Золото-комплексное сечение.

С.Я. Котковский

Для широко известной пары чисел золотого сечения и обратной к нему величины $\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}$ обнаружен их комплекснозначный аналог – пара чисел $\frac{\sqrt{5}\pm \mathrm{i}}{2}$. На основе изучения комплекснозначных бисимметричных матриц второго порядка показана неразрывная связь вещественного и комплексного золотых сечений.

Биматрицы. Расщеплённое представление.

Бисимметричная матрица это матрица симметричная относительно своих обеих главных диагоналей. Пусть M комплекснозначная бисимметричная матрица второго порядка. Назовём такую матрицу *биматрицей*:

$$M=\begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{b} & \mathrm{a} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{C} \tag{1}$$

Поскольку каждая биматрица определяется двумя комплексными параметрами, введём для них следующее обозначение, использующее квадратные скобки:

$$M=[\mathrm{a}, \mathrm{b}], \quad \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{C} \tag{2}$$

Сложение и умножение биматриц определяются следующими правилами:

$$\begin{gathered} [\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1]+[\mathrm{a}_2, \mathrm{b}_2]=[\mathrm{a}_1+\mathrm{a}_2, \mathrm{b}_1+\mathrm{b}_2] \\ [\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1][\mathrm{a}_2, \mathrm{b}_2]=[\mathrm{a}_1 \mathrm{a}_2+\mathrm{b}_1 \mathrm{b}_2, \mathrm{a}_1 \mathrm{b}_2+\mathrm{a}_2 \mathrm{b}_1] \end{gathered} \tag{3}$$

Очевидно, что сумма и произведение двух биматриц есть снова биматрица.

Введём для биматриц преобразование отражения относительно вертикальной либо горизонтальной оси и будем называть две биматрицы M_1 и M_2, связанные этим преобразованием, *зеркальными:*

$$\begin{gathered} M_1 \sim M_2 \;\Leftrightarrow\; M_1=\widetilde{M}_2 \;\Leftrightarrow\; M_2=\widetilde{M}_1 \\ [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \sim [\mathrm{b}, \mathrm{a}] \end{gathered} \tag{4}$$

Расщепленное представление биматрицы M (1) имеет вид :

$$M = \begin{pmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a+b}{2} \\ y = \dfrac{a-b}{2} \end{cases} \qquad x, y \in \mathbb{C} \tag{5}$$

Представим (5) в терминах квадратных скобок (2):

$$M \;=\; [x+y, x-y] \;=\; x[1,1] + y[1,-1] \;=\; x\,I + y\,J, \quad x, y \in \mathbb{C} \tag{6}$$

Формула (6) задаёт разложение биматрицы по базису двух взаимно ортогональных биматриц *I* и *J*:

$$\begin{cases} I = [1,1] \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ J = [1,-1] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{7}$$

Базисные биматрицы *I* и *J* обладают следующими свойствами «ортонормированности»:

$$\begin{cases} I^2 = I \\ J^2 = J \\ I\,J = J\,I = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Из (6) и (8) следует замечательное свойство биматриц: при возведении в любую степень, включая дробные, они сохраняют свой расщеплённый вид. Так, натуральная степень n биматрицы имеет вид:

$$M = x\,I + y\,J \;\Rightarrow\; \forall\, n \in \mathbb{N} : M^n = x^n I + y^n J \tag{9}$$

Формула (9) легко проверяется для $n = 2$ и затем доказывается по индукции. Аналогичная формула справедлива и для корней k-й степени:

$$\forall\, k \in \mathbb{N} : M^{1/k} = x^{1/k} I + y^{1/k} J \tag{10}$$

Здесь $x^{1/k}$ это любой из корней k-й степени комплексного числа x. Эта формула легко проверяется путём возведения выражения справа в степень k согласно предыдущей формуле (9).

