Hyperoperator analysis

by Dmitrii V. Guryanov

dmitriigur76@gmail.com

Abstract. The purpose of this article as a continuation of development of the Multiplical concept is to give an answer to the earlier raised question of why the place of the operator in the function $\mathbf{y = e{\nearrow}^x}$ is taken by the operator - a power tower with left associativity, and not with the generally accepted right associativity (the Tetration). Answering on this question required to conduct an hyperoperator analyze. The hyperoperator nature is considered, definition is made and an alternative way of its development is proposed in the present analysis.

Keyword: Right associativity, Left associativity, Commutativity, Hyperoperator, Hyperoperation, Hyperoperator order, Hyper-root, Hyper-logarithm, Neutral element, Forward operator, Inverse operator, Main inverse hyperoperator, Hyper-function, Forward hyper-functions, Inverse hyper-functions, Flipped inverse hyper-functions, Perfectly monotonous function, Successor, Addition, Multiplication, Exponentiation, Acceleration, Tetration.

The preceding related article: Multiplical concept https://vixra.org/abs/2205.0150

As we know increasing the hyperoperator order causes an increase of quantity of directions and branches of hyperoperator's further development. In fact, at 4^{th} order there is associativity direction bifurcation. Both of the versions has right to exist, however if it is possible then we should clarify what direction to consider as a general, primary, central and what direction to consider as a specific, secondary, marginal.

According to the generally accepted definition, a hyperoperator is the repeated execution of operations using one order lower hyperoperator for a sequence of numbers equal to the first operand, and in an amount equal to the second operand. At the same time, nothing is said about such a defining characteristic as the number of operations executed, because it depends on the hyperoperator order. So for summation, the number of successor operation iterations equals to the value of the second operand, for the higher hyperoperators it is 1 less according to the general idea of binary operators.

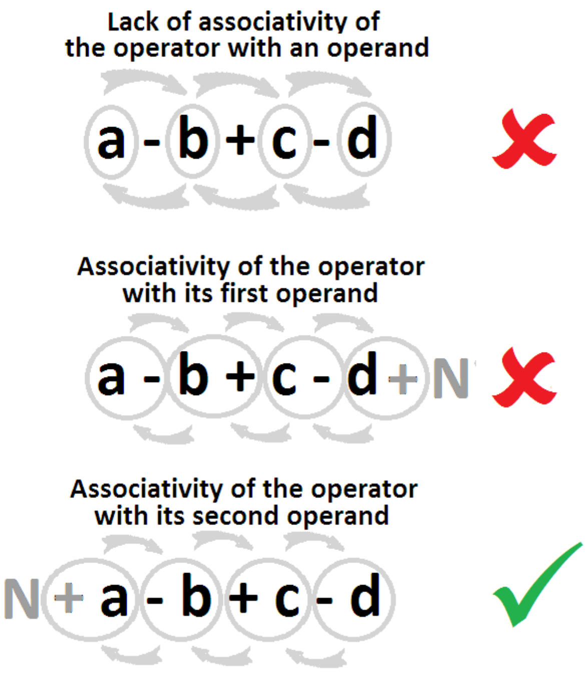
The consequence of this is some confusion in the verbal description of the actions performed. For instance, in order to multiply a number by **n** this number must be added to itself n number of times as people say. Well, let's multiply a number by 1, as it is suggested we add the number to the number only 1 time and we get two times of the number. In order to raise a number to power of **n** this number must be multiplied by itself n number of times as people say. Well, let's raise the number to power of 1, as it is suggested we multiply the number by the number only 1 time and we get the square of the number. Our language implicitly requires the resolution of this contradiction.

Let's presume that in the general formulation, the number does not need to be added to or multiplied by itself, but simply added or multiplied **n** number of times, where **n** is the second operand of the multiplication or the exponentiation operation respectively. In order to bring the sequence into compliance with the new wording, we need to add one more presumably a forward operator to one of the sequence ends. Since the operators are binary adding another operator we have to finish what has been started and to add some closing quasi-operand or neutral element N to the sequence. Taking into account the obvious fact that the neutral element is not surrounded by two operators, as other operands in the sequence are, we assume by contrast that the operator and operand that are close to each other, with the exception of the added neutral element, are functionally mutually associated and form one pair.

An answer to the question of what operand the operator is associated with, either the first (the left) or the second (the right) will determine the neutral element position in the sequence, so will it be at the beginning (at the left) or at the ending (at the right).

The generally accepted execution of addition / subtraction and multiplication / division operations in the direction from left to right for a sequence of arbitrarily chosen numbers and in case of presence of operators of both type in the sequence, the forward: the addition or the multiplication, and the inverse: subtraction or division, respectively, predetermines the <u>associativity of the binary operator with the second (the right) operand</u>, because only the associativity presence and only the presence of the associativity of the operator with its second (its right) close operand allows an unlimited rearrangement of pairs (operator and operand) in the sequence without a change of the result (see the illustration). As a consequence the neutral element position is at the sequence beginning (the leftmost). The proposed general approach to a hyperoperator is such that in fact each numeric element of the sequence, excepting the neutral element, is not just a number, but a second operand, an addend or a subtrahend to something, a multiplier or a divisor of something and so no.

The traditional view on an operator commutativity test suggest to do a rearrangement of operands separately and without operators, which is the same as a rearrangement of falsely associative pair of an operator and its first operand breaks its real associative relation with the second operand and therefore causes well known so called non-commutativity of inverse hyperoperators of the first and the second order. In some sense their non-commutativity problem is solved. Their rearrangement is possible, but only as a rearrangement of separate operations, consisting of an operator and an operand. We can name this property as conventional commutativity, that is a commutativity with condition of rearrangement of operator-second operand pairs.



The pair of an operator and its second operand represent an operation, which can be considered as a capsule, where the operator is responsible for the operation quality property (the operation inner logic that depends on the operator order and the operator direction: the sole forward, and two versions of inverse) and the second operand is responsible for the quantity property of the operation. The operation is a subject of action, and the object is the first operand of the operator. Exactly as it is said, as for example, when we multiply a consisting of myriads of atoms apple by 3, we image 3 separated identical apples as the operation result as consisting of myriads of atoms identical combinations, and not myriads of separated 3-atom molecules each having one respective atom of each of 3 apples, and what could be imagined if we would multiply a 3 by an apple. And this is despite the fact that the overall quantity of atoms in both of variants of the operation result imagination is the same.

From the school desk we all know well that the result doesn’t depend on places of operands in the addition and multiplication operations, neither the numerical quantity nor the value measurement. Therefore it seems that there is no any use to search for operands’ functional differences, so to say, to search for “truth”. But I think that for the purpose of conducting a hyperoperator analysis it is needed to be abstracted from this stereotype and to approach critically to happening inside a hyperoperation.

It is obvious that the first operand of each binary operator of a sequence of single-order operators is not just a number, but it is an operation result where this fist operand is the second one in a capsule with its own operator. In order to deal with any first operand in the sequence as with an operation object one have to preliminary execute an operation where this first operator is the second one, and to repeat this moving back to the causes through the chain of operations. Any first operand is the first because it is received as the previously executed operation result in the logic of causes and consequences. The chain of ascent to causes is ceased by the neutral element that leads the sequence and does not have its own operator. On the following example each operation object is placed into a pair of brackets, and each operation subject – the operation itself consisting of operator and its second operand is out of brackets, but highlighted in color (forward operations in red, inverse operations in blue):

$$\left(\left(\left(\left((N \curlyvee a) \curlywedge b\right) \curlyvee c\right) \curlywedge d\right) \curlyvee e\right) \curlywedge f, \quad (49.1)$$

where $\curlywedge$ and $\curlyvee$ - respectively forward and inverse operators of the 1st or the 2nd order.

This is also an argument in favor of performing operations in a sequence of single-order operators, but of any quality (forward and inverse) in the direction from left to right by default as general rule, since, on the contrary, the execution of such operations from right to left, with or without any of the options for associating the operand and operator, does not provide the possibility of rearrangement either operands or operations while maintaining the calculation result for hyperoperator orders up to the second inclusive. Execution from right to left breaks the actual relation between the operator and its second operand, replacing the latter with the result of the previous calculation, which is equivalent to the “anomaly-producing” technique of using parentheses, the expansion of which can cause the operators to be inverted to their opposites. The harmony and beauty of arithmetic operations are violated. In addition, inside the brackets, each individual expression must begin with an operation on a neutral element:

In the case of parentheses, the subjects of a possible permutation are associated pairs consisting of operators and parenthesized expressions as the second operand for their operators. Carrying out permutations of all expressions in brackets along with their associated operators, leads to a visual change in the order of the operands in the sequence to the reverse and seems to be like performing a sequence of operations from left to right, however, this does not save us from the need to open brackets and from the need to perform operations with neutral element, which itself always has the highest execution priority, each time before the execution of the next operation in the sequence:

$$N \curlyvee (N \curlywedge (N \curlyvee (N \curlywedge (N \curlyvee (N \curlywedge \mathrm{f} \curlywedge \mathrm{e}) \curlywedge \mathrm{d}) \curlywedge \mathrm{c}) \curlywedge \mathrm{b}) \curlywedge \mathrm{a}). \quad (49.3)$$

Calculating a sequence consisting of operations of the same order and the same quality (either forward or inverse) is a specific case relative to the case described above, therefore, the result of calculating such a sequence can’t be an argument to justify the arbitrariness of the choice or the opposite choice of the direction of performing operations in the sequence in the general case. Here it should be stated that the accepted direction of calculation of a power tower from right to left, which is the basis of the Tetration operator, violates the general rule.

A calculation direction of a sequence of single-order operation (the generally accepted is from left to right) and positions of the 1^{st} and the 2^{nd} operands (as it is generally accepted the 1^{st} is at the left and the 2^{nd} is at the right) are mutually conditioned. So if the calculation would be conducted in the direction from right to left then the right operand would be considered as the 1^{st}, or if the right operator would be the 1^{st} one then the calculation direction would be conducted in the direction from right to left.

Here it is important to follow the uniformity of the direction of calculation for operations of all orders, choosing one (the generally accepted) of two for operators of the lower orders the chosen one should be applied to operators of the higher orders. As it is above mentioned switching the direction means an effective mutual exchange of places for the 1^{st} and the 2^{nd} operands, but since the operands carry completely different functions, the mutual exchange of operand places changes the calculation logic completely. For this reason switching the calculation direction in a process of the transition from lower to higher operator order is not forbidden but requires an explanation of the made decision, a proof of its necessity.

As it is well known two inverse binary hyperoperators exist for one forward binary hyperoperator of n^{th} order, namely those are the hyper-root and the hyper-logarithm. The latter of orders below the 3^{rd} are functionally indistinguishable and represent operators of subtraction and division for the 1^{st} and the 2^{nd} orders respectively. For the higher orders it is possible to methodologically select the primary and the secondary inverse binary hyperoperators out of the respective pair.

The primary inverse binary hyperoperator is that one which operation will bring the result of the previous operation conducted with the forward hyperoperator of the same order to its initial state using the same length interval measured in operator quality units, because the interval length sameness indicates the “180 degree” opposition of used the primary inverse hyperoperator quality unit relative to the quality unit used in forward hyperoperator, and that makes the primary hyperoperator to be an exceptional. Being the operation quantity property the second operand is responsible for the operation interval length, and this means that the second operands of the forward and presumably the primary inverse hyperoperator both have to have the same value. In circumstances of performing operations in the direction from left to right the hyper-root meets this condition and therefore it is accepted as primary inverse binary hyperoperator. Further in the context this inverse hyperoperator is meant as a inverse hyperoperator by the default. Below it is also explained why the separation to the primary and to the secondary inverse hyperoperators is critical in the scope of the conducted hyperoperator analysis.

The hyper-logarithm does not use the quantity property, but returns it as the operation result. The hyper-logarithm could be primary inverse operator in case if in the forward operator operands would exchange their places what exactly happens at the opposite direction of the operations calculation. The power tower calculation from right to left is performed as if the operands of the exponentiation operator exchanged their places however it is false according to the exponentiation operator definition. There is a contradiction. Down below it is demonstrated how the hyper-logarithm plays the primary inverse operator role in case of performing operations in the direction from right to left.

