Multiplical concept

by Dmitrii V. Guryanov

dmitriigur76@gmail.com

Abstract. The purpose of this article is to introduce and to describe a concept of math calculus "Multiplical". To my total surprise I have found that currently such a concept does not exist among set of math definitions in its direct and explicit form. Nevertheless there are number of areas of its practical use, where this concept would be suitable and potentially would be naturally used in its direct and explicit form, especially, in statistics, finance and economy researches and analysis and many other areas. Moreover from my perspective this concept perfectly fits into the coherent system of standard mathematical concepts and operators and should take its rightful place there. In this article also other topics are considered and some interesting conclusions are made.

Keywords: Multiplical, Multiplicand function, Factorial-multiplication, Factorial, Factor-anti-derivative, Factorization, Factor-derivative, Arithmetical function growth, Geometrical function growth, Accelent, Acceleration, Deceleration.

Following related articles:

- Singular properties: https://vixra.org/abs/2206.0003
- Hyper-operator analysis: https://vixra.org/abs/2206.0012

Table of content:

Multiplical

The concept of math calculus "multiplical" has the same type of relation towards the product operator $\prod$ as the concept of math calculus "integral" has it towards the summation operator $\sum$ (as a continuous one has it towards a discrete one) and has the same type of relation towards concept math calculus "integral" as the product operator has it towards the summation operator (as a multiplicative one has it towards a summative one). The definition of the multiplical depends on and is conditioned by its position in the bottom right corner of the following table which could be a puzzle under other circumstances.

Table of concept/operator interrelations

	Discrete	Continuous
Summative	$\sum$	$\int$
Multiplicative	$\prod$	$\rceil\!\!\lfloor$

Multiplical is an equivalent of product of infinite quantity of infinitively close to 1 (due to infinitively small power) factors which are equal to multiplicand function values raised to the power of element of multiplication and is expressed as follows:

$$F^{\bullet}(\mathrm{x}) = \rceil\!\!\lfloor f(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}}, \quad (1.1)$$

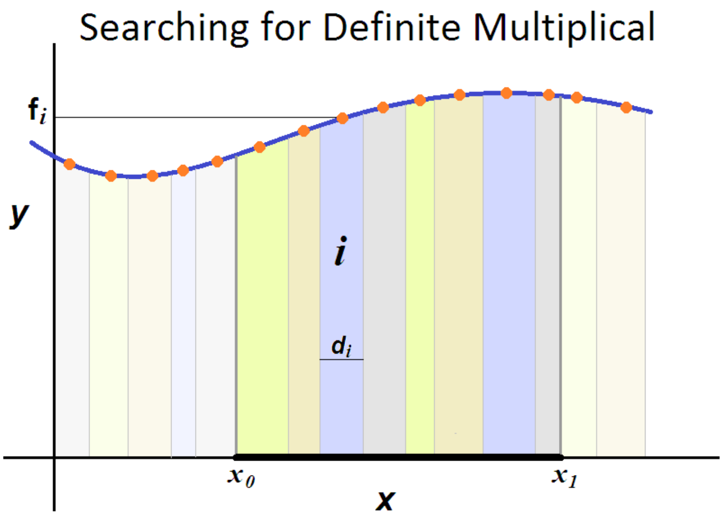
$$F^{\bullet}(\mathrm{x}) = \bullet\!\int f(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}}, \quad (1.2)$$

where $\boldsymbol{f}$ – multiplicand function; **dx** – element of multiplication; $\mathbf{F}^{\bullet}$ – indefinite multiplical of the $\boldsymbol{f}$ or factor-anti-derivative of the $\boldsymbol{f}$; $\rceil\!\!\lfloor$ - primary multiplical sign; **•∫** - alternative multiplical sign, used in circumstances of the proper symbol absence, the bullet differs it from the integral sign.

$\mathbf{F^{\bullet}(x)}$ is called as “multiplical of **f(x)**” or “multiplical of **f(x)** over **x**”.

An operation of searching for indefinite multiplical or factor-anti-derivative is called as “factorial-multiplication”, a reverse operation of searching for factor-derivative is called as “factorization”. The factorization (breaking down into a set of factors) of function is related to the factorial-multiplication of function the same way as the differentiation (breaking down into a set of differences in the sense of a set of increments or addends) of function is related to the integration of function. Those are mutually reverse operations of calculus.

As well as the integral the multiplical can be in definite and indefinite forms.



Let’s split a continuous function (the multiplicand function blue in the diagram) into great enough quantity of small segments (elementary segments in light colors), then let’s pick up one point (in orange) inside of each of elementary segments and measure a function value at it $\mathbf{f_i}$, then let’s raise each of those obtained values to power of their respective elementary segment length $\mathbf{d_i}$, that’s how we form a set of multipliers each of those belongs to respective elementary segment. Then let’s choose two different points of the function domain $\mathbf{x_0}$ and $\mathbf{x_1}$ which together define a finite size function segment (the segment of multiplication). Then let’s multiply part of those multipliers whose respective elementary segments fall into the segment of multiplication (in darker color) and obtain a certain result. Decreasing length of the largest elementary segment to zero in the limit, respectively increasing the number of elementary segments to infinity in the limit makes the result of the multiplication of those multipliers to be equal to value of the definite multiplical of the function for the segment defined by points $\mathbf{x_0}$ and $\mathbf{x_1}$. This operation describes the essence of the multiplial concept and is an analog of searching for curvilinear trapezoid area as the definite integral value. There are only two differences between two operations: 1) with the multiplical we apply multiplication (product) operation over the partition of segments, and with integral we apply summation (sum) operation. 2) with the multiplical we raise each elementary segment function value to power of the elementary segment length and with the integral we multiply each elementary segment function value to the elementary segment length. In the rest logic of two operations is identical.

The **function factorial f** represents the relative function change with respect to changes in the function argument or in the element of multiplication and has the following general definition:

$$\mathbf{f}f(\mathrm{x}) = \frac{f(\mathrm{x} + \mathbf{d}\mathrm{x})}{f(\mathrm{x})}. \qquad (2)$$

In accordance to how the whole integrand expression $\boldsymbol{f}\mathbf{(x)dx}$ is a differential of the anti-derivative **dF(x)**, the whole multiplicand expression $\boldsymbol{f}\mathbf{(x)}^{\mathbf{dx}}$ is a factorial of the factor-anti-derivative $\mathbf{fF^{\bullet}(x)}$, which is by the way one of the infinite quantity of infinitely close to 1 factors that were mentioned in the multiplical definition, and that's is why the process is called no other way than **factorial-multiplication**:

$$F^{\bullet}(\mathrm{x}) = \bullet\int \mathbf{f}\boldsymbol{F}^{\bullet}(\mathbf{x}), \quad (3)$$

On my opinion the concept of factorial is way too great and fundamental to use the term for naming **x!**. Further in the context of this article and by the default the "factorial" term is not used with reference to **x!**.

In accordance to how the **dF(x)** changes its arithmetical sign to opposite when someone does an integration in an opposite to argument growth direction **dx<0** (the accumulating result of integration is not being added but instead subtracted by this differential in the case), $\mathbf{fF^{\bullet}(x)}$ is also changes to its multiplicative inverse when someone does a factorial-multiplication in an opposite to argument growth direction (the accumulating result of factorial-multiplication is not being multiplied by but instead divided by this factorial in the case):

$$\bullet\int_{\mathrm{x}_0}^{\mathrm{x}_1} f(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}} = 1/\bullet\int_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{x}_0} f(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}}, \quad (4)$$

where $\mathbf{x_0}$ is the begin of the factorial-multiplication segment; $\mathbf{x_1}$ is the end of the factorial-multiplication segment;

A solution of a definite multiplical can be got as ratio of indefinite multiplical at the ending point to indefinite multiplical at the beginning point of the segment of multiplication respectively:

$$\bullet\int_{x_0}^{x_1} f(x)^{dx} = \frac{F^{\bullet}(x_1)}{F^{\bullet}(x_0)}. \qquad (5)$$

Just like an integral of a sum or difference equals to the sum or difference of the integrals, a multiplical of a product or ratio equals to the product or ratio of the multiplicals respectively:

$$\bullet\int (f_1(x) \times f_2(x))^{dx} = \bullet\int f_1(x)^{dx} \times \bullet\int f_2(x)^{dx}, \qquad (6.1)$$

$$\bullet\int \left({f_1(x)}\Big/{f_2(x)} \right)^{dx} = {\bullet\int f_1(x)^{dx}}\Big/{\bullet\int f_2(x)^{dx}}, \qquad (6.2)$$

Just like a definite integral of a segment equals to the sum of definite integrals of composite segments without gaps and under the condition of one direction of integration and its continuity, a definite multiplical of a segment equals to the product of definite multiplicals of composite segments without gaps and under the condition of one direction of multiplication and its continuity:

$$\bullet\int_{x_0}^{x_2} f(x)^{dx} = \bullet\int_{x_0}^{x_1} f(x)^{dx} \times \bullet\int_{x_1}^{x_2} f(x)^{dx}, \qquad (7.1)$$

$$\bullet\int_{x_2}^{x_0} f(x)^{dx} = \bullet\int_{x_1}^{x_0} f(x)^{dx} \times \bullet\int_{x_2}^{x_1} f(x)^{dx}. \qquad (7.2)$$

<u>It is forbidden for a multiplicand function to be negative inside of segment of factorial-multiplication</u> by two reasons: firstly, there is an uncertainty in the sign of $\mathbf{fF^{\bullet}(x)}$ with infinitely small and not necessarily rational exponent **dx**, and secondly, if the sign of $\mathbf{fF^{\bullet}(x)}$ is nevertheless defined as negative, then it still makes no sense to represent the multiplical as the product of an infinite number of negative multipliers, because then there inevitably arises an uncertainty in the evenness or oddness of the quantity of these multipliers, and hence the uncertainty of the state of positivity or negativity of the factorial-multiplication result. Multiplicand function modulus has to be submitted for the purpose. For the same reason, there is no designation of the module of the multiplicand function in the record of the multiplicand itself, the entire responsibility for submitting the allowed type of function is on the analyst.

An integration of a constant gives us a linear function or an arithmetical progression; in return a factorial-multiplication of a constant gives us an exponential function or a geometrical progression. Indefinite multiplical of **f(x) = A** is expressed as follows:

$$F^{\bullet}(x) = B \cdot A^{x} \quad (8),$$

where **A** - constant, **B** – non-zero finite arbitrary constant (arbitrary multiplier) that shall be included as multiplier into an indefinite multiplical expression in the correspondence to how an arbitrary constant is included as an addend into an indefinite integral expression. <u>**B** can be a negative</u> which gives us an opportunity to have indefinite multiplical as a function that is below x-axis.

Ranges of arbitrary constants

Arbitrary constant	Unreachable small	Neutral	Unreachable large
Integral arbitrary constant addend **C**	$-\infty$	0	$+\infty$
Absolute value of multiplical arbitrary constant multiplier **B**	0	1	$+\infty$

Multiplical can be expressed via integral, however this expression is indirect and bulky by the definition, it requires some additional operations: raising **e** to power of integral of natural logarithm of multiplicand function:

$$F^{\bullet}(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{\int \ln \left(f(\mathrm{x})\right)\mathrm{dx}}. \quad (9)$$

To those who thinks the multiplical is a useless and redundant entity I offer equally and without any prejudice to re-consider the reason-ability of the product operator $\prod$ existence because obviously this operator can be expressed via sum operator $\sum$ exactly the same manure, and who knows, maybe it is also redundant according to them. The following expression could seem bulky but principally not bulkier that the indirect multiplical expression that is via the integral, but most importantly, it works:

$$\prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{a_i} = sign([\mathrm{a_1}; \mathrm{a_2}; .. \mathrm{a_N}]) \cdot \mathrm{e}^{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \ln |\mathrm{a_i}|}, \quad (10)$$

where **sign** – a helper function that returns **–1** in case if number of negative multipliers in the passed as argument array is odd, otherwise it returns **+1**. In addition it returns **0** in case if there is at least one zero multiplier in the passed array.

Anyways as a compromise the multiplical can be considered as a shorter version of the above expression with usage of the integral. Personally I consider the shorter version as more intuitive, more primary by its nature, is something that directly reflects the mathematical essence of the conducted operation. On my opinion the multiplical has every right to take its rightful place in the coherent system of standard mathematical concepts and operators. The expression with usage of integral could be considered as an indirect expression that is used in circumstances of lack of the required math apparatus.

In fairness, it should be noted that the indirect multiplical expression gives us the opportunity to analytically describe formulas of indefinite multiplicals for a large number of analytically given functions using existing operators and existing functions.

A direct translation of a multiplical arbitrary constant multiplier **B** to an integral arbitrary constant addend **C** which is used in the indirect multiplical expression $\mathbf{e}^{\int \mathbf{ln}\left(\mathbf{f}(\mathbf{x})\right)\mathbf{dx}}$ and the reverse translation of them both are possible via the following equations:

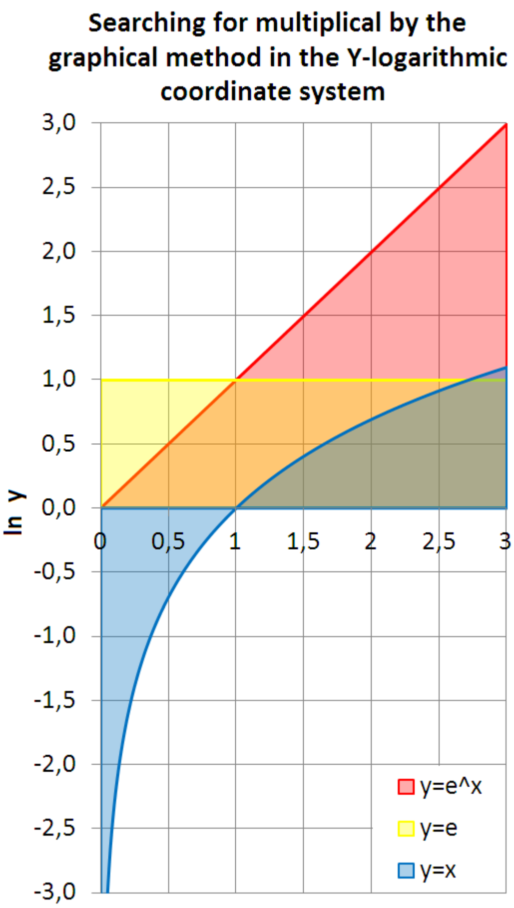
$$C = \ln |B|, \quad (11.1)$$

$$B = \pm e^{C}. \quad (11.2)$$

At $x_0 = x_1$ a definite multiplical always returns one. This result corresponds to the following conclusion. As a result of the sum operator always represents a certain alteration of 0 the same way a result of the product operator represents a certain alteration of 1, therefore product of a zero quantity of multipliers gives us 1 as a result (without alteration of 1) and which is also being confirmed by equations 5 and 9:

$$\int_{x_0}^{x_1} \ln f(x)dx = 0 \text{ , at } x0 = x1 \quad (12.1)$$

$$F^{\bullet}(x) = e^{\int_{x_0}^{x_1} \ln f(x)dx} = e^0 = 1. \quad (12.2)$$



Just like the definite integral the definite multiplical can be solved graphically (see the diagram). If we build an analyzed function graph in a coordinate system where the Y-axis marked up in units of **ln y** (a natural logarithm of **y**) then if we measure an area of curvilinear trapezoid formed by the function graph in this coordinate system and limited by $\mathbf{x_0}$ and $\mathbf{x_1}$ at the left and at the right respectively, and then if we raise the **e** number to power of this area then we get a value of definite multiplical. In other words a natural logarithm of a function definite multiplical equals to an area of curvilinear trapezoid formed by the analyzed function and limited by $\mathbf{x_0}$ and $\mathbf{x_1}$ at the left and at the right respectively geometrically measured in a Y-axis natural logarithmic coordinate system. And since the multiplical neutral element is 1 (0 in **ln y** units) the measured below that Y coordinate curvilinear trapezoid area shall be counted as negative. The said is confirmed by the indirect multiplical expression with integral usage.

According to the multiplical definition a solution of the definite multiplical is also can be obtained via math limit of product operator:

$$\Delta x = (x_1 - x_0) / N, \quad N \in \mathbb{N}, \quad N > 0 \quad (13.1)$$

$$\bullet\!\!\int_{x_0}^{x_1} f(x)^{dx} = \lim_{N\to\infty} \prod_{i=1}^{N} f\left(x_0 + \Delta x \cdot (i - ½)\right)^{\Delta x}, \quad (13.2)$$

$$\bullet\!\!\int_{x_0}^{x_1} f(x)^{dx} = \lim_{N\to\infty} \prod_{i=1}^{N} \left(f\left(x_0 + \Delta x \cdot (i-1)\right) \cdot f\left(x_0 + \Delta x \cdot i\right)\right)^{\Delta x/2}, \quad (13.3)$$

For finite values of Δx (the length of an elementary segment) and for somewhat greater practical accuracy, it is proposed to take the values of the function in the middle of an elementary segment, equation 13.2. A more numerically accurate method is to use in the iterations a geometrical-average value as the multiplier which is received out of pair of multiplicand function values taken at the beginning and at the ending of an elementary segment respectively, equation 13.3. Because of presence of two (an even number) close to each other function values as multipliers in this method, the latter provokes making a factorial-multiplication of negative function zones, which is forbidden.

Since the multiplical is essentially the result of the operation of the product, and not the sum, an additional sign of the multiplical divergence, which distinguishes it from the integral by this criterion, is the approximation of the multiplicat value to zero when the argument tends to infinity. A necessary but not sufficient condition for the multiplical convergence is the approximation of the multiplicand function to unity as the argument tends to infinity, which distinguishes the multiplicative from the integral, the integrand function of which must tend to zero for the same condition.

