Introducción a la Super-Hiper-Álgebra y la Super-Hiper-Álgebra Neutrosófica
Introduction to Super-Hyper-Algebra and Neutrosophic Super-Hyper-Algebra

Florentin Smarandache[1]

[1] Universidad de Nuevo México, Departamento de Matemática, Física y Ciencias Naturales, 705 Gurley Ave., Gallup, NM 87301, USA.
Email: smarand@unm.edu ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5560-5926

Resumen. En este artículo, se revisan los conceptos de Conjunto de enésima Potencia de un Conjunto, Súper-Híper-Operación, Súper-Híper-Axioma, Súper-Híper-Álgebra, y sus correspondientes Súper-Híper-Operación Neutrosófica, Súper-Híper-Axioma Neutrosófico y Súper-Híper-Álgebra Neutrosófica. En general, en cualquier campo del conocimiento, realmente lo que se encuentran son Súper-Híper-Estructuras (o más específicamente Súper-Híper-Estructuras (m, n)).

Palabras clave: Súper-Híper-Operación, Súper-Híper-Álgebra, Súper-Híper-Álgebra Neutrosófica, Súper-Híper-Estructuras

Abstract. In this article, the concepts of Nth Power Set of a Set, Super-Hyper-Oper-Operation, Super-Hyper-Axiom, Super-Hyper-Algebra, and their corresponding Neutrosophic Super-Hyper-Oper-Operation, Neutrosophic Super-Hyper-Axiom and Neutrosophic Super-Hyper-Algebra are reviewed. In general, in any field of knowledge, really what are found are Super-Hyper-Structures (or more specifically Super-Hyper-Structures (m, n)).

Keywords: Super-Hyper-Oper-Operation, Super-Hyper-Algebra, Neutrosophic Super-Hyper-Algebra, Super-Hyper-Structures.

1 Introducción

Se puede recordar a la Súper-Híper-Algebra y Súper-Híper-Algebra Neutrosófica introducidas y desarrolladas por Smarandache [16, 18, 19] entre 2016 y 2022.

1.1 Definición de Híper-Operaciones Clásicas:

Sea U un universo de discurso y H un conjunto no vacío, H ⊂ U. Una **Híper-Operación Binaria Clásica** o_2^* se define de la siguiente manera:

$$o_2^*: H^2 \rightarrow P_*(H), \qquad (1)$$

Donde H es un conjunto continuo o discreto, y $P_*(H)$ es el conjunto potencia de H excluyendo el conjunto vacío $\emptyset$, o expresado de otra manera: $P_*(H) = \text{P}(\text{H}) \setminus \{\emptyset\}$.

Una **Híper-Operación m-aria Clásica** o_m^* , se define como:

$$o_m^*: H^m \rightarrow P_*(H), \qquad (2)$$

siendo m un entero, tal que $m \geq 1$. Para m = 1 se obtiene una **Híper-Operación Unaria**

Las **Híper-Estructuras clásicas** son estructuras dotadas de Híper-Operaciones clásicas.

Las Híper-Operaciones clásicas y las Híper-Estructuras clásicas fueron introducidas por F. Marty [12] en 1934.

1.2 Definición de Conjunto de enésima Potencia de un Conjunto:

El conjunto de enésima potencia de un conjunto se introdujo en [16, 18, 19] de la siguiente manera:

$P^n(H)$, como conjunto de enésima potencia del conjunto H, siendo n un entero tal que $n \geq 1$, se define de manera recursiva como:

$P^2(H) = P\big(P(H)\big),\ P^3(H) = P\big(P^2(H)\big) = P\Big(P\big(P(H)\big)\Big), \dots,$
$P^n(H) = P\Big(P^{(n-1)}(H)\Big)$, donde $P^o(H) \stackrel{\text{def}}{\equiv} H$, y $P^1(H) \stackrel{\text{def}}{\equiv} P(H)$.

El Conjunto de enésima Potencia de un Conjunto refleja mejor nuestra compleja realidad, ya que un conjunto H (que puede representar un grupo, una sociedad, un país, un continente, etc.) de elementos (tales como: personas, objetos y en general cualquier elemento) se organiza en subconjuntos P (H), y estos subconjuntos se organizan nuevamente en subconjuntos de subconjuntos P (P (H)), y así sucesivamente. Ese es nuestro mundo.

