A slightly more theorem than the four color theorem then four color theorem of which this is a special case

Henri Caillaud

Abstract: This is a proof of a theorem on normal graphs (any point on the graph has three neighbors) whose 'countries' are not homogeneous. The property of homogeneity will be explained in detail. These graphs are not necessarily planar but planar graphs are a subset of them. The property demonstrated is to be "Hamiltonian in even loops". This property is equivalent to the property of being "colorable in four colors" for planar maps.

RESUME

Dans leur fameuse démonstration du théorème des quatre couleurs, W. HAKEN et K. APPEL (1976) ont démontré le théorème suivant :

Théorème : Un graphe minimal comporte nécessairement deux pays voisins ayant chacun cinq voisins. Un graphe minimal représentait la carte planaire la plus petite nécessitant cinq couleurs pour être coloriée.

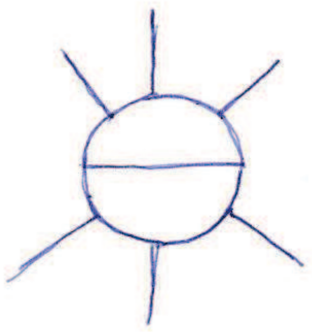


Fig. 1 : Deux pays voisins ayant chacun cinq voisins

Avec les méthodes de réduction (méthode permettant de passer à une carte plus petite tout en conserva nt une certaine propriété comme “pentachromatique” par exemple) que ces mathématiciens avaient élaborées, la configuration “inévitable” consistant en deux pays voisins ayant chacun cinq voisins était considérée comme “irréductible”.

Nous allons montrer qu’en fait cette configuration est réductible et pour cela nous allons utiliser la réduction suivante :

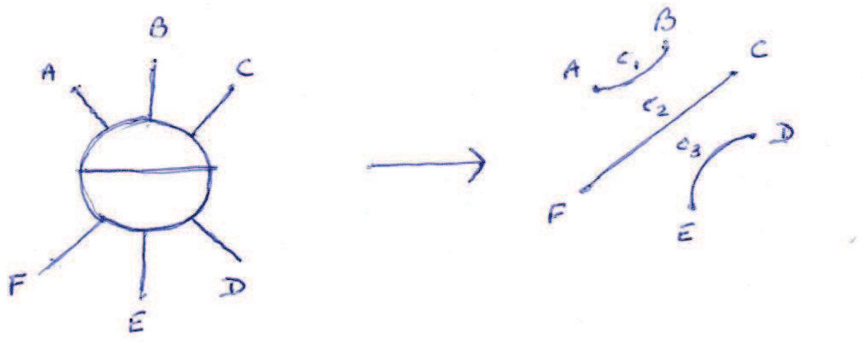


Fig. 2 : Deux pays voisins ayant chacun cinq voisins est remplacée par les trois connections C_1 (AB), C_2 (CF), C_3 (DE).

Deux théorèmes de la théorie des graphes devront être préalablement démontrés pour montrer que cette réduction conduit bien à une démonstration du théorème des quatre couleurs.

En conclusion nous démontrerons un théorème un peu plus général dont le théorème des quatre couleurs est un cas particulier.

Remarques : nous allons utiliser les mots “boucle” et “chemin” qui correspondent aux mots “cycle” et “chaine”.

DEMONSTRATION

La première chose que nous allons faire est de remplacer la propriété “être coloriable en quatre couleurs” par “être hamiltonien en boucles paires”.

Un graphe P3 (tous ses points ont trois voisins) planaire est hamiltonien en boucles paires s’il contient une ou plusieurs boucles constituées d’un nombre pair de points et passant par tous les points du graphe.

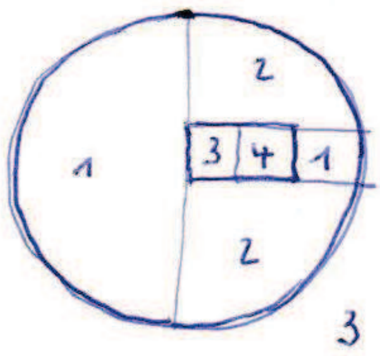


Fig 3: graphe P3 planaire hamiltonien en boucles paires.

On remarque que ce graphe est facile à colorier en quatre couleurs. Il suffit de choisir deux couleurs pour l’intérieur des boucles et les deux autres pour l’extérieur.

Cela reste vrai même si les boucles sont “emboitées”.

Réciproquement si un graphe P3 planaire est colorié en quatre couleurs et si l’on entoure les groupes de pays ayant deux couleurs choisies arbitrairement, on obtient alors des boucles paires passant par tous les points du graphe.

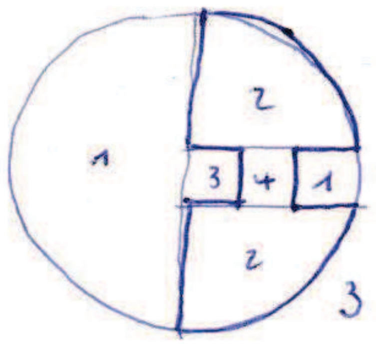


Fig 4: les pays de couleur 1 et 3 sont entourés et le graphe est bien hamiltonien en boucles paires.

Nous ne dirons plus désormais “coloriable en quatre couleurs” mais “hamiltonien en boucles paires (HBP)” en assumant l’équivalence de ces deux propriétés dans le cas des graphes planaires.

Il existe un algorithme simple (noté $algo_p$) permettant de passer d’un ensemble de boucles paires à un autre. Dans le cas des graphes planaires cet algorithme correspond à la permutation des couleurs.

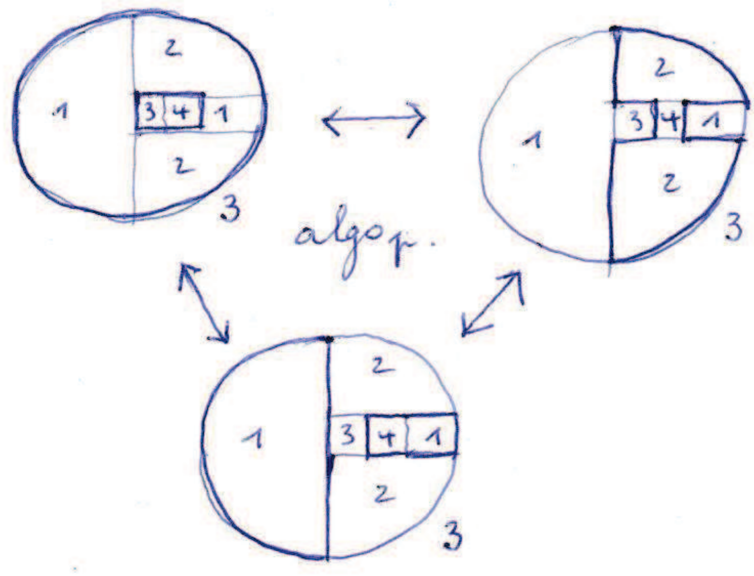


Fig 5: (Voir la description détaillée de $algo_p$ en annexe 1)

Remarque : cet algorithme peut être utilisé sur tout graphe P3 ayant une solution hamiltonienne en boucles paires (HBP) même si ce graphe n’est pas planaire.

Nous ne nous soucierons plus désormais que de deux couleurs et elles concernent les “connexions” et non plus les “pays”.

Une connexion est dite “noire” (noté C=N) si une boucle passe par elle et elle est dite “blanche” (noté C=B) sinon.

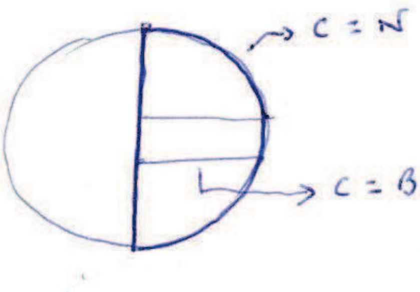


Fig 6:

Propriétés de $algo_p$:

1) Une propriété évidente de $algo_p$ permet d’affirmer que si un graphe P3 est hamiltonien en boucles paires (HBP) alors quelle que soit une connexion C, il existe une solution HBP telle que C=B.
2) Une autre est que quelques soient deux connexions C_1 et C_2 il existe une solution HBP telle que C_1=N et C_2=N.
3) Il existe donc trois statuts possibles pour un couple de connexions C_1=N et C_2=N dans un graphe P3 HBP :

a. C_1 et C_2 appartiennent chacune à une boucle paire différente. On dira qu'elles ont un statut “séparé p-p”

b. C_1 et C_2 appartiennent à une même boucle paire et sont reliées par un chemin pair. On dira qu'elles ont un statut pair.

c. C_1 et C_2 appartiennent à une même boucle paire et sont reliées par un chemin impair. On dira qu'elles ont un statut impair.

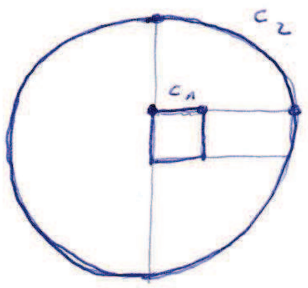


Fig 7 : statut “séparé p-p”

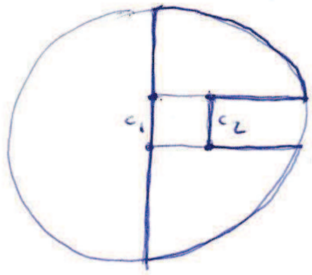


Fig 8 : statut pair

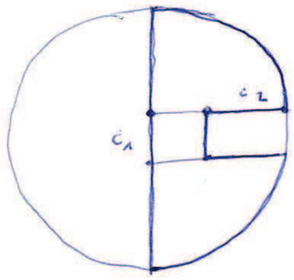


Fig 9 : statut impair

Remarque : un couple C_1 et C_2 peut avoir plusieurs statuts.