The forward binary hyperoperator is a sequence consisting of equal to the defined hyperoperator second operand absolute value quantity of operations which are performed by binary hyperoperators of one order lower than the defined hyperoperator and started by a neutral element of one order lower than the defined hyperoperator which takes place of the first operand of the first operation of the sequence and where copies of the defined hyperoperator first operand take places of all second operands of those operations and where hyperoperator quality (forward or inverse) depends on the defined hyperoperator second operand arithmetical sign as follows: if the sign is positive then the quality is forward else the quality is inverse. The hyperoperator general definition is following:

$$HO(-1,n,a,b) := HO_{|b|}\Big(S(b), n-1, ..\ HO_2\Big(S(b), n-1, HO_1\Big(S(b), n-1, N(n-1, a), a\Big), a\Big)\ ..\ ,a\Big),$$

(50.1),

$$HO(-1,n,a,b) := HO_{b}\Big(1, n-1, ..\ HO_2\Big(1, n-1, HO_1\Big(1, n-1, N(n-1, a), a\Big), a\Big)\ ..\ ,a\Big) \text{ at } b \geq 0,$$

(50.2),

$$HO(-1,n,a,b) := HO_{-b}\Big(-1, n-1, ..\ HO_2\Big(-1, n-1, HO_1\Big(-1, n-1, N(n-1, a), a\Big), a\Big)\ ..,a\Big) \text{ at } b \leq 0,$$

(50.3)

$$a^{\uparrow(n)}b = N(n-1, a)^{\uparrow(n-1)}a_1{}^{\uparrow(n-1)}a_2\ ...\ {}^{\uparrow(n-1)}a_b \quad \text{at } b \geq 0,\ a_1 = a_2 = a_3 = .. = a_n = a \qquad (51.1)$$

$$a^{\uparrow(n)}b = N(n-1, a)^{\downarrow(n-1)}a_1{}^{\downarrow(n-1)}a_2\ ...\ {}^{\downarrow(n-1)}a_{-b} \quad \text{at } b \leq 0,\ a_1 = a_2 = a_3 = .. = a_n = a \qquad (51.2)$$

where **HO(d, n, a, b)** – hyperoperator; **d** – hyperoperator quality (forward or inverse), accepted following values: **+1** – for the forward, **–1** – for the inverse; **n** – hyperoperator order, a natural positive number which is above zero; **a** - the **1st** hyperoperator operand; **b** – the **2nd** hyperoperator operand; **N(n, a)** – neutral element of **nth** order for number a; **S(x)** - sign function that return **1** in case if **x** is a positive and returns **–1** in case if **x** is a negative; **HO_i(d, n, a, b)$_i$** – hyperoperator of **ith** calculating iteration; **$a^{\uparrow(n)}b$** – forward hyperoperator of **nth** order; **$a^{\downarrow(n)}b$** - inverse hyperoperator of **nth** order.

If the second operand is positive then the forward hyperoperator of the lower order is applied, otherwise the inverse hyperoperator of the lower order is applied. Operations quantity is equal to the second operand absolute value.

The usage of inverse hyperoperators of lower order in the hyperoperator general definition reveals an obvious but critical dependence of the latter to the primary inverse hyperoperator choice and therefore justifies the decision to conserve the sequence calculation direction in the transition from lower to higher orders of the hyperoperators.

In the specific 0^{th} order hyperoperator (successor/predecessor) definition the second operand is ignored (the operator is effectively unary) and the quality of the hyperoperator (forward or inverse) and therefore the operator result is defined by **d** value:

$$HO(d,0,a,b) := a + d. \quad (52)$$

The neutral element is a function of the first sequence operation in the hyperoperator definition where the neutral element is the first operand, more precisely this is a function of the operator order **n** and the second operator operand **a**. Therefore in a sequence of single-order operations the 1^{st} operation determines its fist operand – the neutral element:

$$N(n, a) \curlyvee a \curlywedge b \curlyvee c \curlywedge d. \quad (53)$$

In this case, the first operation in the sequence, the one performed on the neutral element, is what we mean by the operation using the unary operator. Thus, we can conclude that the neutral element is a function of a unary operation. The value of the neutral element does not depend on the quality of the operator (forward$\curlywedge$/inverse$\curlyvee$), only depends on its order.

The neutral element function is defined as a single inverse binary operation of n^{th} order where both operands are value **a**:

$$N(n, a) = HO(-1, n, a, a) \text{ if } n > 0_, \quad (54)$$

where **N(n, a)** – neutral element function; **n** –hyperoperator order; **a** – arbitrary real number; **HO(–1, n, a, b)** – inverse binary hyperoperator of **n**th order.

It is obvious that a neutral element value does not depend on the operation quality (forward or inverse) and this is fundamental.

Table of neutral element N for number "a" depending on hyperoperation order "n"

Hyperoperation order, n	Forward hyperoperator | Inverse hyperoperator	Operation for searching N	Result of N or Equation for N
0	Successor | Predecessor	-	N = a
1	Addition | Subtraction	a – a	0
2	Multiplication | Division	a / a	1
3	Exponentiation | Root extraction	$\sqrt[a]{a}$	N = $\sqrt[a]{a}$
4	Acceleration | Deceleration	$a \searrow_a$	N = $\sqrt[\mathrm{N}^{(\mathrm{a}-1)}]{\mathrm{a}}$

The exception is the way of getting a neutral element for the zero order hyperoperator (Successor/ Predecessor). Due to the fact those are atomic operators the whole math is built on and also due to the fact those are not a binary operator, not having their second operands which determine the quantity property in general, the neutral element value is just the original number **a** - the sole hyperoperator operand.

It is obvious the hyper-root is used for a neutral element obtaining. If the sequence calculation direction would be from right to left then it would be fairly to use the hyper-logarithm for the purpose and in this case the neutral element would be always 1 for hyperoperator orders above 1. In my opinion this invariant can't be a reason to use the hyper-logarithm as basic inverse hyperoperator because it doesn't propagate to hyperoperator orders below 2 therefore is not a general.

Despite the fact the neutral element is an operation function and depends on the operation second operand, nevertheless a neutral element value could be an invariant for a definite or indefinite sequence of single order operations with arbitrary operator quality (forward or inverse) and arbitrary second operands. There is unconditional neutral element invariance for hyperoperator orders up to 2 inclusively. In fact for the 0th order it is the original number **a**, and for the 1st and 2nd orders it's even a constant (see the table).

If we approach mathematically rigorous, then the result of calculating the neutral element of the 2nd order using zero as an operand has an undefined value, it can be any finite number different from zero. If you do not approach strictly and consider the division operator as a ratio, implying that the ratio of two equal values equals to one, then you can take 1 as a neutral element in this case, especially having in mind that 1 belongs to the set of numbers of possible results of dividing zero by zero. In some weird sense the non-strict approach is stricter than the strict one as it narrows the infinite number of dividing zero by zero solutions to a single solution: the math measurement unit, namely the 1. You can also consider a definition of the neutral element through the limit: $\lim_{x\to 0} {}^{x}/_{x}$.

The non-rigorous approach has wider practical application, in particular, the postulate used in the general definition of the product operator is consistent with it that the mnemonic product of the zero number of multipliers is equal to 1, otherwise it would be impossible to formulate the multiplical concept, because if, on the contrary, to approach strictly, then even $\mathbf{a^0}$ for a≠0 there is no unity, but uncertainty, so as according to the generally accepted definition of the exponentiation operator through the product operator has no multiplicands a as such and therefore the result of such an operation must be uncertainty. But despite this and in general, for the possibility of carrying out mathematical operations and transformations generally accepted 1 as result $\mathbf{a^0}$ for a≠0. Thus, if already as the operation of the imaginary product of a zero number of factors is generally accepted 1, which de facto has already become part of the generally accepted definition of the product operator itself, then the result of such an operation cannot depend on the value of these multiplicands, since they are not there. It is not possible to depend on the hypothetical meaning of something that does not exist.

A consequence of the proposed forward hyperoperator definition is that the latter returns a neutral element value if its second operand **b** equals to 0:

$$HO(1, n, a, 0) = N(n - 1, a). \quad (55)$$

Non-rigorously coming from N(2, 0) = 0 / 0 = 1 as a result we have 0^0 = HO(1,3, 0, 0) = N(2, 0) = 1, since the neutral element of the 2nd order is a invariant of the operand and equals to 1 in that case.

In this sense, the definition of exponentiation as a special case for the third order given here definition of the direct hyperoperator using a neutral element is more strict than generally accepted, since if the second operand is zero, its result clearly depends on the value the first operand (the base of the exponentation) in the strict approach, so it is undefined when zero value of the first operand: N(2, 0) is not defined in the strict approach.

The inverse binary hyperoperator (the hyper-root) is defined recurrently through the solution of the equation to determine the forward hyperoperator, but with a mutual change of places of the returned result of the hyperoperation and its second operand in this equation as follows:

$$x = HO(-1 , n, a, b), \quad (56.1)$$

$$a = HO_{|b|}\Big(S(b), n - 1, .. HO_2\big(S(b), n - 1, HO_1(S(b), n - 1, N(n - 1, x), x), x\big) \;.. , x\Big) \text{ if } b \neq 0, \quad (56.2)$$

$$a = HO_b\Big(1, n - 1, .. HO_2\big(1, n - 1, HO_1(1, n - 1, N(n - 1, x), x), x\big) \;.. , x\Big) \text{ at } b > 0, \quad (56.3)$$

$$a = HO_{-b}\Big(-1, n - 1, .. HO_2\big(-1, n - 1, HO_1(-1, n - 1, N(n - 1, x), x), x\big) \;.. , x\Big) \text{ at } b < 0, \quad (56.4)$$

$$x = a^{\downarrow(n)}b, \quad (57.1)$$

$$a = N(n - 1, x)^{\uparrow(n-1)}x_1{}^{\uparrow(n-1)}x_2 \;...\; {}^{\uparrow(n-1)}x_b \quad \text{at } b > 0, \quad x_1 = x_2 = x_3 = .. = x_n = x \qquad (57.2)$$

$$a = N(n - 1, x)^{\downarrow(n-1)}x_1{}^{\downarrow(n-1)}x_2 \;...\; {}^{\downarrow(n-1)}x_{-b} \quad \text{at } b < 0, \quad x_1 = x_2 = x_3 = .. = x_n = x \qquad (57.3)$$

where **x** – pointer to return value of the inverse binary hyperoperator.

The hyper-root also can be expressed compactly through the forward hyperoperator of the same order with substitution in place of the first operand of the forward hyperoperator:

$$a = HO(1, n, HO(-1, n, a, b), b). \quad (58)$$

In general it is not allowed to supply 0 as the second operand to a inverse hyperoperator other than the inverse hyperoperator of the 1st order (the subtraction) . Obviously, as an exception, only zero can be allowed to divide by zero, but rigorously the result of this operation can be any number, as can be seen from the following equation derived from the previous:

$$0 = N(1, x). \quad (59.1)$$

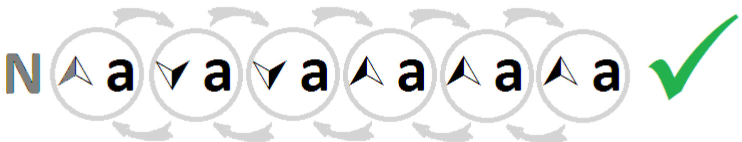
Also, as an exception, it is possible to extract the root of zero degree only from 1, and the result of this operation can also be any number, but except for zero with a rigor, like the previous:

$$1 = N(2, x). \quad (59.2)$$

There is another general recurrent and at the same time explicit solution for the hyper-root, which, on the contrary, is not applicable to defining the operator as a sequence of operations with left associativity in the general case, but is applicable for it as a sequence with right associativity where the hyper-root is not a main inverse hyperoperator:

$$x = HO(-1, n, a, b), \quad (60.1)$$

$$x = HO\big(-1, n - 1, a, HO(1, n, x, b - 1)\big) \text{ if } n \geq 2, \quad (60.2)$$



In the sequence of single-order operations of mixed quality (forward $\curlywedge$/inverse $\curlyvee$) with identical operands “a” (with an exception of the neutral element as the 1st operand of the 1st operation) the conditional commutativity is possible, which is observed regardless of the hyperoperation order (see fig.). At the same time, this rule checks the correctness of the choice of internal logic of the inverse hyperoperator as opposition of the forward, and what fundamentally distinguishes the inverse hyperoperator (the hyper-root) from an alternative (the hyper-logarithm).