1.3 Híper-Operación Neutrosófica e Híper-Estructuras Neutrosóficas [12]:

En la Híper-Operación clásica y las Híper-Estructuras clásicas, el conjunto vacío ∅ no pertenece al conjunto potencia. Expresado de otra manera, $P_*(H) = P(H) \setminus \{\emptyset\}$.
Sin embargo, en el mundo real nos encontramos con muchas situaciones en las que una Híper-Operación ∘ es indeterminada, por ejemplo a ∘ b = ∅ (desconocido o indefinido),
O parcialmente indeterminado, por ejemplo: c ∘ d = {[0,2, 0,3], ∅}.
En nuestra vida cotidiana, hay muchas más operaciones y leyes que tienen algún grado de indeterminación (vaguedad, falta de claridad, desconocimiento, contradicción, etc.), que aquellas que son totalmente determinadas.

Es por eso que en 2016 se ha extendido la Híper-Operación clásica a la Híper-operación Neutrosófica, tomando toda la potencia P(H) (que incluye también el conjunto vacío ∅), en lugar de $P_*(H)$ (que no incluye el conjunto vacío ∅), tal como se detalla a continuación:

1.4 Definición de Híper-Operación Neutrosófica:

Sea U un universo de discurso y H un conjunto no vacío, H⊂ U. Una Híper-Operación Binaria Neutrosófica $\circ_2$ se define de la siguiente manera:

$o_2: H^2 \rightarrow P(H),$

Donde H es un conjunto discreto o continuo, y P(H) es el conjunto potencia de H que incluye el conjunto vacío ∅.

Una **Híper-operación m-aria Neutrosófica** o_m Se define como:

$o_2: H^m \rightarrow P(H),$

para m≥1 valor entero. De manera similar, para m = 1 se obtiene una **Híper-operación Unaria Neutrosófica**.

1.5 Híper-estructuras Neutrosóficas:

Una Híper-Estructura Neutrosófica es una estructura dotada de Híper-Operaciones Neutrosóficas.

1.6 Definición de Súper-Híper-Operaciones

Se pueden recordar los conceptos de 2016 de Súper-Híper-Operación, Súper-Híper-Axioma, Súper-Híper-Álgebra y sus correspondientes Súper-Híper-Operaciones Neutrosóficas, Súper-Híper-Axioma Neutrosófico y Súper-Híper-Algebra Neutrosófica [16].

Sea $P_*^n(H)$ el conjunto de enésima potencia del conjunto H, tal que ninguno de P(H), $P^2(H)$,… , $P^n(H)$ contienen el conjunto vacío ∅.

Además, sea $P^n(H)$ el conjunto de enésima potencia del conjunto H, tal que al menos uno de los P(H), $P^2(H)$,… , $P^n(H)$ contienen el conjunto vacío ∅.

Las Súper-Híper-Operaciones son operaciones cuyo codominio es $P_*^n(H)$ y en este caso se tienen **Súper-Híper-Operaciones clásicas**, o $P^n(H)$ y en este caso se tienen **Súper-Híper-Operaciones Neutrosóficas**, siendo n un valor entero y n≥2.

Una Super-Hyper-Operación binaria clásica $o_{(2,n)}^*$ se define de la siguiente manera:

$$o_{(2,n)}^*: H^2 \to P_*^n(H), \qquad (3)$$

Donde $P_*^n(H)$ es el conjunto de enésima potencia del conjunto H, sin incluir el conjunto vacío.

Ejemplos de súper-híper-operación binaria clásica:

1) Sea H = {a, b} un conjunto discreto finito; entonces su conjunto potencia, sin incluir el conjunto vacío ∅, es:
P(H) ={a, b,{a, b}}, y:

$P^2(H) = P(P(H)) = P(\{a, b, \{a, b\}\}) = \{a, b, \{a, b\}, \{a, \{a, b\}\}, \{b, \{a, b\}\}, \{a, b, \{a, b\}\}\},$

$$o_{(2,2)}^*: H^2 \to P_*^2(H),$$

$o_{(2,2)}^*$	a	b
a	$\{a, \{a, b\}\}$	$\{b, \{a, b\}\}$
b	a	$\{a, b, \{a, b\}\}$

Tabla 1: Ejemplo 1 de Súper-Híper-Operación Binaria Clásica

2) Sea H = [0, 2] un conjunto continuo.
P(H) = P ([0, 2]) ={A | A⊆[0, 2], A = subconjunto},
$P^2(H)$ = P (P ([0, 2])).
Sean c, d ∈H.

