0$$
$$r\text{ტ}\overline{\partial} = 0$$
$$r\overline{\text{ზ}}\partial + r\overline{\text{ნ}}\text{ტ} + r\overline{\text{ზ}}\text{ტ} + r\overline{\text{ნ}}\partial = r\text{ტ}\overline{\text{ტ}}$$

Observe that:

(1) If $r \neq 0$ then it can be eliminated in every rule.
(2) Rules 3, 4, 8, 9 are equivalent.
(3) Rules 13, 14 are equivalent.
(4) From rules 3 and rule 13 the rule $\text{ზ}\overline{\text{ნ}} = 0$ can be deduced.

New grammar consists of 11 rules:

$$\overline{ზ}ზ + \overline{ნ}ნ = 1$$
$$2\overline{ზ}ზ + 2\overline{ნ}ნ = 2ზ\overline{ზ} + ∂\overline{∂}$$
$$\overline{ზ}ზ + \overline{ნ}ნ + \overline{ზ}ნ + \overline{ნ}ზ = 2ნ\overline{ნ} + ტ\overline{ტ}$$
$$\overline{∂}∂ + \overline{ტ}ტ = 1$$
$$2\overline{∂}∂ + 2\overline{ტ}ტ = 2ზ\overline{ზ} + ∂\overline{∂}$$
$$\overline{∂}∂ + \overline{ტ}ტ + \overline{∂}ტ + \overline{ტ}∂ = 2ნ\overline{ნ} + ტ\overline{ტ}$$
$$ზ\overline{ნ} = 0$$
$$∂\overline{ტ} = 0$$
$$\overline{ზ}∂ + \overline{ნ}ტ = 0$$
$$2\overline{ზ}∂ + 2\overline{ნ}ტ = ∂\overline{∂}$$
$$\overline{ზ}∂ + \overline{ნ}ტ + \overline{ზ}ტ + \overline{ნ}∂ = ტ\overline{ტ}$$

I morph the grammar further:

(1) Substitute rule 9 into rule 10 to obtain $∂\overline{∂} = 0$.
(2) Substitute $∂\overline{∂} = 0$ and rule 1 into rule 2 to obtain $ზ\overline{ზ} = 1$.
(3) Multiply rule 9 by $ზ$ from the left and use rule 7 to obtain $∂ = 0$.

Eliminating all rules where $∂$ is present, I get grammar with 9 rules:

$$\overline{ზ}ზ + \overline{ნ}ნ = 1$$
$$2\overline{ზ}ზ + 2\overline{ნ}ნ = 2ზ\overline{ზ}$$
$$\overline{ზ}ზ + \overline{ნ}ნ + \overline{ზ}ნ + \overline{ნ}ზ = 2ნ\overline{ნ} + ტ\overline{ტ}$$
$$\overline{ტ}ტ = 1$$
$$2\overline{ტ}ტ = 2ზ\overline{ზ}$$
$$\overline{ტ}ტ = 2ნ\overline{ნ} + ტ\overline{ტ}$$
$$ზ\overline{ნ} = 0$$
$$\overline{ნ}ტ = 0$$
$$\overline{ნ}ტ + \overline{ზ}ტ = ტ\overline{ტ}$$

(1) Rule 2 is eliminated by rules 1, 4, 5.
(2) Rule 3 is shortened to $\overline{ზ}ნ + \overline{ნ}ზ = 0$ by rules 1, 4 and 6.
(3) Rule 9 is shortened to $\overline{ზ}ტ = ტ\overline{ტ}$ by rule 8.