The summation operator and the product operator can be given a general definition of a recursive incremental iterator of the first and second order respectively (according to the hyper-operator order used in the basis). The integral and the multiplical can be given a general definition of a recursive incremental iterator in limit of the first and second order respectively. Also the anti-derivative and the factor-anti-derivative, the derivative and the factor-derivative can be given a general definition of an anti-derivative of the first and second order, and a derivative of the first and second order respectively.

Examples of factor-anti-derivative for known functions

Function	Factor-anti-derivative
0	does not exists
1	B
a	$\mathrm{B} \cdot a^{\mathrm{x}}$
$a \cdot \mathrm{x}^{\mathrm{n}}$	$\mathrm{B} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{n} \cdot \mathrm{x} \cdot (\ln(\sqrt[n]{a} \cdot x) - 1)}$
$a^{\mathrm{n} \cdot \mathrm{x}}$	$\mathrm{B} \cdot a^{(½ \cdot \mathrm{n} \cdot \mathrm{x}^2)}$
$\mathrm{e} \nearrow^{\mathrm{x}}$	$\mathrm{B} \cdot \mathrm{e} \nearrow^{\mathrm{x}}$

where ↗ - a designation of the operator of power tower with left associative property.

Multiplical usage examples

$$\mathrm{I}(\mathrm{t}_0, \mathrm{t}_1) = \bullet \int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}_1} (1 + \mathrm{i}(\mathrm{t}))^{\mathrm{dt}}, \quad (16.1)$$

where **t** – time, year; $\mathbf{t_0}$ – control period beginning timestamp, year; t_1 – control period ending timestamp, year; **i(t)** – time function of money inflation or economical growth or interest rate on year basis, u.f.; $\mathbf{I(t_0,\ t_1)}$ – factor function of money depreciation or economical growth or exponent debt growth over the control period, u.f.

$$S(t_1) = \bullet\int_0^{t_1} (1 - m(t))^{dt}, \quad (16.2)$$

where **m(t)** – function of year based mortality rate in an elementary group in dependence of the elementary group age, u.f.; $\mathbf{t_1}$ – age, year; $\mathbf{S(t_1)}$ – function of expected fraction of survivals out of all born in dependence of age $\mathbf{t_1}$, u.f.

Phisical dimensionality of multiplical and multicand functions

As we well know for the integral, the interdependence between the dimensionality of the integrand function value and the dimensionality of the integral values of is established through the dimensionality of the element of integration or, in other words, through the dimensionality of the common argument for both functions:

$$M = m \cdot a,$$

where **M** is the dimensionality of the integral values, **m** is the dimensionality of the integrand function values, **a** is the dimensionality of the argument values.

In this case, the multiplication operator is used - operation with an integration element. The very classical idea of the dimensionality of a physical quantity implies the product of a number (a quantitative property of a physical quantity) by a dimensionality (a qualitative property of a physical quantity), that is, it implies the use of the multiplication operator as a link for a pair of described properties of a physical quantity.

Working with the multiplical will force us to rethink the idea of physical dimensionality, about what it may look like, since the relationship between the dimensionality of the multiplical values and the dimensionality of the multiplicand function values uses the exponentiation operator (an operator attached to the multiplication element), which causes the use of the same operator in as a link between the quantitative and qualitative properties of a physical quantity:

$$M = m^{a},$$

where **M** is the dimensionality of the multiplical values, **m** is the dimensionality of the multiplicand function values.

Thus, in the above examples the multiplical represent as dimensionless quantity, and the common argument of the multiplical and multiplicand function is represented by the units of **years**, the dimensionality of the multiplicand values should be **1/years** and not as a multiplier, but as a power to the numerical value multiplicand function, for example: $\mathbf{1.05^{1/year}}$, which is identical to $\sqrt[\mathbf{years}]{\mathbf{1.05}}$. When factorial-multiplying, a given numerical value in a given type of dimensionality, raised to the power of a quantity with a dimensionality of years (multiplication element), as a result gives a dimensionless value corresponding to the originally defined dimensionality of the multiplical. As can be seen, the use of the multiplication operator as a link between the numerical value and the dimensionality of physical quantities as the values of the multiplical and multiplicand function is not possible. Functions returning physical quantities with classical dimension cannot be subjected to factor-multiplication or factorization, which by definition would be devoid of physical meaning for them. These functions can either be dimensionless or, as shown above, have the so-called "power" (or "radical") type of dimensionality.

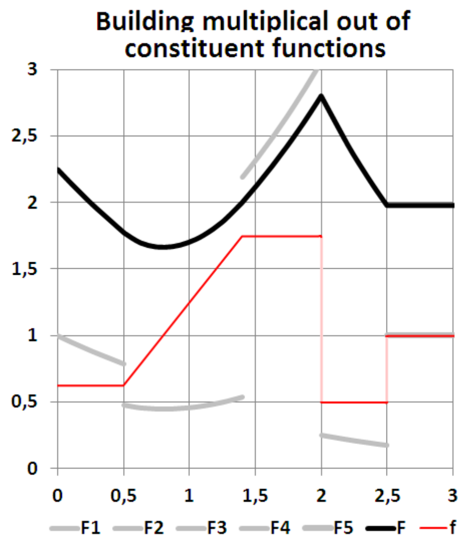
Arbitrary multipliers “B” coordination rule

If an analyzed function is defined via series of functions (further constituent functions) each applied for each argument intervals (function domains) located one just after another being adjacent, in other words if an analyzed functions is defined with interruptions then building its indefinite multiplical implies taking indefinite multiplicals for each of constituent functions in order to use those multiplicals as constituent indefinite multiplicals of the analyzed function indefinite multiplical for respective function domains. Further if the analysis implies building a continuous indefinite multiplical of the analyzed function then a mandatory operation of mutual coordination of arbitrary multipliers B must be conducted, of those arbitrary multipliers which belong to each of constituent indefinite multiplicals.# The coordination of all pairs of adjacent constituent indefinite multiplical arbitrary multipliers must meet the following equation:

$$B_1 \cdot F^{\bullet}_1(x) = B_2 \cdot F^{\bullet}_2 (x), \quad (14)$$

где **0** and **1** - indexes of mutually adjacent the previous and the next constituent indefinite multiplicals and their arbitrary multipliers **B**; **x** - junction point of adjacent the previous and the next constituent indefinite multiplicals under indexes 0 and 1.

The solution of the above equations is carried out for each junction of the constituent indefinite multiplicals, and sequentially in the order of the values of the argument at the junction points in one of two directions: in the direction of their growth or in the direction of their decrease. Thus, the arbitrary multiplier **B** is determined for each next constituent indefinite multiplical by the already known value for each previous one. The value of the arbitrary multiplier **B** for the first constituent indefinite multiplical in the calculation sequence is set by the analyst.

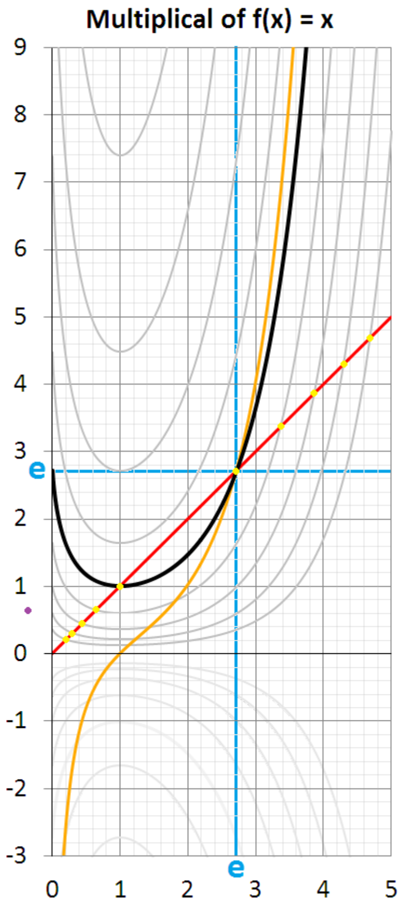


On the diagram the is an example of arbitrary multipliers coordination. Here the multiplicand function (red) consists of five analytically defined linear functions and for each of them an indefinite multiplical is build (gray). Then a coordination of arbitrary multipliers **B** is carried out in the direction from left to right. So for the first (the leftmost) constituent indefinite multiplical the arbitrary multiplier is set to 2.25, for the second its calculated value is 3.709623, for the third it is 0.914782, for the fourth 11.20608 and for the fifth 1.980973. As the result of the conducted coordination a continuous function of the analyzed function indefinite multiplical is build (black) out of five constituent indefinite multiplicals. A similar procedure must be conducted for indefinite integral arbitrary addends **C** in similar cases.

As it is visible the multiplical has no interruptions of its derivative in points where multiplicand function has interruptions of its derivative (multiplicand function breaking points), because the there is no interruption of multiplicand function as multiplical function factor-derivative. In points, where multiplicand function has interruptions, its multiplical has interruptions of its derivative (multiplical breaking point).

So called "Continuous factorial"

On the diagram there is a series of graphs (in gray) from an infinite set of graphs of the indefinite multiplical of **f(x) = x** (indirectly $\mathbf{e^{x\cdot \ln(x)-x+C}}$) (in red) presented. Each of presented multiplicals differs from the others by its own value of an arbitrary constant multiplier **B**. And for one of them – the one that is lined through point (**x=1,y=1**) (in black) a derivative is drawn (in orange).



For the indefinite multiplical of **f(x) = x** the following remarkable ratio is valid:

$$\frac{F^{\bullet}(0) = F^{\bullet}(e) = F^{\bullet\prime}(e)}{F^{\bullet}(1) = F^{\bullet\prime\prime}(1)} = e, \qquad (17.1)$$

also a property of its derivative is:

$$F^{\bullet\prime}(1) = 0, \qquad (17.2)$$

where $\mathbf{F^{\bullet}(x)}$ – the indefinite multiplical of **f(x) = x**; $\mathbf{F^{\bullet\prime}(x)}$ – the derivative of $\mathbf{F^{\bullet}(x)}$; $\mathbf{F^{\bullet\prime\prime}(x)}$ – the second derivative of $\mathbf{F^{\bullet}(x)}$.

Regarding the indefinite multiplical of **f(x) = x**, a persistent thought does not leave me that this beautiful function may claim to play a role of so called "continuous factorial".

The **Gamma** function shifted one unit left (the **Pi** function) is a generalization for **x!** for real numbers and from my perspective is unsuitable for the role of the so called "continuous factorial". So, the first reference point of **x!** (points where **x=y**), is a point at **x=1**, and the second such point is at **x=2**, while for the indefinite multiplical of **f(x) = x**, in particular expressed by $\mathbf{e^{x\cdot \ln(x)-x+1}}$, the second such point is at **x=e**, which testifies for an exclusivity of the latter curve comparing to the generalization for **x!**.

It would seem, what relation can **e** number have to building of so called "continues factorial". And as it turned out a very direct one, cause as it turned out the process of factorial-multiplication of function **f(x) = x** is one of methods to find the **e**. To confess, the shown on the diagram graphs are built not via the indirect multiplical expression $\pm e^{x \cdot \ln(x) - x + C}$ which I was not thinking of back then, therefore not via already known the **e** number, but in fact via the process of factorial-multiplication of **f(x) = x** using the numerical method staring from point (**x=1,y=1)** and iterating to both possible directions along the x-axis. And what an amazement I experienced when I found the **e** number as **x** tended to zero in the limit. But on the other hand, what is really to wonder here about, what other finite number could be found in the case as any other number would be a new notable math constant by its definition, and finding such a number would cause even greater excitement.

A building generalization for **x!** for real numbers returns us to the fact that initially **x!** is a discrete function and this fact reasonably raises two related to itself questions. The first one is why not to consider the set of multipliers starting not from 1 but from some other real number, for example from 0.5 making the set to look as follows: 0.5, 1.5, 2.5 and etc.? The second one is why the 1 and not any other positive real number is chosen as the set step size. What is so special about the 1 as the set initial point and as the set step size? This perspective makes the generalization for **x!** for real numbers to look as some special not a general function building.

Changing the set step size means changing quantity of multipliers that are effectively used for the function result calculation for a given argument value. In order to preserve sameness of the function result magnitude order for a given argument and since we have a deal with в set of multipliers, a potential set step size change have to be counterbalanced by raising each multiplier of the set to power of the set step size change (increase) multiplicity, in our case of a set step size change relative to 1 as the default set step size. In this context we can write new general definition of **x!** :

$$x! = \prod_{i=0}^{N(x)} (b + s \cdot i)^{S}, \quad (18.1)$$

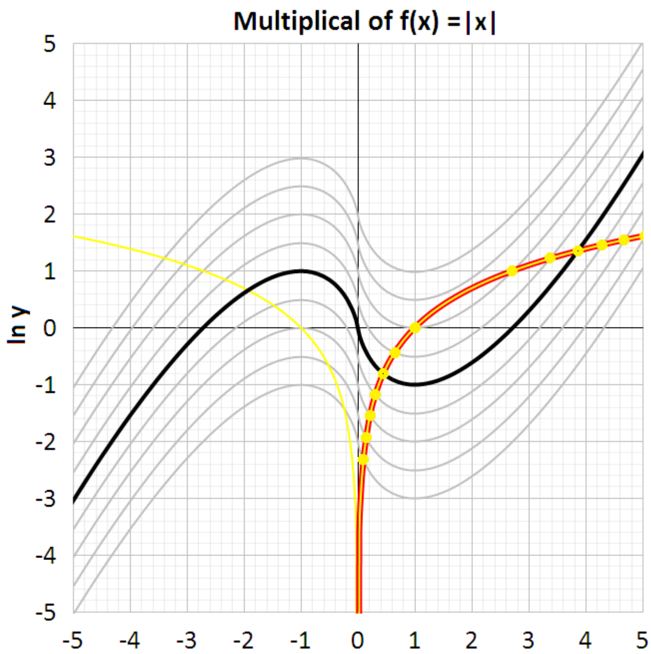
$$N(x) = \mathrm{round}\left(\frac{(x - b)}{s}\right), \quad (18.2)$$

where **b** – the set/function initial point, the default value is 1; **s** – the set step size, the default value is 1; **N** – the product operator iterations quantity excluding the zero iteration.

Examples of the set: $0.5 \cdot 2.5^2 \cdot 4.5^2 \cdot 6.5^2 \cdot 8.5^2 \cdot 10.5^2$ and etc.; $1.5 \cdot 1.6^{0.1} \cdot 1.7^{0.1} \cdot 1.8^{0.1} \cdot 1.9^{0.1} \cdot 2.0^{0.1}$ and etc.; $1 \cdot 2^1 \cdot 3^1 \cdot 4^1 \cdot 5^1 \cdot 6^1$ and etc. From the described point of view the last set of multipliers – the one used in the initial version of **x!**, is the default one but the same time seems to be a specific building from a plenty of possible.

If we start to gradually reduce the set step size **s** then at the each next factorial-multiplication iteration the function value for a certain argument would be closer and closer to its value measured at the previous state of the set step size. Reducing the set step size to zero in the limit technically means replacing the defined above function with multiplical of **f(x) = x**. First of all this measure gives us the desired function continuity and also makes a function value for a certain argument to be indifferent to the set multipliers quantity or to the set step size in the limit, makes it to tend to its determined value in the limit. Therefore this defines locus of points for all its allowed arguments function values within a general determined position which depends only on the function initial point **b**. In fact each function initial point of its own infinite set defines one function locus of points of its own infinite set. Each of those function locus of points differs from the others in the set by its own indefinite multiplical arbitrary constant multiplier **B** and for all of them the described above remarkable equal to **e** ratio is valid. In reverse, a definite multiplical arbitrary constant multiplier **B** causes an existence of up to two possible function initial points **b**.

So as it is visible on the diagram it would be possible to draw a multiplical graph starting it from any point (except point **x=0**) of the **f(x) = x** graph. Yellow points represent samples of such initial points from which multiplical functions are drawn to the left direction. Also we can witness that the solution for initial points does not exist for all arbitrary multiplier constants **B** as some of multiplical graphs don't have intersection points with the **f(x) = x** graph.



In the second diagram in a naturally logarithmic along the y-axis coordinate system, a series of graphs of the indefinite multiplical (in gray in general and black at **B=1**) of the function **f(x) = x** (red) module (yellow) for various values of an arbitrary multiplier **B** is shown. Yellow shows the graph of the modulus of **f(x) = x**.

Geometrical function growth

A function derivative shows a function growth in a point. But as it turned out the function growth can be a different kind. Therefore it should be clarified that the described kind of growth is arithmetical as it shows how much the function will grow absolutely if the function argument will grow by one and if this growth will be constant within the argument growth. Graphically this is solved by drawing a tangent to the graph at the given point, more precisely, not just a tangent, not just a straight tangent, but a linear function graph that is tangent to the function graph at the given point and which is expressed by following general equation:

$$y = b \cdot x + c, \quad (37)$$

where **b** and **c** – constants of the tangent linear function, which determination gives it a tangency to the function graph at given point.

b numerically shows the absolute function growth with the grows of the argument by 1, therefore shows the function arithmetical growth at given point. The tangent of the slope reflects the arithmetical function growth.