Théorème 1 :

Dans un graphe P3 planaire de rang inférieur à n_0 (n_0 est le rang de la carte minimale) si deux connexions C_1 et C_2 appartenant à un même pays ont un statut “impair” et si aucune coupure de degré 3 ne passe par ces deux connexions alors elles ont au moins un autre statut parmi les trois statuts suivants : “séparé p-p" ou “séparé i-i" ou “pair”.

Le statut “séparé i-i" signifie que C_1 et C_2 appartiennent chacune à une boucle impaire différente. (un graphe P3 peut être HBP et avoir des solutions en boucles hamiltoniennes impaires (HBI)

Définitions préalables :

- Une coupure d’un graphe est une ligne fermée passant par certaines de ses connexions et qui sépare ce graphe en deux parties (le degré de la coupure est le nombre de connexions traversées)
- Une coupure est dite “élémentaire” si chaque extrémité des connexions traversées a deux voisins dans la partie à laquelle cette extrémité appartient.

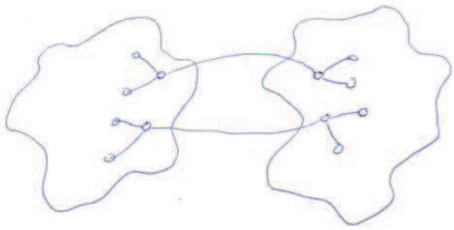


Fig 10 : coupure élémentaire de degré 2

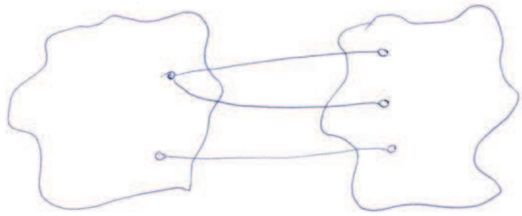


Fig 11 : coupure non élémentaire de degré 3

- Une coupure non élémentaire peut être associée à une coupure élémentaire de degré inférieur.

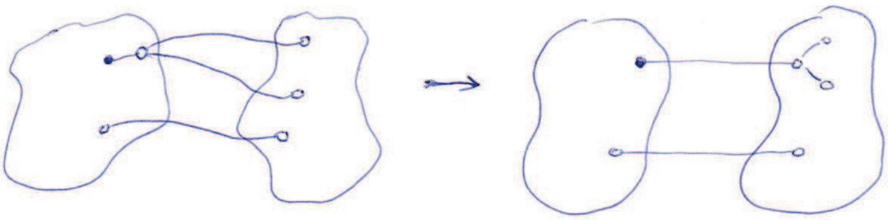


Fig 12 : coupure non élémentaire de degré 3 et coupure élémentaire associée de degré 2

Démonstration :

Si deux connexions C_1 et C_2, non consécutives et appartenant à un même pays, ont un statut impair alors considérons la transformation suivante :

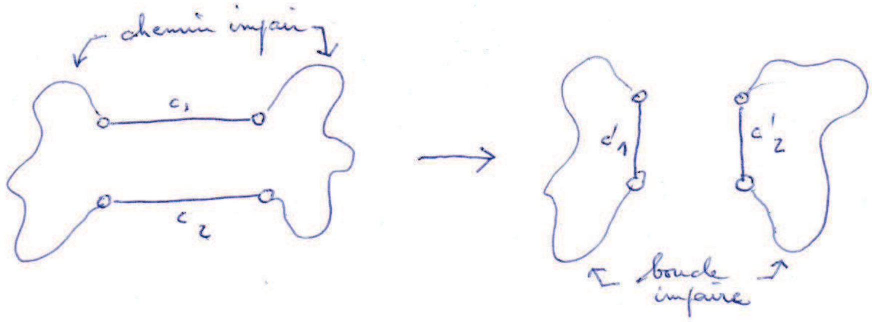
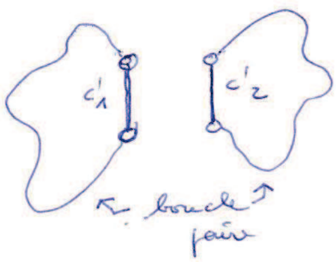


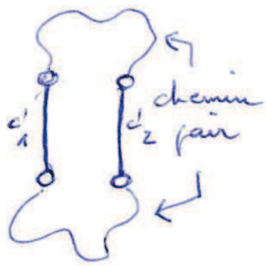
Fig 13 :

Cette transformation préserve la planarité car C_1 et C_2 appartiennent à un même pays.

Nous voyons que ce graphe est hamiltonien en boucles impaires mais comme son rang n'a pas changé et qu'il ne comporte pas de coupure de degré 1 en vertu des hypothèses, il est également HBP.

Soit une solution HBP passant par C'_1 et C'_2 (nous savons qu'elle existe) on a les trois cas suivants :





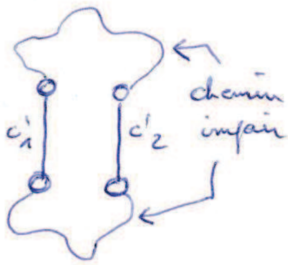
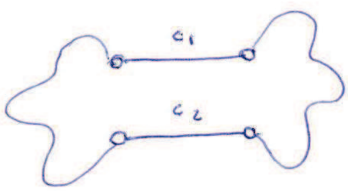
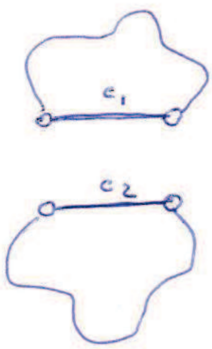


Fig 14 : C'_1 et C'_2 ont un statut séparé p-p Fig 15 : C'_1 et C'_2 ont un statut pair Fig 16 : C'_1 et C'_2 ont un statut impair

Ce qui donne après rétablissement de C_1 et C_2





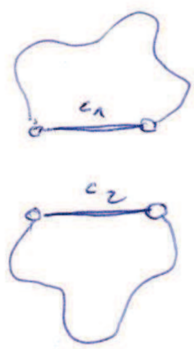


Fig 17 : C_1 et C_2 ont un statut pair Fig 18 : C_1 et C_2 ont un statut séparé p-p Fig 19 : C_1 et C_2 ont un statut séparé i-i

Nous avons bien démontré le théorème 1. (Voir en annexe 2 un exemple de l'application de ce théorème)

Remarque : Si nous avions pu démontrer aussi facilement que deux connexions ayant un statut pair pouvaient avoir un autre statut parmi les statuts “impair”, “séparé p-p" et “séparé i-i" alors la démonstration du théorème des quatre couleurs aurait tenu en une page...

Revenons maintenant à notre réduction :

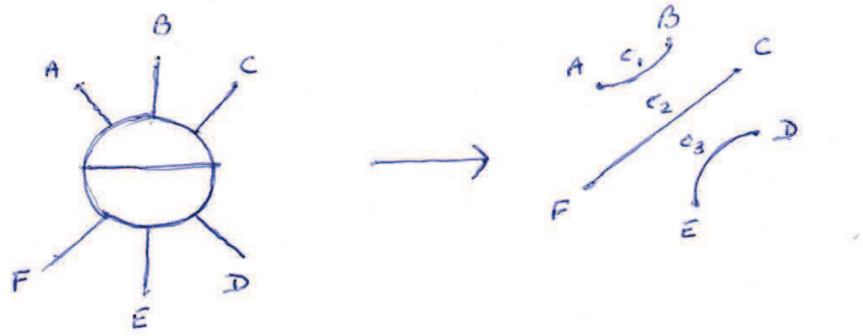


Fig 20 :

Le graphe réduit est obtenu en supprimant quatre connexions.

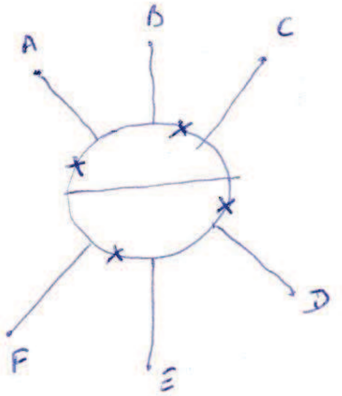
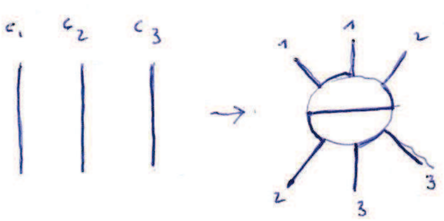


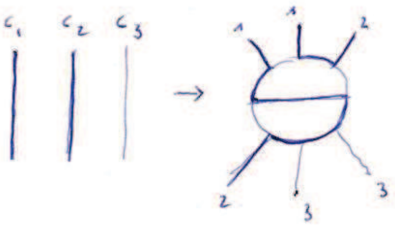
Fig 21 :

Il est donc de rang $n_0 - 4$ et est par conséquent HBP

On admettra que la planarité est préservée.

Nous remarquons que quelles que soient les couleurs (N et B) prisent par C_1, C_2 et C_3 dans le graphe réduit, il est toujours possible de “rétablir” la configuration initiale.