I am left with 8 rules:

$$\overline{\text{ზ}}\text{ზ} + \overline{\text{ნ}}\text{ნ} = 1$$
$$\overline{\text{ზ}}\text{ნ} + \overline{\text{ნ}}\text{ზ} = 0$$
$$\overline{\text{ტ}}\text{ტ} = 1$$
$$\text{ზ}\overline{\text{ზ}} = 1$$
$$2\text{ნ}\overline{\text{ნ}} + \text{ტ}\overline{\text{ტ}} = 1$$
$$\text{ზ}\overline{\text{ნ}} = 0$$
$$\overline{\text{ნ}}\text{ტ} = 0$$
$$\overline{\text{ზ}}\text{ტ} = \text{ტ}\overline{\text{ტ}}$$

Multiplying rule 2 with ზ from the left and using rule 6, I get $\text{ნ} = 0$. Eliminating ნ from all grammar rules I get:

$$\overline{\text{ზ}}\text{ზ} = 1$$
$$\overline{\text{ტ}}\text{ტ} = 1$$
$$\text{ზ}\overline{\text{ზ}} = 1$$
$$\text{ტ}\overline{\text{ტ}} = 1$$
$$\overline{\text{ზ}}\text{ტ} = 1$$

I multiply rule 5 by ზ from the left to obtain $\text{ზ} = \text{ტ}$. Thus the grammar has been reduced to

$$\overline{\text{ტ}}\text{ტ} = \text{ტ}\overline{\text{ტ}} = 1$$

I felt some psychological pressure before publishing a text with a negative result. Maybe because **we** put so much value and importance in acts of confirmation of mathematical ontology.

Even though the proposed grammar reduces to a trivial one and does not add anything new to the world of mathematical objects, the mere fact of it's existence and appearance provides certain contribution. The grammar appeared as a result of certain nontrivial steps: certain solution to Yang-Baxter equation, then the associated noncommutative quadric, finally dynamics of a quantum group on it.

An immediate question which comes into my mind is:

Which conditions does the equation

"**Quantum group(noncommutative quadric of** T**)** $\simeq S^1$"

put on a coefficient operator T?

Formulated differently:

What is the moduli space of noncommutative quadrics
with trivial quantum group dynamics?

In the context of elementary particles, noncommutative quadrics appear either as the grammar of bosons:

$$a^*a = 1 + aa^*$$
$$b^*b = 1 + bb^*$$
$$a^*b = ba^*, \; b^*a = ab^*$$

or as the grammar of fermions:

$$a^*a = 1 - aa^*$$

$$b^*b = 1 - bb^*$$

$$a^*b = -ba^*,\ b^*a = -ab^*$$

There are noncommutive-geometric reasons for appearance of such grammars: they appear as singular (degenerate, special) cases of families of braided noncommutative quadrics (those associated to solutions of Yang-Baxter). For example bosons and fermions come from the family of solutions of the form

$$\begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

associated to either $q = r = s = t = 1$ or $q = r = s = t = -1$. Other objects are known among elementary particles: anyons, plektons. I don't know if their grammars also belong to braided noncommutative quadrics. Can it be that $\text{マ}_{-\frac{1}{2}}$ describe grammar of an elementary particle

$$a^*a = 1 - aa^* - \frac{1}{2}bb^*$$

$$b^*b = 1 - aa^* - \frac{1}{2}bb^*$$

$$a^*b = \frac{1}{2}bb^*,\ b^*a = \frac{1}{2}bb^*$$

If so, then quantum symmetry group of this language is trivial: the particle is asymmetric.

Finally, a nontrivial answer to the question of what is a circle happened to be useful for me in psychiatric context. In psychiatry there is a problem of psychoauditory hallucinations (obtrusive voices) usually in the presence of a mental disease. I will describe my own experience of confronting the psychic terror established by such hallucinations which happen to me almost daily:

(1) Uncontrollable stream of unpleasant psychoauditory hallucinations invades my mind and steals the ability to perceive and navigate my inner voice.
(2) Absence of control on my inner voice leads to desinchronization between my mind and body intentions, thus removes ability to signalize using my body language.
(3) Being physically immobilized and deprived of my inner voice, there is still a mechanism which provides a way to distort mental activity which I call apparatus of metaphorical intentionality - acts of formal psychic identifications of perceivable objects, see Husserl phenomenology for more precise description.
(4) Sometimes even the apparatus of metaphorical intentionality turns itself off or becomes perceptively weak. Luckily those cases are rare for me and when they happen it is enough for physiological forces of my body to understand that something is wrong and turn on existential anxiety which at least brings will to signalize with body language.