The mentioned above factor-derivative shows a function geometrical growth in a point as it shows how many times the function will grow if the argument will grow by one and if this growth will be constant within the argument growth, therefore it shows the relative function growth. Graphically this is solved by drawing an exponential function graph that is tangent to the function graph at the given point and which is expressed by following general equation:

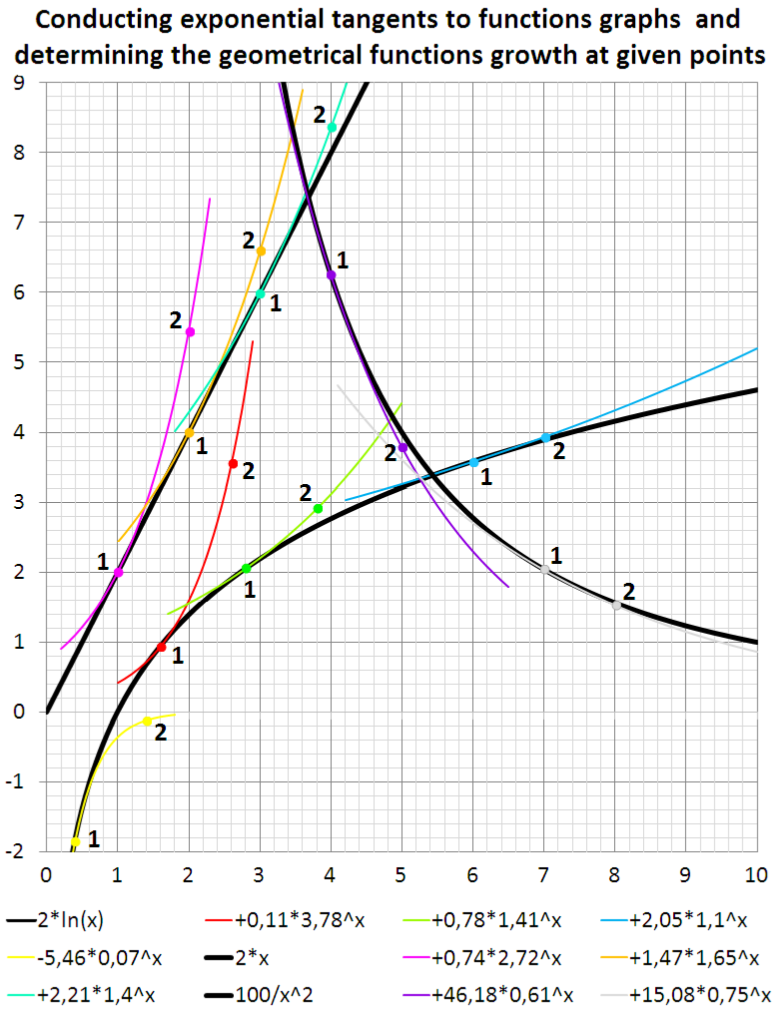
$$y = b \cdot a^x, \quad (38.1)$$

$$a = e^{\left(\frac{f\prime(x)}{f(x)}\right)}, \quad (38.2)$$

$$b = \frac{f(x)}{|f(x)|} \cdot a^{\left(\frac{\ln|f(x)|}{\ln a}\right) - x}, \quad (38.3)$$

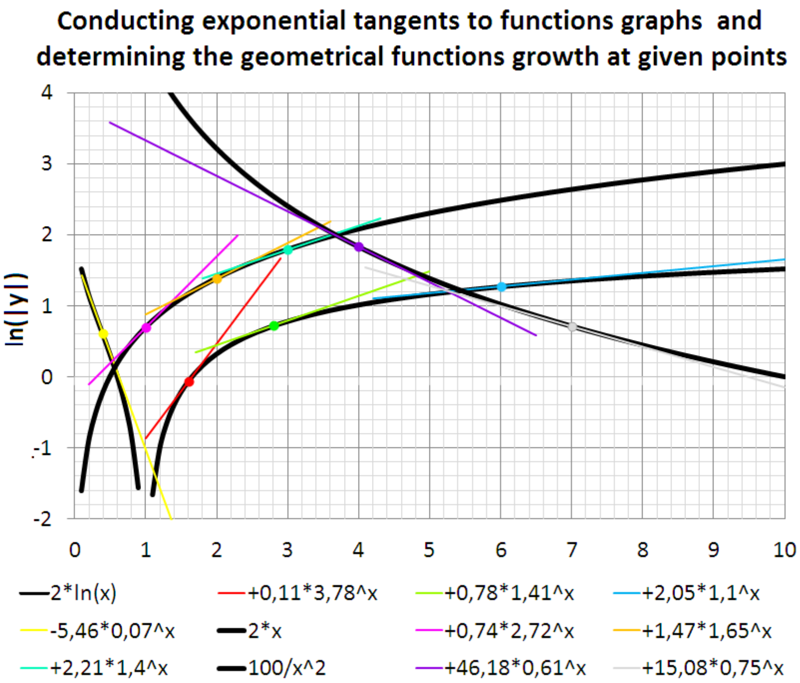
where **a(x)** and **b(x)** – constants of the tangent exponential function, power base and multiplier respectively, which values provide it with a tangency to the analyzed function graph at given point; **f(x)** – the analyzed function; **f'(x)** – the analyzed function derivative.

a numerically shows the relative function growth with the grows of the argument by 1, therefore shows the function geometrical growth at the given point. Factor-derivative can not be negative.



On the diagram there is a number of tangent exponential functions graphs (in colors) drawn to 3 analyzed functions (in black): **f(x) = 2·ln(x), f(x) = 2·x and f(x) = 100/x²**. Here the absolute x-axis difference between the 2nd and the 1st points of the same color reflects a growth of function argument by 1. The same time the relative Y-axis difference between the 2nd and the 1st points of the respective pair or how many times point 2 is located farther from the x-axis than point 1 to indicates a geometrical growth value of the respective analyzed function at the point of contact (the 1st point). It is obvious that through one pair of points 1 and 2 one can draw one exponential graph of y = b $\cdot a^x$.

Building the all above functions and their respective tangent exponential functions in a coordinate system where the Y-axis marked up in units of ln |y| (a natural logarithm of absolute value of **y**) visually degrades all these graphs as follows: linear to logarithmic, exponential to linear, and respectively visually degrade the function geometrical growth to the function arithmetical growth. The **e** number raised to power of the tangent of the slope of the degraded to a line tangent exponential graph reflects the geometrical function growth at the point of contact. In other words a natural logarithm of an analyzed function geometrical growth at given point equals to the tangent of the slope of the tangent exponential function drawn through the given point of the analyzed function in a Y-axis natural logarithmic coordinate system.



In points where function crosses the x-axis its factor-derivative has interruptions. For example it is visible that the factor-derivative of **y=2·ln(x)** has an interruption at **x=1** tending to **0** ($e^{-\infty}$) and to + ∞ ($e^{+\infty}$) as **x** approaches to the point from the left and from the right respectively.

Like searching for a derivative implies omitting a common constant addend, searching for a factor-derivative implies omitting a common constant multiplier.

Examples of factor-derivative of know functions

Function	Factor-derivative
0	uncertainty
B	1
$b \cdot x^{a}$	$e^{a/x}$
$b \cdot a^{x}$	a
b · e↗^{x}	e↗^{x}

where ↗ - a designation of the operator of power tower with left associative property.

Those who wish can practice in searching for factor-derivatives and factor-anti-derivative of known functions.

Through the analyzed function there is interdependence between the function derivative (arithmetical growth) and the function factor-derivative (geometrical growth):

$$f^{\bullet}(x) = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}, \quad (39.1)$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \ln f^{\bullet}(x), \quad (39.2)$$

if $f(x) \neq 0$ and $f^{\bullet}(x) \neq 0$ and $f(x) \neq \infty$ and $f^{\bullet}(x) \neq \infty$ and $f'(x) \neq \infty$

where ***f*(x)** – the analyzed function; ***f*•(x)** – the analyzed function factor-derivative; ***f'*(x)** – the analyzed function derivative.

It is obvious that it is not possible to restore a function by its known derivative or factor-derivative solely, but it is possible to restore a function if both are known together and the factor-derivative is not equal to 0 or to 1 and has finite value:

$$f(x) = \frac{f'(x)}{\ln f^{\bullet}(x)}$$

if $f(x) \neq 0$ and $f^{\bullet}(x) \neq 0$ and $f^{\bullet}(x) \neq 1$ and $f(x) \neq \infty$ and $f^{\bullet}(x) \neq \infty$ and $f'(x) \neq \infty$. (39.3)

The same way as function derivative can be expressed via function differential: ***f'*(x) = d*f*(x) / dx**, function factor-derivative can be expressed via function factorial, using there not the division operator but rightfully the root extracting operator which is an operator of one hyper-operator order higher than the division operator:

$$f^{\bullet}(x) = \sqrt[dx]{\mathbf{f}f(x)}\,. \quad (40)$$

And therefore vice versa function factorial can be expressed via function factor-derivative, which is similar to how function differential can be expressed via function derivative: **d*f*(x) = *f'*(x) · dx**, but again here not using the multiplication operator but the exponentiation operator instead which is also an operator of one hyper-operator order higher than multiplication operator:

$$\mathbf{f}f(x) = f^{\bullet}(x)^{dx} \quad (41)$$

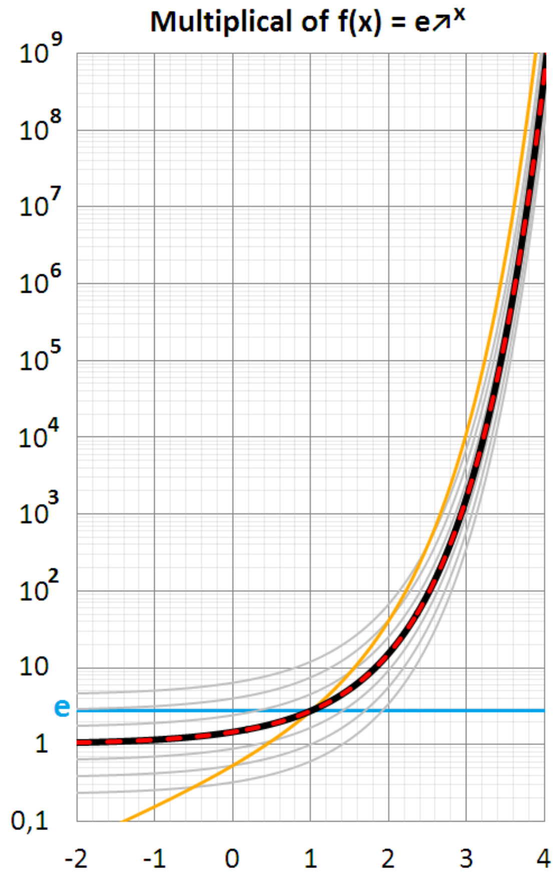
Accelent

I set a task to find and formulate a function whose growth or, in other words, whose factor-derivative, and automatically, therefore, the multiplical would be equal to the function itself for all values of argument. The first such function suggests itself, and this is the function **y = 1**, which exists in accordance with the existence of the function **y = 0** for the problem of finding a derivative and an integral equal to the function itself, where 1 and 0 are obviously the values of neutral arbitrary constants for the multiplical and integral respectively. Also, by analogy with the search for a derivative, the second function with a similar property should presumably be exponential and the same way as **y = e^{x}** function does it should have as its basis the **e** number, and as we already know the **e** number is really directly related to the factorial-multiplication and factorization of functions.

As you know, the integration and differentiation operations use the addition and subtraction operators, that is, binary operators of the first order, on the other hand the factorial-multiplication and factorization operations use the multiplication and division operations, that is, binary operators of the second order. Exponentiation function $\mathbf{y = e^x}$ is a single action with the power operator, that is, with a binary operator of the third order, and also has the **e** number as the first operand and the argument **x** as the second. You can notice that this function uses a binary operator standing two orders higher than the operators used in the integration and differentiation operations. Then we do a bold guess that the function we are looking for exactly copies the function $\mathbf{y = e^x}$ in part of operands and as $\mathbf{y = e^x}$ is a single action with a binary operator standing two orders higher than the operators used in the factorial-multiplication and factorization operations, that is an action with some binary operator of the 4th order. Therefore this is a hyper-exponentiation function of the 4th order with base **e**. We write this function and, in particular, the proposed operator as follows:

$$y = e \nearrow^{x}, \quad (43)$$

where ↗ - the designation of the operator of the 4th order. The operator is called by its own name – Acceleration; super-scripted **x** – accelerator, **e** – accelerating; **y** – acceleration. The expression can be read as "the **e** number in acceleration of **x**", "**e** number in **x**-th acceleration", "**e** number accelerated **x** times", "accelerated **x** times **e** number", "acceleration of **e** number in **x**". The curve $\boldsymbol{y = a\nearrow^{x}}$ is called as "Accelent".



My guess is correct, as it turned out $\mathbf{y = e\nearrow^{x}}$ meets the requirements only if the Acceleration is a power tower but with left associative property. It should not be confused with the Tetration that is the power tower with right associative property.

On the diagram there are an accelent function $\mathbf{y=e\nearrow^{x}}$ (lined in red dotted line) and a set of its indefinite multiplicals (in gray). A graph of one indefinite multiplical – the one with arbitrary multiplier constant equal to 1 (in black) is the same as the graph of the accelent function, and that's why I had to display the latter in dotted line. You can notice that a Y-logarithmic coordinate system visually degrades the accelent a one order down to visual exponent which is also shifted to the right by 1 on the x-axis.

Specially noted that the acceleration operator is obtained by the necessity of formulating an analog of $\mathbf{e^x}$ for the operations of factorial-multiplication and factorization, obtained not by the method of extrapolation but rather by method of shifting a series of 3 consecutive hyper-operators one order up in the intended direction of mathematical analysis, similar to how bridge spans are pushed during the construction of the latter. The conducted analysis ordained the inner logic of this operator of the 4th order and not vice a versa when we have an operator and then we try to apply it.

Illustration of the hyper-operator series shifting

	Addition	Multiplication	Raising to power	Acceleration
The initial state	Summation and Integration	Operation with the element of integration; a linear equation of the function arithmetical growth tangent	The function arithmetical growth is same as the function itself e^x	
Shifting one order up (rightward)		Product and Factorial-multiplication	Operation with the element of multiplication; an exponent equation of the function geometrical growth tangent	The function geometrical growth is the same as the function itself $e\nearrow^x$

The acceleration can be expressed compactly via operators of lower order:

$$a \nearrow^{n} = a^{\left(a^{(n-1)}\right)}. \quad (44)$$

A hyper-root of the 4th order is called as "Deceleration" and designated as follows:

$$a \searrow_{n}, \quad (45)$$

where ↘ - designation of the operator; subscribed **n** – decelerator; **a** – decelerating. The operation result is "deceleration". The expression can be read as: "**a** in deceleration of **n**", "**a** in **n-th** deceleration", "**n-th** deceleration of **a**", "**a** decelerated **n** times", "decelerated **n** times **a**", "deceleration of **a** in **n**".

The deceleration shows a number, which has to be raised to power of itself 1 times less than the decelerator value in order the decelerating to be obtained and applying the left associative property in the raising to power sequence for the purpose.

The deceleration is solved recurrently using root operator (a inverse binary operator one order lower) and also compactly:

$$a \searrow_{n} = \sqrt[\left((a\searrow_{n})^{(n-1)}\right)]{a}, \quad (46)$$

There is nothing out of the ordinary, as extracting the root is also solved recurrently in the exactly same scheme, but what is distinctive and natural, using the division operator (a inverse binary operator one order lower):

$$\sqrt[n]{a} = \frac{a}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{(n-1)}}. \quad (47)$$

A consequence of a common solution scheme for the two inverse hyper-operators and similarity to how it is forbidden to submit a lower than 0 value to the radical expression, it is forbidden to submit a lower than 1 value as the decelerating. Recalling to how the complex numbers set was defined at the time, it is becoming to be interesting what set of numbers could be defined using decelerating less than 1.

The logarithm of the 4th order with own name "Accelerator extraction" and "Natural accelerator extraction" is defined as nested logarithm:

$$c \nwarrow_a = \log_a\left(\log_a c\right) + 1, \quad (48.1)$$

$$c \nwarrow = \ln\left(\ln c\right) + 1, \quad (48.2)$$

Factorial-multiplication for zero function values

Of factorial analytical interest is the process of factorial-multiplication of the modules of functions that intersect the x-axis in the vicinity of a given intersection (hereinafter, the zero point).

In a neighborhood of the zero point, the intersecting function can be approximately represented as a polynomial:

$$y = b_1 \cdot (x - c)^1 + b_2 \cdot \mathrm{sign}(x - c) \cdot (x - c)^2 + b_3 \cdot (x - c)^3 + \ldots + b_n \cdot \mathrm{sign}(x - c) \cdot |x - c|^n, \quad (15.1)$$

where **b_1 ,b_2 ,b_3, b_n** are the multipliers of the polynomial; **c** – zero point X coordinate; **sign** - a function that returns **–1** if the passed argument is negative, **+1** otherwise.