Наконец, можно показать, что для произвольной рациональной степени $q = n/k$ также выполняется тождество:

$$\forall\, q \in \mathbb{Q} : M^q = x^q I + y^q J \tag{11}$$

Для этого достаточно последовательно применить к M операции возведения в степень $1/k$ и в степень n : $M^{n/k}=(M^{1/k})^n=(x^{1/k}I+y^{1/k}J)^n=x^{n/k}I+y^{n/k}J$. Для наглядности перепишем (11) в стандартных матричных обозначениях:

$$\boxed{M^q=\begin{pmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{pmatrix}^q=\begin{pmatrix} x^q+y^q & x^q-y^q \\ x^q-y^q & x^q+y^q \end{pmatrix} \qquad (12)}$$

Зеркальные биматрицы получаются друг из друга простой заменой $y \leftrightarrow -y$:

$$\begin{pmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x-y & x+y \\ x+y & x-y \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Имеется тесная связь между квадратными корнями этих матриц, которую мы рассмотрим ниже.

Выпишем отдельно выражение (12) для квадратного корня биматрицы:

$$M^{1/2}=\begin{pmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{pmatrix}^{1/2}= \begin{pmatrix} \pm\sqrt{x}\pm\sqrt{y} & \pm\sqrt{x}\mp\sqrt{y} \\ \pm\sqrt{x}\mp\sqrt{y} & \pm\sqrt{x}\pm\sqrt{y} \end{pmatrix} \qquad (14)$$

В наших обозначениях $\sqrt{x}$ это один конкретный квадратный корень комплексного числа x, так что $x^{1/2}=\pm\sqrt{x}$.

Каждая двухкомпонентная биматрица (у которой в представлении (5) $x, y\neq 0$) имеет 4 квадратных корня, которые разбиваются на две пары зеркальных биматриц. Выпишем одну из таких зеркальных пар корней (каждый из этих корней взят с общим знаком плюс):

$$P_1=\begin{pmatrix} \sqrt{x}-\sqrt{y} & \sqrt{x}+\sqrt{y} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y} & \sqrt{x}-\sqrt{y} \end{pmatrix} \qquad P_2=\begin{pmatrix} \sqrt{x}+\sqrt{y} & \sqrt{x}-\sqrt{y} \\ \sqrt{x}-\sqrt{y} & \sqrt{x}+\sqrt{y} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} P_1^2=P_2^2=M \\ P_1\sim P_2 \end{matrix} \qquad (15)$$

Примечательно, что произведение этих биматриц даёт матрицу зеркальную *M*:

$$P_1 P_2 = [\sqrt{x}-\sqrt{y},\sqrt{x}+\sqrt{y}][\sqrt{x}+\sqrt{y},\sqrt{x}-\sqrt{y}] = [x-y,x+y] = \begin{pmatrix} x-y & x+y \\ x+y & x-y \end{pmatrix}$$
$$P_1 P_2=\widetilde{M} \qquad (16)$$

Произведение типа (16) мы назовём *перекрёстным произведением* квадратных корней биматрицы. Как мы видим, любые две двухкомпонентные зеркальные биматрицы тесно связаны друг с другом посредством перекрестных произведений своих корней.

В следующем разделе мы применим формулы (12) и (14) к матрицам, связанных с золотым сечением.

Золото-комплексное сечение.

Исходные биматрицы A и B определяются согласно формулам:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5+1}{2} & \frac{5-1}{2}\\ \frac{5-1}{2} & \frac{5+1}{2}\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5-1}{2} & \frac{5+1}{2}\\ \frac{5+1}{2} & \frac{5-1}{2}\end{pmatrix} \tag{17}$$

Эти биматрицы зеркальны: $A \sim B$.

С.В.Петуховым было обнаружено, что квадратный корень от матрицы A , связанной с представлением водородных связей в гене, является матрицей составленной из величины золотого сечения и обратной ему величины [1] (матрицы $F_{1,2}$ в формуле (18) ниже).

Четыре квадратных корня от биматриц A и B получаются соответствующим применением формулы (14):

$$\begin{cases} F_1=(\sqrt{A})_1=\pm\begin{pmatrix}\mathrm{f}_1 & \mathrm{f}_2\\ \mathrm{f}_2 & \mathrm{f}_1\end{pmatrix}\\ F_2=(\sqrt{A})_2=\pm\begin{pmatrix}\mathrm{f}_2 & \mathrm{f}_1\\ \mathrm{f}_1 & \mathrm{f}_2\end{pmatrix}\end{cases} \qquad \begin{cases} E_1=(\sqrt{B})_1=\pm\begin{pmatrix}\mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_2\\ \mathrm{e}_2 & \mathrm{e}_1\end{pmatrix}\\ E_2=(\sqrt{B})_2=\pm\begin{pmatrix}\mathrm{e}_2 & \mathrm{e}_1\\ \mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_2\end{pmatrix}\end{cases} \tag{18}$$