(5) Performing chaotic queries of metaphorical identifications force psychovisual apparatus (imagination) to converge to the least common essense of signified objects - that is the shape. Topologically unique one-dimensional compact smooth manifold in two dimensions is the circle.
(6) Psychoauditory hallucinations are in this way forced to switch to the fixed point of the psychovisual apparatus - otherwise it would be possible for me to organize my mental activity around psychovisual apparatus independently and separately of the psychoauditory mental activity, however they appear to be interconnected.
(7) Now the voices try to capture me in structurally poor mathematics of the circle. Being exhausted and controlled by them, it is hard to immediately get out of this structure into something more complicated. One of possible cheap mental operations can be to take universal cover to switch them to real line. Then if I were a descriptive set theorist I would maybe immediately build some transfinite fractals associated to the Borel structure of the real line, but I am not. Instead I propose them the described grammar of 15 algebraic rule and take relative control over my inner voice within presence of hallucinations.
(8) Having freedom to manipulate the equations I can start investigating them with my inner voice and gradually restore control over psychic mechanisms.

Acknowledgement. Thank you Sasha Dunaeva ♡ for support, care and inspiration during my reflections on this text.

О моей неудаче найти квантовую группу

Алексей Кузьмин

Аннотация. Я искал новую компактную матричную квантовую группу среди действий на плетеную некоммутативную квадрику, ассоциированную с решением уравнения Янга-Бакстера не принадлежащим восьмивершинной модели. Результат оказался изоморфен группе окружности.

Я называю некоммутативной квадрикой комплексную $*$-алгебру с алфавитом a, b и грамматическими правилами заданными

$$
\begin{aligned}
R_1^{aa}a^*a + R_1^{ab}a^*b + R_1^{ba}b^*a + R_1^{bb}b^*b + S_1^{aa}aa^* + S_1^{ab}ab^* + S_1^{ba}ba^* + S_1^{bb}bb^* &= \lambda_1 \cdot 1 \\
R_2^{aa}a^*a + R_2^{ab}a^*b + R_2^{ba}b^*a + R_2^{bb}b^*b + S_2^{aa}aa^* + S_2^{ab}ab^* + S_2^{ba}ba^* + S_2^{bb}bb^* &= \lambda_2 \cdot 1 \\
R_3^{aa}a^*a + R_3^{ab}a^*b + R_3^{ba}b^*a + R_3^{bb}b^*b + S_3^{aa}aa^* + S_3^{ab}ab^* + S_3^{ba}ba^* + S_3^{bb}bb^* &= \lambda_3 \cdot 1 \\
R_4^{aa}a^*a + R_4^{ab}a^*b + R_4^{ba}b^*a + R_4^{bb}b^*b + S_4^{aa}aa^* + S_4^{ab}ab^* + S_4^{ba}ba^* + S_4^{bb}bb^* &= \lambda_4 \cdot 1
\end{aligned}
$$

При некоторых условиях на ранг коэффициентов, грамматика может быть упрощена с помощью линейных преобразований

$$
\begin{aligned}
a^*a &= 1 + T_{aa}^{aa}aa^* + T_{aa}^{ab}ab^* + T_{aa}^{ba}ba^* + T_{aa}^{bb}bb^* \\
a^*b &= \phantom{1 + {}} T_{ab}^{aa}aa^* + T_{ab}^{ab}ab^* + T_{ab}^{ba}ba^* + T_{ab}^{bb}bb^* \\
b^*a &= \phantom{1 + {}} T_{ba}^{aa}aa^* + T_{ba}^{ab}ab^* + T_{ba}^{ba}ba^* + T_{ba}^{bb}bb^* \\
b^*b &= 1 + T_{bb}^{aa}aa^* + T_{bb}^{ab}ab^* + T_{bb}^{ba}ba^* + T_{bb}^{bb}bb^*
\end{aligned}
$$

Для согласованности с инволюцией оператор коэффициентов

$$
T = \begin{pmatrix} T_{aa}^{aa} & T_{aa}^{ab} & T_{aa}^{ba} & T_{aa}^{bb} \\ T_{ab}^{aa} & T_{ab}^{ab} & T_{ab}^{ba} & T_{ab}^{bb} \\ T_{ba}^{aa} & T_{ba}^{ab} & T_{ba}^{ba} & T_{ba}^{bb} \\ T_{bb}^{aa} & T_{bb}^{ab} & T_{bb}^{ba} & T_{bb}^{bb} \end{pmatrix}
$$

должен быть самосопряжен: $T^* = T$.