In the infinitely close approximation to the zero point, the polynomial function can be reduced to a function of one term - the first from the left, which is with a non-zero factor b. Considering the exact position of the zero point on the x-axis as not important in the case in order to shorten the notation we will take C = 0 (the zero point is located at the point of origin). After simplification, the equation has the general look of a power function dependent on the arithmetic sign of the argument:

$$y = b_n \cdot \mathrm{sign}(x) \cdot |x|^n \text{ if } n > 0, \quad (15.2)$$

Since it is allowed to carry out factorial-multiplication of only positive functions domains, we transform the function up to its module, and we obtain a multiplicand function allowed for factorial-multiplication (hereinafter, the multiplicand). In addition, this transformation describes the case of not crossing the x-axis functions, but touching it. Thus, the present analysis covers all possible cases of contact between the graph of the function and the x-axis at one point:

$$y = |b_n| \cdot |x|^n. \quad (15.3)$$

Further, the multiplicand is divided into two domains: the one to the left and the one to the right of the zero point, represented by the following constituent functions applicable under appropriate conditions:

$$y = |x|^n \cdot b, \quad \text{at } b_n \cdot x \geq 0, \quad (15.4)$$

$$y = -|x|^n \cdot b, \quad \text{at } b_n \cdot x \le 0, \quad (15.5)$$

Indefinite multiplical for each of constituent functions:

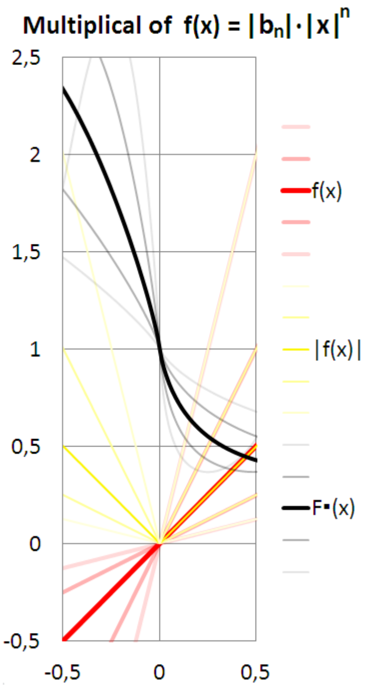
- $\int (|x|^n \cdot b)^{dx} = B \cdot e^{n \cdot x \cdot \left(\ln\left(x \cdot \mathrm{sign}(b) \cdot \sqrt[n]{|b|}\right) - 1\right)}$, at $b_n \cdot x > 0$, (15.6)
- $\int (-|x|^n \cdot b)^{dx} = B \cdot e^{n \cdot x \cdot \left(\ln\left(-x \cdot \mathrm{sign}(b) \cdot \sqrt[n]{|b|}\right) - 1\right)}$, at $b_n \cdot x < 0$, (15.7)

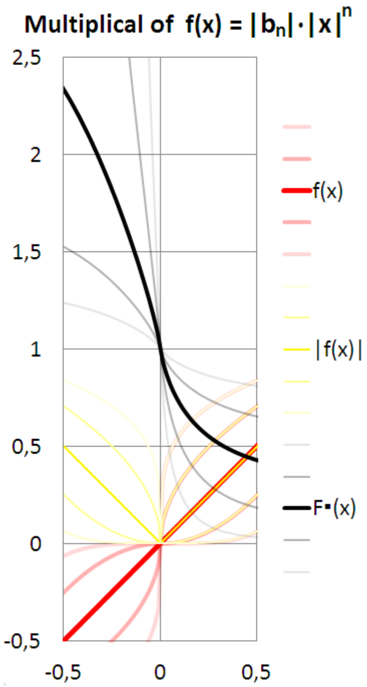
Since both of these indefinite multiplicals do not exist at the zero point, we determine their values when approaching this point infinitely close from the left and from the right separately using the previous equations:

$$\lim_{x \to 0} B \cdot e^{n \cdot x \cdot \left(\ln\left(x \cdot \mathrm{sign}(b) \cdot \sqrt[n]{|b|}\right) - 1\right)} = B, \qquad \text{at } (x \cdot b) \ge 0, \qquad (15.8)$$

$$\lim_{x \to 0} B \cdot e^{n \cdot x \cdot \left(\ln\left(-x \cdot \mathrm{sign}(b) \cdot \sqrt[n]{|b|}\right) - 1\right)} = B, \qquad \text{at } (x \cdot b) \le 0, \qquad (15.9)$$

On the first diagram (the left) there are presented: function **$y = b_n \cdot \mathrm{sign}(x) \cdot |x|^n$** at **$n=1$** and different **$b_n$** (from 0.25 to 4 in shades of red and at **$b_n=1$** in bright red), function module: **$y = |b_n| \cdot |x|^n$** (in shades of yellow and at **$b_n=1$** in bright yellow), indefinite multiplical of function module at **B=1** and different **b_n** (in shades of gray and at **$b_n=1$** in black).





On the second diagram (the right) there are presented: function **$y = b_n \cdot \mathrm{sign}(x) \cdot |x|^n$** at **$b_n=1$** and different **n** (from 0.25 to 4 in shades of red and at **n=1** in bright red), function module: **$y = |b_n| \cdot |x|^n$** (in shades of yellow and at **n=1** in bright yellow), indefinite multiplical of function module at **B=1** and different **n** (in shades of gray and at **n=1** in black).

It is easy to see that when approaching the zero point, the indefinite multiplical of the multiplicand (hereinafter the multiplical) tends to some finite value on both sides of this point, and moreover, on both sides it tends to the same value which depends only on the single for the two constituent multiplicals, the values of an arbitrary multiplier **B**, and, what is remarkable, does not depend in any way on **b_n** and on **n**, that is, on the values of all derivatives of the multiplicand. In the vicinity of the zero point, the constituent multiplicals of the two multiplicand domains are located at the junction with each other. At the same time, the two domains are still separated by the zero point, where there is an interruption of the constituent multiplicals, and possibly an interruption of the multiplical, but the factorial-multiplication operation bypassed this point, leaving the question open.

It would seem that in the process of factorial-multiplication, the transition through this point of the multiplicand, which has zero value, as through a factor for the intermediate result of factorial-multiplication (hereinafter referred to as the intermediate result) should nullify this result and automatically slam to zero the entire domain of the multiplical located to the right of the zero point, thereby completely making the factorial-multiplication process meaningless to the right of this point, assuming that we do operation in the direction of growth of the argument. This statement would be just if the zero would be a zero as a multiplier.

But as you know, when we carry out factorial-multiplication, we divide the linear segment of factorial-multiplication along the x-axis into infinitely small, but not zero length segments **dx**. From this position, the problem of a dimensionless point and at the same time the solution of the problem for us is the fact that the point, being a dimensionless quantity, leaves a projection of zero length on the x-axis.

One so-called geometric approach comes to the following simple conclusion. Since we are factorial-multiplicating along the linear continuum of the x-axis, influencing the state of the function by something that also has a dimension related to the linear dimensions of the x-axis leaves its mark there. And if at the same time something leaves a projection of zero length on the axis, then this something, no matter what it is, effectively leaves absolutely nothing, it simply does not exist for the operation being performed. And assuming that the function on both sides tends to the finite and to the same identical value, this point can be ignored, the function is "glued", and the continuity of the latter is stated.

Another so-called abstract approach does not ignore the state of the function at a point, and implies a transition from the analysis of the properties of functions in extremely small linear segments to the analysis of their properties at dimensionless points. This approach involves finding the “connecting” multiplier (hereinafter referred to as the multiplier) at a dimensionless point, when passing through which, in the process of factorial-multiplication, the intermediate result is multiplied by this multiplier or divided by it, depending on the direction of factorial-multiplication: in the direction of increasing or decreasing the argument, respectively. Thus, the "fate" of the factorial-multiplication being carried out depends on the state and value of this multiplier.

It is obvious that the size of the multiplier at the zero point is equal to the value of the multiplicand measured at the zero point, that is, zero which is raised to power of the element of multiplication, the size of which also has a zero value. Obviously, in this case we are not talking about the differential of the argument **dx**, since one with a zero length does not make sense, but no one has canceled the multiplication element that is necessarily applied as power to the value of the multiplicand, even if it has a zero value. Thus, the problem of determining the value of the multiplier is reduced to determining the result of $\mathbf{0^0}$.

The exponentiation operator is hyper-operator, namely, the product operator $\prod$ with the number of iterations corresponding to the exponent value. In our case, the result of the operator $\prod$ is a multiplier for the intermediate result. On the one hand, it can be assumed that the result of $\mathbf{0^0}$ is nothing, an uncertainty, since there are no factors at all, even if those factors are zeros. In this case, there is no operation of multiplication by zero at all, since the zeros themselves are absent. Given this, it is already clear that the multiplical will not turn into zero. But the multiplical can cease to exist as a result of multiplication by uncertainty. On the other hand, if $\prod$ has a zero number of multipliers, as in our case, then it is obviously inactive, does not iterate and does not increment anything, and if so, then it must leave unchanged the result of which it is a multiplier, pass through itself its value in transit, but does not destroy it.

It turns out that the expectation of the result of raising to a power depends on our idea of the operator's function and logic, on its formal definition, which in turn is determined by the context of its application. Above, the definition of the product operator was given as a recursive incremental iterator, which implies a certain initial state of the result of the operator, in relation to which an increment is made starting from the first iteration. The math analysis implies the transit without change in the case of operator inactivity, which is in full accordance with how the summation operator $\sum$ does not return uncertainty in the absence of addends, in the absence of iterations, in its inaction, but returns 0 as a neutral value, thereby does not change the result of the previous summation, but passes it through itself in transit.

So, the only multiplier that leaves the result of multiplication unchanged is 1. And this means that $\prod$ with a zero number of multipliers, regardless of their possible state (including the state of uncertainty) and value, must return 1 as a result of its inaction, as a neutral value. Thus, it can be said that the desired multiplier at the zero point is equal to 1. For your information, one of coming next related articles is about the hyper-operator analysis, where the topic of neutral elements (values) of hyper-operators is touched upon.

We single out the zero point itself and its infinitely small neighborhood on both sides of it into a separate third domain of the multiplicand, the one that is not included in the first two. Let's designate it as [0;0] from zero inclusive to zero inclusive. Next, it is necessary to make an assumption that the finite value of the multiplier at the singularity point, in our case at the zero point, can be extended to an infinitesimal neighborhood of this point towards that boundary on which the multiplical has finite and the same value as well as at the zero point. The statement is based on the assumption that within the considered infinitesimal interval the function is monotone under the given conditions, it simply has nowhere to go, there are no known reasons for a different behavior of the function. In our case, to the right of the zero point, to the left of it, the constituent multiplicals of the first and second domains tend to 1 (finite value) when approaching it from both sides, therefore, the value of the multiplier at the zero point extends to the entire infinitesimal neighborhood of the zero point, that is, over the entire previously defined third domain of the multiplicand.

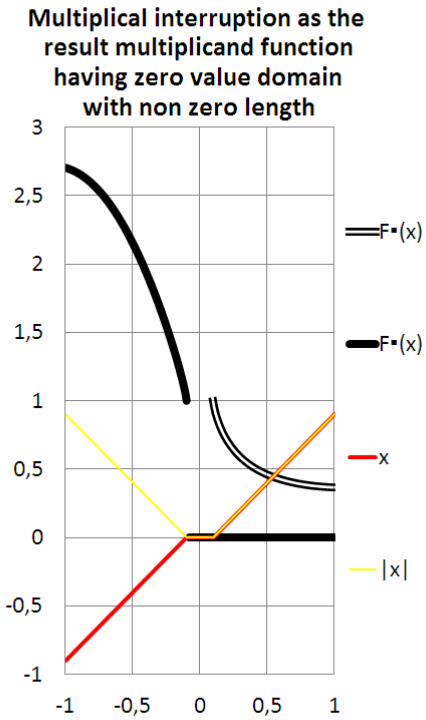
By extending the value of the multiplier to an infinitely small neighborhood, one should not understand the construction of a monotonic function with a constant value within this interval equal to the value of the multiplier, but it should be understood that during factorial-multiplication, the intermediate result at the input to this neighborhood is multiplied or divided by this multiplier, depending on the direction factorial-multiplication, then it is passed to the output from the given neighborhood.

If the extension of the value of the function is possible only in one of the two directions of the neighborhood, then it makes no sense to say that the multiplier must be divided into two multipliers, each of which is equal to square root of its original value, since the impossibility of spreading the value of the multiplier in both directions for one singularity point indicates the presence of an interruption there, which in turn makes senseless analytical work to find the continuity of the function at the singularity point. In this regard, for the sake of simplicity, speaking of the multiplier, we can omit the mention of the neighborhood of the point, and consider the multiplier as a property of the point, and the domain under study, as the domain of the point. From this perspective, the question of how to extend the value of the multiplier to the neighborhood of the point disappears, since the intermediate result will be multiplied or divided by the multiplier once when passing through the singularity point.

When building the multiplical of the function modulus, the result of factorial-multiplicating the third abstract domain of the multiplicand requires matching its arbitrary multiplier with arbitrary multipliers and two other constituent definite multiplicals. Next, we “glue” all the constituent multiplicals of all three domains of the multiplicand and obtain a continuous indefinite multiplical of the analyzed function.

Evidence of the identity of the multiplier to 1 at the zero point is also the identity of the results of factorial-multiplication obtained through two different approaches: through the so-called geometric approach, and through the so-called abstract approach with an analysis of the properties of functions at dimensionless points.

It can be argued that in the process of factorial-multiplication, the transition through the zero value of the multiplicand, due to the intersection of the function and x-axis or the contact of the x-axis at one point, does not lead to any changes in the intermediate result. Even a possible break in the function (Interruption of the first derivative) does not affect this result, since the value of the multiplical at the zero point does not depend on $\mathbf{b_n}$. But what is remarkable is that a function break at a singularity point, such as zero, leads to a break in the multiplical at this point, but obviously not to a break in its factor-derivative (multiplicand), and that is not observed when the function breaks outside singularity points, where only the second the derivative of the multiplical is interrupted. It can be concluded that the behavior of the derivative and factor-derivative is different at singularity points, where the interdependence between them is violated.



And now let's consider a slightly different case, specifically, one where the multiplicand has a zero value over an interval that is not zero in length. So, inside this interval, the intermediate result is multiplied by the multiplier $\mathbf{0^{dx}}$ equal to zero, since **dx** in this case is infinitely small, but not a zero value.

In this case, the multiplical "collapses" to zero to the right of the entry point of the multiplicand into the horizontal segment with zero value. Further, the multiplical is not restored, even despite the subsequent “dawn” of the multiplicand to non-zero values, because anything (the intermediate result) once multiplied by zero then gives only zero as a result (the solid black graph on the diagram). In this regard, we can say that the point where the indefinite multiplical touches the x-axis (we are not talking about an infinitely close approximation of the x-axis) means, in fact, the point of its interruption. If factorial-multiplication is carried out in the direction opposite to the direction of growth of the argument, then at the entry point on the left into the interval with a zero value of the multiplicand, the intermediate result will cease to exist as a result of an attempt to perform the operation of division by zero, which is also an interruption point for the multiplical, after which, to the left, it will not recover either (hollow black graph in the diagram). Thus, for the horizontal interval of the multiplicand with zero value, there are two points at which the multiplical is interrupted, these are the points of the beginning and end of this interval. The interval itself is the domain of uncertainty of the multiplical. It can also be argued that the multiplical of the function **y=0** is not **y=0**, but it simply does not exist, since the entire domain of the multiplicand from – ∞ to + ∞ is the domain of uncertainty of its multiplical.

References:

[1] Integral: https://en.wikipedia.org/wiki/Integral

[2] Derivative: https://en.wikipedia.org/wiki/Derivative

[3] Differential of a function: https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_of_a_function

[4] Factorial: https://en.wikipedia.org/wiki/Factorial

[5] Summation: https://en.wikipedia.org/wiki/Summation

[6] Multiplication: https://en.wikipedia.org/wiki/Multiplication

[7] Tetration https://en.wikipedia.org/wiki/Tetration

in Russian

Понятие мультипликала

Дмитрий Владимирович Гурьянов

dmitriigur76@gmail.com

Аннотация. Цель настоящей работы представить и описать понятие математического анализа «Мультипликал». К моему удивлению я пришёл к выводу о том, что к настоящему времени данное понятие в своём прямом и явном виде не сформулировано и не существует среди математических понятий и операторов. Тем не менее существует ряд областей его практического применения, где рассматриваемое понятие подходило бы и потенциально могло быть использовано в своём прямом и явном виде, специально в проводимых статистических, финансово-экономических исследованиях и анализах и во многих других областях. Более того, по моему мнению данное понятие органично вписывается в стройную систему стандартных математических понятий и операторов и должно занять

там свое по праву ему причитающееся место. В настоящей статье также затронуты прочие связанные вопросы, сделаны некоторые интересные выводы.

Ключевые слова: Мультипликал, Подмультипликальная функция, Мультиплицирование, Факториал, Фактор-первообразная, Факторирование, Фактор-производная, Арифметический рост функции, Геометрический рост функции, Акселента, Ускорение, Замедление**.**

Следующие связанные статьи:

- Сингулярные свойства
- Анализ гипероператора

Краткое содержание

Мультипликал

Понятие математического анализа мультипликал имеет такое же отношение к оператору произведения $\prod$, какое отношение имеет понятие математического анализа «интеграл» к оператору суммирования $\sum$ (как непрерывное к дискретному), а также имеет такое же отношение к понятию интеграл какое отношение имеет оператор произведение к оператору суммирование (как перемножающий к суммирующему). Определение мультипликала подчинено, обусловлено его положением в нижнем правом углу нижеприведённой таблицы, которая при других обстоятельствам могла бы быть ребусом.