Checking equality of the left and right sequences in the equations, depending on the direction of the calculation (the associativity direction):

$$a \curlyvee a \curlywedge a = a \curlywedge a \curlyvee a, \quad (61.1)$$

$$(a \curlyvee a) \curlywedge a = (a \curlywedge a) \curlyvee a \Leftrightarrow \left(\sqrt[a]{a}\right)^a = \sqrt[a]{(a^a)} \text{ - left associativity,} \quad (61.2)$$

$$a \curlyvee (a \curlywedge a) \neq a \curlywedge (a \curlyvee a) \Leftrightarrow \sqrt[a]{(a^a)} \neq a^{(\sqrt[a]{a})} \text{ – right associativity,} \quad (61.3)$$

where $\curlyvee$ - root extraction, $\curlywedge$ - exponentiation.

But if $\curlyvee$ represents a logarithm then the equality is not respected for the left associativity and is respected for the right associativity:

$$(a \curlyvee a) \curlywedge a \neq (a \curlywedge a) \curlyvee a \Leftrightarrow (\log_a a)^a \neq \log_a(a^a) \text{ - left associativity,} \quad (61.4)$$

$$a \curlyvee (a \curlywedge a) = a \curlywedge (a \curlyvee a) \Leftrightarrow \log_a(a^a) = a^{\log_a a} \text{ – right associativity.} \quad (61.5)$$

For any hyperoperator order observance of this equality, checked by a permutation of mixed (forward or inverse) operations performed with a single value **a** for both operands depends on the choice of the main inverse hyperoperator, which in turn is predetermined by the direction of calculation the sequence.

As a consequence of the method of determining the neutral element the hyperoperator of the 2nd order and above returns its first operand as the result in case if the second operand equals to 1:

$$\mathrm{HO}(d, n, a, 1) = \mathrm{HO}(-d, n, a, 1) = \mathrm{HO}_1\big(1, n-1, \mathrm{N}(n-1, a), a\big) = a \text{ if } n \geq 2. \quad (62)$$

The last statement is valid regardless to the hyperoperator quality (forward or inverse), because interchanged in the hyperoperator definition equation, the result of the hyperoperator and its second operand **a** are equal to each other based on the last equation.

Due to the binaryity of hyperoperators, a remarkable common property of all forward hyperoperators is the return of 4 if both of its operands are equal to 2, which is observed regardless of hyperoperator order, but with the exception of the hyperoperator of the 0th order due to its non-binarity:

$$\mathrm{HO}(1, n, 2, 2) = 4 \text{ if } n \geq 1. \quad (63)$$

Another interesting observable property of forward hyperoperators of the 4th and higher orders is that they tend to 1 when the second operand tends to –∞:

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{HO}(1, \mathrm{n}, \mathrm{a}, \mathrm{x}) = 1 \text{ при } \mathrm{n} \geq 4. \quad (64)$$

Results of inverse hyperoperators of the 4th and higher orders belong to the set of transcendental numbers according to the set definition. In general a inverse hyperoperator result belongs to the set of countable numbers since the set of such numbers is a result of combining numbers of two countable sets to replace the first and second operands of the inverse hyperoperator respectively. By the order of the inverse hyperoperator, its result can be attributed to a countable subset of the corresponding order if, operands the inverse hyperoperator are numbers obtained as the results of a sequence hyperoperations of equal to the inverse hyperoperator order or lower down to operations increment/decrement. So, in general, all integers, as the result of subtracting integers which are obtained as a result of increment/decrement are countable of 1st order; all rational ones obtained by dividing integers or rational, obtained as a result of division of integers or rational are countable of 2nd order; the results of root extraction, at the same time being algebraic, as a result of taking the root of integers, rationals, or algebraic, obtained by taking the root of integers, rational or algebraic ones are countable of the 3rd order, and the results of deceleration, according to In a similar scheme, these are countable of the 4th order, and so we can continue further.

Despite the fact that results of the deceleration and results of the root extracting are irrational and for someone may seem similar, they are different in their essence. Just as a rational number cannot be represented through an integer, and an algebraic irrational cannot be represented as a fraction of rational numbers, the result of the deceleration cannot be represented as an algebraic number root of an algebraic number. As far as integers differ from rational ones, so rational ones differ from algebraic irrational ones, so far the latter differ from the result of the deceleration; they all differ from each other in just one hyperoperator order. But a common property of all countable numbers of the 2^{nd} and higher orders is that they are not integers, which automatically means the practical inaccuracy of the value that algebraically obtained only by usage of a finite number of recursions of the inverse hyperoperator, with the use of which these numbers are obtained.

The hyper-logarithm can be expressed recurrently and compactly through the forward hyperoperator:

$$c = HO(1, n, a, HL(n, a, c)), \quad (65)$$

where **HL(n,a,c)** – base **a** hyper-logarithm of $\mathbf{n}^{\mathbf{th}}$ order.

As it is seen unlike the solution for the inverse hyperoperator in the solution for the hyper-logarithm, the latter is substituted for the second operand of the forward hyperoperator, which determines its applicability as the main inverse hyperoperator when calculating the sequence from right to left.

It is not possible to express the hyper-logarithm not compactly, namely, in the form of an equation for the sequence of hyperoperations of the lowest order as it is possible for the inverse hyperoperator since such operations quantity cannot be non-integer. This technical obstacle devaluate the hyper-logarithm as the alternative main inverse hyperoperator, therefore it discredits the direction of performing operations in sequence from right to left (the right associativity) for which the hyper-logarithm would have to be such.

Table of forward hyperoperator results for different argument values

Hyperoperator own name	Addition/ Subtraction	Multiplication / Division	Raising to power / Root extracting	Acceleration/ Deceleration	The hyperoperator of 5^{th} order	Tetration
Hyperoperator order	1	2	3	4	5	-
HO(1,n,a, –∞)	$-\infty$	$-\infty$	0	1	1	?
HO(1,n,a, 0)	a	0	1	$\sqrt[a]{a}$	$a \searrow_a$	1
HO(1,n,a, 1)	a + 1	a	a	a	A	a
HO(1,n,2, 2)	4	4	4	4	4	4

Hyperoperator synonyms can be defined in order to shorten the notation:

$$H(n, a, b) = HO(1,n,a,b), \quad (66.1)$$

$$HR(n, a, b) = HO(-1,n,a,b). \quad (66.2)$$

The hyper-power function is a hyper-function that represents a single forward binary hyperoperator, where the function argument takes place of the hyperoperator 1st operand and an arbitrary real number takes place of the hyperoperator 2nd operand:

$$y = H(n, x, a). \quad (67.1)$$

The hyper-exponential function is a hyper-function that represents a single forward binary hyperoperator, where the function argument takes place of the hyperoperator 2nd operand and an arbitrary real number takes place of the hyperoperator 1st operand:

$$y = H(n, a, x). \quad (67.2)$$

The hyper-root function is a hyper-function that represents a single inverse binary hyperoperator, where the function argument takes place of the hyperoperator 1st operand and an arbitrary real number takes place of the hyperoperator 2nd operand:

$$y = HR(n, x, a). \quad (67.3)$$

The hyper-logarithmic function is a hyper-function that represents a hyper-logarithm, where the base is an arbitrary positive real number:

$$y = HL(n, a, x). \quad (67.4)$$

A function built on the basis of a binary hyperoperator, but in which an arbitrary constant and a function argument are interchanged as the first and second operands of a binary operator, can be called “flipped” in relation to the function where the mutual change of places is not performed. Strictly speaking, this definition is relative. But with regard to the conducted hyperoperator analysis and the analysis of functions which are built with the use of the hyperoperators, we can agree that we will consider the function flipped, where the place of the first operand - the object of the operation is occupied by an arbitrary constant, and the place of the second operand, which is responsible for the quantitative change of the object of the operation, is occupied by the argument of the function. This way the hyper-exponential function is the flipped hyper-power function. The 1st operand of the hyperoperator - forward with respect to the hyper-logarithm, takes the place of an arbitrary constant in the hyper-logarithm itself, but not the argument of the function, for this reason the hyper-logarithm is not referred to flipped functions.

Having three binary hyperoperators (one forward and two inverse) it is possible to compile three hyper-functions and to compile a one flipped function out of each of them three, all together six hyper-functions of **n^{th}** order can be compiled. Therefore it is possible to define two more hyper-functions except those above mentioned. I don’t know generalizing names of those functions, but we can refer them to flipped inverse hyper-functions and name them as follows:

The flipped hyper-root function:

$$y = HR(n, a, x). \quad (67.5)$$

The flipped hyper-logarithmic function:

$$y = HL(n, x, a). \quad (67.6)$$

The hyper-function table for hyperoperator orders from 1st to 4rd

Function group	Generalizing function name	Generalizing definition	Specific definition depending on the order			
			1	2	3	4
Forward functions	Hyper-power	H(n, x, a)	$x + a \Leftrightarrow a + x$	$x \cdot a \Leftrightarrow a \cdot x$	x^a	$x \nearrow^a$
	Hyper-exponential	H(n, a, x)			a^x	$a \nearrow^x$
Inverse functions	Hyper-root	HR(n, x, a)	$x - a$	x / a	$\sqrt[a]{x} \Leftrightarrow x^{1/a}$	$x \searrow_a$
	Hyper-logarithmic	HL(n, a, x)			$\log_a x$	$x \nwarrow_a$
Flipped inverse functions	Flipped hyper-root	HR(n, a, x)	$a - x$	a / x	$\sqrt[x]{a} \Leftrightarrow a^{1/x}$	$a \searrow_x$
	Flipped hyper-logarithmic	HL(n, x, a)			$\log_x a \Leftrightarrow \frac{1}{\log_a x}$	$a \nwarrow_x$

The three groups of hyper-functions are formed by their value and growth rate characteristic at arbitrary constant above 1 and positive argument and also by the fact that for hyperoperator orders below the 3rd functions of one formed group are functionally identical.

For forward functions their value and growth rate is not less than those of the **y=x**, for inverse functions their value and growth rate is not higher than those of **y=x**, and for flipped inverse functions their growth is negative.

All hyper-function are different in their math essence, however for the 1st and 2nd hyperoperator orders functions that belongs to one group are functionally identical and return identical results for respective orders. Also the forward hyper-function of the 1st and 2nd orders are identical to the inverse hyper-functions of respective orders with the only difference that for inverse hyper-functions an arbitrary constant is opposite to that for forward hyper-functions with respect to the value of the neutral element for the corresponding order.

Despite the fact that all hyper-functions of the 1st and 2nd orders, except for the function **y=a/x**, are linear, I did not combine them into one group, since they have essential differences.

Table of returning values of the hyper-exponential function in base 2: y = H(n, 2, x) for different hyperoperator orders "n" and argument values "x"

N	X							
	–∞	–2	–1	0	1	2	3	4
1	–∞	0	1	2	3	4	5	6
2	–∞	-4	-2	0	2	4	6	8
3	0	¼	½	1	2	4	8	16

4	1	$\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[8]{2}$ 1.09050773	$\sqrt[2]{\sqrt[2]{2}} = \sqrt[4]{2}$ 1.18920712	$\sqrt[2]{2}$ 1.41421356	2	4	$4^2 = 2^4 = 16$	$16^2 = 2^8 = 256$
5	1	$y = \sqrt[y]{z = \sqrt[z]{a = \sqrt[a]{2}}}$ 1.28486975	$y = \sqrt[y]{z = \sqrt[z]{2}}$ 1.37997040	$y = \sqrt[y]{2}$ 1.55961047	2	4	$4^4 = 2^8 = 256$	$256^{256} = 2^{2048}$
Tetration	?	$-\infty$	0	1	2	4	$2^4 = 16$	$2^{16} = 65536$

With argument growth step equal to 1 each next value of the hyper-exponential function in base 2 is 2 raised to power of the previous function value for the 4th hyperoperator order, is the previous function value raised to power of the previous function value for the 5th hyperoperator order, and is the previous function value raised to power of 2 for the Tetration based hyper-function (see table). Based on this pattern, and by the criterion of growth rate I would attribute the Tetration to an order of 4½ as growing faster than the 4th order hyper-function, and slower than the 5th order hyper-function.