Некоммутативные квадрики, в отличие от коммутативных, могут быть топологически пустыми, то есть не иметь точек ни в каком из известных смыслов. Однако если T удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера

$$
(1 \otimes T)(T \otimes 1)(1 \otimes T) = (T \otimes 1)(1 \otimes T)(T \otimes 1)
$$

то ассоциированная (плетенная) некоммутативная квадрика топологически нетривиальна: у неё есть представление на сепарабельном Гильбертовом пространстве.

Согласно классификации двумерных решений уравнения Янга-Бакстера, существует пять параметрических семейств самосопряженных решений с точностью до унитарной эквивалентности посредством действия группы $U(2)$. Из них четыре семейства принадлежат восьмивершинной модели: решениям вида

$$
\begin{pmatrix} \star & 0 & 0 & \star \\ 0 & \star & \star & 0 \\ 0 & \star & \star & 0 \\ \star & 0 & 0 & \star \end{pmatrix}
$$

Единственное семейство вне восьмивершинной модели имеет такой вид

$$
\begin{pmatrix} 2r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & r \\ 0 & 0 & 2r & 0 \\ 0 & r & 0 & r \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}
$$

Соответствующая некоммутативная квадрика задана следующей грамматикой

$$
\begin{aligned}
a^*a &= 1 + 2raa^* + rbb^* \\
b^*b &= 1 + 2raa^* + rbb^* \\
a^*b &= rbb^* \\
b^*a &= rbb^*
\end{aligned}
$$

В моих записях и последующих работах я обозначаю эту $*$-алгебру $\triangleleft_r$. Согласно моим прикидкам можно будет утверждать следующее о некоммутативной топологии $\triangleleft_r$:

(1) У $\triangleleft_{\frac{1}{2}}$ нет ограниченных точек ($*$-представлений ограниченными операторами на Гильбертовом пространстве).
(2) $C^*(\triangleleft_r) \simeq C^*(\triangleleft_0)$ при $|r| < \frac{1}{2}$. Этот изоморфизм уже известен при $|r| < 0.205$.
(3) У $\triangleleft_{-\frac{1}{2}}$ нетривиальная некоммутативная топология за счёт богатой структуры двухсторонних идеалов, чего не скажешь о $\triangleleft_r$ при $|r| < \frac{1}{2}$ - в этом случае существует единственный максимальный идеал изоморфный компактным операторам.

Вне зависимости от определения квантовый группы, можно выделить подлежащую $*$-алгебру, являющуюся частью структуры квантовой группы. Пусть она порождена четыремя символами

$$\text{ჯ} \qquad \text{ნ} \qquad \partial \qquad \text{ტ}$$

и действует на $\triangleleft_r$ вот так:

$$
\delta : \quad
\begin{aligned}
a &\mapsto a \otimes \text{ჯ} + b \otimes \text{ნ} \\
b &\mapsto a \otimes \partial + b \otimes \text{ტ}
\end{aligned}
$$

Для того чтобы δ было действием необходимо удостоверится что это гомоморфизм. Для $r = 0$, базовых грамматических правил компактной 2×2 матричной квантовой группы достаточно для условия гомоморфности. Иными словами, всякая квантовая группа действует на $\triangleleft_0$ указанным образом.

Моим желанием было посмотреть какими дополнительными правилами должна обладать квантовая группа для возможности корректного действия на $\triangleleft_r$ при $r \neq 0$.