Таблица взаимоотношений математических понятий и операторов

	Дискретный	Непрерывный
Суммирующий	$\sum$	$\int$
Перемножающий	$\prod$	

Мультипликал - это эквивалент произведения бесконечного количества бесконечно близких к единице, по причине бесконечно малого размера показателя степени, множителей, соответствующих значениям подмультипликальной функции в степени элемента мультиплицирования, и в общем виде записывается следующим образом:

$$F^{\bullet}(\mathrm{x}) = ɿ\, f(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}}, \quad (1.1)$$

$$F^{\bullet}(\mathrm{x}) = \bullet\!\int f(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}}, \quad (1.2)$$

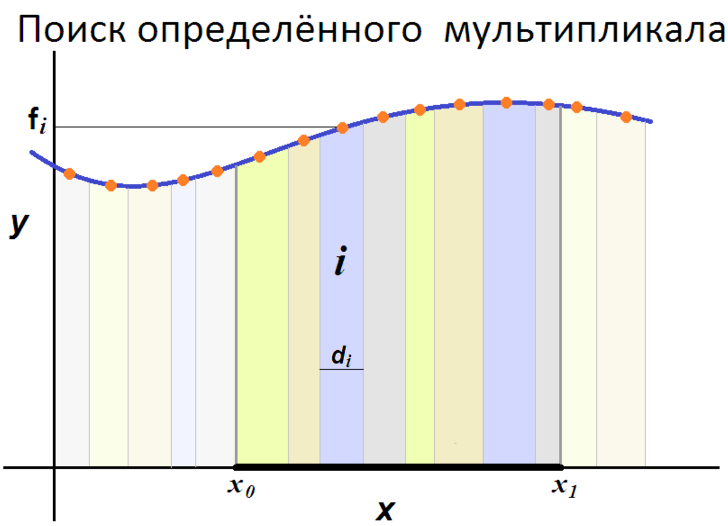
где ***f*** – подмультипликальная функция; **dx** – элемент мультиплицирования; ɿ - основной знак мультипликала; **•∫** - альтернативный знак мультипликала, используемый в обстоятельствах отсутствия символа основного знака, здесь буллит отличает его от знака интеграла; ***F*•** – неопределённый мультипликал или фактор-первообразная ***f***.

***F*•(x)** именуются как «мультипликал ***f*(x)**» или «мультипликал ***f*(x)** по **x**».

Действие по поиску неопределённого мультипликала или фактор-первообразной называется «мультиплицированием» функции, обратное действие по поиску фактор-производной называется «факторированием» функции. Факторирование (разложение на коэффициенты - factors) функции имеет такое же отношение к мультиплицированию (умножению коэффициентов) функции, какое отношение имеет дифференцирование (разложение на приращения - differences) функции к интегрированию (складыванию, собиранию приращений) функции. То есть это взаимно обратные операции математического анализа.

Также как и интеграл мультипликал может иметь определённый и неопределённый вид.

Разобьем непрерывную функцию (подмультипликальную функцию – синяя на диаграмме) на достаточно большое количество малых отрезков (элементарных отрезков светлыми тонами на диаграмме), далее внутри каждого элементарного отрезка выберем по одной точке (оранжевым на диаграмме) и возьмём значение функции в этих точках **f**$_i$, затем возведём эти значения в степень значения длины отрезка **d**$_i$, соответствующего каждому из элементарных отрезков. Таким образом то мы получим ряд множителей, каждый из которых принадлежит соответствующему ему элементарному отрезку. Далее мы выберем из определения функции две различные точки **x$_0$** и **x$_1$**, что вместе образуют отрезок конечной длины (отрезок мультиплицирования). Затем мы взаимно перемножаем часть множителей, чьи элементарные отрезки попадают внутрь отрезка мультиплицирования, и получаем определённый результат перемножения. Уменьшение длины наибольшего из элементарных отрезков в пределе до нуля, соответственно увеличение их общего количества в пределе до бесконечности, делает результат перемножения описанной части множителей соответствующим значению определённого мультипликала функции



для отрезка, заданного двумя выбранными точками $\mathbf{x_0}$ и $\mathbf{x_1}$. Данная операция объясняет суть понятия мультипликала и является аналогом операции вычисления площади криволинейной трапеции как значения определённого интеграла. Существует только две разницы между двумя этими операциями: 1) Для поиска мультипликала мы применяем умножение значений, соответствующих части элементарных отрезков, для поиска интеграла мы применяем для них сложение; 2) При поиске мультипликала мы возводим значение функции для каждого элементарного отрезка в степень значения длины этого отрезка, при поиске интеграла мы умножаем значение функции для каждого элементарного отрезка на значение длины этого отрезка. В остальном логика двух операторов идентична.

Факториал функции f отражает относительное изменение функции с изменением аргумента функции и имеет следующее общее определение:

$$\mathbf{f}f(\mathrm{x}) = \frac{f(\mathrm{x} + \mathbf{d}\mathrm{x})}{f(\mathrm{x})}. \qquad (2)$$

По аналогии с тем как всё подынтегральное выражение $\boldsymbol{f}\mathbf{(x)dx}$ является дифференциалом первообразной $\mathbf{d}\boldsymbol{F}\mathbf{(x)}$, всё подмультипликальное выражение $\boldsymbol{f}\mathbf{(x)^{dx}}$ является факториалом фактор-первообразной $\mathbf{fF^{\bullet}(x)}$, который в действительности является одним из бесконечного количества бесконечно близких к единице множителей, что были упомянуты в определении мультипликала:

$$F^{\bullet}(\mathrm{x}) = \bullet\!\int \mathbf{f}\boldsymbol{F}^{\bullet}(\mathbf{x}), \quad (3)$$

По моему мнению в контексте приведённых определений понятие факториал достаточно фундаментально, что бы этим термином именовать **x!.** Далее по тексту настоящей работы и по умолчанию под факториалом не подразумевается **x!.**

По аналогии с тем, как при проведении интегрирования в направлении, противоположном росту аргумента **x**, то есть при **dx<0**, значение арифметического знака $\mathbf{d}\boldsymbol{F}\mathbf{(x)}$ меняется на противоположное, или другими словами этот дифференциал не прибавляется к результату интегрирования, а вычитается из него, так при проведении мультиплицирования в направлении, противоположном росту аргумента **x** значение $\mathbf{f}\boldsymbol{F}^{\bullet}\mathbf{(x)}$ меняется на обратное ему значение, или другими словами проводится не умножение результата мультиплицирования на этот факториал, а деление на него. Таким образом подобно тому, как вычисленный в обратном направлении определённый интеграл противоположен по арифметическому знаку вычисленному в прямом направлении для одного и того же отрезка интегрирования, вычисленный в обратном направлении определённый мультипликал обратный вычисленному в прямом направлении для одного и того же отрезка мультиплицирования при условии непрерывности операции мультиплицирования:

$$\bullet\!\int_{\mathrm{x}_0}^{\mathrm{x}_1} f(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}} = 1/\bullet\!\int_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{x}_0} f(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}}, \quad (4)$$

где **x_0** – начальное значение отрезка мультиплицирования; **x_1** - конечное значение отрезка мультиплицирования.

Подобно тому, как решение для определённого интеграла может быть выражено через разницу неопределённого интеграла для конечного и начального значениям отрезка интегрирования соответственно, решение для определённого мультипликала может быть выражено через отношение неопределённого мультипликала для конечного к начальному значения отрезка мультиплицирования соответственно:

$$\bullet\int_{x_0}^{x_1} f(x)^{dx} = \frac{F^{\bullet}(x_1)}{F^{\bullet}(x_0)}. \qquad (5)$$

Подобно тому, как интеграл суммы или разности равен сумме или разности интегралов соответственно, мультипликал произведения или отношения равен произведению или отношению мультипликалов соответственно:

$$\bullet\int (f_1(x)\times f_2(x))^{dx} = \bullet\int f_1(x)^{dx} \times \bullet\int f_2(x)^{dx}, \qquad (6.1)$$

$$\bullet\int \left({f_1(x)}\Big/{f_2(x)} \right)^{dx} = {\bullet\int f_1(x)^{dx}}\Big/{\bullet\int f_2(x)^{dx}}, \qquad (6.2)$$

Подобно тому, как определённый интеграл отрезка равен сумме определённых интегралов составных отрезков без пропусков и при условии одной направленности интегрирования и его непрерывности, определённый мультипликал отрезка равен произведению определённых мультипликалов составных отрезков без пропусков, но при условии его непрерывности и однонаправленности мультиплицирования:

$$\bullet\int_{x_0}^{x_2} f(x)^{dx} = \bullet\int_{x_0}^{x_1} f(x)^{dx} \times \bullet\int_{x_1}^{x_2} f(x)^{dx}, \qquad (7.1)$$

$$\bullet\int_{x_2}^{x_0} f(x)^{dx} = \bullet\int_{x_1}^{x_0} f(x)^{dx} \times \bullet\int_{x_2}^{x_1} f(x)^{dx}. \qquad (7.2)$$

Подмультипликальной функции запрещено иметь отрицательные значения в отрезке интегрирования по двум причинам: во-первых возникает неопределённость знака **f$F^{\bullet}$(x)** при бесконечно малом не обязательно рациональном показателе **dx**, во-вторых, если всё же знак **f$F^{\bullet}$(x)** определён как отрицательный, то все равно бессмысленно представлять мультипликал как произведение бесконечного количества отрицательных множителей, ибо тогда неизбежно возникает неопределённость в чётности или нечётности количества этих множителей, а следовательно и неопределённость состояния положительности или отрицательности результата мультиплицирования. Поэтому в качестве подмультипликальной функции при оказии подставляется модуль анализируемой функции, и по этой же причине отсутствует обозначение модуля функции в записи самого мультипликала, вся ответственность подстановки разрешённого вида функции в качестве подмультипликальной лежит на аналитике.

Интегрирование константы даёт линейную зависимость, в свою очередь мультиплицирование константы даёт показательную зависимость. Неопределённый мультипликал функции f(x) = A имеет следующий общий вид:

$$F^{\bullet}(x) = B \cdot A^{x} \quad (8),$$

где **A** - константа, **B** - отличный от нуля конечный произвольный множитель, который необходимо включать в выражение любого неопределённого мультипликала по точной аналогии с тем, как в выражение неопределённого интеграла включают произвольное слагаемое. **B** может быть отрицательным, что даёт нам возможность получить неопределённый мультипликал как функцию, возвращающую свои значения ниже оси абсцисс.

Диапазон для произвольных элементов

Произвольный элемент	Недостижимо малое	Нейтральное	Недостижимо большое
Произвольное слагаемое интеграла **C**	$-\infty$	0	$+\infty$
Модуль произвольного множителя мультипликала **B**	0	1	$+\infty$

Мультипликал можно выразить через интеграл, однако такая запись по определению косвенная и громоздкая, требует две дополнительные операции: возведения числа «**e**» в степень интеграла натурального логарифма исходной функции:

$$F^{\bullet}(x) = e^{\int \ln\left(f(x)\right)dx}. \quad (9)$$

Тем, кто полагает то, что мультипликал - это излишняя и бесполезная сущность, я предлагаю в равной мере критически подойти и к рассмотрению обоснованности существования оператора произведения $\prod$, поскольку его можно выразить аналогичным образом через оператор суммы $\sum$, и с учётом этого, кто знает, может быть он тоже лишний по их мнению. Выражение может показаться несколько сложным, но принципиально не сложнее выражения мультипликала через интеграл, но главное, работает же:

$$\prod_{i=1}^{N} a_i = sign([a_1; a_2; ..a_N]) \cdot e^{\sum_{i=1}^{N} \ln|a_i|}, \quad (10)$$

где **sign** – вспомогательная функция, возвращающая **–1** в случае, если количество отрицательных множителей в передаваемом в качестве аргумента массиве нечётно, и **+1** в противном случае. В данном случае в «нагрузку» возвращает 0 в случае, если по крайней мере один из множителей массива равен **0**.

Как бы то ни было качестве компромисса мультипликал можно рассматривать как сокращённую запись вышеприведённого записанного с использованием интеграла выражения. Лично сам считаю то, что сокращённая запись интуитивна, первична по сути, является тем, что непосредственно отражает математический смысл проводимой операции. По моему мнению, мультипликал имеет полное право занять своё принадлежащее ему место в стройной системе стандартных математических понятий и операторов, а выражение мультипликала с использованием интеграла является (являлось до сих пор) посредственным выражением в условиях отсутствия требуемого математического аппарата.

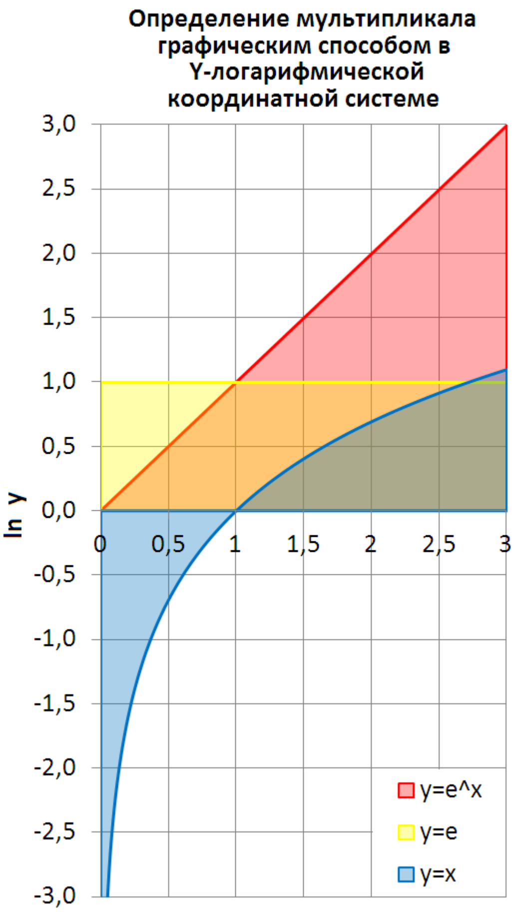
Справедливости ради необходимо отметить то, что выражение мультипликала через интеграл дает нам возможность аналитически описать формулы неопределённых мультипликалов для большого числа аналитически заданных функций используя существующие операторы и существующие функции.

Перевод произвольного множителя **B** мультипликала в произвольное слагаемое **C** неопределённого интеграла в посредственном выражении мультипликала $\mathbf{e}^{\int \ln(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\mathbf{dx}}$ и обратно осуществляется по следующим формулам:

$$C = \ln|B|, \quad (11.1)$$

$$B = \pm e^{C}. \quad (11.2)$$

При $x_0 = x_1$ определённый интеграл возвращает ноль, а определённый мультипликал возвращает единицу. Это утверждение согласуется с тем, что так же как результат действия операции суммирования представляет собой определённое изменение относительно нуля, результат действия оператора произведения представляет собой определённое изменение относительно единицы, то произведение нулевого количества умножителей даёт в качестве результата 1 (то есть без изменения единицы), и что также подтверждается уравнениями 5 и 9:



$$\int_{x_0}^{x_1} \ln f(x)dx = 0 \text{ , при } x0 = x1 \quad (12.1)$$

$$F^{\bullet}(x) = e^{\int_{x0}^{x1} \ln f(x)dx} = e^0 = 1. \quad (12.2)$$

Также как и определённый интеграл определённый мультипликал может быть решён графически. Так, если построить график функции в координатной системе где ось Y представлена через функцию **ln y** (натурально-логарифмическая шкала по оси **y**), затем если измерить площадь криволинейной трапеции образованной графиком функции в данной системе координат и ограниченной слева и справа x_0 и x_1 соответственно и затем возвести число **e** степень, равной полученной площади, то получим значение определённого мультипликала. Другими словами натуральный логарифм определённого мультипликала равен площади криволинейной трапеции, образованной анализируемой функцией и геометрически измеренной в данной (логарифмической) системе координат. Причём поскольку нейтральным элементом мультипликала является 1, (0 для оси ординат в единицах **ln y**), то измеренная ниже этой отметки по оси ординат площадь криволинейной трапеции считается как отрицательная. Сказанное подтверждается формулой посредственного выражения мультипликала с использованием интеграла.

Согласно определения самого понятия мультипликала решение определённого мультипликала можно получить через предел оператора произведения:

$$\Delta x = (x_1 - x_0) / N, \quad N \in \mathbb{N}, \quad N > 0 \quad (13.1)$$

$$\bullet \int_{x_0}^{x_1} f(x)^{dx} = \lim_{N\to\infty} \prod_{i=1}^{N} f\left(x_0 + \Delta x \cdot (i - ½)\right)^{\Delta x}, \quad (13.2)$$

$$\bullet \int_{x_0}^{x_1} f(x)^{dx} = \lim_{N\to\infty} \prod_{i=1}^{N} \Big(f\big(x_0 + \Delta x \cdot (i-1)\big) \cdot f(x_0 + \Delta x \cdot i)\Big)^{\Delta x/2}, \quad (13.3)$$

При конечных значениях Δx (длине элементарного отрезка) и для несколько большей практической точности предлагается брать значения функции в середине элементарного отрезка - уравнения 13.2. Ещё численно более точный вариант с использованием в качестве множителей в итерациях средне-геометрического значение от пары значений подмультипликальной функции тех, что в начале, и что в конце элементарного отрезка соответственно – уравнение 13.3. Если использовать 13.3, то из-за наличия в выражении произведения двух (чётного числа) близ стоящих друг к другу значений функции появляется соблазн мультиплицировать отрицательную область функций, что запрещено.

Поскольку мультипликал – это по сути результат операции произведения, а не суммы, дополнительным признаком не сходимости мультипликала, отличающим его по этому критерию от интеграла, является приближение значения мультипликала к 0 при стремлении аргумента в бесконечность. Необходимым, но не достаточным условием сходимости мультипликала является приближение подмультипликальной функции к 1 при стремлении аргумента в бесконечность, что отличает мультипликал от интеграла, подынтегральная функция которого должна стремится к 0 для такого же условия.