An interesting pattern of hyper-exponential functions in base 2 is also observed. The value of the hyper-function with an argument equal to 4 is equal to the value with an argument equal to 3, but for a hyper-function of one order up than the one under consideration, which is valid starting from the first order of the hyperoperator:

$$H(n, 2, 4) = H(n + 1, 2, 3) \text{ if } n \geq 1. \quad (68)$$

There is such a family of analytically defined functions that not the functions themselves, not one of their derivatives (the first, the second, and further without a restriction) do not have extrema and points of discontinuity for any values of the argument within the boundaries of its definition. For them, the values of functions and all their derivatives are either equal to zero, or are constant, or only decrease, or only increase. Unfortunately, I do not know the name of the family of such functions and if there is no known name then it could be a family of **perfectly monotonous functions**. This family includes hyper-exponential, hyper-logarithmic (the list is inclusive). The remaining analytically defined functions, by definition, have this characteristic in the interval of the argument between their own points of discontinuity and extremum points and such points for all their derivatives. These functions are represented by all hyperoperator based functions, elliptical, trigonometric, inverse trigonometric, hyperbolic and many other functions. In the latter it is appropriate to refer to perfectly monotonous function scopes.

Different from all the other hyper-exponential functions in base 2, the hyper-exponential function built on the basis of Tetration passes through points: **(–1,0)**; **(0,1)**; **(1,2)** (see table) which a straight line can be drawn through. Consequently, in the interval of the argument from –1 to 1, the hypothetical hyper-exponential generalization function for real number argument built on the basis of the operator Tetration has extrema of the derivative, so the function is not perfectly monotonous. Also the function obviously has a break at argument value of -2, and it is not known whether it has a definition for its argument to the left of this point. These circumstances are signs that this function is not hyper-exponential by given criteria. Moreover, it has coincidences with two other hyper-exponential functions at three points of the argument: 0,1,2 with the hyper-exponential function of 3rd order – the Exponent and 1,2,3 with the hyper-exponential function of 4th order - the Accelent (see table), which would be an anomaly for a hyper-exponential function. At the same time, there are no three points of argument at which any hyper-exponential function built on basis of hyperoperator with left associativity, including Exponent and Accelent, would coincide at any value (different from 0 and 1) combinations of power base and arbitrary multiplier applied for each of functions. All this discredits the right associativity with the use of which the Tetration operator is defined.

Computing the power tower from right to left is tantamount to applying parentheses that separate the second operand from its operator in sequence, which leads to an "anomaly" in the result, where normal result means the result obtained according to the definition for the hyperoperator, that is, with the so-called left associativity or the direction of evaluation from left to right.

I do not know what argument exactly determined the choice of right associativity in the Tetration operator. If the reason was the presumption that a higher-order operator should not be compactly described in terms of lower-order operators, that convenience of compact notation as a reason we introduce new operators into use, then I can comment that objective reality exists independently on our subjective idea of it, and mathematics exists independently on our way of describing it. Apparently, the hyperoperator of the third order – the raising to a power - is a rather “powerful” tool that has a special feature - the ability to compactly describe an operator of one order higher than itself. By the way, in English terminology it is called “power”. But apparently the latter was not taken into account. On my opinion, the hyperoperator of the 5th order can no longer be described compactly in terms of the exponentiation. Obviously, here comes the limit of the "power" of the latter.

Arguments in favor of choice the sequence computation direction in the hyperoperator definition

<table>
<tr><th>From left to right</th><th>From right to left</th></tr>
<tr><td>Geometrical growth of presumable hyper-exponential function of the 4th order formulated on a basis of the 4th order hyperoperator defined as a power tower with the left associativity coincides with the function itself (argument of necessity)</td><td rowspan="2">For the order of hyperoperators above the 1st, the neutral element obtained by means of the hyper-logarithm as the main inverse hyperoperator for the direction of calculation from right to left is equal to one. The argument is dubious, because it simultaneously points to imperfection</td></tr>
<tr><td>Proven left-to-right directionality for hyperoperators of order below the third, and consistency in the choice of the computation direction when moving from lower to higher orders of hyperoperators, without the need to redefine them (argument of consistency)</td></tr>
<tr><td>Similarly to the forward hyperoperator and being the main inverse hyperoperator for the direction of calculation from left to right, the hyper-root through its second operand receives a quantitative characteristic of the operation, which results in the possibility of obtaining a hyper-root by means of a recursive equation consisting of a sequence of lower-order hyperoperators, which is impossible for a hyper-logarithm (argument of preservation of hyperoperators properties)</td><td>The impossibility of compact notation for a higher-order operator using lower-order operators as the basis for introducing a next-order operator. (argument of convenience)</td></tr>
</table>

Hyper-exponential functions of different orders, formulated on a basis of forward hyperoperators defined with left associativity, never coincide with each other at three points of the argument. They are perfectly monotonic functions over the entire interval of the argument definition (argument of perfection).	The existence of explicit recurrent solution for the hyper-root which is however not the main inverse hyperoperator for the right associativity

It is not proposed herein to change the existing power tower calculation rule implying right associativity, therefore it is not proposed to redefine Tetration, Pentation, Hexation, etc. But it is proposed to recognize the legitimacy of the hyperoperator definition as a sequence of operations with left associativity, with the status of the main hyperoperator definition assigned to it, and to separate the hyperoperators thus obtained into a separate set. It is also proposed to use own names of hyperoperators defined according to the proposed rule. So for the 4th order they are "Acceleration" and "Deceleration" as forward and inverse hyperoperators, respectively.

In order to distinguish the above-described hyperoperators defined with left associativity from those defined with right associativity, it is proposed to introduce a separate general shortened arrow notation for hyperoperators defined with left associativity, orders higher than 3rd, as follows from the table below.

Arrow notation of hyperoperators defined using left associativity

Hyperoperator quality	Hyperoperator order, n		
	4	5	6
H(n,a,b)	$a\nearrow^{b}$	$a\nearrow\nearrow^{b}$	$a\nearrow\nearrow\nearrow^{b}$
HR(n,a,b)	$a\searrow_{b}$	$a\searrow\searrow_{b}$	$a\searrow\searrow\searrow_{b}$
HL(n,a,c)	$c\nwarrow_{a}$	$c\nwarrow\nwarrow_{a}$	$c\nwarrow\nwarrow\nwarrow_{a}$

Sequences of operators are composed and calculated from left to right with the priority of computing a sequence of operations of a higher order over a sequence of operations of a lower order and with equal priority of operators of the same order, regardless of their quality. There are 3 equivalent entries of one example down below:

$$e \nearrow\nearrow^{a\nearrow\nearrow\nearrow^{b}\searrow\searrow\searrow_{c}\nwarrow\nwarrow\nwarrow_{d}} \searrow_{f\nwarrow\nwarrow_{g\nearrow\nearrow\nearrow^{i}}} \nearrow^{j\nearrow\nearrow^{k}} \qquad (69.1)$$

$$\left(e \nearrow\nearrow^{\left(\left(\left(a\nearrow\nearrow\nearrow^{b}\right)\searrow\searrow\searrow_{c}\right)\nwarrow\nwarrow\nwarrow_{d}\right)}\right)\searrow_{\left(f\nwarrow\nwarrow_{\left(g\nearrow\nearrow\nearrow^{i}\right)}\right)}\nearrow^{\left(j\nearrow\nearrow^{k}\right)} \qquad (69.2)$$

$$H\Big(4, HR\Big(4, H\big(5, e, HL\big(6, HR(6, H(6, a, b), c), d\big)\big), HL\big(5, H(6, g, i), f\big)\Big), H(5, j, k)\Big),$$

(69.3)

The unary operator is essentially a binary operator with a neutral element as the first operand - the object of the operation, since there is an obvious circumstance: the operation cannot be performed on anything. If a direct operation is meant, then for the sake of brevity, it is customary not to indicate this operator, which, without assessing the correctness of the rule itself, probably caused the aforementioned confusion in the definition of the hyperoperator. If the inverse operator is meant, then it must be indicated, but again, for the sake of brevity, if possible, without indicating the neutral element. However, since the inverse second-order unary hyperoperator (unary division operator) is not used, one has to write its full binary form with a neutral element: **1/a**. I personally had to explicitly use this form of notation, doing so for the sake of readability of the program code, when in set of code rows it is required to follow the sequence of certain operations without regard to their quality (quality of forward or inverse action) but keeping the same order of operands. As a result of this technique, the expression looked like this: **y=1/a*b/c**, although in my opinion the expression in the form **y=/a*b/c** is also well readable and intuitive as everyone understands which neutral element is meant by default in a factorial case. Also, a stand-alone **/a** or **:a** could be read as the reciprocal of **a**, in the same way that **–a** is considered as the opposite of **a**.

There is a saying by the German mathematician Leopold Kronecker that God invented integers, everything else is the work of human hands. In the context of the above and keeping in mind zero-order hyper-operators (increment/decrement) we can specify this statement to the following: God came up with 0 as the beginning and 1 as the measure, and the rest was invented by mathematicians.

References:

[1] Hyperoperation https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperoperation

[2] Successor_function https://en.wikipedia.org/wiki/Successor_function

[3] Addition https://en.wikipedia.org/wiki/Addition

[4] Multiplication https://en.wikipedia.org/wiki/Multiplication

[5] Exponentiation https://en.wikipedia.org/wiki/Exponentiation

[6] Tetration https://en.wikipedia.org/wiki/Tetration

[2] Dmitrii V. Guryanov, Multiplical concept https://vixra.org/abs/2205.0150

In Russian

Анализ гипероператора

Дмитрий Владимирович Гурьянов

dmitriigur76@gmail.com

Аннотация. настоящей статьи в своём качестве продолжения развития концепции мультипликала – это дать ответ на ранее поднятый вопрос о том, почему место оператора в функции **y = e↗^{x}** занял оператор - степенная башня с левой ассоциативностью, а не с общепринятой правой (Тетрация). Ответ на этот вопрос требует проведения анализа гипероператора. В настоящей работе рассмотрена природа гипероператора, даны определения и предложены альтернативные пути развития гипероператора.

Ключевые слова: Правая ассоциативность, Левая ассоциативность, Коммутативность, Гипероператор, Гипероперация, Порядок гипероператора, Гиперкорень, Гиперлогарифм, Нейтральный элемент, Прямой оператор, Обратный оператор, Основной обратный оператор, Гиперфункция, Прямые гиперфункции, Обратная гиперфункция, Перевёрнутая обратная гиперфункция, Совершенно монотонная функция, Инкремент, Сложение, Умножение, Возведение в степень, Ускорение, Тетрация.

Предыдущая связанная статья: Концепция мультипликала https://vixra.org/abs/2205.0150

Как известно, с увеличением порядка операторов увеличивается количество направлений или ответвлений их дальнейшего развития, в частности на четвёртом порядке возникает бифуркация направления ассоциативности. Оба варианта имеют право на существование, но тем не менее, если это возможно, то следует разобраться в том, какое из ответвлений следует считать общим (нормальным, центральным), а какое частным (аномальным, страничным), и почему.

Согласно общепринятого определения гипероператор – это многократное проведение операций с использованием на один порядок низшего гипероператора для последовательности из равных первому операнду чисел, и в равном второму операнду количестве. При этом о такой определяющей характеристике, как количество производимых операций, намерено ничего не сообщается, ибо оно зависит от порядка гипероператора, что свидетельствует о наличии несовершенства, отсутствия универсальности его определения. Так для сложения количество итераций операций инкремента (увеличения на единицу) равно значению второго операнда, для остальных гипероператоров оно на 1 меньше согласно общему представлению о бинарных операторах.

Следствием этого является некоторая путаница в словесном описании производимых действий. Например, что-бы умножить число на n, говорят, нужно его сложить самим с собой n раз. Хорошо, умножаем число на 1, для этого складываем его самим с собой 1 раз, и получаем в два раза больше. Для возведением в n-ную степень предписывают перемножить число самим с собой n раз. Результат также предсказуем, возводим число в первую степень, перемножив его самим с собой 1 раз, и получаем его квадрат. Наш язык подспудно требует разрешения данного противоречия.