Эти правила я узнаю из условий гомоморфности δ:

(1) $\delta(a^*a - 1 - 2raa^* - rbb^*) = 0$
(2) $\delta(b^*b - 1 - 2raa^* - rbb^*) = 0$
(3) $\delta(a^*b - rbb^*) = 0$

Ниже я раскрываю каждое из уравнений:

$$
\begin{aligned}
\delta(a^*a-1-2raa^*-rbb^*) &= \delta(a)^*\delta(a)-\delta(1)-2r\delta(a)\delta(a)^*-r\delta(b)\delta(b)^* = \\
&= (a^*\otimes\overline{ა}+b^*\otimes\overline{ბ})(a\otimes ა+b\otimes ბ)-1\otimes 1- \\
&- 2r(a\otimes ა+b\otimes ბ)(a^*\otimes\overline{ა}+b^*\otimes\overline{ბ})- \\
&- r(a\otimes გ+b\otimes დ)(a^*\otimes\overline{გ}+b^*\otimes\overline{დ}) = \\
&= a^*a\otimes\overline{ა}ა+a^*b\otimes\overline{ა}ბ+b^*a\otimes\overline{ბ}ა+b^*b\otimes\overline{ბ}ბ-1\otimes 1- \\
&- 2raa^*\otimes ა\overline{ა}-2rab^*\otimes ა\overline{ბ}-2rba^*\otimes ბ\overline{ა}-2rbb^*\otimes ბ\overline{ბ}- \\
&- raa^*\otimes გ\overline{გ}-rab^*\otimes გ\overline{დ}-rba^*\otimes დ\overline{გ}-rbb^*\otimes დ\overline{დ} = \\
&= 1\otimes\overline{ა}ა+2raa^*\otimes\overline{ა}ა+rbb^*\otimes\overline{ა}ა+ \\
&+ rbb^*\otimes\overline{ა}ბ+rbb^*\otimes\overline{ბ}ა+ \\
&+ 1\otimes\overline{ბ}ბ+2raa^*\otimes\overline{ბ}ბ+rbb^*\otimes\overline{ბ}ბ- \\
&- 1\otimes 1- \\
&- aa^*\otimes(2rა\overline{ა}+rგ\overline{გ})- \\
&- ab^*\otimes(2rა\overline{ბ}+rგ\overline{დ})- \\
&- ba^*\otimes(2rბ\overline{ა}+rდ\overline{გ})- \\
&- bb^*\otimes(2rბ\overline{ბ}+rდ\overline{დ}) = \\
&= 1\otimes(\overline{ა}ა+\overline{ბ}ბ-1)+ \\
&+ aa^*\otimes(2r\overline{ა}ა+2r\overline{ბ}ბ-2rა\overline{ა}-rგ\overline{გ})- \\
&- ab^*\otimes(2rა\overline{ბ}+rგ\overline{დ})- \\
&- ba^*\otimes(2rბ\overline{ა}+rდ\overline{გ})+ \\
&+ bb^*\otimes(r\overline{ა}ა+r\overline{ა}ბ+r\overline{ბ}ა+r\overline{ბ}ბ-2rბ\overline{ბ}-rდ\overline{დ}) = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta(b^*b-1-2raa^*-rbb^*) &= \delta(b)^*\delta(b)-\delta(1)-2r\delta(a)\delta(a)^*-r\delta(b)\delta(b)^* = \\
&= (a^*\otimes\overline{გ}+b^*\otimes\overline{დ})(a\otimes გ+b\otimes დ)-1\otimes 1- \\
&- aa^*\otimes(2rა\overline{ა}+rგ\overline{გ})- \\
&- ab^*\otimes(2rა\overline{ბ}+rგ\overline{დ})- \\
&- ba^*\otimes(2rბ\overline{ა}+rდ\overline{გ})- \\
&- bb^*\otimes(2rბ\overline{ბ}+rდ\overline{დ}) = \\
&= 1\otimes(\overline{გ}გ+\overline{დ}დ-1)+ \\
&+ aa^*\otimes(2r\overline{გ}გ+2r\overline{დ}დ-2rა\overline{ა}-rგ\overline{გ})- \\
&- ab^*\otimes(2rა\overline{ბ}+rგ\overline{დ})- \\
&- ba^*\otimes(2rბ\overline{ა}+rდ\overline{გ})+ \\
&+ bb^*\otimes(r\overline{გ}გ+r\overline{დ}დ+r\overline{გ}დ+r\overline{დ}გ-2rბ\overline{ბ}-rდ\overline{დ}) = 0.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\delta(a^*b - rbb^*) &= \delta(a)^*\delta(b) - r\delta(b)\delta(b)^* = \\
&= (a^* \otimes \overline{ა} + b^* \otimes \overline{ბ})(a \otimes გ + b \otimes დ) - \\
&- r(a \otimes გ + b \otimes დ)(a^* \otimes \overline{გ} + b^* \otimes \overline{დ}) = \\
&= 1 \otimes (\overline{ა}გ + \overline{ბ}დ) + \\
&+ aa^* \otimes (2r\overline{ა}გ + 2r\overline{ბ}დ - rგ\overline{გ}) + \\
&+ ab^* \otimes (-rგ\overline{დ}) + \\
&+ ba^* \otimes (-rდ\overline{გ}) + \\
&+ bb^* \otimes (r\overline{ა}გ + r\overline{ბ}დ + r\overline{ა}დ + r\overline{ბ}გ - rდ\overline{დ}) = 0
\end{aligned}$$