Оператору суммирования и оператору произведения можно дать общее определение рекурсивного приращивающего итератора первого и второго порядка в соответствии с порядком используемого гипероператора в их основе. Приращивающие, поскольку используют прямой, а не обратный гипероператор, а рекурсивные, поскольку приращивают результат предыдущей своей итерации, то есть ссылаются себя. Интегралу и мультипликалу можно дать общее определение непрерывного рекурсивного приращивающего итератора первого и второго порядка соответственно. А также дифференциалу и факториалу, а также первообразной и фактор-первообразной, а также производной и фактор-производной можно дать обобщающие определения: приращения первого и второго порядка, а также первообразной первого и второго порядка, а также производной первого и второго порядка соответственно.

Примеры фактор-первообразных для известных функций

Функция	Фактор-первообразная
0	не существует
1	B
a	$\mathrm{B} \cdot a^{\mathrm{x}}$
$a \cdot \mathrm{x}^{\mathrm{n}}$	$\mathrm{B} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{n} \cdot \mathrm{x} \cdot (\ln(\sqrt[n]{a} \cdot x) - 1)}$
$a^{\mathrm{n} \cdot \mathrm{x}}$	$\mathrm{B} \cdot a^{(½ \cdot \mathrm{n} \cdot \mathrm{x}^2)}$
$\mathrm{e} \nearrow^{\mathrm{x}}$	$\mathrm{B} \cdot \mathrm{e} \nearrow^{\mathrm{x}}$

где ↗ - обозначение оператора степенная башня с левой ассоциативностью.

Пример использования мультипликала

$$\mathrm{I}(\mathrm{t}_0, \mathrm{t}_1) = \bullet \int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}_1} (1 + \mathrm{i}(\mathrm{t}))^{\mathrm{dt}}, \quad (16.1)$$

где **t** - время, год; $\mathbf{t_0}$ – начальная временная метка контрольного периода, год; $\mathbf{t_1}$ – конечная временная метка контрольного периода, год; **i(t)** – функция от времени темпа роста инфляции / темпа роста экономики / ставка ссудный процент в годовом исчислении, д.е.; $\mathbf{I(t_0, t_1)}$ – коэффициент обесценивания денежных средств / роста экономики / показательныго роста задолженности за контрольный период, д.е.

$$S(\mathrm{t}_1) = \bullet \int_{0}^{\mathrm{t}_1} (1 - \mathrm{m}(\mathrm{t}))^{\mathrm{dt}}, \quad (16.2)$$

где **t** – возраст, год; **m(t)** – функция смертности в элементарной группе от возраста людей элементарной группы в годовом исчислении, д.е.; $\mathbf{t_1}$ – возраст, год; $\mathbf{S(t_1)}$ – функция ожидаемой доли выживших от общего числа родившихся в зависимости от возраста $\mathbf{t_1}$, д.е.

Физическая размерность мультипликала и подмультипликальной функции

Как мы хорошо знаем для интеграла взаимозависимость между размерностью значений подынтегральной функции и размерностью значений интеграла устанавливается через размерность элемента интегрирования или другими словами через размерность общего для обеих функций аргумента:

$$M = m \cdot a,$$

где **M** – размерность значений интеграла, **m** - размерность значений подынтегральной функции **a** – размерность значений аргумента.

В данном случае используется оператор умножения – действия с элементом интегрирования. Само классическое представление о размерности физической величины подразумевает под собой произведение числа (количественного свойства физической величины) на размерность (качественное свойство физической величины), то есть подразумевает использование оператора умножения в качестве связки для пары описанных свойств физической величины.

Работа с мультипликалом заставит нас переосмыслить представление о физической размерности, о том, как она может выглядеть, поскольку взаимозависимость между размерностью значений мультипликала и размерностью значений подмультипликальной функции использует оператор возведения в степень (оператор прилагаемый к элементу мультиплицирования), что обуславливает применение такого же оператора в качестве связки между количественным и качественным свойствами физической величины:

$$M = m^{a},$$

где **M** – размерность значений мультипликала, **m** - размерность значений подмультипликальной функции.

Таким образом и при условии того, что в выше приведённых примерах мультипликал подразумевал безразмерную величину, а общий аргумент мультипликала и подмультипликальной функции представлен размерностью **годы**, размерность значений подмультипликальной функций должна быть **1/годы** и не в качестве множителя, но в качестве степени к численному значению подмультипликальной функции, например так: $\mathbf{1.05^{1/год}}$, что тождественно $\sqrt[\text{год}]{\mathbf{1.05}}$. При мультиплицировании данное численное значение в данного типа размерности, возведённое в степень величины с размерностью **годы** (элемент мультиплицирования), в результате даёт безразмерную величину, соответствующую изначально определённой размерности значений мультипликала. Как видно, использование оператора умножения в качестве связки численного значения и размерности физических величин в качестве значений мультипликала и подмультипликальной функции не представляется возможным. Возвращающие физические величины с классической размерностью функции не могут быть подвергнуты мультиплицированию или факторированию, что для них по определению было бы лишённым физического смысла. Эти функции могут быть либо безразмерными, либо, как это показано выше, иметь так называемый «**степенной**» (или «**коренной**») тип размерности.

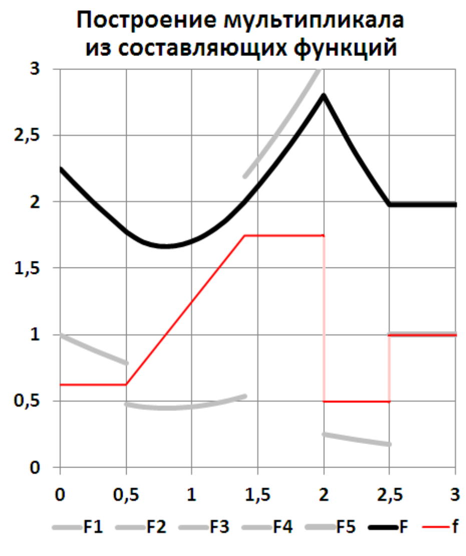
Правило согласования произвольного множителя «B»

Если анализируемая функция задана по средствам ряда функций, применимых по одной для каждого из ряда стоящих в стык друг к другу диапазонов значений аргумента анализируемой функции (различный областях анализируемой функции), другими словами если аналитическая функция задана с прерываниями, то построении её неопределённого мультипликала подразумевает взятие неопределённых мультипликалов для каждой из числа составляющих функций с целью их использования в качестве составляющих неопределённого мультипликала анализируемой функции в соответствующих им областях. Далее если анализ подразумевает построение непрерывного мультипликала анализируемой функции, то следует обязательная для этого случая процедура взаимного согласования произвольных множителей составляющих неопределённых мультипликалов, очевидно необходимой для обеспечения непрерывности функции неопределённого мультипликала анализируемой функции. Согласование множителей всех пар смежных составляющих неопределённых мультипликалов производится по парно и должно отвечать следующему равенству:

$$B_1 \cdot F^{\bullet}{}_1(x) = B_2 \cdot F^{\bullet}{}_2\,(x), \quad (14)$$

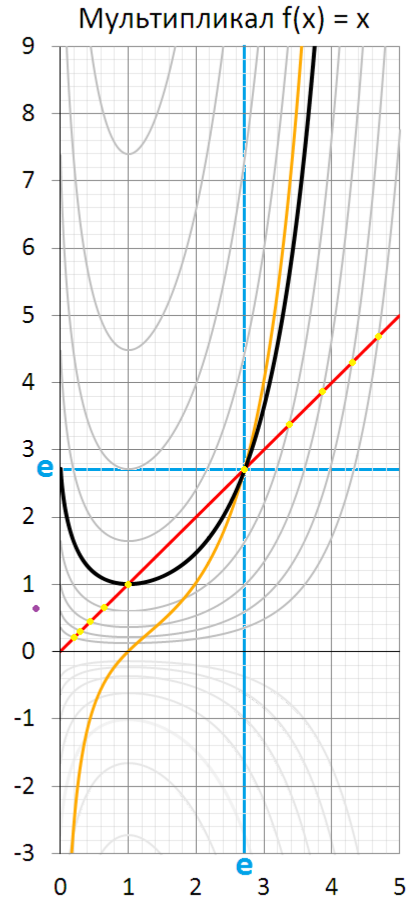
где **0** и **1** – индексы смежных предыдущего и следующего составляющих неопределённых мультипликалов и их произвольных множителей; **x** - точка стыка смежных предыдущего и следующего составляющих неопределённых мультипликалов под индексами **0** и **1**.

Решение вышеприведённого уравнения осуществляется для каждого стыка составляющих неопределённых мультипликалов, причём последовательно в порядке значений аргумента в точках стыков по одному из двух направлений: в сторону их роста или в сторону их убывания. Таким образом определяется произвольный множитель для каждого следующего составляющего неопределённого мультипликала по уже известному значению для каждого предыдущего. Значение произвольного множителя для первого в расчётной последовательности составляющего неопределённого мультипликала устанавливается аналитиком.



На рисунке приведен пример согласования произвольных множителей. Здесь подмультипликальная функция (красным) составлена из пяти аналитически заданных линейных функций, для каждой из которых построен неопределённый мультипликал (серым), после чего произведено согласование их произвольных множителей в направлении слева на право. Так для первого слева составляющего неопределённого мультипликала произвольный множитель установлен на значении 2.25, для второго его расчётное значение составило 3.709623, для третьего оно составило 0.914782, для четвёртого 11,20608 и для пятого 1,980973. Из пяти составляющих неопределённых мультипликалов по результату согласования их произвольных множителей построена непрерывная функция неопределённого мультипликала анализируемой функции (чёрным). Подобная описанной процедура должна проводится по отношению к неопределённому интегралу в подобной ситуации, но в отношении произвольных слагаемых С последнего. Можно обратить внимание на то, что мультипликал не имеет прерывания производной в точках излома подмультипликальной функции, поскольку нет прерывания самой подмультипликальной функции в качестве фактор-производной мультипликала функции. В точках, где подмультипликальная функция имеет прерывание, её мультипликал имеет изломы (прерывания производной).

Так называемый «непрерывный факториал»



На диаграмме представлена серия графиков (серым) из бесконечного множества графиков неопределённого мультипликала функции **f(x) = x** (посредственно **y = ±e^x•ln(x)–x+C**) (красным), каждый отличающиеся от других из серии значением произвольного множителя «**B**». Для одного из них - того, что проходит через точку (**x=1,y=1**) (чёрным) построена производная (оранжевым).

Для неопределённого мультипликала функции **f(x) = x** соблюдается следующее примечательное отношение:

$$\frac{F^{\bullet}(0) = F^{\bullet}(e) = F^{\bullet\prime}(e)}{F^{\bullet}(1) = F^{\bullet\prime\prime}(1)} = e, \qquad (17.1)$$

а также значением его производной является:

$$F^{\bullet\prime}(1) = 0, \qquad (17.2)$$

где $\mathbf{F^{\bullet}(x)}$ – неопределённый мультипликал **f(x) = x**; $\mathbf{F^{\bullet\prime}(x)}$ – производная $\mathbf{F^{\bullet}(x)}$; $\mathbf{F^{\bullet\prime\prime}(x)}$ – вторая производная $\mathbf{F^{\bullet}(x)}$.

В отношении мультипликала функции **f(x) = x** меня не покидает мысль о том, что именно эта красивая функция может претендовать на роль функции так называемого «непрерывного факториала».

Сдвинутая на единицу влево «**Гамма»** функция («**Пи**» функция) является обобщением **x!** для вещественных чисел и на мой взгляд не подходит на роль функции «непрерывного факториала». Так, если для **x!** первой, так скажем, опорной точкой, при которой соблюдается условие **y = x**, является точка при **x = 1**, а вторая такая точка при **x = 2**, то для мультипликала **f(x) = x**, в частности $\mathbf{e^{x\cdot\ln(x)-x+1}}$ (чёрным на диаграмме) вторая такая опорная точка находится при **x = e**, что показывает на исключительность последней по сравнению с обобщением для **x!**.

Казалось бы, какое отношение может иметь число **e** к построению функции «непрерывного факториала». И как оказалось, самое непосредственное, ибо мультиплицирование функции **f(x) = x** – это один из способов нахождения числа **e**. Признаться, приведённые здесь графики построены не через выражение $\mathbf{\pm e^{x\cdot\ln(x)-x+C}}$, о котором тогда ещё не задумывался, то есть не по средствам использования заведомо известного числа **e**, а именно мультиплицированием **f(x) = x** численным методом начиная от **x = 1** в обе стороны по оси абсцисс. И каково же было моё изумление, когда вышел на число **e** при **x** стремящемся к нулю. Но с другой стороны, чему тут удивляться, какое другое конечное число можно было бы ожидать, ведь появление любого другого конечного числа вызвало бы удивление с восторгом ещё большее, ибо такое число могло бы быть новой замечательной математической постоянной по определению.

Решение задачи обобщения **x!** для вещественных чисел возвращает нас к мысли о том, что **x!** в первую очередь является дискретной функция, и что само по себе поднимает два связанных с этим фактом вопроса. Во-первых, почему при построении ряда не рассмотреть ряд множителей начиная не от 1, а с какого-то другого вещественного числа, например от 0.5, как следует: 0.5, 1.5, 2.5 и т.д., и во-вторых почему шаг ряда составляет 1, а не любое другое положительное вещественное число? Чем именно единица примечательна в качестве начальной точки ряда и размера его шага? Под этим углом зрения обобщение **x!** для вещественных чисел предстаёт перед нами как частное построение.

Изменение величины шага ряда означает изменение количества множителей ряда, используемых при вычислении результата функции для подставляемого аргумента. Для того, что бы сохранить тождественность порядка возвращаемого результата функции для подставляемого аргумента, и поскольку мы имеет дело с рядом именно множителей, при изменении шага ряда необходимо возводить каждый множитель ряда в степень кратности изменения (увеличения) величины шага ряда, в данном случае при изменении шага ряда относительно от единицы как величины по умолчанию. В этой связи можно записать общее определение функции **x!**:

$$x! \ = \prod_{i=0}^{N(x)} (b \ + s \cdot i)^{S}, \quad (18.1)$$

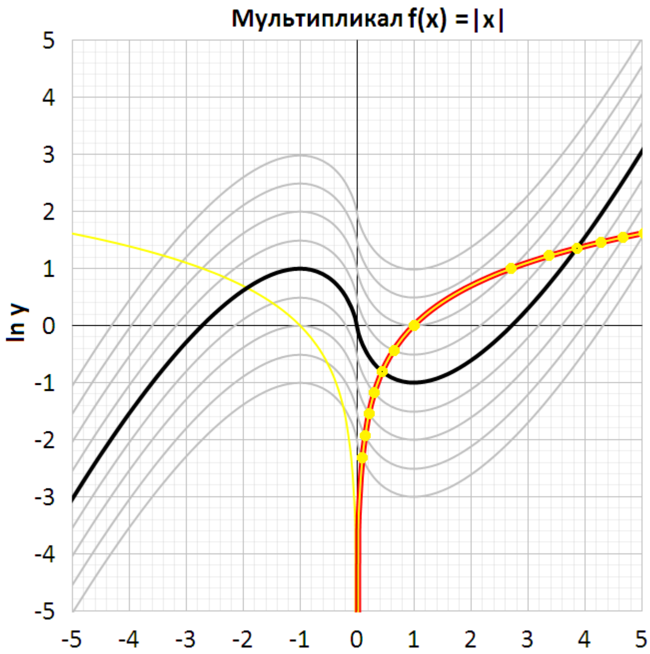
$$N(x) = \mathrm{round}\left(\frac{(x-b)}{s}\right), \quad (18.2)$$

где **b** – начальная точка ряда, по умолчанию равная 1; **s** – величина шага ряда, по умолчанию равная 1; **N** – функция количества итераций оператора суммирования включая нулевую итерацию в зависимости от значения аргумента

Примеры рядов: $2.5^2 \cdot 4.5^2 \cdot 6.5^2 \cdot 8.5^2 \cdot 10.5^2$ и т.д. или: $1.1^{0.1} \cdot 1.2^{0.1} \cdot 1.3^{0.1} \cdot 1.4^{0.1} \cdot 1.5^{0.1} \cdot 1.6^{0.1} \cdot 1.7^{0.1} \cdot 1.8^{0.1}$ и т.д. или $1 \cdot 2^1 \cdot 3^1 \cdot 4^1 \cdot 5^1 \cdot 6^1$ С описанной точки зрения последний ряд, а именно тот, что используется в первоначальной версии функции **x!** – есть ряд по умолчанию, но одновременно представляет собой частное построением из множества возможных.

Уменьшение величины шага ряда делает возвращаемые значения функции для подставляемого аргумента ближе друг у другу при сравнении двух близких, но не равных шагах. Характерная особенность построения ряда с использованием мультипликала f(x) = x заключается в том, что величина шага ряда (величина элемента мультиплицирования) стремится к 0, что в первую очередь обеспечивает нам искомую непрерывность функции, и также делает возвращаемый результат функции для подставляемого аргумента уже индифферентным к количеству множителей в ряду, к величине шага ряда. Возвращаемые результаты для поставляемого аргумента стремятся к взаимному равенству. Данное обстоятельство приводит геометрические места точек множества получаемых с использованием мультипликала f(x) = x функций для множества начал ряда в однозначное, обобщённое положение с соблюдением вышеприведённого общего для всех них равного числу **e** замечательного отношения, и что наблюдается вне зависимости от выбора точки условного начала ряда. В данном случае выбор точки начала ряда единственно предопределяет значение произвольного множителя **B**, то есть выделяет одну функцию из их множества, или наоборот, множитель **B** определяет одну или две точки начала ряда из их множества. Так из любой точки (кроме точки 0) прямой графика функции **f(x) = x** можно провести график её мультипликала с предопределённым для данной точки множителем **B**.