$$o_{(2,2)}^*: H^2 \to P_*^2(H)$$

$o_{(2,2)}^*$	c	d
c	{[0, 0.5] , [1 , 2]}	{0.7 , 0.9 , 1.8}
d	{2.5}	{(0.3 , 0.6) , {0.4 , 1.9}, 2}

Tabla 2: Ejemplo 2 de Súper-Híper-Operación Binaria Clásica

Súper-Híper-Operación clásica de orden m (o, empleando una denominación más precisa, Súper-Híper-Operación (m, n))

Sea U un universo de discurso y un conjunto no vacío H, H ⊂ U. Entonces:

$$o_{(m,n)}^*: H^m \to P_*^n(H),$$

Donde m y n son enteros, tales que m, n ≥ 1,

$$H, H^m = H \times H \times \ldots \times H, \text{ (m veces)}$$

Y $P_*^n(H)$ es el conjunto de enésima potencia del conjunto H que incluye el conjunto vacío.

Esta Súper-Híper-Operación es una operación de orden m definida desde el conjunto H hasta el conjunto de enésima potencia del conjunto H.

Súper-Híper-Operación Neutrosófica de orden m (o, empleando una denominación más precisa, **Súper-Híper-Operación Neutrosófica (m, n)**):

Sea U un universo de discurso y un conjunto no vacío H, H ⊂ U, entonces:

$$o_{(m,n)}: H^m \to P^n(H),$$

Donde m y n son enteros, tales que m, n ≥ 1, Y $P^n(H)$ es el conjunto de enésima potencia del conjunto H que incluye el conjunto vacío.

Súper-Híper-Axioma:

Un Súper-Híper-Axioma clásico o más exactamente un Súper-Híper-Axioma (m, n) es un axioma basado en Súper-Híper-Operaciones clásicas.

De manera similar, un Súper-Híper-Axioma Neutrosófico (o Súper-Híper-Axioma Neutrosófico (m, n)) es un axioma basado en Súper-Híper-Operaciones Neutrosóficas.
Existen:

- **Súper-Híper-Axiomas Fuertes**, cuando el lado izquierdo es igual al lado derecho como en los axiomas que no son de tipo híper,

- y **Súper-Híper-Axiomas Débiles**, cuando la intersección entre el lado izquierdo y el lado derecho no está vacía.

Por ejemplo, se tiene:

- Súper-Híper-Asociación Fuerte, cuando $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, para todo $x, y, z \in H^m$, donde
$$o^*_{(m,n)}: H^m \to P^n_*(H)$$
- Y Súper-Híper-Asociación Débil, cuando $[(x \circ y) \circ z] \cap [x \circ (y \circ z)] \neq \emptyset$, para todo $x, y, z \in H^m$

Súper-Híper-Algebra y Súper-Híper-Estructura:

Una Súper-Híper-Algebra o, más exactamente Súper-Híper-Algebra ($m-n$), es un álgebra que trata con Súper-Híper-Operaciones y Súper-Híper-Axiomas.

Nuevamente, una Súper-Híper-Algebra Neutrosófica (o Súper-Híper-Algebra Neutrosófica (m, n)) es un álgebra que trata con Súper-Híper-Operaciones Neutrosóficas y Súper-Híper-Axiomas Neutrosóficos.

En general, tenemos Súper-Híper-Estructuras (o Súper-Híper-Estructuras (m, n)), y las correspondientes Súper-Híper-Estructuras Neutrosóficas.

Por ejemplo, hay Súper-Híper-Grupos, Súper-Híper-Semigrupos, Súper-Híper-Anillos, Súper-Híper-Espacios-Vectoriales, etc.

1.7 Distinción entre Súper-Híper-Álgebra vs. Súper-Híper-Álgebra Neutrosófica:

i. Si ninguno de los conjuntos potencia $P^k(H)$, $1 \leq k \leq n$, no incluye el conjunto vacío $\emptyset$, entonces se tiene una Súper-Híper-Álgebra de tipo clásico;

ii. Si al menos un conjunto potencia, $P^k(H)$, $1 \leq k \leq n$, incluye el conjunto vacío $\emptyset$, entonces se tiene una Súper-Híper-Álgebra Neutrosófica.