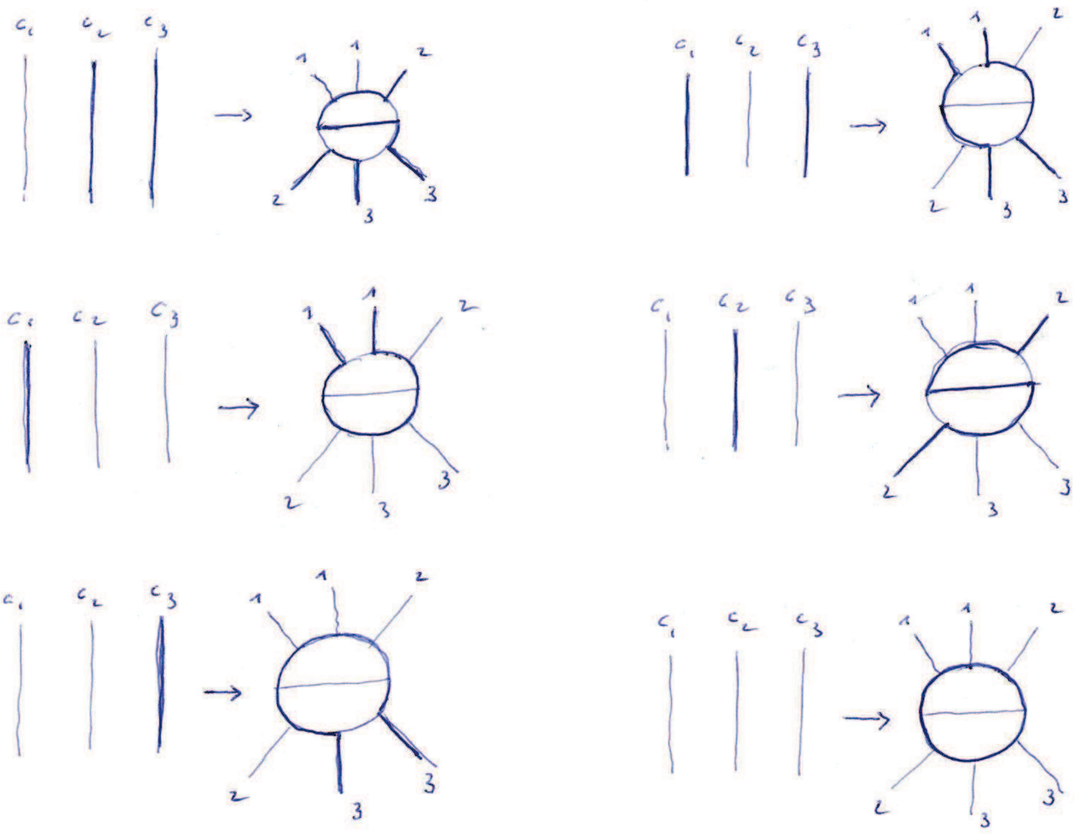


Fig 22 : résultats des rétablissements.

La solution hamiltonienne en boucles obtenue après le rétablissement est-elle en boucles paires ?

Il n'y a que trois cas où ce rétablissement n'est pas HBP. C'est lorsque C_1=N, C_2=N et C_3=B, C_1 et C_2 ayant un statut impair, respectivement C_1=N, C_2=B et C_3=N, C_1 et C_3 ayant un statut impair et C_1=B, C_2=N et C_3=N et C_2 et C_3 ayant un statut impair.

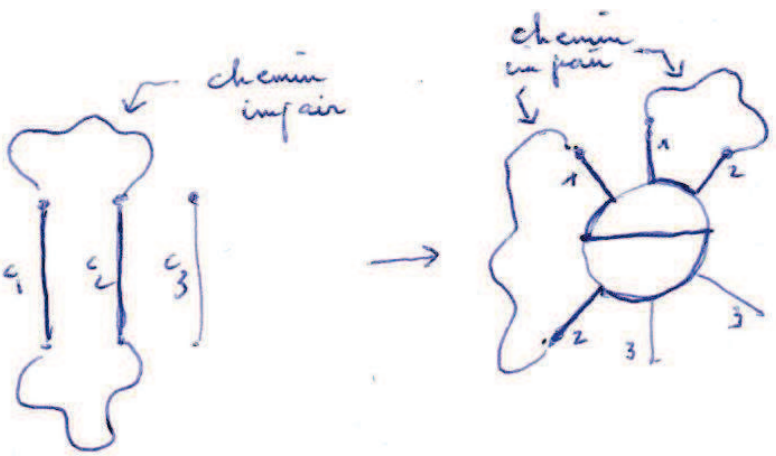


Fig 23 : Cas 1 : C_1=N, C_2=N et C_3=B, C_1 et C_2 ayant un statut impair et son rétablissement. On voit qu'il y a formation de boucles impaires.

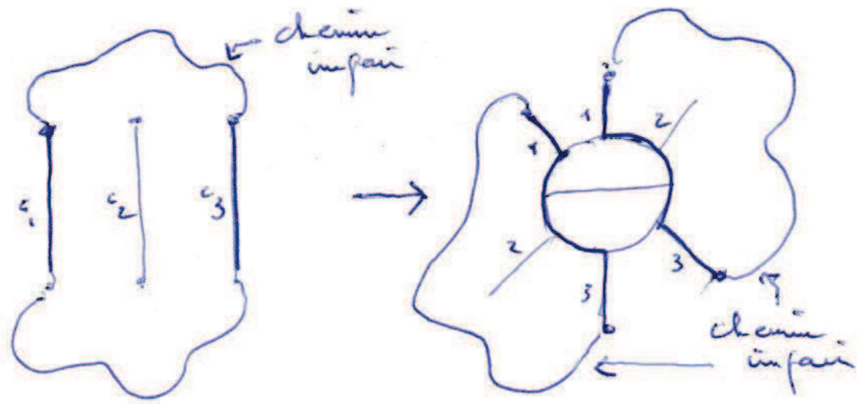


Fig 24 : Cas 2 : C_1=N, C_2=B et C_3=N, C_1 et C_3 ayant un statut impair et son rétablissement. On voit qu'il y a formation de boucles impaires.

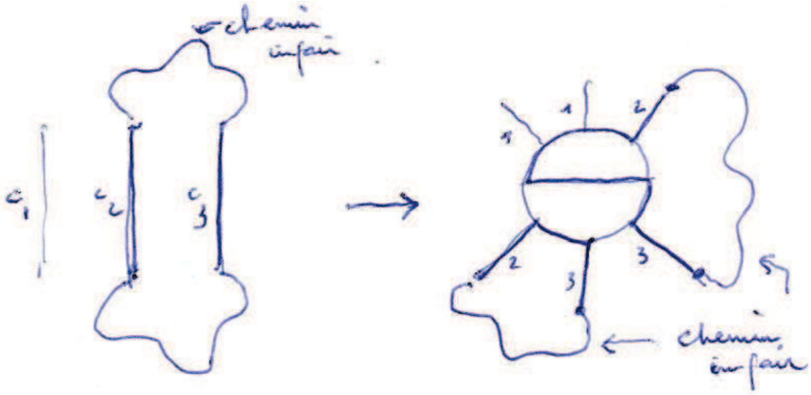


Fig 25 : Cas 3 : C_1=B, C_2=N et C_3=N et C_2 et C_3 ayant un statut impair et son rétablissement. On voit qu'il y a formation de boucles impaires.

Ces trois cas sont en fait le même car il est possible de passer de l'un à l'autre par $algo_p$ (appliqué au graphe réduit)

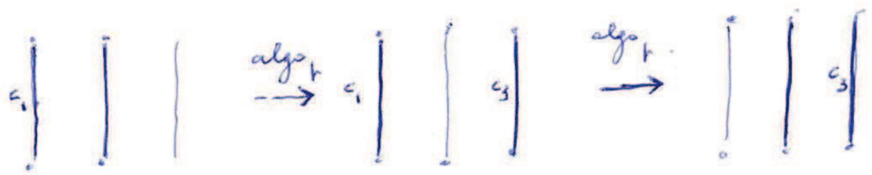


Fig 26 :

Prenons par exemple le cas 1.

Pour le couple C_1 et C_2 nous pouvons invoquer le théorème 1 démontré précédemment et prétendre que C_1 et C_2 peuvent également avoir un des trois statuts suivants :

C_1 et C_2 "pair" ; C_1 et C_2 "séparé p-p" ; C_1 et C_2 "séparé i-i"

Les deux statuts "pair" et "séparé p-p" nous ramènent aux cas précédents et le rétablissement sera HBP quelle que soit la couleur de C_3

Qu'en est-il du cas où C_1 et C_2 ont un statut séparé i-i ?

Dans cette nouvelle solution hamiltonienne en boucles impaires C_3 peut être soit B, soit N.

Si C_3=B le rétablissement sera :

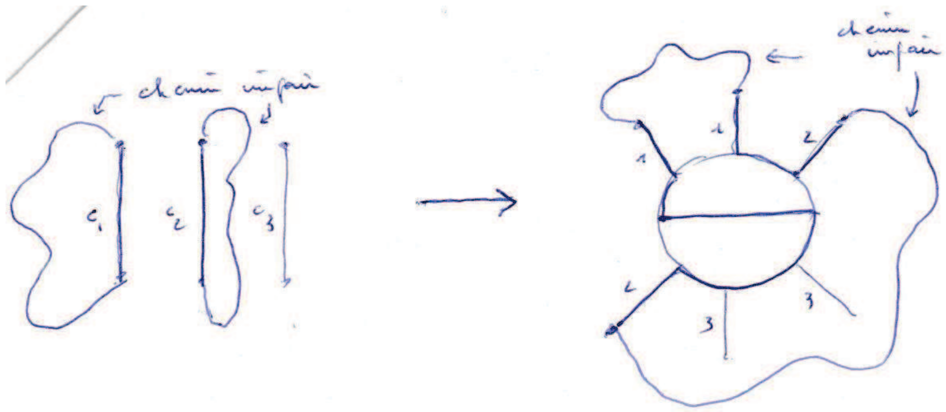


Fig 27 : (le chemin dessiné en dessous est impair)

On voit que ce rétablissement est bien HBP.

Si C_3=N le rétablissement sera :

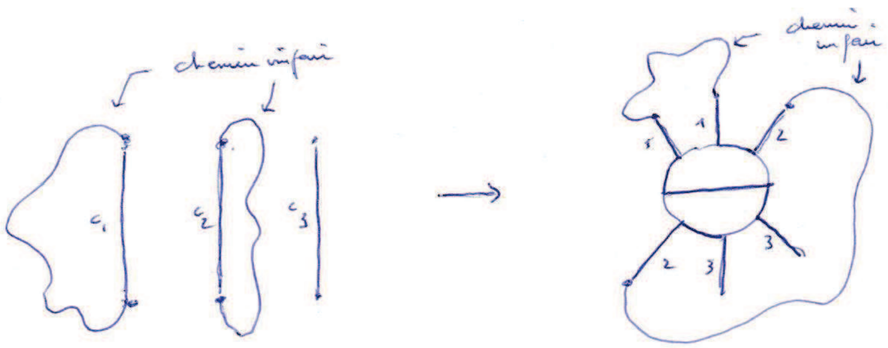


Fig 28 :

On voit que ce rétablissement est bien HBP.