Предположим то, что в более правильной формулировке число не самим с собой нужно складывать или умножать, а просто складывать или умножать n раз, где число n - это второй операнд операции умножения или возведения в степень соответственно. Для того, что бы привести последовательность в соответствие с новой формулировкой, к одному из краёв последовательности необходимо добавить ещё один оператор, предположительно прямого действия. Но поскольку операторы бинарные, то добавляя ещё один оператор нельзя не закончить начатое, и необходимо добавить в последовательность некий замыкающий квази-операнд или нейтральный элемент N. Принимая во внимание тот очевидный факт, что нейтральный элемент не окружен двумя операторами, как другие операнды в последовательности, мы предполагаем от противного то, что близстоящие друг к другу оператор и операнд, за исключением добавляемого нейтрального элемента, функционально взаимно ассоциированы и образуют одну пару.

Ответ на этот вопрос о том, с каким из окружающих операндов – первым (левым) или вторым (правым) функционально ассоциирован оператор предопределит положение нейтрального элемента в последовательности, будь то в начале (слева) или в конце (справа) последовательности.

Общепринятое выполнение операций сложения/вычитания и умножения/деления слева на право для последовательности из произвольно выбранных чисел и при наличии в последовательности операторов как прямого действия: сложения или умножения, так и обратного: вычитания или деления соответственно предопределяет ассоциативность бинарного оператора со вторым (правым) операндом, поскольку только при наличие ассоциативности в принципе и только при наличии ассоциативности оператора со вторым (правым) близстоящим операндом позволяет неограниченную перестановку местами пар (оператора и операнда) в последовательности без изменения результата вычисления последовательности (см. иллюстрацию). Следствием этого является расположение нейтрального элемента в начале последовательности (слева). Общий подход в рассмотрении гипероператора таков, что каждый числовой элемент последовательности, кроме нейтрального элемента, является вторым операндом, то есть является слагаемым/вычитаемым к чему либо, или умножителем/делителем чего либо и т.д.

Традиционное представление о проверке коммутативности оператора предполагает перемещение операндов отдельно без перемещения операторов, что равно как и при перемещении ложно ассоциированной пары из оператора и его первого операнда разрывает его действительную ассоциативную связь со вторым операндом и приводит к хорошо известной так называемой некоммутативности обратных гипероператоров первого и второго порядка. В некотором смысле проблема их некоммутативности решается. Перестановка возможна, но только в качестве перестановок в последовательности отдельных операций, состоящих из оператора и второго операнда. Назовём это свойство условной коммутативностью, то есть коммутативностью с условием перестановки пары из оператора и второго операдна целиком.

Пара оператора и второго операнда формирует собой операцию, которую можно рассматривать как капсулу, где оператор определяет качественную характеристику операции (внутреннюю логику зависящую от порядка гипероператора и его направления: прямого или одного из двух видов обратного), а второй операнд определяет её количественную характеристику. Операция – это субъект воздействия, объектом воздействия является первый операнд бинарного оператора. Именно так, поскольку когда мы, например, умножаем состоящее из мириад атомов яблоко на три, то в результате действия мы представляем себе три отдельных идентичных яблока как три отдельных идентичных состоящих из мириад атомов совокупностей, а не миллиард отдельных трех атомных молекул, где в каждой молекуле по атому от каждого яблока, что можно было бы представить себе при умножении тройки на яблоко. И это не смотря на то, что в результате общее число атомов одинаково в обоих вариантах представления результата операции.

Ещё со школы мы знаем, что от перемены мест операндов результат сумма и произведения не меняются не по количеству, не по размерности, а значит вроде как нет никакого смысла выискивать функциональные различия операндов, так сказать, заниматься «поисками истины». Но всё же мне представляется то, что для проведения анализа гипероператоров необходимо абстрагироваться от данного стереотипа, подойти критически к происходящему в гипероперациях.

Очевидно то, что в последовательности однопорядковых операций первый операнд каждого бинарного оператора - это не просто число - это результат операции, где рассматриваемый нами первый операнд является вторым операндом в капсуле со своим собственным оператором. Таким образом для того, что бы «работать» с любым первым операндом из последовательности как с объектом необходимо предварительно совершить операцию, в которой рассматриваемый первый операнд является вторым, и так далее по цепочке назад к причинам. Первый операнд бинарной операции на то и первый, что получен в результате предыдущей операции в логике причин и следствий. Цепочку восхождения к причинам прерывает нейтральный элемент, возглавляющий последовательность, и не имеющий своего оператора. На ниже приведённом примере для вычисляемой последовательности в круглых скобках находятся объекты операций – первые операнды, а сами операции как субъекты, состоящие из отдельных пар операторов и вторых операндов находятся вне скобок, но выделены одним общим для каждой отдельной пары цветом (прямые операции красным, обратные синим):

$$\left(\left(\left(\left((\mathrm{N} \blacktriangledown \mathrm{a}) \blacktriangle \mathrm{b}\right) \blacktriangledown \mathrm{c}\right) \blacktriangle \mathrm{d}\right) \blacktriangledown \mathrm{e}\right) \blacktriangle \mathrm{f}, \quad (49.1)$$

Сказанное также является доводом в пользу выполнения операций в последовательности операторов одного порядка, но смешанного качества (прямого и обратного) в направлении слева направо (левой ассоциативности) по умолчанию в качестве общего правила, поскольку исходя от противного, выполнение таких операций справа налево при любом из вариантов ассоциации операнда и оператора или без такового не обеспечивает возможность перестановки ни операндов ни операций с сохранением результата вычисления для порядков гипероператоров до второго включительно. Выполнение справа налево разрывает действительную связь между оператором и его вторым операндом, ставит на место последнего результат предыдущего вычисления, что равносильно приводящему к аномалиям приёму использования скобок, раскрытие которых может заставить инвертировать операторы на противоположные. Нарушается стройность и красота арифметических действий. К тому же внутри скобок каждое отдельное выражение должно начинаться с операции над нейтральным элементом:

$$N \blacktriangledown \left(N \blacktriangle \mathrm{a} \blacktriangle \left(N \blacktriangle \mathrm{b} \blacktriangledown \left(N \blacktriangle \mathrm{c} \blacktriangle \left(N \blacktriangle \mathrm{d} \blacktriangledown (N \blacktriangle \mathrm{e} \blacktriangle \mathrm{f})\right)\right)\right)\right). \quad (49.2)$$

В случае использования скобок субъектом возможной перестановки являются ассоциированные пары, состоящие из операторов и выражений в скобках в качестве второго операнда для своих операторов. Проведение перестановок всех выражений в скобках заодно со своими ассоциированными операторами, приводит к визуальной смене порядка операндов в последовательности на обратный и вроде бы как к выполнению последовательности операций слева направо, тем не менее это не избавляет нас от необходимости раскрытия скобок и от необходимости выполнения операций с нейтральным элементом, что само по себе всегда имеет наивысший приоритет исполнения, каждый раз перед исполнением следующей по порядку операции в последовательности:

$$N \blacktriangledown (N \blacktriangle (N \blacktriangledown (N \blacktriangle (N \blacktriangledown (N \blacktriangle \mathrm{f} \blacktriangle \mathrm{e}) \blacktriangle \mathrm{d}) \blacktriangle \mathrm{c}) \blacktriangle \mathrm{b}) \blacktriangle \mathrm{a}). \quad (49.3)$$

Вычисление последовательности из операций одного порядка и только одного качества (или прямого или обратного) является частным случаем по отношению к выше рассмотренному, следовательно результат вычисления такой последовательности не может быть аргументом в оправдание произвольности выбора или противоположного выбора направления выполнения операций в последовательности в общем случае. Тут следует констатировать то, что принятое направление вычисления справа налево, являющейся основой оператора Тетрация, степенной башни нарушает общее правило.

Вообще, очевидно то, что направление вычислений в последовательности однопорядковых операторов (общепринято слева на право) и позиции первого и второго операнда (общепринято слева первый, справа второй) взаимно обусловлены. Так, если вычисления производились бы справа налево, то первым операндом бинарного оператора считался бы правый операнд, или если бы правый операнд бинарного оператора был бы первым, то направление выполнения действий необходимо было бы совершать справа налево.

Тут является важным соблюдение единообразия направления вычисления для операций всех порядков, так выбирая один (общепринятый) из двух вариантов для операторов низших порядков его следует применять и для операторов высших порядков. Как это отмечено, смена направления вычисления означает эффективную взаимную смену первого и второго операнда местами, но так как в операциях операнды несут совершено разные функции, то взаимная смена их положений полностью меняет логику вычисления. По этой причине смена направления вычисления при переходе от нижестоящих к вышестоящим операторам не запрещена, но требует объяснения причины данного решения, доказательства его необходимости.

Как известно, для прямого бинарного гипероператора n-го порядка в общем случае существует два обратных гипероператора того же порядка, соответственно это гиперкорень и гиперлогарифм. Для порядков оператора ниже третьего эти два обратных гипероператоров функционально неразличимы друг от друга и представляют собой операторы вычитания и деления для первого и второго порядка гипероператора соответственно. Для порядков гипероператора от третьего и выше методологически можно выделить из соответствующей пары основной и второстепенный обратные гипероператоры.

Основным обратным гипероператором следует считать тот оператор, чья операция приведёт результат предварительно проведённой прямым оператором операции в исходное состояние за равный выраженный в единицах качества гипероператора количественный интервал, ибо количественно равный интервал показывает на полную противоположность используемой в операции единицы качества обратного гипероператора оператора по отношению к прямому, что и делает его исключительным. За количественную характеристику операции отвечает второй операнд, а это означает то, что значения второго операнда у прямого гипероператора и основного обратного должны быть равны при проведении проверки выбора основного обратного гипероператора. В условиях выполнения операций в последовательности слева направо данному критерию отвечает гиперкорень, таким образом принятый в качестве основного обратного гипероператора. Далее по тексту именно он имеется в виду под обратным гипероператором или гипероператором обратного действия по умолчанию. Ниже также раскрыто и то, почему разделение на основной и второстепенный обратные гипероператоры имеет принципиальное значение в рамкам проводимого анализа.

Гиперлогарифм не использует количественную характеристику, а возвращает её значение в качестве результата операции. Гиперлогарифм мог бы быть основным обратным гипероператором в случае, если в прямом гипероператоре произошла бы взаимная смена мест его операндов, что происходит при противоположном (справа налево) направлении вычисления операций в последовательности. Вычисление в степенной башни справа налево как раз производится таким образом, как будто в операторе возведения в степень произведена смена мест операндов, хотя из определения самого оператора возведения в степень этого не следует. Здесь имеет место некоторое противоречие. Ниже продемонстрировано то, как при выполнении операций в последовательности справа налево (правая ассоциативность) гиперлогарифм берёт на себя функцию основного обратного гипероператора.

Бинарный гипероператор прямого действия – это начатая на один порядок низшим нейтральным элементом последовательность из равного второму операнду определяемого гипероператора по модулю количества производимых бинарных операций с использованием на один порядок низшего гипероператора, в которых вторым операндом являются копии первого операнда определяемого гипероператора, и где качество (прямое/обратное) этого гипероператора определяется арифметическим знаком второго операнда определяемого гипероператора, как следует: при положительном знаке качество прямое, при отрицательном качество обратное. Определении функции гипероператора имеет вид следующего уравнения:

$$HO(1,n,a,b) := HO_{|b|}\Big(S(b), n-1, ..\, HO_2\big(S(b), n-1, HO_1(S(b), n-1, N(n-1, a), a), a\big)\ ..\, ,a\Big), \tag{50.1}$$

$$HO(1,n,a,b) := HO_b\Big(1, n-1, ..\, HO_2\big(1, n-1, HO_1(1, n-1, N(n-1, a), a), a\big)\ ..\, ,a\Big) \text{ при } b \geq 0, \tag{50.2}$$

$$HO(1,n,a,b) := HO_{-b}\Big(-1, n-1, ..\, HO_2\big(-1, n-1, HO_1(-1, n-1, N(n-1, a), a), a\big)\ ..,a\Big) \text{ при } b \leq 0, \tag{50.3}$$

$$a^{\uparrow(n)}b = N(n-1, a)^{\uparrow(n-1)}a_1{}^{\uparrow(n-1)}a_2 \ldots {}^{\uparrow(n-1)}a_b \text{ при } b \geq 0,\quad a_1 = a_2 = a_3 = .. = a_n = a \tag{51.1}$$

$$a^{\uparrow(n)}b = N(n-1, a)^{\downarrow(n-1)}a_1{}^{\downarrow(n-1)}a_2 \ldots {}^{\downarrow(n-1)}a_{-b} \text{ при } b \leq 0,\quad a_1 = a_2 = a_3 = .. = a_n = a \tag{51.2}$$

где **HO(d, n, a, b)** – гипероператор; **d** – качество гипероператора (прямое или обратное), принимает следующие значения: **+1** для прямого гипероператора, **–1** для обратного гипероператора; **n** – порядок гипероператора, натуральное число, для вышеприведённого определения **n>0**; **a** – первый операнд гипероператора; **b** – второй операнд гипероператора; **N(n, a)** – нейтральный элемент n-ого порядка для числа a; **S(x)** – функция, возвращающая арифметический знак аргумента (1 при положительном значении, –1 при отрицательном); **HO_i(d, n, a, b)$_i$** – гипероператор **i**-ой вычислительной итерации; $\mathbf{a^{\uparrow(n)}b}$ – прямой гипероператор n-ого порядка; $\mathbf{a^{\downarrow(n)}b}$ - обратный гипероператор **n**-ого порядка.