Súper-Híper-Grafo (o Súper-Híper-Grafo-n):

El Súper-Híper-Álgebra se parece al Súper-Híper-Grafo-n [17, 18, 19], introducido por Smarandache en 2019, definido de la siguiente manera:

Definición del Súper-Híper-Grafo-n:

Sea $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, para $1 \leq m \leq \infty$, un conjunto de vértices, que contiene Vértices Únicos (los clásicos), Vértices Indeterminados (poco claro, vago, parcialmente conocido), y Vértices nulos (totalmente desconocidos, vacíos).

Sea P(V) la potencia del conjunto V, que incluye también al conjunto vacío $\emptyset$.
Entonces sea $P^n(V)$ el n-conjunto potencia del conjunto V, definido de forma recurrente, es decir:
$P(V)$, $P^2(V) = P(P(V))$, $P^3(V) = P(P^2(V)) = P(P(P(V)))$, …,
$P^n(V) = P(P^{(n-1)}(V))$, por $1 \leq n \leq \infty$, donde por definición $P^o(V) \stackrel{\text{def}}{=} V$.

Entonces, el Súper-Híper-Grafo-n (**SHG**-n) es un par ordenado:

$$\text{SHG-n} = (G_n, E_n),$$

Donde $G_n \subseteq P^n(V)$, y $E_n \subseteq P^n(V)$, por $1 \leq n \leq \infty$.
G_n es el conjunto de vértices, y E_n es el conjunto de aristas.

El **conjunto de vértices G_n** contiene los siguientes tipos de vértices:

- Vértices individuales (los clásicos);
- Vértices indeterminados (poco claro, vago, parcialmente desconocido);
- Vértices nulos (totalmente desconocido, vacío); y:
- Súper vértice (o Vértice de Subconjunto), es decir, dos o más (único, indeterminado o nulo) vértices juntos como un grupo (organización).
- Súper vértice-n esa es una colección de muchos vértices tales que al menos uno es un Súper-Vértices (n-1) y todos los demás Súper-Vértices-r en la colección, si los hay, tienen el orden $r \leq n - 1$.

El **conjunto de aristas E_n** contiene los siguientes tipos de aristas:

- Aristas Sencillas (las clásicas);
- Aristas indeterminadas (poco claro, vago, parcialmente desconocido);
- Aristas nulas (totalmente desconocido, vacío); y:
- Híper-arista (conectando tres o más vértices individuales);
- Súper-Arista (conectando dos vértices, siendo al menos uno de ellos un Súper-Vértice);
- Súper-Arista-n (conectando dos vértices, siendo al menos uno un Súper-Vértice-n, y el otro de orden Súper-Vértice-r, con $r \leq n$);
- Súper-Híper-Arista (conectando tres o más vértices, siendo al menos uno un Súper-Vértice);
- Súper-Híper-Arista-n (conectando tres o más vértices, siendo al menos uno un Súper-Vértice-n, y los otros Súper-Vértices-r con $r \leq n$;
- Multi-Aristas (dos o más aristas que conectan los mismos dos vértices);
- Ciclo (y borde que conecta un elemento consigo mismo), y:
- Gráfico dirigido (clásico);
- Gráfico no dirigido (clásico);
- Gráfico dirigido neutrosófico (dirección parcialmente dirigida, parcialmente no dirigida, parcialmente indeterminada).

2 Conclusiones

Se abordó la forma más general de álgebras, denominada Súper-Híper-Algebra (o más precisamente Súper-Híper-Algebra-(m, n)) y la Súper-Híper-Álgebra Neutrosófica, y sus extensiones a Súper-Híper-

Estructuras y Súper-Híper-Álgebra Neutrosóficas en cualquier campo del conocimiento.

Se basan en el Conjunto de enésima Potencias de un Conjunto, que refleja mejor nuestra compleja realidad, ya que un conjunto H (que puede representar un grupo, una sociedad, un país, un continente, etc.) de elementos (tales como: personas, objetos y, en general, cualquier elemento) se organiza en subconjuntos P(H), y estos subconjuntos se organizan nuevamente en subconjuntos de subconjuntos P(P(H)), y así sucesivamente. Ese es nuestro mundo.