На диаграмме точки пересечения (жёлтым) графика функции **f(x) = x** с графиками своего мультипликала, являются примерами выбора условного начала ряда, из которых строится график так называемого «непрерывного факториала» в влево от точек пересечения. Также видно то, что не для всех значений множителя **B** существует решение начальной точки построения ряда. Речь идёт о графиках мультипликала, не пересекающих прямую **f(x) = x**.



На второй диаграмме для наглядности в натурально логарифмической по оси ординат системе координат показана серия графиков неопределённого мультипликала (серым в общем и чёрным при **B = 1**) модуля (жёлтым) функции **f(x) = x** (красным) для различных значений произвольного множителя **B**. Жёлтым показан график модуля **y = x**.

Геометрический рост функции

Производная функции показывает на рост функции в точке. Но как выясняется, рост функции в точке может быть разного рода, как говориться, рост росту рознь. Поэтому следует уточнить то, что данный рост является арифметическим, то есть показывает на сколько единиц вырастет функция, если аргумент функции вырастет на 1, и при гипотетическом условии того, что данный арифметический рост функции на протяжении роста аргумента не изменится и будет соответствовать своему значению в выбранной точке функции. Графически это решается проведением касательной к графику функции в выбранной точке, а если выражаться точнее то, проведением к графику функции в выбранной точке не просто касательной, не просто касательной прямой, а именно касательного графика линейной функции общего вида:

$$y = b \cdot x + c, \quad (37)$$

где **b** и **c** – константы касательной линейной функции, определение которых обеспечивает её касание к анализируемой функции в выбранной точке.

b численно показывает на абсолютное приращение функции при увеличении аргумента на 1, показывает на арифметический рост функции в точке. Тангенс угла наклона касательной прямой в выбранной точке отражает значение арифметического роста функции в данной точке.

Упомянутая выше фактор-производная показывает на геометрический рост функции в точке. Он показывает <u>во</u> сколько раз вырастет функция, если аргумент функции вырастет на 1, и при гипотетическом условии того, что данный геометрический рост функции на протяжении роста аргумента не изменится и будет соответствовать своему значению в выбранной точке функции. Графически это решается проведением к графику функции в выбранной точке касательного графика показательной функции общего вида:

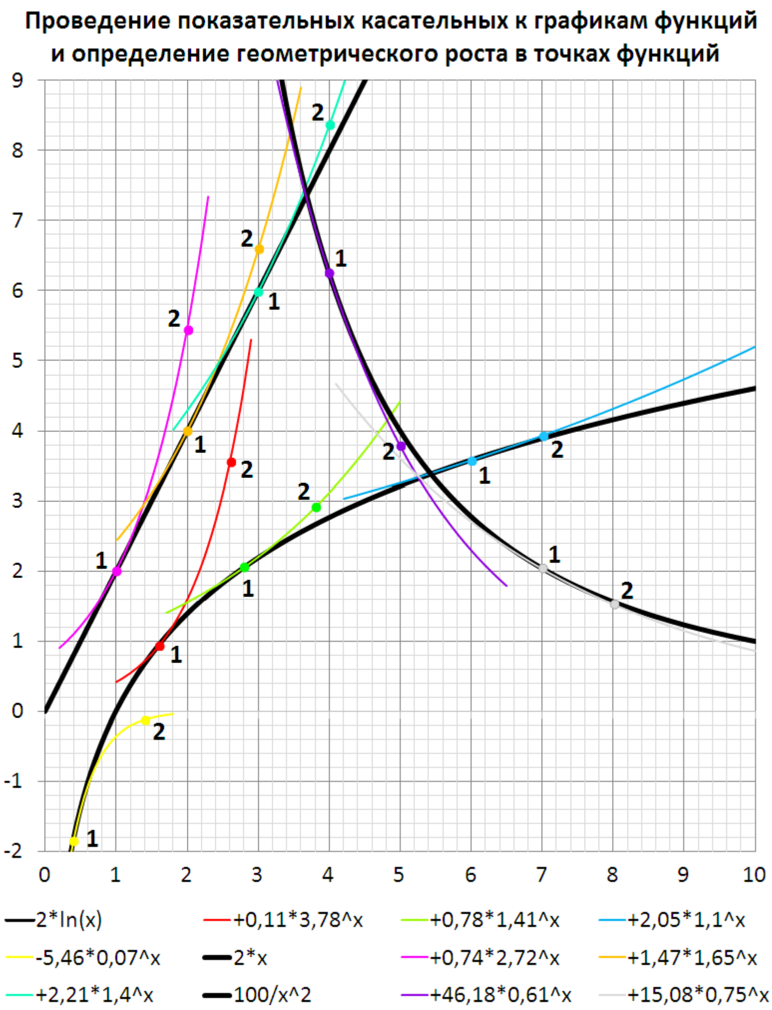
$$y = b \cdot a^x, \quad (38.1)$$

$$a = e^{\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)}, \quad (38.2)$$

$$b = \frac{f(x)}{|f(x)|} \cdot a^{\left(\frac{\ln|f(x)|}{\ln a}\right) - x}, \quad (38.3)$$

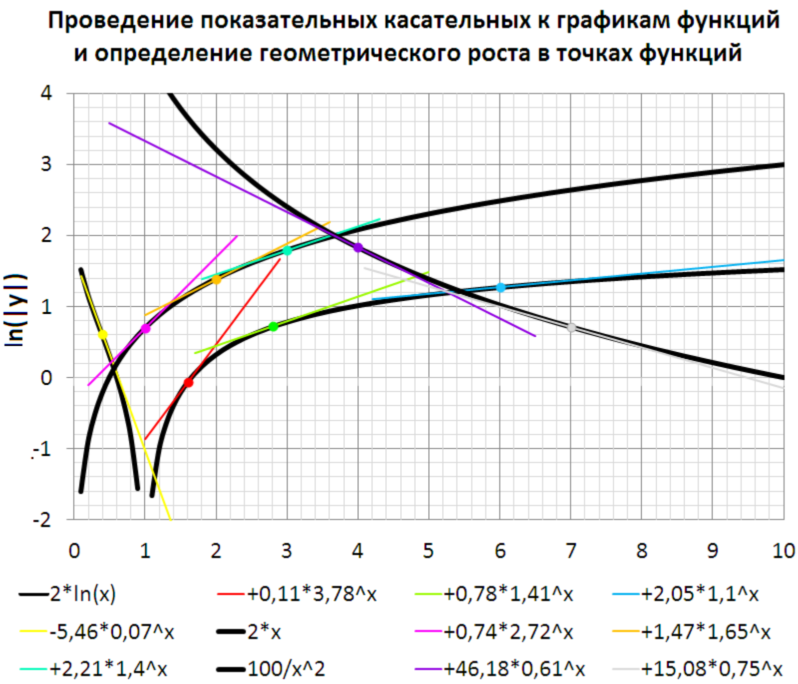
где **a** и **b** – константы касательной показательной функции, основание степени и множитель, определение которых обеспечивает её касание анализируемой функции; **f'(x)** –производная анализируемой функций; **f(x)** – анализируемая функция.

a численно показывает на относительное приращение функции, следовательно на геометрический рост функции. <u>Фактор-производная не может быть отрицательной</u>.



На диаграмме к графикам трёх функций: **f(x) = 2·ln(x), f(x) = 2·x и f(x) = 100/x²** (чёрным) проведены показательные касательные (цветами). Абсолютная разница между 2-ой и 1-ой точками одного цвета по оси абсцисс отражает приращение аргумента на единицу. Относительная разница их высоты, измеренная относительно положения оси абсцисс или то во сколько раз точка 2 находится дальше точки 1 по отношению к оси абсцисс показывает на значение геометрического роста функции в точке касания (в 1-ой точке). Очевидно то, что через одну пару точек 1 и 2 можно провести только одну экспоненту $y = b \cdot a^x$.

Построение выше анализируемых функции в координатной системе, где ось ординат размечена в единицах **ln|y|** (натурально логарифмическая шкала по оси ординат для значений функций по модулю), визуально «деградирует» линейные зависимости до логарифмических, показательные до линейных, а геометрические приращения до арифметических. Число **e** возведённое в степень тангенса угла наклона касательной визуально прямой в выбранной точке графика покажет на значение геометрического роста функции в данной точке, или другими словами натуральный логарифм геометрического роста равен тангенсу угла наклона касательной прямой.



В точках, где функция пересекает ось абсцисс её фактор-производная имеет прерывания. Так можно обратить внимание на то, что фактор производная функции $\mathbf{y = 2 \cdot ln(x)}$ имеет прерывание при $\mathbf{x = 1}$ стремясь к **0** ($e^{-\infty}$) при приближении аргумента к точке с лева и к + ∞ ($e^{+}\infty$) при приближении аргумента к точке права.

По аналогии с тем как при поиске производной функции опускается общее постоянное слагаемое, при поиске фактор-производной опускается общий постоянный множитель.

Примеры фактор-производных

Функция	Фактор-производная
0	Неопределённость
b	1
$b \cdot x^{a}$	$e^{a/x}$
$b \cdot a^{x}$	a
$b \cdot e\nearrow^{x}$	$e\nearrow^{x}$

где ↗ - обозначение оператора степенной башни с левой ассоциативностью.

Желающие могут поупражняться в поиске формулировок фактор-производных и фактор-первообразных для известных функций.

При посредничестве анализируемой функции между её производной (арифметическим ростом) и её фактор-производной (геометрическим ростом) существует взаимозависимость при отсутствии каких либо критических значений участвующих в уравнении величин:

$$\mathrm{f}^{\bullet}(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{f}'(\mathrm{x})}{\mathrm{f}(\mathrm{x})}}, \quad (39.1)$$

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}) \cdot \ln \mathrm{f}^{\bullet}(\mathrm{x}), \quad (39.2)$$

при $f(x) \neq 0$ и $f^{\bullet}(x) \neq 0$ и $f(x) \neq \infty$ и $f^{\bullet}(x) \neq \infty$ и $f'(x) \neq \infty$

где **f(x)** - анализируемая функция; **$f^{\bullet}$(x)** – фактор-производная анализируемой функции; **f'(x)** – производная анализируемой функции.

Очевидно то, что не возможно восстановить функцию при её известных производной или фактор-производной по отдельности, но можно восстановить функцию в случае, если они известны обе вместе, а также и то, что фактор-производная имеет отличное от единицы конечное значение и отсутствуют выше приведённые критические значения:

$$f(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{f}'(\mathrm{x})}{\ln \mathrm{f}^{\bullet}(\mathrm{x})}$$ при $f(x) \neq 0$ и $f^{\bullet}(x) \neq 0$ и $f^{\bullet}(x) \neq 1$ и $f(x) \neq \infty$ и $f^{\bullet}(x) \neq \infty$ и $f'(x) \neq \infty$. (39.3)

Аналогично тому как производная функции может быть выражена через её дифференциал: ***f'*(x) = d*f*(x) / dx**, фактор-производная может быть выражена через её факториал, при этом используя не оператор деления, а ожидаемо оператор извлечения корня, стоящий на один порядок выше оператора деление:

$$f^{\bullet}(\mathrm{x}) = \sqrt[\mathrm{dx}]{\mathbf{f}f(\mathrm{x})}. \quad (40)$$

И таким же образом наоборот, факториал функции может быть выражен через её фактор-производную, что подобно тому, как дифференциал функции может быть выражен через её производную: **d*f*(x) = *f'*(x) · dx**, но опять таки, не используя оператор умножения, а вместо него оператор возведения в степень, также стоящий на один порядок выше оператора умножения:

$$\mathbf{f}f(\mathrm{x}) = f^{\bullet}(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}} \quad (41)$$

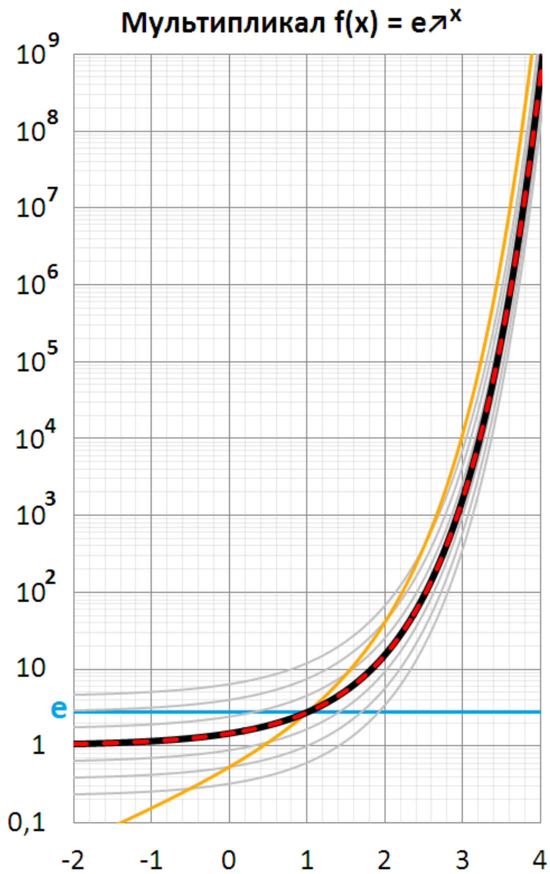
Акселента

Поставил задачу найти/сформулировать функцию, геометрических рост которой или другими словами её фактор-производная, а автоматически значит и мультипликал были бы равны значениям самой функции при любом значении аргумента. Первая такая функция напрашивается сама собой, и это функция y = 1, что существует по аналогии со существованием функции y = 0 для задачи поиска производной и первообразной равной самой функции, где 1 и 0 очевидно значения нейтральных произвольных элементов для мультипликала и интеграла соответственно. Также по аналогии с поиском производной вторая функция с подобным свойством предположительно должна быть показательной и также как его имеет функция $\mathbf{e^x}$ иметь в своём основании число **e**, и как мы уже знаем, число **e** действительно имеет непосредственное отношение к мультиплицированию и факторированию функций.

Как известно операции интегрирования и дифференцирования используют операторы сложения и вычитания, то есть бинарные операторы первого порядка, а операции мультиплицирования и факторирования используют операторы умножение и деления, то есть бинарные операторы второго порядка. Показательная функция $\mathbf{e^x}$ представляет собой одно действие с оператором возведения в степень, то есть с прямым бинарным оператором третьего порядка, а также имеет число **e** в качестве первого операнда и аргумент **x** в качестве второго. Можно заметить то, что в данной функции используется прямой бинарный оператор, стоящий на два порядка выше от операторов, используемых для операций интегрирования и дифференцирования. Далее делаем смелое предположение о том, что искомая нами функция в точности повторяет функцию $\mathbf{e^x}$ в части операндов, и также как $\mathbf{e^x}$ представляет собой одно действие прямого бинарного оператора, стоящего на два порядка выше операторов, используемых при мультиплицировании и факторировании, то есть действие с неким прямым бинарным оператором четвёртого порядка. Таким образом является гипер-показательной функцией четвертого порядка с основанием **e**. Запишем данную функцию и в частности предполагаемый оператор следующим образом:

$$y = e\nearrow^{x}, \quad (43)$$

где ↗ - обозначение гипероператора четвёртого порядка, называемого собственным именем «Ускорение» или «Акселерация»; x – «ускоритель»; e – «ускоряемое»; y – «ускорение». Выражение может читаться как: «число **e** в ускорении **x**» , «число **e** в **x**-вом ускорении», «**x**-ое ускорении числа **e**», «число **e**, ускоренное в **x** раз», «ускоренное в **x** раз число **e**», «ускорение **e** в **x**». Кривая графика $\boldsymbol{y = a\nearrow^{x}}$ называется «Ускорительной» или «Акселентой».



Моё предположение оказалось верным, выяснилось то, что $\mathbf{y = e\nearrow^{x}}$ отвечает предъявленному к ней требованию, но при условии того, что Ускорение - это <u>степенная башня</u> <u>с левой ассоциативностью.</u> Не следует её путать с Тетрацией – степенной башней с правой ассоциативностью.

На диаграмме можно увидеть построение акселенты y = $e\nearrow^{x}$ (красным пунктиром) и множества её мультипликалов (светло-серым), один из которых с произвольным равным 1 множителем (чёрным) совпадает с самой функцией, для чего собственно и пришлось показать её пунктиром. Можно также заметить то, что логарифмическая шкала визуально «деградирует» акселенту на один порядок вниз до визуальной экспоненты, сдвинутой в право по оси абсцисс на единицу.

Специально отмечу то, что оператор «Ускорение» получен по необходимости формулирования аналога функции **$y=e^{x}$** для операций мультиплицирования и факторирования, получен методом не экстраполяции, но методом сдвига на один порядок вверх ряда из трех последовательных гипероператоров в направлении предполагаемого математического анализа, по аналогии с тем, как надвигают пролёты моста при его строительстве. Именно проводимый математический анализ предопределяет внутреннюю логику данного оператора четвёртого порядка, а не наоборот, например, когда уже есть готовый оператор, и затем его пробуют применить.