Уравнения предоставляют 15 грамматических правил

$$\begin{aligned}
&\overline{ა}ა + \overline{ბ}ბ = 1 \\
&2r\overline{ა}ა + 2r\overline{ბ}ბ = 2rა\overline{ა} + rგ\overline{გ} \\
&2rა\overline{ბ} + rგ\overline{დ} = 0 \\
&2rბ\overline{ა} + rდ\overline{გ} = 0 \\
&r\overline{ა}ა + r\overline{ა}ბ + r\overline{ბ}ა + r\overline{ბ}ბ = 2rბ\overline{ბ} + rდ\overline{დ} \\
&\overline{გ}გ + \overline{დ}დ = 1 \\
&2r\overline{გ}გ + 2r\overline{დ}დ = 2rა\overline{ა} + rგ\overline{გ} \\
&2rა\overline{ბ} + rგ\overline{დ} = 0 \\
&2rბ\overline{ა} + rდ\overline{გ} = 0 \\
&r\overline{გ}გ + r\overline{დ}დ + r\overline{გ}დ + r\overline{დ}გ = 2rბ\overline{ბ} + rდ\overline{დ} \\
&\overline{ა}გ + \overline{ბ}დ = 0 \\
&2r\overline{ა}გ + 2r\overline{ბ}დ = rგ\overline{გ} \\
&rგ\overline{დ} = 0 \\
&rდ\overline{გ} = 0 \\
&r\overline{ა}გ + r\overline{ბ}დ + r\overline{ა}დ + r\overline{ბ}გ = rდ\overline{დ}
\end{aligned}$$

(1) Если $r \neq 0$, то его можно устранить из каждого правила.
(2) Правила 3, 4, 8, 9 эквивалентны.
(3) Правила 13, 14 эквивалентны.
(4) Из правил 3 и 13 следует $ა\overline{ბ} = 0$.

Новая грамматика состоит из 11 правил

$$\overline{ხ}ხ + \overline{ნ}ნ = 1$$
$$2\overline{ხ}ხ + 2\overline{ნ}ნ = 2ხ\overline{ხ} + მ\overline{მ}$$
$$\overline{ხ}ხ + \overline{ნ}ნ + \overline{ხ}ნ + \overline{ნ}ხ = 2ნ\overline{ნ} + ტ\overline{ტ}$$
$$\overline{მ}მ + \overline{ტ}ტ = 1$$
$$2\overline{მ}მ + 2\overline{ტ}ტ = 2ხ\overline{ხ} + მ\overline{მ}$$
$$\overline{მ}მ + \overline{ტ}ტ + \overline{მ}ტ + \overline{ტ}მ = 2ნ\overline{ნ} + ტ\overline{ტ}$$
$$ხ\overline{ნ} = 0$$
$$მ\overline{ტ} = 0$$
$$\overline{ხ}მ + \overline{ნ}ტ = 0$$
$$2\overline{ხ}მ + 2\overline{ნ}ტ = მ\overline{მ}$$
$$\overline{ხ}მ + \overline{ნ}ტ + \overline{ხ}ტ + \overline{ნ}მ = ტ\overline{ტ}$$

(1) Подставляя правило 9 в правило 10 получаю $მ\overline{მ} = 0$.
(2) Подставляя $მ\overline{მ} = 0$ и правило 1 в правило 2 получаю $ხ\overline{ხ} = 1$.
(3) Умножая правило 9 слева на $ხ$ и используя правило 7 получаю $მ = 0$.