В случае, если второй операнд положительный, то применяется прямой гипероператор низшего порядка. В обратном случае применяется обратный гипероператор низшего порядка. Количество операций равно модулю второго операнда гипероператора.

Факт использования обратного гипероператора низшего порядка в определении гипероператора высшего порядка показывает на очевидную но критическую зависимость последнего от произведённого выбора основного обратного гипероператора и следовательно на правильность решения о консервации направления вычисления последовательности операций при переходе с низшего на высший порядок гипероператора.

В определении гипероператора нулевого порядка (инкремент/декремент) второй операнд игнорируется (оператор эффективно унарный), качество гипероператора (прямое инкремент / обратное декремент) и результат его действия определяется значением d:

$$HO(d,0,a,b) := a + d. \quad (52)$$

Нейтральный элемент – это функция от совершаемой с ним операции (первой в последовательности) определения гипероператора, точнее это функция от порядка **n** её оператора и значения её второго операнда **a**. Таким образом первая в последовательности однопорядковых операций сама определяет значение своего первого операнда – нейтрального элемента:

N(n, a)⮛a⮙b⮛c⮙d.   (53)

В данном случае первая операция в последовательности, та что производится над нейтральным элементом, является тем, что мы понимаем под операцией с использованием унарного оператора. Таким образом можно заключить то, что нейтральный элемент – это функция унарной операции. Значение нейтрального элемента не зависит от качества оператора (прямого ⮙ / обратного ⮛), но зависит только от его порядка.

Для получения значения нейтрального элемента необходимо произвести обратную бинарную операцию **n**-ого порядка, где оба операнда являются вторым операндом **a**:

$$N(n, a) = HO(-1, n, a, a) \text{ при } n > 0, \quad (54)$$

где **N(n,a)** - функция нейтрального элемента; **n** – порядок гипероператора; **a** – произвольное вещественное число; **HO(–1,n,a,b)** – обратный бинарный гипероператор **n** -ого порядка с операндами **a** и **b**, первым и вторым соответственно.

Как можно заметить, значение нейтрального элемента не зависит от качества (прямого/обратного) гипероператора, это принципиально.

Таблица нейтральных элементов N для числа «a» в зависимости от порядка гипероператора

Порядок гипероператора, n	Прямой гипероператор / Обратный гипероператор	Вид операции по поиску N	Результат N или Уравнение для N
0	Инкремент / Декремент	-	N = a
1	Сложение / Вычитание	a – a	0
2	Умножение / Деление	a / a	1
3	Степень / Корень	$\sqrt[a]{a}$	N = $\sqrt[a]{a}$
4	Ускорение / Замедление	$a \swarrow^{a}$	N = $\sqrt[N^{(a-1)}]{a}$

Исключением является способ получения нейтрального элемента для гипероператоров нулевого порядка (инкремента/декремента). Поскольку последние – это атомарные операторы, как элементарные кирпичики, из которых построена вся математика, и также не являются бинарными, то есть не обладают вторым операндом, задающим в общем случае разную количественную характеристику операций, то нейтральным элементом для всех них является исходное число **a** - единственный операнд гипероператора.

Можно обратить внимание на то, что при определении нейтрального элемента используется гиперкорень как основной обратный гипероператор. Если было бы принято направление вычисления в последовательности справа налево, то справедливо использовался бы гиперлогарифм в качестве такового, и в этом случае для порядков выше первого нейтральный элемент был бы равен 1. На мой взгляд данная инвариантность не может являться признаком исключительности логарифма в качестве потенциального основного обратного гипероператора, поскольку она не распространяется для порядков гипероператора ниже второго, а значит не универсальна.

Не смотря на то, что значение нейтрального элемента зависит от значения операнда **a**, тем не менее значение нейтрального элемента может быть инвариантом для определённой или неопределённой последовательности однопорядковых операций с произвольным качеством (прямым/обратным) операторов и с произвольными вторыми операндами. Наблюдается безусловное свойство инвариантности нейтрального элемента для последовательностей гипероперации до второго порядка включительно. Так для нулевого порядка нейтральный элемент инвариант, поскольку он исходное число **a**, для первого и второго порядка вообще константа (см. таблицу).

Если подходить математически строго, то результат вычисления нейтрального элемента второго порядка с использованием нуля в качестве операнда носит неопределённое значение, им может быть любое отличное от нуля конечное число. Если не подходить строго и рассмотреть оператор деления как отношение, при этом подразумевая то, что отношения равных равно единице, то можно принять единицу в качестве нейтрального элемента в данном случае, одновременно имея в виду то, что единица принадлежит множеству чисел возможного результата деления ноля на ноль. В некотором смысле не строгий подход является более «строгим» поскольку сужает бесконечное количество решений операции деления ноля на ноль до одного решения, до значения величины единицы математической меры, то есть до самой единицы. Также можно рассмотреть определение нейтрального элемента через предел: $\lim_{x \to 0} {x}/{x}$.

Не строгий подход имеет более широкое практическое приложение. В частности с ним согласуется используемый в общепринятом определении оператора произведения постулат от том, что мнимое произведение нулевого количества множителей равно 1, без чего было бы невозможно сформулировать концепцию мультипликала, поскольку если, напротив, подходить строго, то даже $\mathbf{a^0}$ при $\mathbf{a \neq 0}$ не есть единица, а неопределенность, так как согласно общепринятого определения оператора возведения в степень через оператор произведение множители **a** у последнего как таковые отсутствуют и потому результатом такой операции должна быть неопределённость. Но вопреки этому и в общем-то для возможности проведения математических операций и преобразований общепринята 1 в качестве результата $\mathbf{a^0}$ при $\mathbf{a \neq 0}$. Таким образом если уже в качестве операции мнимого произведения нулевого количества множителей общепринята 1, что де-факто уже стало частью общепринятого определения самого оператора произведения, то результат такой операции не может зависеть от значения этих множителей, поскольку их нет. Не возможно зависеть от гипотетического значения того, чего нет.

Следствием предложенного здесь определения гипероператора прямого действия является возврат гипероператором нейтрального элемента в качестве своего результата в случае, если второй его операнд **b** равен 0:

$$HO(1, n, a, 0) = N(n - 1, a). \quad (55)$$

Так, не подходя строго и исходя от N(2, 0) = 0 / 0 = 1 в качестве следствия имеем: 0^0 = HO(1,3, 0, 0) = N(2, 0) = 1, поскольку в таком случае нейтральный элемент второго порядка инвариант от операнда, константа и равен 1.

В этом смысле более строгим, чем общепринятое, является определение оператора возведения в степень как частного случая для третьего порядка приведенного здесь определения прямого гипероператора с использованием нейтрального элемента, поскольку при равном нулю втором операнде его результат явно зависит от значения первого операнда (основания степени) при строгом подходе, так он неопределён при нулевом значении первого операнда: N(2, 0) не определено при строгом подходе.

Бинарный гипероператор обратного действия (гиперкорень) определяется в неявном виде через уравнение для определения гипероператора прямого действия, но с взаимной сменой мест возвращаемого результата гипероперации и её второго операнда в данном уравнении как следует:

$$x = HO(-1, n, a, b), \quad (56.1)$$

$$a = HO_{|b|}\Big(S(b), n - 1, .. HO_2\Big(S(b), n - 1, HO_1\Big(S(b), n - 1, N(n - 1, x), x\Big), x\Big) \; .. , x\Big) \text{ при } b \neq 0, \quad (56.2)$$

$$a = HO_b\Big(1, n - 1, .. HO_2\Big(1, n - 1, HO_1\Big(1, n - 1, N(n - 1, x), x\Big), x\Big) \; .. , x\Big) \text{ при } b > 0, \quad (56.3)$$

$$a = HO_{-b}\Big(-1, n - 1, .. HO_2\Big(-1, n - 1, HO_1\Big(-1, n - 1, N(n - 1, x), x\Big), x\Big) \; .. , x\Big) \text{ при } b < 0, \quad (56.4)$$

$$x = a^{\downarrow(n)}b, \quad (57.1)$$

$$a = N(n - 1, x)^{\uparrow(n-1)}x_1{}^{\uparrow(n-1)}x_2 \; ... \; {}^{\uparrow(n-1)}x_b \text{ при } b > 0, \; x_1 = x_2 = x_3 = .. = x_n = x \quad (57.2)$$

$$a = N(n - 1, x)^{\downarrow(n-1)}x_1{}^{\downarrow(n-1)}x_2 \; ... \; {}^{\downarrow(n-1)}x_{-b} \text{ при } b < 0, \; x_1 = x_2 = x_3 = .. = x_n = x \quad (57.3)$$

где **x** – указатель на возвращаемое значение бинарного гипероператора обратного действия.

Гиперкорень также выражается компактно через прямой гипероператор того же порядка с подстановкой на место первого операнда прямого гипероператора:

$$a = HO(1, n, HO(-1, n, a, b), b). \quad (58)$$

Обратному гипероператору, кроме обратного гипероператора первого порядка (вычитание), запрещено подавать 0 в качестве второго операнда в общем случае. Очевидно в качестве исключения можно допустить делить на ноль только ноль, но при строгом подходе результат этой операций может быть любым числом, как это видно из следующего уравнения, выведенного из предыдущих:

$$0 = N(1, x). \quad (59.1)$$

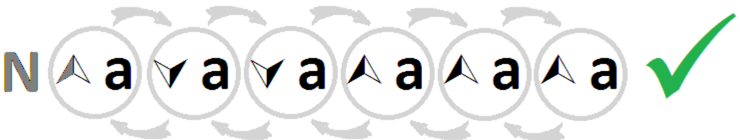
Также в качестве исключения можно допустить извлечение корня нулевой степени только из единицы, и результат этой операции также может быть любым числом, но кроме нуля при строгом подходе, по аналогии с предыдущим:

$$1 = N(2, x). \quad (59.2)$$

Существует ещё одно общее рекуррентное и при этом явное решение для гиперкорня, которое, напротив, в общем случае не применимо для определения гипероператора как последовательности операций с левой ассоциативностью, но применимо для него же как последовательности операций с правой ассоциативностью, впрочем, при которой, гиперкорень не является основным обратным гипероператором:

$$x = HO(-1, n, a, b), \quad (60.1)$$

$$x = HO\big(-1, n-1, a, HO(1, n, x, b-1)\big) \text{ при } n \geq 2, \quad (60.2)$$



В последовательности однопорядковых операций смешанного качества (прямого $\curlywedge$ / обратного $\curlyvee$) с идентичными операндами “**a**” (кроме нейтрального элемента в качестве первого операнда первой операции) возможна условная коммутативность, наблюдаемая вне зависимости от величины порядка гипероператоров в последовательности (см. рис.). Этим правилом проверяется корректность выбора внутренней логики обратного гипероператора как противоположности прямого, и что принципиально отличает обратный гипероператор (гиперкорень) от альтернативного обратного гипероператора (гиперлогарифма).