В (18) $\mathrm{f}_{1,2}$ - обратное и прямое золотые сечения (вещественные числа), а $\mathrm{e}_{1,2}$ комплекснозначный аналог этой пары:

$$\boxed{\begin{cases}\mathrm{f}_1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\\ \mathrm{f}_2=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\end{cases} \quad \mathrm{f}_2=\mathrm{f}_1^{-1} \qquad \begin{cases}\mathrm{e}_1=\dfrac{\sqrt{5}-\mathrm{i}}{2}\\ \mathrm{e}_2=\dfrac{\sqrt{5}+\mathrm{i}}{2}\end{cases} \quad \mathrm{e}_2=\mathrm{e}_1^{*}} \tag{19}$$

Мы назовём комплексные числа $\mathrm{e}_{1,2}$ *золото-комплексным сечением**. Сами четыре матрицы $F_{1,2}$ и $E_{1,2}$ мы назовём *золотыми матрицами* – вещественными и комплексными соответственно. Между числами внутри каждой из пар $\mathrm{f}_{1,2}$ и $\mathrm{e}_{1,2}$ имеют место соотношения:

* Термины «золото-вещественное» и «золото-комплексное» сечения предложены С.В. Петуховым.

$$\begin{cases} f_1 f_2 = 1 \\ f_1 + f_2 = \sqrt{5} \\ f_2 - f_1 = 1 \\ f_1^2 + f_2^2 = 3 \\ f_2^2 - f_1^2 = \sqrt{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} e_1 e_2 = 3/2 \\ e_1 + e_2 = \sqrt{5} \\ e_2 - e_1 = i \\ e_1^2 + e_2^2 = 2 \\ e_2^2 - e_1^2 = i\sqrt{5} \end{cases} \tag{20}$$

Существует определённое подобие между самими парами $f_{1,2}$ и $e_{1,2}$. Отметим, что при переходе от величин $f_{1,2}$ к величинам $e_{1,2}$ происходят замена единицы на мнимую единицу i и взаимная замена 2 и 3. Выпишем отдельно два из приведённых выше тождеств, указывающих на связь вещественного и комплексного сечений с числами 3 и 2 соответственно:

$$\begin{cases} f_1^2 + f_2^2 = 3 \\ e_1^2 + e_2^2 = 2 \end{cases} \tag{21}$$

Каждая из пар корней (18) , выбранная с одинаковым знаком плюс или минус, зеркально симметрична: $F_1 \sim F_2$, $E_1 \sim E_2$. Непосредственно убеждаемся в выполнении общего правила (16) для конкретного случая перекрестных произведений корней биматриц *A* и *B*:

$$\boxed{F_1 F_2 = B \qquad E_1 E_2 = A} \tag{22}$$

Перекрестная связь биматриц *A* и *B*, отображаемая тождествами (22), свидетельствует и о коренной связи вещественного и комплексного золотых сечений – $f_{1,2}$ и $e_{1,2}$ соответственно.

Соотношения между вещественным и комплексным золотыми сечениями.

Между вещественным и комплексным золотыми сечениями имеют место следующие кососимметричные соотношения:

$$\boxed{\begin{cases} e_1 = \dfrac{f_1(1+i) + f_2(1-i)}{2} \\ e_2 = \dfrac{f_1(1-i) + f_2(1+i)}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1 = \dfrac{e_1(1-i) + e_2(1+i)}{2} \\ f_2 = \dfrac{e_1(1+i) + e_2(1-i)}{2} \end{cases}} \tag{23}$$

Эти же соотношения можно записать в матричном виде как:

$$\begin{cases} E_{1,2} = F_{1,2} S \\ F_{1,2} = E_{1,2} \tilde{S} \end{cases} , \qquad (24)$$

где $F_{1,2}$ золото-вещественные, а $E_{1,2}$ золото-комплексные матрицы, определённые выше в (18) (взятые с одним и тем же знаком плюс или минус), S – матрица перехода, определяемая как: $S = [\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}] = [\sqrt{\frac{i}{2}}, \sqrt{-\frac{i}{2}}]$. В формуле (24) индексы 1 и 2 слева и справа должны соответствовать друг другу.