Стирая все правила с $მ$, получаю грамматику из 9 правил

$$\overline{ხ}ხ + \overline{ნ}ნ = 1$$
$$2\overline{ხ}ხ + 2\overline{ნ}ნ = 2ხ\overline{ხ}$$
$$\overline{ხ}ხ + \overline{ნ}ნ + \overline{ხ}ნ + \overline{ნ}ხ = 2ნ\overline{ნ} + ტ\overline{ტ}$$
$$\overline{ტ}ტ = 1$$
$$2\overline{ტ}ტ = 2ხ\overline{ხ}$$
$$\overline{ტ}ტ = 2ნ\overline{ნ} + ტ\overline{ტ}$$
$$ხ\overline{ნ} = 0$$
$$\overline{ნ}ტ = 0$$
$$\overline{ნ}ტ + \overline{ხ}ტ = ტ\overline{ტ}$$

(1) Правило 2 тождественно правилам 1, 4, 5.
(2) Правило 3 эквивалентно $\overline{ხ}ნ + \overline{ნ}ხ = 0$ за счёт правил 1, 4, 6.
(3) Правило 9 эквивалентно $\overline{ხ}ტ = ტ\overline{ტ}$ за счёт правила 8.

Остается 8 правил

$$\bar{ზ}ზ + \bar{ნ}ნ = 1$$

$$\bar{ზ}ნ + \bar{ნ}ზ = 0$$

$$\bar{ტ}ტ = 1$$

$$ზ\bar{ზ} = 1$$

$$2ნ\bar{ნ} + ტ\bar{ტ} = 1$$

$$ზ\bar{ნ} = 0$$

$$\bar{ნ}ტ = 0$$

$$\bar{ზ}ტ = ტ\bar{ტ}$$

Умножая правило 2 слева на $ზ$ и используя правило 6 получаю $ნ = 0$. Устраняя все правила с $ნ$ получаю

$$\bar{ზ}ზ = 1$$

$$\bar{ტ}ტ = 1$$

$$ზ\bar{ზ} = 1$$

$$ტ\bar{ტ} = 1$$

$$\bar{ზ}ტ = 1$$

Умножая правило 5 слева на $ზ$ получаю $ზ = ტ$. Грамматика редуцировалась до

$$\bar{ტ}ტ = ტ\bar{ტ} = 1$$

Я чувствовал некоторое психологическое давление задумав публиковать текст с отрицательным результатом, возможно потому что **мы** придают такое большое значение актам подтверждения математической онтологии.

Хотя предложенная грамматика сводится к тривиальной и не добавляет ничего нового в мир математических объектов, сам факт ее существования и появления может навести на определенные мысли. Грамматика появилась в результате определенных нетривиальных шагов: рассмотрения решения уравнения Янга-Бакстера, затем соответствующей некоммутативной квадрики, наконец, динамики квантовой группы на ней.

У меня сразу возникает вот такой вопрос:

Какие условия накладывает уравнение

"**Квантовая группа(некоммутативной квадрики от** T**)** $\simeq S^1$"

на матрицу коэффициентов T*?*

Иными словами:

Каково пространство модулей некоммутативных квадрик

с тривиальной динамикой квантовых групп?