Проверка соблюдения взаимного равенства результата вычисления в левых и правых последовательностях уравнений в зависимости от направления проводимого вычисления (направления ассоциативности):

$$a \curlyvee a \curlywedge a = a \curlywedge a \curlyvee a, \quad (61.1)$$

$$(a \curlyvee a) \curlywedge a = (a \curlywedge a) \curlyvee a \Leftrightarrow \left(\sqrt[a]{a}\right)^{a} = \sqrt[a]{(a^{a})} \text{ - левая ассоциативность,} \quad (61.2)$$

$$a \curlyvee (a \curlywedge a) \neq a \curlywedge (a \curlyvee a) \ \Leftrightarrow \sqrt[a]{(a^{a})} \neq a^{(\sqrt[a]{a})} \text{ – правая ассоциативность,} \qquad (61.3)$$

где $\curlyvee$ - извлечение корня, $\curlywedge$ - возведение в степень.

Но если $\curlyvee$ представляет логарифм, то равенство не соблюдается для левой ассоциативности и соблюдается для правой:

$$(a \curlyvee a) \curlywedge a \ \neq (a \curlywedge a) \curlyvee a \Leftrightarrow \ (\log_{a} a)^{a} \neq \log_{a}(a^{a}) \text{ - левая ассоциативность,} \quad (61.4)$$

$$a \curlyvee (a \curlywedge a) = a \curlywedge (a \curlyvee a) \ \Leftrightarrow \ \log_{a}(a^{a}) = a^{\log_{a} a} \text{ – правая ассоциативность.} \qquad (61.5)$$

Для любого порядка гипероператора соблюдение данного равенства, проверяемое перестановкой производимых с одним значением **a** для обоих операндов смешанных (прямых/обратных) операций зависит от выбора применяемого в качестве основного обратного гипероператора, что в свою очередь предопределено направлением вычисления последовательности.

В качестве следствия способа определения нейтрального элемента начиная со второго порядка гипероператора включительно и выше, при значении второго операнда, равном 1, гипероператор возвращает свой первый операнд:

$$\text{HO}(d, n, a, 1) \ = \text{HO}(-d, n, a, 1) = \text{HO}_1\big(1, n-1, \text{N}(n-1, a), a\big) = a \text{ при } n \geq 2. \quad (62)$$

Причём последнее утверждение действительно как для гипероператора прямого, так и для гипероператора обратного действия, поскольку меняемые местами в уравнении определения гипероператора результат гипероператора и его второй операнд **a** равны между собой исходя из последнего уравнения.

По причине бинарности гипероператоров общим для всех гипероператоров прямого действия замечательным свойством является возврат 4 в случае того, если оба его операнда равны 2, что наблюдается вне зависимости от порядка бинарного гипероператора, за исключением гипероператора нулевого порядка (инкремента) по причине его не бинарности:

$$\text{HO}(1, n, 2, 2) \ = \ 4 \text{ при } n \geq 1. \quad (63)$$

Ещё одним интересным наблюдаемым свойством гипероператоров прямого действия является стремление к 1, при стремлении второго операнда в $-\infty$, что наблюдается для четвёртого и выше порядка гипероператоров:

$$\lim_{x \to -\infty} \text{HO}(1, n, a, x) = \ 1 \text{ при } n \ \geq \ 4. \qquad (64)$$

Результаты действия обратных гипероператоров от четвёртого порядка и выше относятся к множеству трансцендентных чисел согласно определения последнего. А в общем результат действия обратного гипероператора – это число из счётного множества по определению, поскольку множество таких чисел является результатом комбинирования чисел из двух счётных множеств для подстановки на место первого и второго операндов обратного гипероператора. По порядку обратного гипероператора его результат можно отнести к счётному подмножеству соответствующего порядка, если в качестве операндов обратного гипероператора использованы числа как результаты последовательности гипероопераций равного или ниже порядков вплоть до операций инкремента/декремента в качестве первой исходной гипероперции из последовательности. Так, в общем случае все целые числа, как результат вычитания целых, полученных в результате инкремента/декремента – это счётные первого порядка; все рациональные, полученные в результате деления целых или рациональных, полученных в результате деления целых или рациональных – это счётные второго порядка; результаты извлечения корня, одновременно являясь алгебраическими, как результат извлечения корня из целых, рациональных, или алгебраических, полученных в результате извлечени корня из целых, рациональных или алгебраических – это счётными третьего порядка, а результаты замедления, по аналагичной схеме – это счётные четвёртого порядка, и так можно продолжать далее.

Несмотря на то, что результат замедления и результат извлечения корня относятся к иррациональным числам и для кого-то могут выглядеть или восприниматся схожим образом, они сущностно различные. Равно как рациональное число нельзя представить через разницу целых, а алгебраическое иррациональное нельзя представить в виде дроби рациональных чисел, результат замедления нельзя представить в виде результата извлечения корня степени алгебраического числа от алгебраического числа. Насколько целые отличаются от рациональных, настолько рациональные отличаются от алгебраических иррациональных, настолько последние отличаются от результата замедления, все они отличаются друг от друга всего лишь одним порядком гипероператора. Но общим свойством всех счётных чисел порядка выше первого является их нецелость, автоматически означающая практическую неточность их значения, получаемого при практически конечном количестве рекурсий обратного оператора, с использованием которого данные числа получены.

Гиперлогарифм можно выразить неявно и компактно через прямой гипероператор:

$$c = HO(1, n, a, HL(n, a, c)), \quad (65)$$

где **HL(n,a,c)** – гиперлогарифм **n**-го порядка **c** по основанию **a.**

Можно обратить внимание на то, что в отличии от решения для обратного гипероператора в решении для гиперлогарифма, последний подставляется на место второго операнда прямого гипероператора, что обуславливает его применимость в качестве основного обратного гипероператора при вычислении последовательности справа налево.

Записать гиперлогарифм некомпактно, а именно в виде уравнения для последовательности операций низшего порядка, как это возможно для обратного гипероператора, не представляется возможным, поскольку таких операций не может быть нецелое число. Данное техническое препятствие обесценивает гиперлогарифм в качестве потенциально основного обратного гипероператора, соответственно дискредитирует направление выполнение операций в последовательности справа налево (правая ассоциативность), при котором гиперлогарифм должен был бы являться таковым.

Таблица результатов бинарного гипероператора прямого действия при различных проверочных значениях аргументов

Наименование гипероператора	Сложение	Умножение	Возведение в степень	Ускорение	Гипер-оператор 5-го порядка	Тетрация
Порядок гипероператора	1	2	3	4	5	-
HO(1,n,a, –∞)	–∞	–∞	0	1	1	?
HO(1,n,a, 0)	a	0	1	$\sqrt[a]{a}$	$a \swarrow^{a}$	1
HO(1,n,a, 1)	a + 1	a	a	a	a	a
HO(1,n,2, 2)	4	4	4	4	4	4

Для сокращения записи можно определить синонимы гипероператоров:

$$H(n, a, b) = HO(1,n,a,b), \quad (66.1)$$

$$HR(n, a, b) = HO(-1,n,a,b). \quad (66.2)$$

Гиперстепенная функция – это гиперфункция, представляющая собой единственный прямой бинарный гипероператор, где первым операндом является аргумент функции, а вторым операндом является произвольное вещественное число:

$$y = H(n, x, a). \quad (67.1)$$

Гиперпоказательная функция – это гиперфункция, представляющая собой единственный прямой бинарный гипероператор, где первым операндом является произвольное вещественное число, а вторым операндом является аргумент функции:

$$y = H(n, a, x). \quad (67.2)$$

Гиперкоренная функция – это гиперфункция, представляющая собой единственный обратный бинарный гипероператор, где первым операндом является аргумент функции, а вторым операндом является произвольное вещественное число:

$$y = HR(n, x, a). \quad (67.3)$$

Гиперлогарифмическая функция - это гиперфункция, представляющая собой гиперлогарифм, где основанием является произвольное положительное вещественное число:

$$y = HL(n, a, x). \quad (67.4)$$

Функцию, построенную на основе бинарного гипероператора, но в которой произведена взаимная смена мест произвольной константы и аргумента функции в их качестве первого и второго операндов бинарного оператора, можно называть «перевёрнутой» по отношению к той функции, где взаимная смена мест не произведена. Строго говоря это определение носит относительный характер, но применительно к анализу бинарных гипероператоров и построенных при их использовании функций можно условиться о том, что перевёрнутой будем считать ту функцию, где место первого операнда – объекта операции занимает произвольная константа, а место второго операнда, отвечающего за количественное изменение объекта операции, занимает аргумент функции. Таким образом показательная функция является перевёрнутой по отношению к степенной. Первый операнд гипероператора, прямого по отношению к гиперлогарифму, занимает в самом гиперлогарифме место произвольной константы, но не аргумента функции, по этой причине не будет относить гиперлогарифм к перевёрнутым функциям.

Располагая тремя бинарными гипероператорами (один прямой и два обратных) можно составить 3 гиперфункции, и к каждой из них по одной перевёрнутой, всего 6 гиперфункций n-ого порядка. Таким образом кроме вышеприведённых принципиально существуют ещё две гиперфункции, обобщающие видовые названия которых мне неизвестны. Можно отнести их к перевёрнутым обратным гиперфункциям, и назвать их следующим образом:

Перевёрнутая гиперкоренная:

$$y = HR(n, a, x). \quad (67.5)$$

Перевёрнутая гиперлогарифмическая:

$$y = HL(n, x, a). \quad (67.6)$$

Таблица гиперфункций от первого до четвёртого порядка гипероператора

<table>
<tr><th rowspan="2">Группа функций</th><th rowspan="2">Общее название функции</th><th rowspan="2">Общий вид</th><th colspan="4">Частный вид в зависимости от порядка</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Прямые функции</td><td>Гипер-Степенная</td><td>H(n, x, a)</td><td rowspan="2">$x + a \Leftrightarrow a + x$</td><td rowspan="2">$x \cdot a \Leftrightarrow a \cdot x$</td><td>$x^a$</td><td>$x\nearrow^{a}$</td></tr>
<tr><td>Гипер-Показательная</td><td>H(n, a, x)</td><td>a^x</td><td>$a\nearrow^{x}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Обратные функции</td><td>Гипер-Корренная</td><td>HR(n, x, a)</td><td rowspan="2">$x – a$</td><td rowspan="2">x / a</td><td>$\sqrt[a]{x} \Leftrightarrow x^{1/a}$</td><td>$x\swarrow^{a}$</td></tr>
<tr><td>Гипер-Логарифмическая</td><td>HL(n, a, x)</td><td>$\log_a x$</td><td>$x\nwarrow_{a}$</td></tr>
</table>

Перевёр-нутые обратные функции	Перевёрнутая гипер-коренная	HR(n, a, x)	a – x	a / x	$\sqrt[x]{a} \Leftrightarrow a^{1/x}$	$a\swarrow^{x}$
	Перевёрнутая гипер-Логарифмическая	HL(n, x, a)			$\log_x a \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_a x}$	$a\nwarrow_{x}$

Три группы гиперфункций сформированы критерию значения и роста при произвольной константе больше 1 и положительном аргументе больше 1, а также и по тому, что для порядков ниже третьего функции внутри группы функционально тождественны. Так для прямых гиперфункций значение и скорость роста не менее значения и скорости роста функции **y=x**, для обратных гиперфункций не более значения и скорости роста функции **y=x**, а для перевёрнутых обратных гиперфункций рост вообще отрицателен.

Все гиперфункции по своей математической сути разные, но тем не менее для порядков гипероператора 1 и 2 функции, принадлежащие одной группе, функционально тождественны друг другу и возвращают тождественный результат для соответствующих порядков, а также прямые гиперфункции порядков 1 и 2 есть одного вида с обратными гиперфункциями соответствующих порядков с той лишь разницей, что для обратных гиперфункций произвольная константа противоположна таковой для прямых гиперфункций относительно значения нейтрального элемента для соответствующего порядка.

Несмотря на то, что для порядков 1 и 2 все гиперфункции кроме функции **y = a / x**, являются линейными, я не стал объединять их в одно, поскольку отличия у них сущностные.