Il nous reste à vérifier que nous sommes bien dans les conditions d'application du théorème 1 et donc qu'il n'existe pas de coupure de degré 3 passant par C_1 et C_2.

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème 2 : un graphe P3 planaire "minimal" (au sens de Haken et Appel) ne comporte aucune coupure de degré strictement inférieur à cinq.

Une carte pentachromatique minimale est la carte ayant n_0 pays et telle que toute carte ayant moins de n_0 pays est coloriable en quatre couleurs. On dira que son rang est n_0.

On sait déjà depuis A. Kempe (1878) qu'une carte planaire minimale ne comporte aucun pays ayant 2, 3 ou 4 voisins.

Montrons maintenant qu'elle ne comporte pas non plus de coupure élémentaire de degré 2, 3 ou 4.

a) Supposons que ce graphe possède une coupure élémentaire de degré 2.

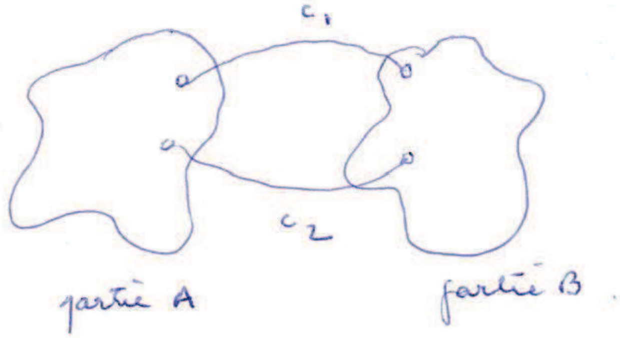


Fig 29 :

Considérons la réduction suivante :

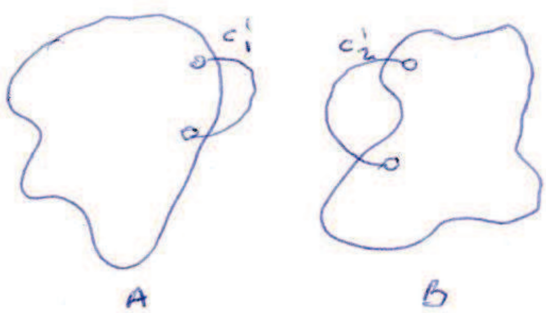


Fig 30 :

Par la suite nous dirons indifféremment “graphe P3 planaire minimal” ou “carte planaire minimale”. Ces deux objets seront donc considérés comme identiques et correspondent à la carte pentachromatique minimale de W. Haken et K. Appel.

Les deux graphes A et B sont planaires et de degré inférieur strictement à n_0. Ils sont donc HBP.

Considérons les solutions HBP qui passent par C_1 et C_2 puis raccordons les deux parties. On a alors :

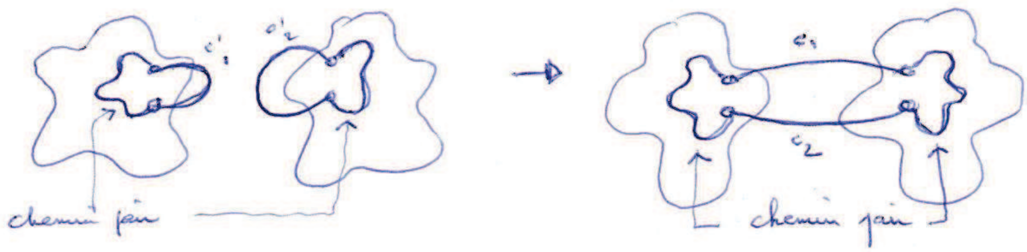


Fig 31 :

Le rétablissement est HBP, ce qui contredit l’hypothèse que le graphe original est non HBP.

b) Supposons que le graphe possède une coupure élémentaire de degré 3.

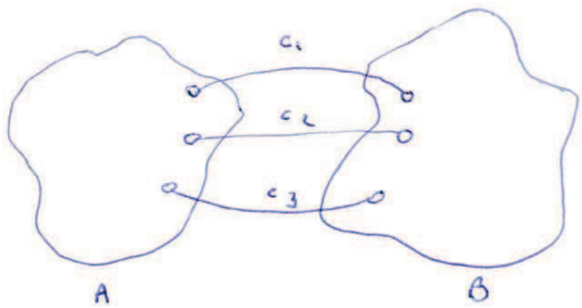


Fig 32 :

Considérons la réduction suivante :

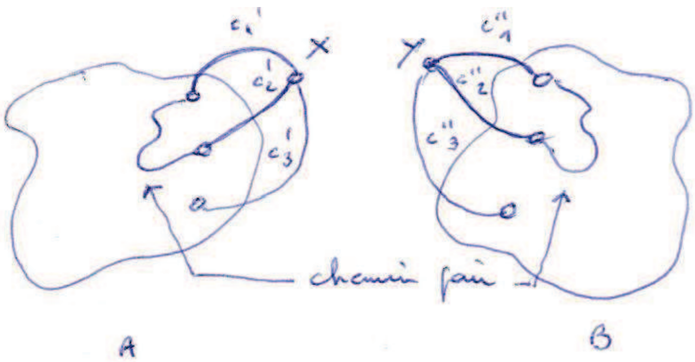


Fig 33 :

Les deux graphes A et B sont planaires et de degré inférieur strictement à n_0. Ils sont donc HBP.

Considérons les solutions HBP passant par X et C'_1 et C'_2 d'une part et par Y et C''_1 et C''_2 d'autre part.

$algo_p$ nous permet d'affirmer qu'elles existent.

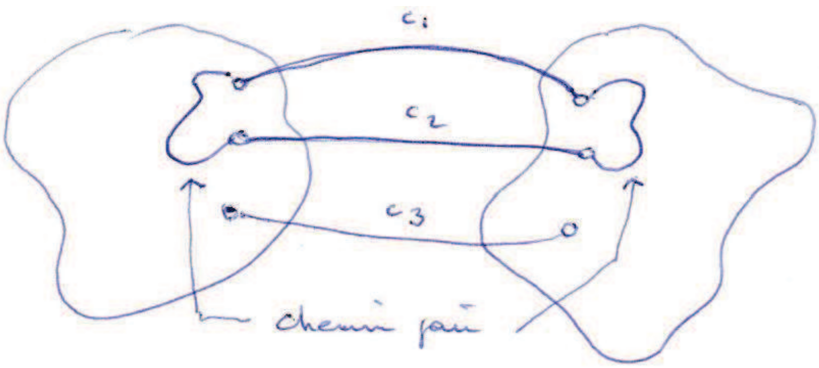


Fig 34 :

Le rétablissement est HBP ce qui contredit l'hypothèse que ce graphe est non HBP.

c) Supposons que le graphe possède une coupure élémentaire de degré 4.

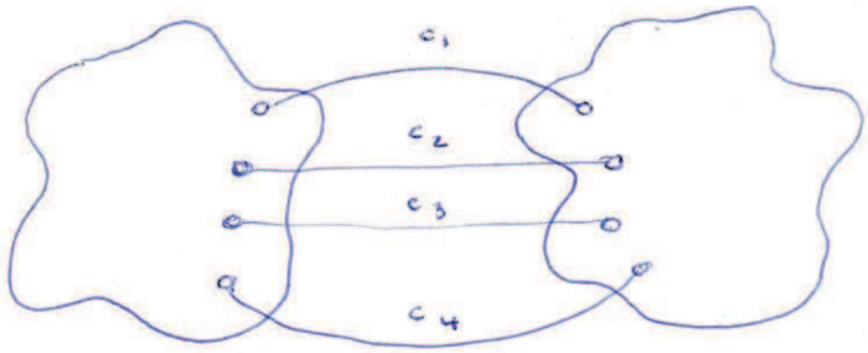


Fig 35 :

Considérons la réduction suivante :

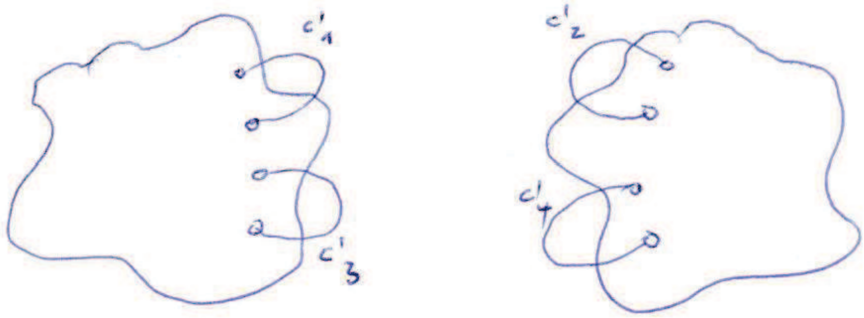


Fig 36 :

Les deux graphes A et B sont planaires et de degré strictement inférieur à n_0. Ils sont donc HBP.

Considérons les solutions HBP passant par C'_1, C'_3, C'_2 et C'_4.

$Algo_p$ nous permet d'affirmer qu'elles existent.

Si les couples C'_1 ; C'_3 d'une part et C'_2 ; C'_4 d'autre part sont “séparés p-p" ou “pairs” alors tous les rétablissements du graphe original sont HBP.

Le seul rétablissement problématique est quand C'_1 ; C'_3 ont un statut impair et que C'_2 ; C'_4 ont un statut pair.