Квадратные корни золотых матриц.

Корни четвертой степени от биматриц A и B (квадратные корни от F и E) имеют следующий вид:

1) Первая группа корней:

$$\begin{cases} P_1 = (\sqrt{F_1})_1 = \pm \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_1 \end{pmatrix} \\ P_2 = (\sqrt{F_1})_2 = \pm \begin{pmatrix} p_2 & p_1 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \begin{cases} H_1 = (\sqrt{E_1})_1 = \pm \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2 & h_1 \end{pmatrix} \\ H_2 = (\sqrt{E_1})_2 = \pm \begin{pmatrix} h_2 & h_1 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad (25)$$

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\sqrt[4]{5} - i}{2} \\ p_2 = \frac{\sqrt[4]{5} + i}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} h_1 = \frac{\sqrt[4]{5} - \sqrt{-i}}{2} \\ h_2 = \frac{\sqrt[4]{5} + \sqrt{-i}}{2} \end{cases} \qquad (26)$$

В формулах выше $\sqrt{-i} = \frac{i-1}{2}$.

2) Вторая группа корней:

$$\begin{cases} R_1 = (\sqrt{F_2})_1 = \pm \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_2 & r_1 \end{pmatrix} \\ R_2 = (\sqrt{F_2})_2 = \pm \begin{pmatrix} r_2 & r_1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \begin{cases} G_1 = (\sqrt{E_2})_1 = \pm \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_2 & g_1 \end{pmatrix} \\ G_2 = (\sqrt{E_2})_2 = \pm \begin{pmatrix} g_2 & g_1 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad (27)$$

$$\begin{cases} r_1=\dfrac{\sqrt[4]{5}-1}{2} \\ r_2=\dfrac{\sqrt[4]{5}+1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} g_1=\dfrac{\sqrt[4]{5}-\sqrt{i}}{2} \\ g_2=\dfrac{\sqrt[4]{5}+\sqrt{i}}{2} \end{cases} \tag{28}$$

3) Третья и четвертая группы корней совпадают с корнями первых двух групп с точностью до множителя i – они соответствуют выбору знака минуса в выражениях для $F_{1,2}$ и $E_{1,2}$ в (18).

Заметим, что внутри каждой из пар корней, выбранных с одним и тем же знаком имеет место зеркальная симметрия: $P_1 \sim P_2, R_1 \sim R_2, H_1 \sim H_2, G_1 \sim G_2$. Каждый из квадратных корней золотых матриц (25) и (27) обладает подобием по отношению к самим этим матрицам, являя собою частный пример реализации полученной нами выше формулы вычисления произвольных степеней биматрицы в её расщепленном виде (12).

Рекуррентная последовательность золото-комплексного сечения.

Как известно, рекуррентной последовательностью, производимой золотым сечением является ряд чисел Фибоначчи. Определим аналогичную последовательность для золото-комплексных чисел $e_{1,2}$. Характеристическим уравнением, корнями которого являются числа $(-e_1)$ и e_2 , служит квадратичное уравнение:

$$z^2-iz-\frac{3}{2}=0 \tag{29}$$

Коэффициенты этого уравнения $b=i, c=3/2$ позволяют получить рекуррентное соотношение для искомого ряда чисел $\{u_n\}$ согласно формуле $u_n=cu_{n-2}+bu_{n-1}$ [3]:

$$\boxed{u_n=\frac{3}{2}u_{n-2}+iu_{n-1}} \tag{30}$$

Рекуррентное соотношение (30) можно переписать в виде:

$$u_n=\frac{2u_{n+1}-3u_{n-1}}{i} \tag{31}$$

Последняя формула выражает тип косо-симметричного операционализма, определяемого парой чисел 2 и 3. При выборе двух начальных чисел ряда $\{u_n\}$ в виде $u_1=i, u_2=2$, общая формула члена этого ряда запишется как:

$$u_n = (-e_1)^n + e_2^n \qquad (32)$$

Бикватернионное представление биматриц.