Таблица возвращаемых значений гиперпоказательной функции по основанию 2 для разных порядков «n» и значений аргумента «x»: y = H(n, 2, x)

n	**X**							
	–∞	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
1	–∞	0	1	2	3	4	5	6
2	–∞	-4	-2	0	2	4	6	8
3	0	¼	½	1	2	4	8	16
4	1	$\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[8]{2}$ 1.09050773	$\sqrt[2]{\sqrt[2]{2}} = \sqrt[4]{2}$ 1.18920712	$\sqrt[2]{2}$ 1.41421356	2	4	$4^2 = 2^4 = 16$	$16^2 = 2^8 = 256$
5	1	$x = \sqrt[x]{y = \sqrt[y]{z = \sqrt[z]{2}}}$ 1.28486975	$x = \sqrt[x]{y = \sqrt[y]{2}}$ 1.37997040	$x = \sqrt[x]{2}$ 1.55961047	2	4	$4^4 = 2^8 = 256$	$256^{256} = 2^{2048}$
Тетрация	?	–∞	0	1	2	4	$2^4 = 16$	$2^{16} = 65536$

При единичном шаге роста аргумента каждое следующее значение гиперпоказательной функции по основанию 2 - это у 4-ого порядка: 2 в степени предыдущего значения функции, у 5-ого порядка: предыдущее значения функции в собственной степени, а у функции на основе Тетрации: 2 в степени предыдущего значения функции (см. таблицу). Исходя из этих закономерностей, именно по критерию скорости роста я отнёс бы

Тетрацию к порядку 4½, как растущую быстрее функции 4-го порядка, но медленнее функции 5-го.

Также наблюдается интересная закономерность гиперпоказательных функций по основанию 2. Значение функции при аргументе, равном 4, равно значению при аргументе, равном 3, но для гиперфункции одного порядка выше рассматриваемой, что действительно начиная со первого порядка гипероператора:

$$H(n, 2, 4) = H(n + 1, 2, 3) \text{ при } n \geq 1. \quad (68)$$

Существует такое семейство аналитически заданных функций, что не сами функции, не одна из их производных (первая, вторая и далее без ограничения) не имеют экстремумов и прерываний при любых значениях аргумента в границах его определения. Для них значения функций и всех их производных либо равно нулю, либо являются константой, либо только уменьшается, либо только увеличивается. К сожалению мне неизвестно названия семейства таких функций, и если у него его нет, то его можно было бы назвать семейством «**совершенно монотонных функций**». К данному семейству относятся гиперпоказательные, гиперлогарифмические функции (список функций не исключающий). Остальные аналитически заданные функции по определению обладают данной характеристикой в интервале аргумента между собственными точками прерывания и точками экстремумов и таковыми точками для всех своих производных. К данным функциям относятся: все функции, образованные гипероператорами; эллиптическая; тригонометрические; обратные тригонометрические; гиперболические и многие другие функции. В этом случае речь идёт о совершено монотонных областях функций.

Отличная от всех остальных гиперпоказательных функций по основанию 2, построенная на основе Тетрации гиперпоказательная функция проходит через точки: **(–1,0)**; **(0,1)**; **(1,2)** (см. таблицу), через которые можно провести прямую. Следовательно в интервале аргумента от –1 до 1 у гипотетической построенной на основе оператора Тетрации гиперпоказательной функций обобщения для вещественного аргумента, имеют место экстремумы производной, то есть она несовершенно монотонна. Также очевидно и то, что она имеет прерывание при значении аргумента -2, и не известно, имеет ли она определение для аргумента левее этой точки. Данные обстоятельства являются признаками того, что данная функция не является гиперпоказательной по приведёному признаку. Более того, она имеет совпадения с двумя другими гиперпоказательными функциями в трёх точках аргумента: 0, 1, 2 с функцией третьего порядка (Экспонента) и 1, 2, 3 с функцией четвёртого порядка (Акселента) (см. таблицу), что являлось бы аномалией для гиперпоказательной функции. При этом не существует каких либо трёх точек, в которых любые построенные на основе гипероператора с левой ассоциативностью гиперпоказательные функции, включительно Экспонента и Акселента, совпадали бы в трёх точках аргумента при любых комбинациях отличных от нуля и единицы значений основания гиперстепени и произвольного множителя. Все это дискредитирует правую ассоциативность, с применением которой определен оператор Тетрация.

Вычисление степенной башни в направлении справа налево равносильно применению скобок, отрывающих второй операнд от своего оператора в последовательности, что приводит к «аномалии» в получаемом результате, где под нормальным результатом имеется в виду результат, полученный согласно определению для гипероператора, то есть с так называемой левой ассоциативностью или направлением вычисления слева на право.

Я не знаю, что именно послужило причиной выбора правой ассоциативности в операторе Тетрация. Если причиной явилась презумпция о том, что оператор высшего порядка должно быть нельзя компактно описать через операторы низших порядков, именно то удобство компактной записи, из-за которого мы, должно быть, вводим новые операторы в обиход, то я могу прокомментировать это тем, что объективная реальность существует независимо от нашего субъективного представления о ней, а математика существует независимо от нашего способа её описания. По всей видимости гипероператор третьего порядка - возведение в степень – это достаточно «могущественный» инструмент, имеющий особое качество - возможность компактно описать оператор одного порядка выше него. Кстати, в английской терминологии он так и называется: «power». Но последнее, видимо, не было учтено. По-моему, гипероператор 5-го порядка уже нельзя описать компактно через оператор возведения в степень. Очевидно, тут наступает предел «могущества» последнего.

Аргументы в пользу выбора направления вычисления последовательности в определении гипероператора

<table>
<tr><th>За направление слева направо</th><th>За направление справа налево</th></tr>
<tr><td>Геометрический рост предполагаемой гиперпоказательной функции четвёртого порядка, сформулированной на основе гипероператора четвёртого порядка, определённого как степенная башня с левой ассоциативностью, совпадает с самой функцией. (аргумент от необходимости)</td><td rowspan="2">Для порядка гипероператоров выше первого равенство единице нейтрального элемента, полученного посредством гиперлогарифма как основного обратного гипероператора для направления вычисления справа налево. Аргумент сомнительный, ибо он одновременно показывает на несовершенство.</td></tr>
<tr><td>Доказанная направленность слева направо для гипероператоров порядка ниже третьего, и последовательность в выборе направления вычисления при переходе от низших на высшие порядки гипероператоров, без необходимости их переопределения (аргумент преемственности в выборе последовательности)</td></tr>
<tr><td>Аналогично прямому гипероператор и будучи основным обратным гипероператором для направления вычисления слева направо, гиперкорень через свой второй операнд получает количественную характеристику операции, следствием чего является возможность получения гиперкорня по средствам рекуррентного уравнения, состоящего из последовательности гипероператоров низшего порядка, что невозможно для гиперлогарифма (аргумент сохранности свойств гипероператоров)</td><td>Невозможность компактной записи для гипероператора высшего порядка с использованием гипероператоров низшего порядка в качестве основания для ввода оператора следующего порядка. (аргумент от удобства)</td></tr>
<tr><td>Гиперпоказательные функции разных порядков, использующие прямые гипероператоры, определённые</td><td>Существование явного рекуррентного решения для</td></tr>
</table>

с левой ассоциативностью, нигде не совпадают друг с другом в трех точках аргумента. Являются совершенно монотонными функциями на всём интервале определения аргумента (аргумент совершенства)	гиперкорня, который, впрочем, не является основным обратным гипероператором для правой ассоциативности

Настоящим не предлагается изменить существующее правило вычисления степенной башни, подразумевающее правую ассоциативность, тем самым не предлагается переопределить Тетрацию, Пентацию, Гексацию и т.д. Но предлагается признать правомерность определения гипероператора как последовательности операций с левой ассоциативностью с закреплением за ним статуса основного определения гипероператора и выделить полученные таким образом операторы в отдельное множество. Предлагается использовать собственные имена гипероператоров, определённых согласно предложенного правила. Так для четвёртого порядка «Ускорение» и «Замедление» в качестве прямого и обратного гипероператоров соответственно.

Для того, чтобы отличать вышеописанные определённые с левой ассоциативностью гипероператоры от таковых, но определённых с правой ассоциативностью, предлагается введение обособленной общей сокращённой стрелочной нотации для гипероператоров, определённых с левой ассоциативностью, порядков выше 3-го, как следует из ниже приведённой таблицы.

Стрелочная нотация определённых с применением левой ассоциативности гипероператоров

Качество гипероператора	Порядок гипероператора, n		
	4	5	6
H(n,a,b)	$a{\nearrow}^{b}$	$a{\nearrow\nearrow}^{b}$	$a{\nearrow\nearrow\nearrow}^{b}$
HR(n,a,b)	$a{\swarrow}^{b}$	$a{\swarrow\swarrow}^{b}$	$a{\swarrow\swarrow\swarrow}^{b}$
HL(n,a,c)	$c{\nwarrow}_{a}$	$c{\nwarrow\nwarrow}_{a}$	$c{\nwarrow\nwarrow\nwarrow}_{a}$

Последовательности из гипероператоров составляются и вычисляются слева направо с приоритетом вычисления последовательности операций высшего порядка над последовательностью операций низшего порядка и с равной приоритетом гипероператоров одного порядка независимо от их качества. Ниже приведены три равнозначные записи одного примера:

$$e \nearrow\nearrow^{a\nearrow\nearrow\nearrow^{b}\swarrow\swarrow\swarrow^{c}\nwarrow\nwarrow\nwarrow_{d}} \swarrow^{f\nwarrow\nwarrow_{g\nearrow\nearrow\nearrow^{i}}} \nearrow^{j\nearrow\nearrow^{k}} \tag{69.1}$$

$$\left(e \nearrow\nearrow^{\left(\left(\left(a\nearrow\nearrow\nearrow^{b}\right)\swarrow\swarrow\swarrow^{c}\right)\nwarrow\nwarrow\nwarrow_{d}\right)}\right) \swarrow^{\left(f\nwarrow\nwarrow_{\left(g\nearrow\nearrow\nearrow^{i}\right)}\right)} \nearrow^{\left(j\nearrow\nearrow^{k}\right)} \tag{69.2}$$

$$H\Big(4, HR\Big(4, H\Big(5, e, HL\Big(6, HR(6, H(6, a, b), c), d\Big)\Big), HL\Big(5, H(6, g, i), f\Big)\Big), H(5, j, k)\Big),$$

(69.3)

Унарный оператор – это по сути бинарный оператор с нейтральным элементом в качестве первого операнда – объекта операции, поскольку имеет место очевидное обстоятельство: операция не может осуществляться над ничем. Если имеется в виду операция прямого действия, то для краткости записи принято этот оператор не указывать, что без оценки корректности самого правила скорее всего послужило возникновению вышеупомянутой путаницы в определении гипероператора. Если имеется в виду оператор обратного действия, то его обязательно указывают, но опять таки для краткости записи по возможности без указания нейтрального элемента. Тем не менее поскольку обратный унарный гипероператор второго порядка (унарный оператор деления) не общепринят для использования, то приходятся писать его полную бинарную форму с указанием нейтрального элемента: **1/a**. Мне лично приходилось явно использовать данную форму записи поступая так в угоду читаемости программного кода, когда в нескольких отдельных рядах кода требуется записать последовательность определённых операций одного порядка без оглядки на их качество (качество прямого или обратного действия), но с соблюдением порядка операндов. В результате этого приёма выражение выглядело примерно так: **y=1/a*b/c**, хотя на мой взгляд запись этого же выражения в виде **y=/a*b/c**, также хорошо читаемая и интуитивно понятная, так как все понимают то, какой нейтральный элемент имеется в виду по умолчанию в конкретном случае. Также отдельно стоящее выражение **/a** или **:a** можно было бы читать как обратное **a** по аналогии с тем, как **–a** считают противоположным **a**.

Существует высказывание немецкого математика Леопольда Кронекера о том, что Бог придумал целые числа, всё остальное дело рук человеческих. В контексте изложенного и имея в виду гипер-операторы нулевого порядка (инкремент/декремент) можно уточнить данное высказывание до следующего: Бог придумал 0 как начало и 1 как меру, а остальное придумали математики.

Ссылки:

[1] Гипероператор https://ru.wikipedia.org/wiki/Гипероператор

[2] Инкремент https://ru.wikipedia.org/wiki/Successor_function

[3] Сложение https://ru.wikipedia.org/wiki/Сложение

[4] Умножение: https://ru.wikipedia.org/wiki/Умножение

[5] Возведение_в_степень https://ru.wikipedia.org/wiki/Возведение_в_степень

[6] Тетрация https://ru.wikipedia.org/wiki/Тетрация

[7] Д.В.Гурьянов, Понятие мультипликала https://vixra.org/abs/2205.0150