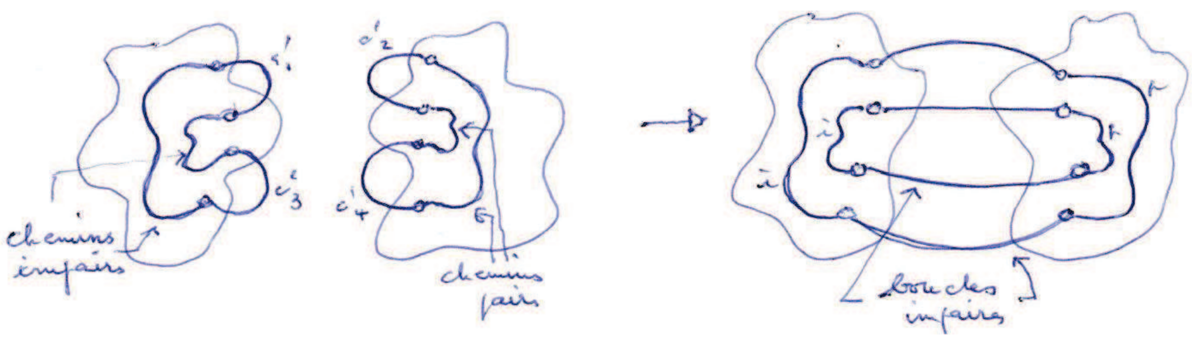


Fig 37 : Les parties A et B peuvent bien sûr être permutées

On voit que dans ce cas le rétablissement est non-HBP.

Nous invoquons alors le théorème 1 démontré précédemment sur les couples de connexions ayant un statut impair.

C'_1 et C'_2 ne sont pas consécutives puisque la coupure est élémentaire.

Si une coupure de degré 3 passait par C'_1 et C'_2 alors il existerait une coupure de degré 3 dans le graphe original.

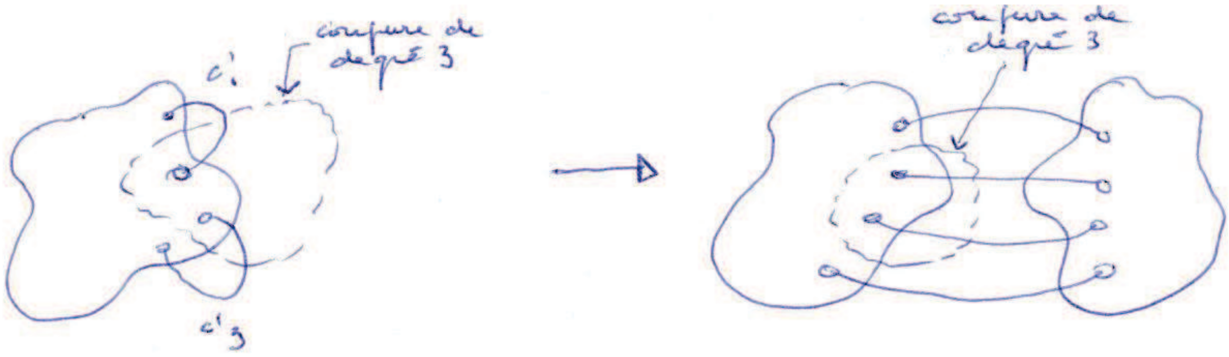


Fig 38 :

Or nous avons démontré précédemment qu'une telle coupure n'existait pas.

Donc C'_1 et C'_3 ont également (au moins) un des trois statuts suivants :

C'_1 et C'_3 "séparées p-p" ou C'_1 et C'_3 "paires" ou C'_1 et C'_3 "séparées i-i"

Avec ces trois statuts pour C'_1 et C'_3 le rétablissement du graphe original sera HBP.

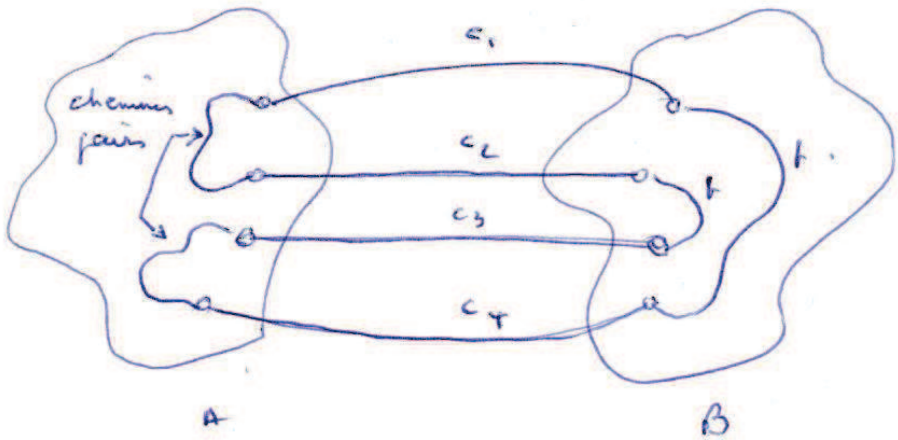


Fig 39 :

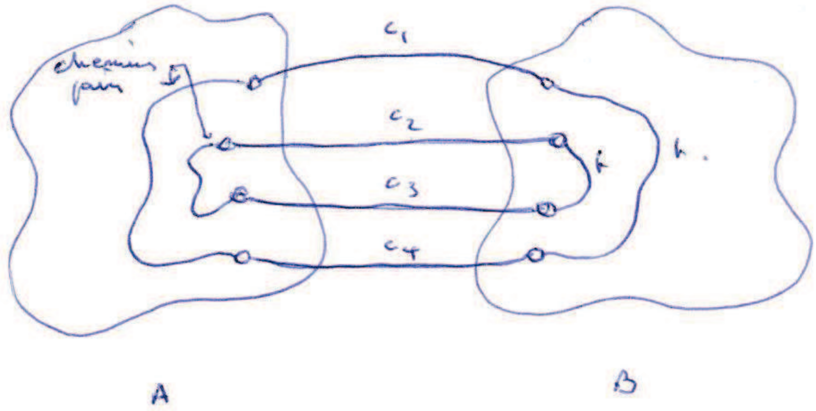


Fig 40 :

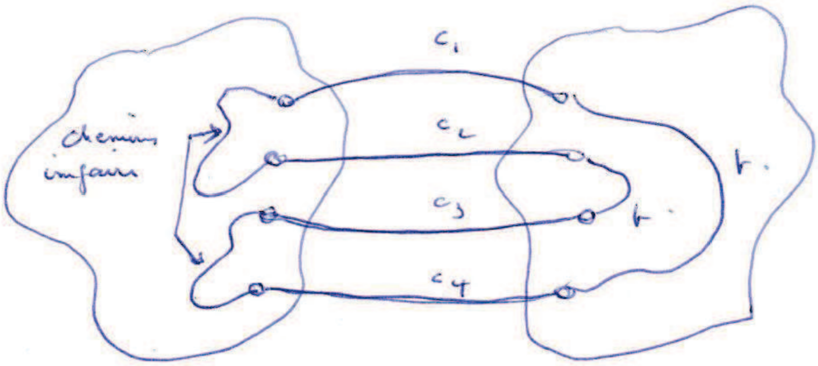


Fig 41 :

Ainsi il existe toujours un rétablissement HBP ce qui contredit l'hypothèse que le graphe original est non HBP.

Vérifions maintenant que nous sommes bien dans les conditions d'application du théorème pour les connexions C_1 et C_2 de notre réduction.

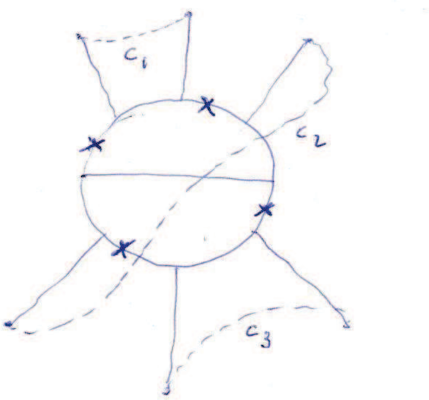


Fig 42 :

C_1 et C_2 ne sont pas consécutives car si elles l'étaient nous aurions des pays ayant trois ou quatre voisins dans le graphe d'origine, ce qui est exclus.

D'autre part nous voyons que toute coupure passant par C_1 et C_2 ne pourra, au plus, emprunter qu'une seule des connexions supprimées lors de la réduction et donc son degré sera au moins de 4.

Et nous sommes bien dans les conditions d'application du théorème.

(Voir en annexe 4 un exemple de l'application de cette réduction)

CONCLUSION :

Les “pays” d’une carte planaire peuvent être définis de façon formelle de la façon suivante :

Un “pays” est une boucle élémentaire et homogène (notée $B_{e,h}$)

Une boucle (ou cycle) est élémentaire si tous les points qui la constituent ont exactement deux voisins dans la boucle.

Une boucle est élémentaire et homogène si tous les points n’appartenant pas à la boucle sont “d’un même côté” de la boucle. Plus précisément une boucle élémentaire est homogène si quels que soient deux points n’appartenant pas à la boucle, il existe un chemin (ou chaine) joignant ces deux points et dont tous les points qui la constitue n’appartiennent pas à la boucle.

Remarque : il faut ajouter deux petites règles supplémentaires pour définir “toutes” les cartes planaires

On passe d’une carte planaire de rang n à une carte planaire de rang n+1 en joignant deux points pris sur deux connexions d’une boucle élémentaire et homogène.

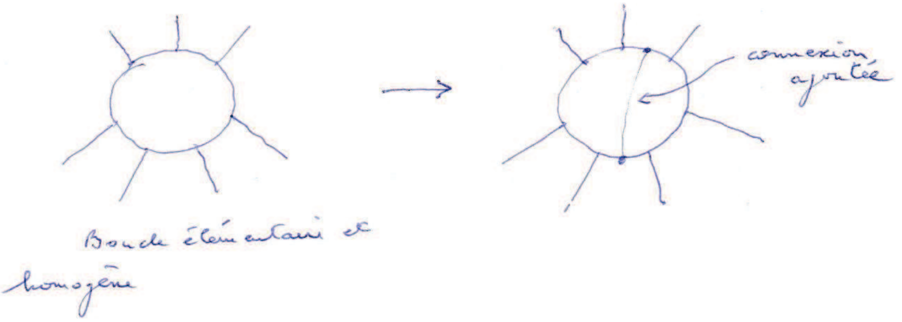


Fig 43 :

Ainsi nous pouvons appeler les cartes planaires Graphes P3 $R_{e,h}$ – construits (R pour règle, e pour élémentaire, h pour homogène).