Зафиксируем некоторый единичный комплекснозначный трёхмерный вектор **n**: $\mathbf{n} \in \mathbb{C}, \mathbf{n} = \mathrm{const}, \mathbf{n}^2 = 1$. В изоморфизме, связанном с этим вектором, биматрице *M* ставится во взаимно-однозначное соответствие бикватернион* *B* согласно правилу:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad B = (a, b\,\mathbf{n}) \qquad (33)$$

Ниже приведены выражения биматриц *A* и *B* и их квадратных корней (золотых биматриц $F_{1,2}$ и $E_{1,2}$) в бикватернионном виде:

$$A = (3, 2\,\mathbf{n}) \qquad\qquad B = (2, 3\,\mathbf{n}) \qquad (34)$$

$$\begin{cases} F_1 = (\sqrt{A})_1 = \pm(f_1, f_2\,\mathbf{n}) \\ F_2 = (\sqrt{A})_2 = \pm(f_2, f_1\,\mathbf{n}) \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} E_1 = (\sqrt{B})_1 = \pm(e_1, e_2\,\mathbf{n}) \\ E_2 = (\sqrt{B})_2 = \pm(e_2, e_1\,\mathbf{n}) \end{cases}$$

Очевидно, что бикватернионное представление биматриц идентично представлению квадратных скобок (2). Однако при этом бикватернионное представление имеет потенциал дальнейшего расширения путём рассмотрения изоморфизмов, определяемых различными единичными векторами **n**.

Правило соответствия (33) и полученные нами выше формулы для степеней биматрицы (12) позволяют легко вычислить произвольную рациональную степень бикватерниона $B = (a, \mathbf{u})$ при условии, что $\mathbf{u}^2 \neq 0$. Действительно, подобный бикватернион можно представить в виде $B = (a, b\,\mathbf{n})$, где единичный комплексный вектор **n** вычисляется согласно: $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\mathbf{u}^2}}$, а комплексное число b согласно: $b = \sqrt{\mathbf{u}^2}$. Далее, по a и b вычисляются x и y, так что $B = ((x+y), (x-y)\,\mathbf{n})$, а по (12) и правилу соответствия (33) находится искомая степень бикватерниона:

$$B^q = ((x+y), (x-y)\,\mathbf{n})^q = ((x^q + y^q), (x^q - y^q)\,\mathbf{n}) \qquad (35)$$

* Мы используем комплексное скалярно-векторное представление бикватернионов, при котором каждый бикватернион представляет собой связку комплексного числа и комплексного трёхмерного вектора [2].

Заключение

В работе, на основании полученной формулы степени бисимметричной матрицы второго порядка в «расщеплённом» представлении показано, что пара вещественных чисел золотого сечения $f_{1,2}=\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}$ связана с парой комплексных чисел $e_{1,2}=\frac{\sqrt{5}\pm i}{2}$. Первые и последние мы назвали золото-вещественным и золото-комплексным сечениями соответственно. Каждая из этих пар чисел составляет бисимметричные матрицы второго порядка $F_{1,2}$ и $E_{1,2}$ – «золотые матрицы». Оказывается, что эти матрицы являются квадратными корнями зеркальных по отношению друг к другу исходных матриц $A=[3,2]$ и $B=[2,3]$ соотвественно (18). При этом перекрестное произведение золотых матриц одного типа (вещественного или комплексного) даёт исходную матрицу противоположного типа (22). Этими обстоятельствами в первую очередь и определяется косо-симметричная связь двух существующих типов золотого сечения. Помимо связи через золотые матрицы, имеют место и прямые соотношения между вещественным и комплексным золотыми сечениями, также имеющие косо-симметричный вид (23).

Автор выражает глубокую благодарность Сергею Валентиновичу Петухову за предоставленные сведения об открытой им матрице водородных связей и её золото-вещественных корнях, при изучения которых автором и было обнаружено золото-комплексное сечение, и за содержательное обсуждение многих других вопросов математической биологии и науки в целом.

Ссылки

[1] Sergey Petoukhov. «Hyperbolic Numbers in Modeling Genetic Phenomena». 2020. https://www.preprints.org/manuscript/201908.0284/v4. P.22-23,31.
[2] С.Я. Котковский. «Бивекторная алгебра». 2021. https://vixra.org/abs/2108.0015. С.1-2.
[3] А. И. Маркушевич. «Возвратные последовательности». — Гос. Издательство Технико-Теоретической Литературы, 1950. Т. 1.

19 марта 2023 г.
s_kotkovsky@mail.ru