Este nuevo campo de súper-Híper-Álgebra puede inspirar a los investigadores a estudiar varios casos particulares interesantes, como súper-Híper-Grupo, Súper-Híper-Semigrupo, Súper-Híper-Grupo, súper-Híper-Anillo, Súper-Híper-Espacio-Vectorial, etc.

References

[1] A.A.A. Agboola, B. Davvaz, On Neutrosophic canonical hypergroups and neutrosophic hyperrings, Neutrosophic Sets and Systems, 2 (2014), 34–41.

[2] M. Al-Tahan, B. Davvaz, Refined neutrosophic quadruple (po-)hypergroups and their fundamental group, Neutrosophic Sets and Systems, 27 (2019), 138–153.

[3] M. Al-Tahan, B. Davvaz, F. Smarandache, O. Anis, On some NeutroHyperstructures, Symmetry, 13 (2021), 535, pp. 1-12.

[4] M.A. Ibrahim, A.A.A. Agboola, Introduction to NeutroHyperGroups, Neutrosophic Sets and Systems, 38 (2020), 15–32.

[5] M.A. Ibrahim, A.A.A. Agboola, Z.H. Ibrahim, E.O. Adeleke, On refined neutrosophic canonical hypergroups, Neutrosophic Sets and Systems, 45 (2021), 414–427.

[6] M.A. Ibrahim, A.A.A. Agboola, Z.H. Ibrahim, E.O. Adeleke, On refined neutrosophic hyperrings, Neutrosophic Sets and Systems, 45 (2021), 349–365.

[7] S. Khademan, M.M. Zahedi, R.A. Borzooei , Y.B. Jun, Neutrosophic hyper BCK-ideals, Neutrosophic Sets and Systems, 27 (2019), 201–217.

[8] M.A. Malik, A. Hassan, S. Broumi, F. Smarandache, Regular bipolar single valued neutrosophic hypergraphs, Neutrosophic Sets and Systems, 13 (2016), 84–89. 8 F. Smarandache

[9] D. Mandal, Neutrosophic hyperideals of semihyperrings, Neutrosophic Sets and Systems, 12 (2016), 105–113.

[10] N. Martin, F. Smarandache, Concentric plithogenic hypergraph based on plithogenic hypersoft sets–A novel outlook, Neutrosophic Sets and Systems, 33 (2020), 78–91.

[11] N. Martin, F. Smarandache, I. Pradeepa, N. Ramila Gandhi, P. Pandiammal, Exploration of the factors causing autoimmune diseases using fuzzy cognitive maps with concentric neutrosophic hypergraphic approach, Neutrosophic Sets and Systems, 35 (2020), 232–238.

[12] F. Marty, Sur une g´en´eralisation de la Notion de Groupe, 8th Congress Math. Scandinaves, Stockholm, Sweden, (1934), 45–49.

[13] S. Nawaz, M. Gulistan, S. Khan, Weak LA-hypergroups; neutrosophy, enumeration and redox reaction, Neutrosophic Sets and Systems, 36 (2020), 352–367.

[14] S. Rajareega, D. Preethi, J. Vimala, G. Selvachandran, F. Smarandache, Some results on single valued neutrosophic hypergroup, Neutrosophic Sets and Systems, 31 (2020), 80–85.

[15] A. Rezaei, F. Smarandache, S. Mirvakili, Applications of (Neutro/Anti)sophications to SemiHyperGroups, Journal of Mathematics, (2021), 1–7.

[16] F. Smarandache, SuperHyperAlgebra and Neutrosophic SuperHyperAlgebra, Section into the authors book Nidus Idearum. Scilogs, II: de rerum consectatione, Second Edition, (2016), 107–108.

[17] F. Smarandache, n-SuperHyperGraph and Plithogenic n-SuperHperGraph, in Nidus Idearum, Vol. 7, second and third editions, Pons asbl, Bruxelles, (2019), 107-113.

[18] F. Smarandache, Extension of HyperGraph to n-SuperHyperGraph and to Plithogenic nSuperHyperGraph, and Extension of HyperAlgebra to n-ary (Classical-/Neutro-/Anti-) HyperAlgebra, Neutrosophic Sets and Systems, 33 (2020), 290–296.

[19] F. Smarandache, Introduction to the n-SuperHyperGraph-the most general form of graph today, Neutrosophic Sets and Systems, 48 (2022), 483–485.