Et le théorème des quatre couleurs peut être exprimé de la façon suivante : tout graphe P3 $R_{e,h}$ – construit est HBP

L'homogénéité est-elle une condition nécessaire ?

Autrement dit avons-nous le théorème : tout graphe P3 R_e – construit est HBP

Le même théorème mais sans l’homogénéité comme condition nécessaire.

Cela ferait du théorème des quatre couleurs un cas particulier de ce théorème. Les graphes R_e – construits ne sont pas nécessairement planaires.

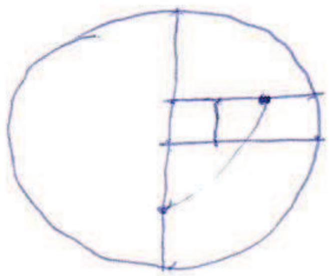


Fig 44 : graphe R_e – construit non planaire

Toutefois ces graphes sont HBP c'est à dire qu'ils admettent une solution en boucles hamiltoniennes paires.

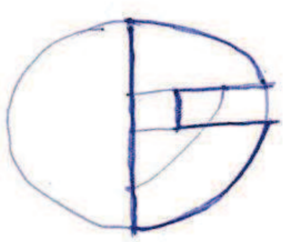


Fig 45 : solution HBP pour ce graphe R_e – construit

La démonstration est pratiquement la même.

Une chose surprenante est que la formule de Kempe, à savoir somme de i=1 à n de $(6 - k_i) = 12$ avec k_i le degré des boucles élémentaires d'un graphe P3 R_e – construit est encore vraie.

Démonstration :

Soient C_x et C_y deux connexions appartenant à une boucle élémentaire C et soit A une boucle élémentaire passant par C_x mais pas par C_y et B une boucle élémentaire passant par C_y mais pas par C_x.

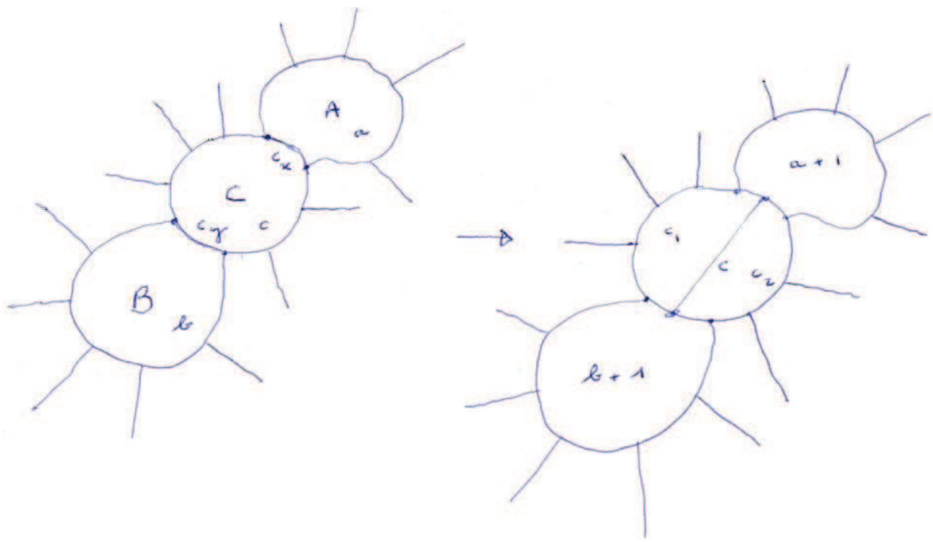


Fig 46 : les lettres minuscules représentent les degrés des boucles respectives.

Ajoutons la connexion C comme indiqué sur le schéma.

Elle est bien R_e – construite car C est une boucle élémentaire.

Soit c1 et c2 les degrés des deux boucles ainsi formées.

Soit a, b et c les degrés des boucles élémentaires A, B et C.

Nous avons pour la boucle C l'égalité suivante :

c1 - 2 + c2 - 2 = c

Soit - c1 + 2 - c2 + 2 = - c

Soit 6 – c1 + 6 – c2 – 2 = 6 – c

Soit (6 – c1) + (6 – c2) = (6 – c) + 2

La somme de Kempe pour ces quatres boucles élémentaires est

6 - (b + 1) + (6 – c1) + (6 – c2) + 6 - (a+1)

= (6 –b) -1 + (6 – c) + 2 + (6 – a) - 1

= (6 –b) + (6 – c) + (6 – a)

On voit que la somme de Kempe n'a pas changé par l'ajout d'une connexion.

Or ce calcul est fait pour tout triplet de boucles élémentaires vérifiant les mêmes hypothèses que les boucles élémentaires A, B et C.

Ainsi la formule de Kempe qui était établie pour un graphe $R_{e,h}$ – construit l'est également pour un graphe R_e – construit

L'homogénéité ne joue aucun rôle.

(Voir en annexe 3 un exemple détaillé)

La somme de Kempe pour tout graphe R_e – construit est 12. Il suffit de la calculer pour un graphe aussi simple que

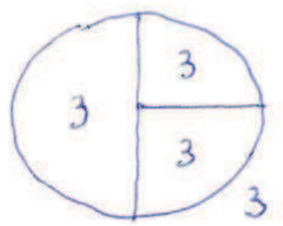


Fig 47 :

Le transfert de charge (Discharging) utilisé par W. Haken et K. Appel pour leur démonstration est entièrement basé sur la formule de Kempe et donc la configuration inévitable (deux boucles voisines élémentaires de degré 5) peut toujours être invoquée.

Deux pays voisins ayant chacun cinq voisins sera inévitable dans un graphe R_e – construit tout comme dans un $R_{e,h}$ – construit.

On pourrait considérer que les points A, B, C, D, E, F de la figure suivante ne seront pas tous nécessairement distincts mais si au moins deux d'entre eux étaient les mêmes nous aurions alors une coupure de degré inférieure à cinq.

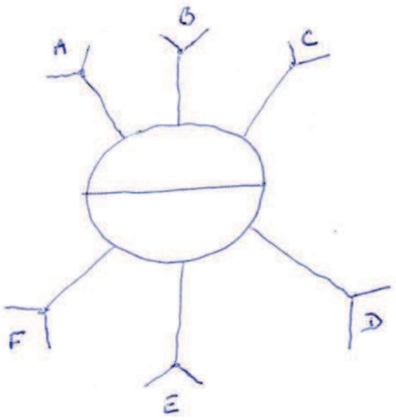


Fig 48 :

Les démonstrations des deux théorèmes précédents restent valables si l'on admet que le graphe obtenu par suppression d'une connexion reste un graphe R_e – construit, ce qui est tout aussi vrai que si l'on retire une frontière à une carte planaire, on obtient une carte planaire.

Toutes les figures nécessaires aux démonstrations des deux théorèmes précédents s'obtiennent par suppression ou ajout de connexions.

Nous avons bien démontré qu'un graphe R_e – construit est HBP ce qui entraine à fortiori que les $R_{e,h}$ – construits le sont également.

ANNEXES

Annexe 1 : Description de algo$_p$

A) Le cas des cartes planaires ($R_{e,h}$ – construites)

Soit une carte planaire et une solution HBP pour cette carte.

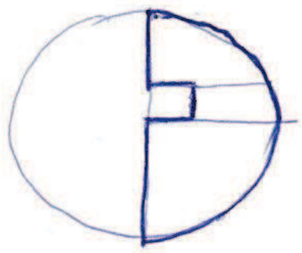


Fig A1-1 :

Appliquons algo$_p$ à cette solution HBP

La première étape consiste à choisir une connexion noire

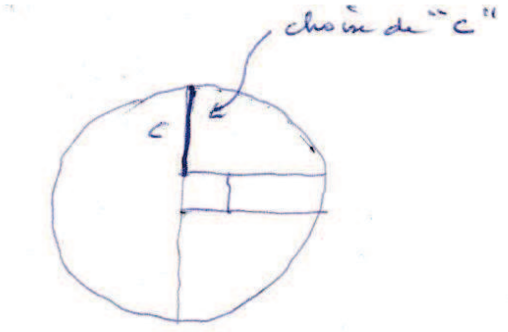


Fig A1-2 : première étape

La deuxième étape consiste à garder noires toutes les connexions qui ont un statut pair avec la connexion choisie.

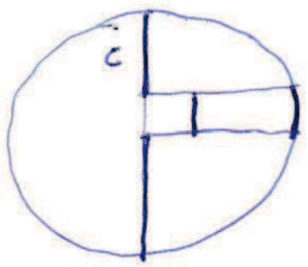


Fig A1-3 : deuxième étape

La troisième étape consiste à rendre noires toutes les connexions qui étaient blanches dans la solution HBP d'origine

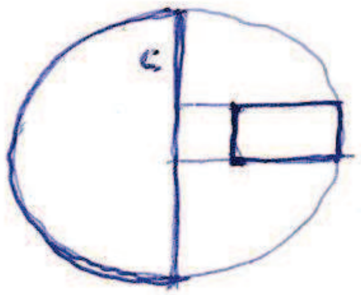


Fig A1-4 : troisième étape

Il est facile de montrer que cet algorithme converge toujours vers une solution hamiltonienne en boucles paires.

Comment appliquer l'algorithme quand il y a plusieurs boucles paires ?

La première étape consiste à choisir une des boucles et à choisir une connexion noire sur cette boucle.