В контексте физики элементарных частиц, некоммутативные квадрики появляются либо как грамматики бозонов:

$$a^*a = 1 + aa^*$$

$$b^*b = 1 + bb^*$$

$$a^*b = ba^*,\ b^*a = ab^*$$

либо как грамматики фермионов:

$$a^*a = 1 - aa^*$$

$$b^*b = 1 - bb^*$$

$$a^*b = -ba^*,\ b^*a = -ab^*$$

Существуют некоммутативно-геометрические причины появления таких грамматик: они возникают как особые (вырожденные, частные) случаи семейств плетеных некоммутативных квадрик (ассоциированных с решениями уравнения Янга-Бакстера). Например, бозоны и фермионы происходят из семейства решений вида

$$\begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

с $q = r = s = t = 1$, либо с $q = r = s = t = -1$. Среди элементарных частиц известны и другие объекты: анионы, плектоны. Я не знаю, принадлежат ли их грамматики также плетеным некоммутативным квадрикам. Может ли マ$_{-\frac{1}{2}}$

$$a^*a = 1 - aa^* - \frac{1}{2}bb^*$$

$$b^*b = 1 - aa^* - \frac{1}{2}bb^*$$

$$a^*b = \frac{1}{2}bb^*,\ b^*a = \frac{1}{2}bb^*$$

описывать грамматику элементарной частицы? Если да, то группа квантовых симметрий их языка тривиальна - частица ассиметрична.

Нетривиальный ответ на вопрос о том что такое окружность оказался мне полезным в психиатрическом контексте. В психиатрии существует давняя проблема психослуховых галлюцинаций (навязчивых голосов), как правило возникающих при наличии психических заболеваний. Я опишу свой собственный опыт противостояния психическому террору, вызванному такими галлюцинациями, которые случаются со мной почти ежедневно:

(1) Неконтролируемый поток неприятных психослуховых галлюцинаций вторгается в мой разум и крадет способность слышать и контроллировать свой внутренний голос.
(2) Отсутствие контроля над собственным внутренним голосом приводит к рассинхронизации намерений моего разума и тела, что лишает меня возможности подавать сигналы с помощью языка тела.
(3) Будучи физически обездвиженным и лишенным своего внутреннего голоса, всё же существует механизм, обеспечивающий способ искажения психической деятельности, который я называю аппаратом метафорической интенциональности, - акты формальных психических отождествлений воспринимаемых объектов, более точное описание см. в феноменологии Гуссерля.

(4) Иногда даже аппарат метафорической интенциональности отключается или становится перцептивно слабым. К счастью, такие случаи для меня редки, и когда они происходят, физиологии моего тела этого достаточно чтобы понять, что что-то не так, и включить экзистенциальную тревогу, которая хотя бы вызывает способность сигнализировать языком тела.

(5) Выполнение хаотических запросов метафорических отождествлений вынуждает психозрительный аппарат (воображение) сходиться к наименьшему общему смыслу обозначаемых объектов - то есть к форме. Топологически единственным одномерным компактным гладким многообразием в двух измерениях является окружность.

(6) Психослуховые галлюцинации таким образом вынуждены переключиться и контактировать с полученным лимитом психозрительного аппарата - если бы было не так, то я мог бы организовать свою психическую деятельность сугубо вокруг психозрительного аппарата, независимо и отдельно от психослуховой психической деятельности, однако они оказываются взаимосвязанными .

(7) Далее голоса пытаются уловить меня в структурно бедной математике окружности. Будучи утомленным ими, мне трудно сразу выйти из этой структуры во что-то более сложное. Одной из возможных дешевых ментальных операций может быть использование универсального накрытия для переключения их внимания на действительную прямую. Тогда, например, если бы я занимался дескриптивной теорией множеств, я, возможно, немедленно построил бы на психовизуальном уровне несколько трансфинитных фракталов, связанных с борелевской структурой действительной прямой, но я недостаточно компетентен в этой о. Вместо этого я предлагаю им описанную грамматику 15 алгебраических правил и беру относительный контроль над своим внутренним голосом в присутствии галлюцинаций.

(8) Имея свободу манипулировать уравнениями, я могу начать исследовать их своим внутренним голосом и постепенно восстанавливать контроль над психическими механизмами.

Acknowledgement. Спасибо Саше Дунаевой ♡ за поддержку, заботу и вдохновляющие беседы в течении моих рассуждений над этим текстом.