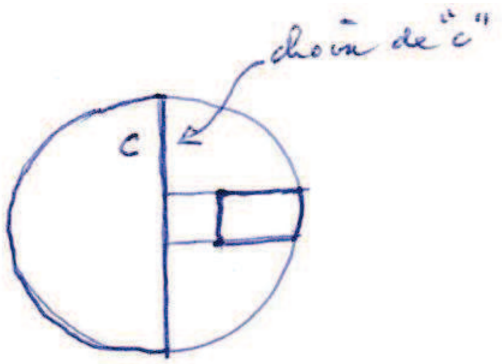


Fig A1-5 : étape 1

La deuxième étape consiste à appliquer la procédure précédemment décrite mais seulement à la boucle choisie.

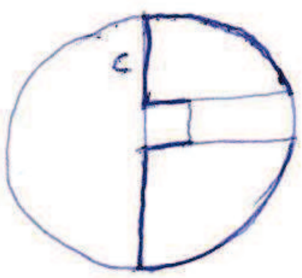


Fig A1-6 :

On voit que l'algorithme s'arrête aux abords de la deuxième boucle.

La troisième étape consiste à choisir une connexion noire sur la deuxième boucle de la solution HBP d'origine et à appliquer l'algorithme à cette deuxième boucle

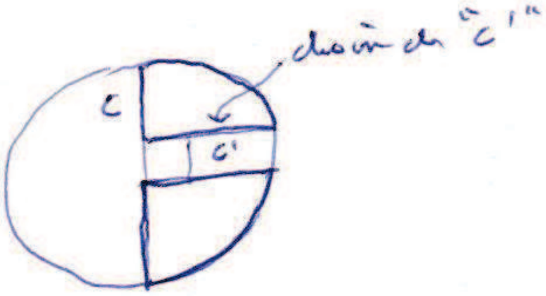


Fig A1-7 : troisième étape

On peut choisir toujours la même connexion tant que la solution hamiltonienne est en plusieurs boucles paires.

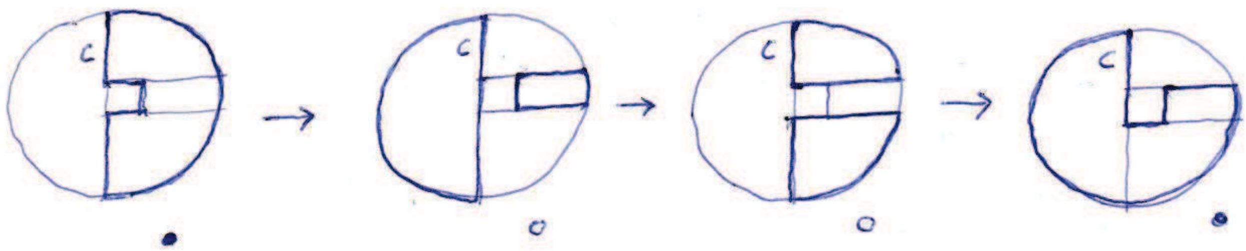


Fig A1-8 : On peut noter algo$_p$ (C)

B) Le cas des graphes P3 non-planaires n'est pas différent et l'algorithme s'applique de la même façon.

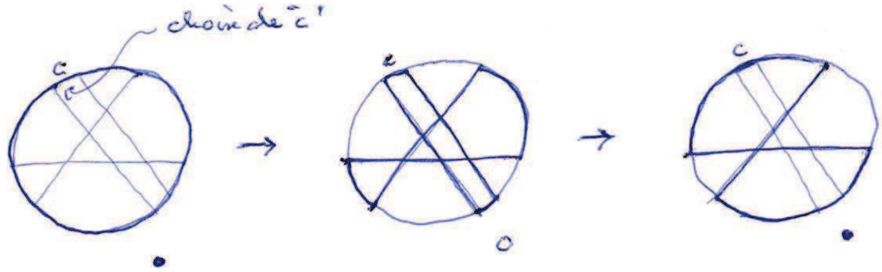


Fig A1-9 : algo$_p$ (C) appliqué à un graphe P3 HBP

Remarque : on peut définir de la même façon un algo$_i$ qui peut éventuellement converger vers des boucles impaires. Beaucoup de conjectures très intéressantes peuvent être émises à partir de ces deux algorithmes (algo$_p$ et algo$_i$) en rapport avec le problème du chemin hamiltonien original.

Annexe 2 : Un exemple d'application du théorème 1 à un graphe P3 planaire particulier

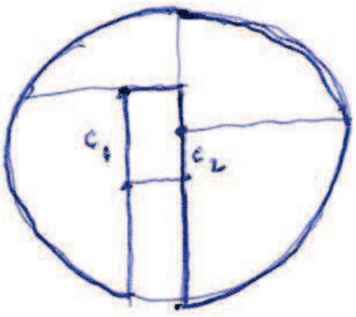


Fig A2-1 :

Dans cette carte planaire (normale) avec une solution HBP on voit que C_1 et C_2 ont un statut impair.

Appliquons la transformation décrite dans le théorème.

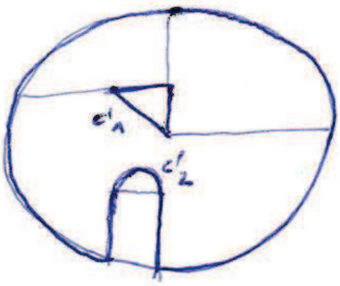


Fig A2-2 :

On voit que C'_1 et C'_2 ont un statut "séparé i-i" comme attendu.

Ce graphe transformé est toujours planaire et toujours de rang inférieur à n_0 il est donc HBP

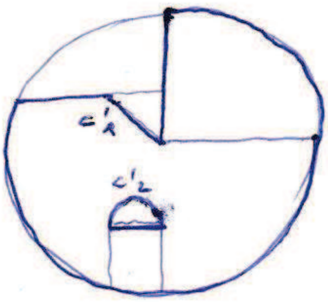


Fig A2-3 : Une solution HBP pour le graphe transformé.

On voit que C'_1 et C'_2 ont maintenant un statut "séparé p-p"

Rétablissons le graphe d'origine

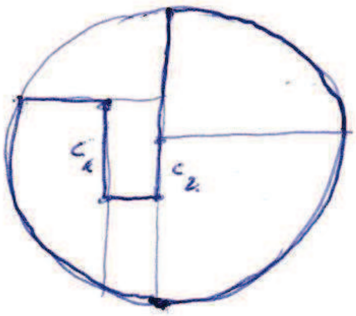


Fig A2-4 :

On voit que C_1 et C_2 ont maintenant un statut pair.

Annexe 3 : Un exemple de graphe P3 R_e – construit

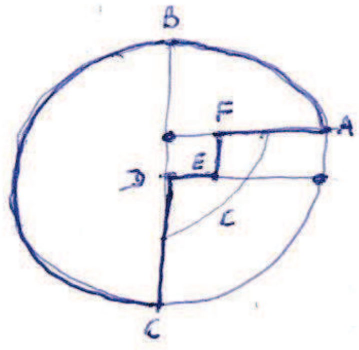
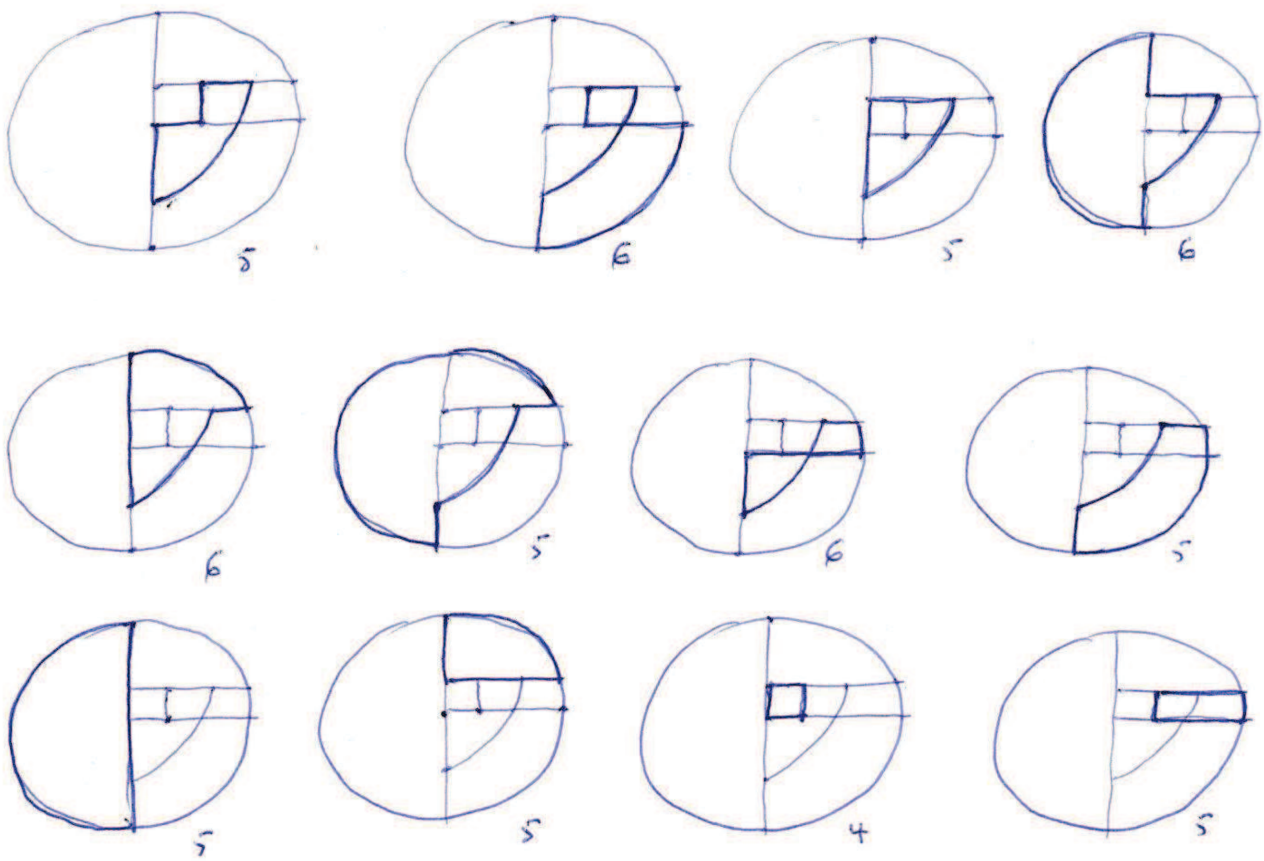


Fig A3-1 :

On voit que la connexion “c” est construite à partir de la boucle élémentaire ABCDEF en joignant deux points choisis sur les connexions FA et CD.

En énumérant toutes les boucles élémentaires de ce graphe on peut vérifier que la formule de Kempe est bien vérifiée.



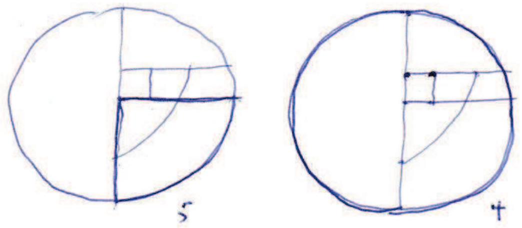


Fig A3-2 : ensemble des boucles élémentaires pour ce graphe.

Les boucles élémentaires de degré 6 ont une valeur de “zéro” dans la somme de Kempe. Ceux de degré cinq ont une valeur de 1 et ceux de degré 4 une valeur de 2.

On voit dans le cas ci-dessus que la somme de Kempe fait bien 12.

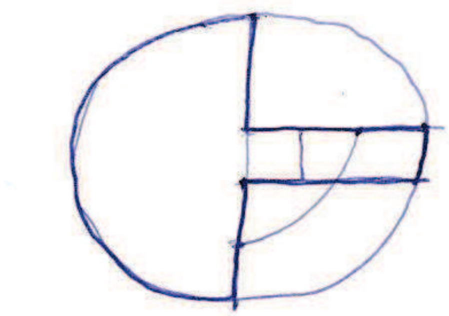


Fig A3-3 : Une solution HPB pour ce graphe.

Annexe 4 : exemple d'application de la réduction

Soit le graphe planaire ($R_{e,h}$ – construit) suivant que nous supposons pentachromatique minimal (non-HBP de rang n_0)

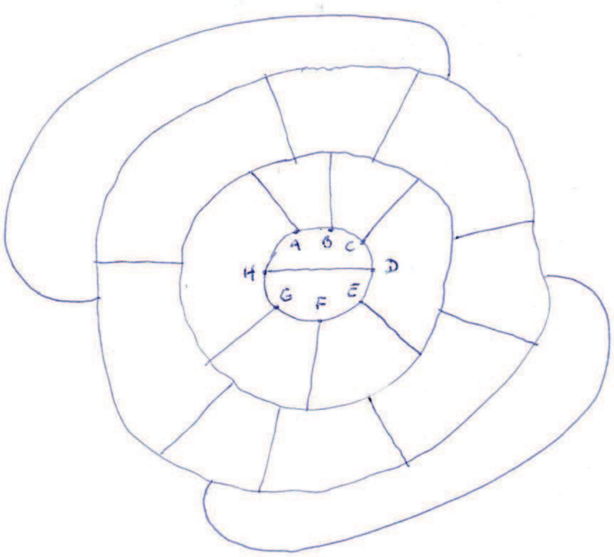


Fig A4-1 :

Appliquons notre réduction à la boucle ABCDEFGH.

Nous obtenons la figure suivante.

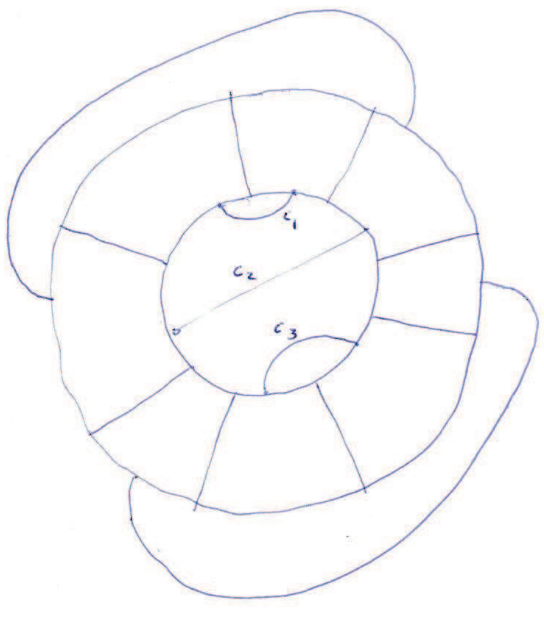


Fig A4-2 :

Nous trouvons nos trois connexions C_1, C_2, C_3 et un graphe planaire de rang $n_0 - 4$ qui est donc HBP

Soit la solution HBP suivante.

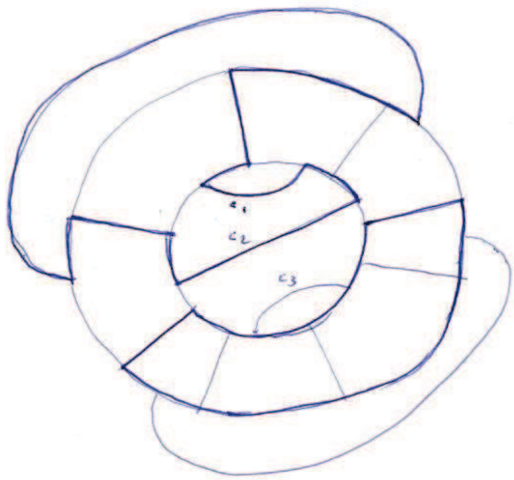


Fig A4-3 :

Nous sommes dans le cas défavorable où C_1 = N, C_2 = N et C_3 = B et C_1 et C_2 ont un statut “impair”.

Si nous rétablissions le graphe d’origine pour cette solution nous obtiendrions :

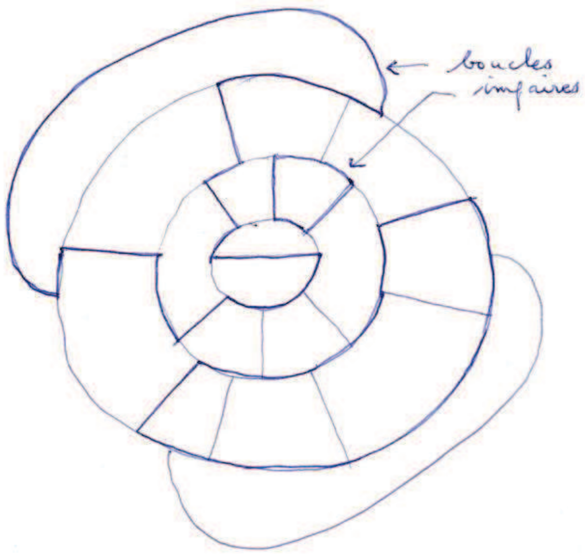


Fig A4-4 :

Et nous constatons qu’effectivement ce rétablissement n’est pas HBP.

En vertu du théorème 1 nous invoquons un autre statut pour C_1 et C_2 dans la boucle réduite.

Par exemple la solution HBP suivante.

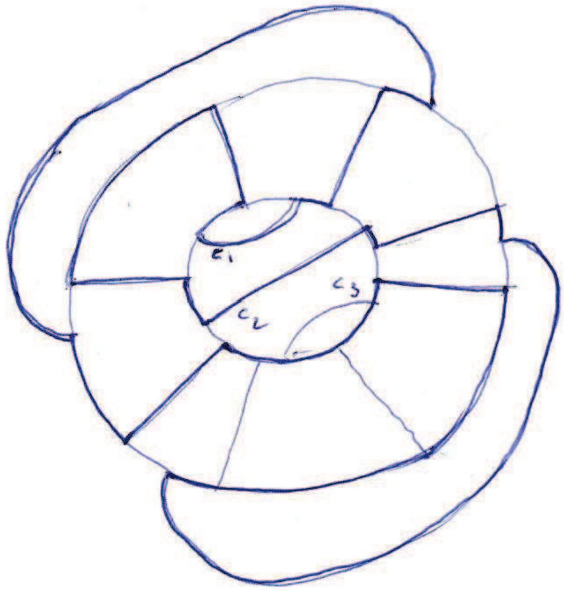


Fig A4-5 :

Nous voyons que dans cette solution le couple C_1, C_2 a maintenant un statut “pair”.

Nous pouvons rétablir le graphe original :

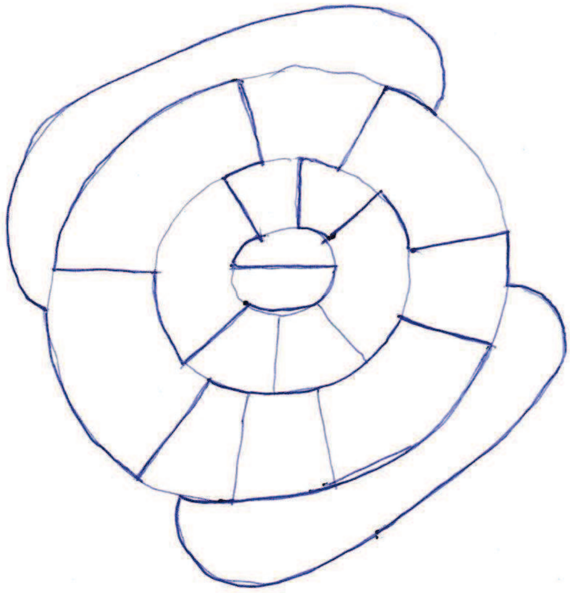


Fig A4-6 :

Ce rétablissement est bien HBP ce qui contredit l’hypothèse initiale.