Иллюстрация сдвига ряда гипероператоров

Оператор	Сложение	Умножение	Степень	Ускорение
Исходное состояние	Сумма и Интеграл	Операция с элементом интегрирования; Линейное уравнение касательной арифметического роста	Арифметический рост функции совпадает с самой функцией e^{x}	
Надвижка на один порядок вверх (вправо)		Произведение и Мультипликал	Операция с элементом мультиплицирования; Показательное уравнение касательной геометрического роста	Геометрический рост функции совпадает с самой функцией $e\nearrow^{x}$

Ускорение можно компактно выразить через операторы низших порядков:

$$a\nearrow^{\mathrm{n}}= a^{\left(a^{(\mathrm{n}-1)}\right)}. \quad (44)$$

Гиперкорень четвёртого порядка называемый собственным именем «Замедление» или «Деселерация» обозначается следующим образом:

$$a\searrow_{n}, \quad (45)$$

где ↘ - обозначение оператора «Замедление»; **n** – «замедлитель»; **a** – «замедляемое». Результат операции «замедление». Выражение может читаться как: «число **a** в замедлении **n**», «число **a** в **n**-ом замедлении», «**n**-ное замедление числа **a**», «число **a**, замедленное **n** раз», «замедленное **n** раз число **a**», «замедление **a** в **n**».

Замедление показывает на число, которое необходимо возвести в степень самого себя на единицу меньшее количество раз, чем значение замедлителя для того что-бы получилось замедляемое число при этом применяя левую ассоциативность в последовательности возведения в степень.

Замедление в свою очередь решается рекуррентно с использованием оператора извлечения корня (обратного оператора одного порядка ниже) и также компактно:

$$a \searrow_n = \sqrt[\left((a\searrow_n)^{(n-1)}\right)]{a}, \quad (46)$$

в чём нет ничего необычного, поскольку извлечение корня также решается рекуррентно, по такой же схеме, но что отличительно и закономерно, с использованием оператора деления (обратного оператора одного порядка ниже):

$$\sqrt[n]{a} = \frac{a}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{(n-1)}}. \quad (47)$$

Следствием общей для двух обратных гипероператоров схемы решения и аналогично тому, как запрещено подавать в подкоренное выражение величину меньше 0, в качестве замедляемого запрещено подавать величину меньше 1. Вспоминая то, как было образовано множество комплексных чисел, представляется интересным то, какое множество чисел может быть образовано с использованием замедляемого меньше 1.

Логарифм четвёртого порядка с собственным именем «Извлечение ускорителя» и «Извлечение натурального ускорителя» определятся как вложенный логарифм соответственно:

$$c \nwarrow_a = \log_a\left(\log_a c\right) + 1, \quad (48.1)$$

$$c \nwarrow = \ln\left(\ln c\right) + 1, \quad (48.2)$$

Мультиплицирование при нулевых значениях функции

Особый аналитический интерес представляет процесс мультиплицирования модулей функций, пересекающих ось абсцисс в окрестности данного пересечения (далее нулевой точки).

В окрестности нулевой точки пересекающую функцию можно приближённо представить в виде многочлена:

$$y = b_1 \cdot (x - c)^1 + b_2 \cdot \mathrm{sign}(x - c)\cdot(x - c)^2 + b_3 \cdot (x - c)^3 + \ldots + b_n \cdot \mathrm{sign}(x - c) \cdot |x - c|^n, \quad (15.1)$$

где $\mathbf{b_1}$,$\mathbf{b_2}$,$\mathbf{b_3}$, $\mathbf{b_n}$ – множители многочлена; **c** – координата нулевой точки; **sign** –функция, возвращающая **–1**, если аргумент отрицателен, **+1** в противном случае.

В предельном приближение к нулевой точке многочленную функцию можно сократить до функции одного члена – первейшего слева, что с ненулевым множителем **b**. Также в виду того, что положение нулевой точки на оси абсцисс не принципиально в рассматриваемом случае, то для сокращения записи примем C=0 (нулевая точка расположена в точке начала координат). После упрощения уравнение имеет общий вид зависимой от арифметического знака аргумента степенной функции:

$$y = b_n \cdot \mathrm{sign}(x) \cdot |x|^n \text{ при } n>0, \quad (15.2)$$

Так как позволяется проводить мультиплицирование только положительных областей функций, то преобразуем функцию до её модуля, и получим разрешённую для мультиплицирования подмультипликальную функцию (далее подмультипликальная функция). К тому же данное преобразование описывает случай не пересечения функциями оси абсцисс, но её касание. Таким образом проводимый анализ описывает все случаи контакта графика функции и оси абсцисс в одной точке:

$$y = |b_n| \cdot |x|^n. \quad (15.3)$$

Далее подмультипликальная функция разделяется на две области: на ту, что левее, и ту, что правее нулевой точки, представляемые следующими применимыми при соответствующих условиях составляющими уравнениями:

$$y = |x|^n \cdot b \text{ при } b_n \cdot x \geq 0, \quad (15.4)$$

$$y = -|x|^n \cdot b \text{ при } b_n \cdot x \leq 0, \quad (15.5)$$

Неопределённый мультипликал каждого из составляющих уравнений:

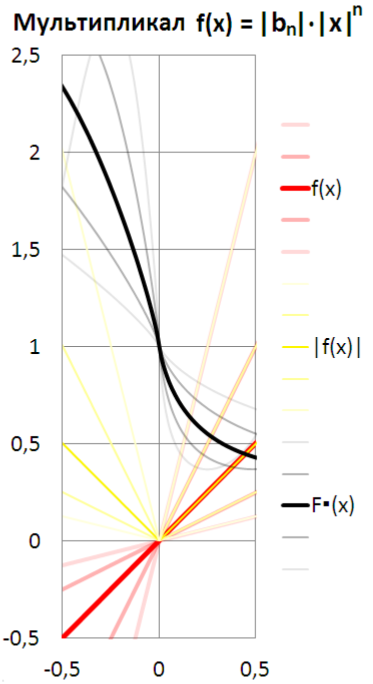
- $\int (|x|^n \cdot b)^{dx} = B \cdot e^{n \cdot x \cdot \left(\ln\left(x \cdot \mathrm{sign}(b) \cdot \sqrt[n]{|b|}\right) - 1\right)}$ при $b_n \cdot x > 0$, (15.6)
- $\int (-|x|^n \cdot b)^{dx} = B \cdot e^{n \cdot x \cdot \left(\ln\left(-x \cdot \mathrm{sign}(b) \cdot \sqrt[n]{|b|}\right) - 1\right)}$ при $b_n \cdot x < 0$, (15.7)

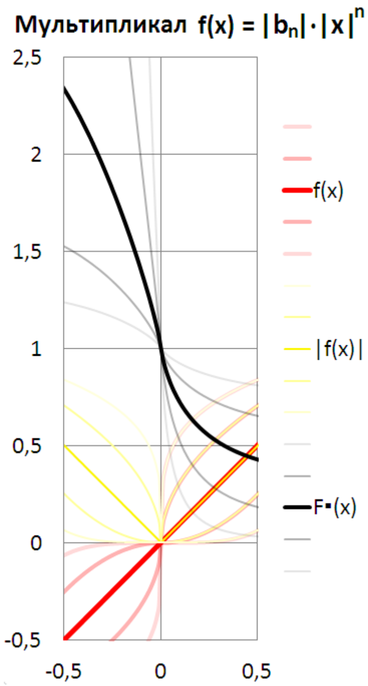
Поскольку оба из этих неопределённых мультипликалов не существуют в нулевой точке (x = 0), то определим их значения при бесконечно близком приближении к этой точке слева и справа по отдельности используя предыдущие уравнения:

$$\lim_{x \to 0} B \cdot e^{n \cdot x \cdot \left(\ln\left(x \cdot \mathrm{sign}(b) \cdot \sqrt[n]{|b|}\right) - 1\right)} = B \text{ при } (x \cdot b) \geq 0, \quad (15.8)$$

$$\lim_{x \to 0} B \cdot e^{n \cdot x \cdot \left(\ln\left(-x \cdot \mathrm{sign}(b) \cdot \sqrt[n]{|b|}\right) - 1\right)} = B \text{ при } (x \cdot b) \leq 0, \quad (15.9)$$

На первой (левой) диаграмме представлены: функция $\mathbf{y = b_n \cdot sign(x) \cdot |x|^n}$ при **n=1** и различных **b** (от 0.25 до 4 оттенками красного и ярко красным при **b=1**), её модуль: $\mathbf{y = |b_n| \cdot |x|^n}$ (оттенками жёлтого и ярко жёлтым при $\mathbf{b_n=1}$), неопределённый мультипликал её модуля при **B=1** и различных и **b** (оттенками чёрного и ярко чёрным при **b=1**).





На второй (правой) диаграмме представлены: функция $\mathbf{y = b_n \cdot sign(x) \cdot |x|^n}$ при $\mathbf{b_n=1}$ и различных $\mathbf{n}$ (от 0.25 до 4 оттенками красного и ярко красным при **n=1**), её модуль: $\mathbf{y = |b_n| \cdot |x|^n}$ (оттенками жёлтого и ярко жёлтым при **n=1**), неопределённый мультипликал её модуля при **B=1** и различных и **n** (оттенками чёрного и ярко чёрным при **n=1**).

Нетрудно заметить то, что при приближении к нулевой точке неопределённый мультипликал подмультипликальной функции (далее мультипликал) с обеих сторон от этой точки стремится к некоторому конечному значению, и мало того, с обеих сторон он стремится к одному и тому же значению, зависящему только от единого для двух составляющих мультипликалов значения произвольного множителя **B**, и что примечательно, ни каким образом не зависящему от $\mathbf{b_n}$ и от **n**, то есть от значений всех производных подмультипликальной функции. В окрестности нулевой точки составляющие мультипликалы двух областей подмультипликальной функции расположены в стык друг к другу. При этом две области все же разделены нулевой точкой, где присутствует прерывание составляющих мультипликалов, а возможно и прерывание мультипликала, но операция мультиплицирования обошла эту точку стороной, оставив вопрос открытым.

Казалось бы, в процессе мультиплицирования переход через эту имеющую нулевое значение точку подмультипликальной функции как через множитель для промежуточного результата мультиплицирования (далее промежуточного результата) должен обнулить этот результат и автоматически прихлопнуть до нуля всю расположенную правее нулевой точки область мультипликала, тем самым полностью обессмыслить процесс мультиплицирования правее этой точки, при условии того, что мы проводим мультиплицирование функции в направлении роста аргумента. Данное утверждение было бы справедливым при условии того, если ноль был бы нулем как множителем.

Но как известно, когда мы проводим мультиплицирование, мы разбиваем линейный отрезок мультиплицирования по оси абсцисс на бесконечно малые, но не нулевой длины отрезки **dx**. С этой позиции проблемой безразмерной точки и одновременно разрешением проблемы для нас является тот факт, что точка, будучи безмерной величиной, оставляет на оси абсцисс проекцию нулевой длины.

Один, так называемый, геометрический подход сводится к следующему простому умозаключению. Поскольку мы проводим мультиплицирование по линейному континууму оси абсцисс, воздействуя на состояние функции тем, что также имеет измерение отнесённое на линейных размер оси абсцисс, оставляет там свой след. И если при этом что-то оставляет на оси проекцию нулевой длины, то это нечто, без значения что это, эффективно не оставляет ровным счётом ничего, оно просто не существует для проводимой операции. И при условии того, что функция с обеих сторон стремится к конечному и к тому же одинаковому значению, данная точка может быть проигнорирована, функция «склеена», и констатирована непрерывность последней.

Другой, так называемый, абстрактный подход не игнорирует состоянии функции в точке, и подразумевает переход с анализа свойств функций в предельно малых линейных отрезках на анализ их свойств в безразмерных точках. Данный подход предполагает нахождение «связующего» множителя в безразмерной точке, при проходе через которую в процессе мультиплицирования промежуточный результат умножается на данный множитель или делится на него в зависимости от направления мультиплицирования: в сторону роста или убывания аргумента соответственно. Таким образом от состояния и значения данного множителя зависит «судьба» проводимого мультиплицирования.

Очевидно то, что размер множителя в нулевой точке равен значению подмультипликальной функции, измеренному в нулевой точке, то есть нулю, в степени элемента мультиплицирования, размер которого также имеет нулевое значение. Очевидно о дифференциале аргумента **dx** в данном случае речь не идёт, поскольку таковой с нулевой длиной не имеет смысла, но вот обязательно прилагающейся в качестве степени к значению подмультипликальной функции элемент мультиплицирования никто не отменял, пусть даже и имеющий нулевое значение. Таким образом задача определения значения множителя сводится к определению результата $\mathbf{0^0}$.

Оператор возведения в степень – это гипероператор, а именно оператор произведения $\prod$ с количеством итераций, соответствующим показателю степени. В нашем случае результат действия $\prod$ является множителем для промежуточного результата. С одной стороны можно предположить то, что результат 0^0 – это ничто, неопределённость, поскольку отсутствую множители, пусть даже нулевые множители. В данном случае вообще нет операции умножения на ноль, поскольку сами нули отсутствуют, учитывая это уже понятно то, что в мультипликал не обернется нулём. Но мультипликал может перестать существовать в результате умножения на неопределённость. С другой стороны, если у $\prod$ нулевое количество множителей, как в нашем случае, то он очевидно бездействует, не проводит итераций и ничего не приращивает, а раз так, то он должен оставить без изменения тот результат, множителем которого он является, пропустить через себя его значение транзитом, но не уничтожить его.

Выходит так, что представление о результате возведения в нулевую степень зависит от нашего представления о функции оператора о логике оператора, от его формального определения, что в свою очередь обусловлено контекстом его применения. Выше давалось определение оператора произведения как рекурсивного приращивающего итератора, что подразумевает под собой некое начальное состояние результата оператора, по отношению к чему производится приращение начиная с первой итерации.

Математический анализ подразумевает транзит без изменения в случае бездействия, что есть в полном соответствии с тем, как оператор суммы $\sum$ не возвращает неопределённость при отсутствии слагаемых, то есть при отсутствии итераций, при своём бездействии, а возвращает ноль в качестве нейтральной величины, тем самым не изменяет результат предыдущего суммирования, а пропускает его через себя транзитом.

Так, единственным, оставляющим без изменения результат умножения, множителем является единица. А это значит то, что $\prod$ с нулевым количеством множителей вне зависимости от их возможного состояния (в том числе состояния неопределённости) и значения должен возвращать единицу в качестве результата своего бездействия, в качестве нейтральной величины. Таким образом установлен факт того, что искомый множитель в нулевой точке равен единице. К сведению, ниже проведён анализ гипероператора, где затронута тема нейтральных элементов (величин) гипероператоров.

Выделим саму нулевую точки и бесконечно малую её окрестность по обе стороны от неё в отдельную третью область подмультипликальной функции, ту, что не входит в первые две. Условно обозначим её как [0;0] от ноля включительно до ноля включительно. Далее необходимо сделать предположение/допущение о том, что конечное значение множителя в особенной точке, в нашем случае в нулевой точке, можно распространить на бесконечно малую окрестность этой точки в сторону той её границы, на которой мультипликал имеет такое же, при этом конечное, значение как и в нулевой точке. Утверждение основано на допущении о том, что внутри рассматриваемого бесконечно малого интервала функция монотонна при поставленных условиях, ей просто некуда деваться, не существует известных причин для иного поведения функции. В нашем случае, что справа от нулевой точки, что слева от неё составляющие мультипликалы первой и второй областей стремятся к единице (конечной величине) при приближении к ней с обоих сторон, следовательно значение множителя в нулевой точке распространяется на всю бесконечно малую окрестность нулевой точки, то есть на всю ранее определённую третью область подмультипликальной функции.

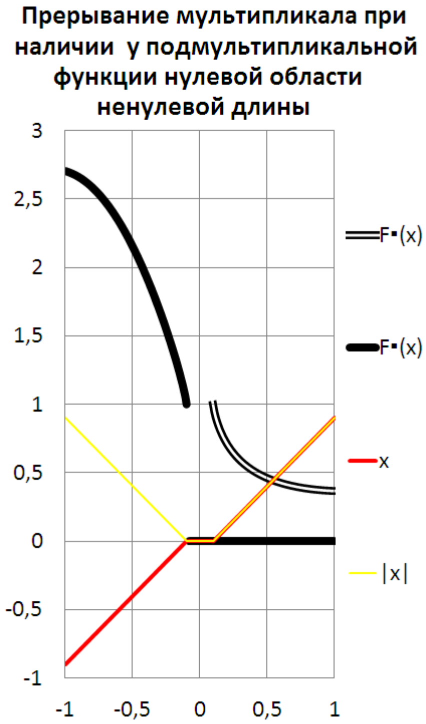
Под распространением значения множителя на бесконечно малую окрестность не следует понимать построение монотонной функции с постоянным значением внутри этого интервала, равным значению множителя, но следует понимать то, что при мультиплицировании промежуточный результат на входе в эту окрестность умножается либо делится на данный множитель в зависимости от направления мультиплицирования, затем и передаётся на выход из данной окрестности.

В случае, если распространение значения функции возможно только в одном из двух направлений окрестности, то нет смысла говорить о том, что множитель нужно дробить на два множителя, каждый из которых равен корню квадратному от изначального его значения, поскольку невозможность распространить значение множителя в обе стороны для одной и той же особенной точки свидетельствует о наличии прерывания, что в свою очередь обессмысливает аналитическую работу по поиску непрерывности функции в особенной точке. В этой связи в целях упрощения говоря о множителе можно опустить упоминание об окрестности точки, и считать множитель свойством именно точки, а исследуемую область, областью именно точки. С точки зрения данного подхода отпадает вопрос от том, каким образом распространять значение множителя на окрестность точки, поскольку будет производится однократное умножение или деление промежуточного результата на множитель при проходе через особенную точку.

При построении мультипликала модуля функции результат мультиплицирования третьей абстрактной области подмультипликальной функции требует согласования своего произвольного множителя с произвольными множителями двух других составляющий определённых мультипликалов. Далее «склеиваем» все составляющие мультипликалы от всех трёх областей подмультипликальной функции и получаем непрерывный неопределённый мультипликал анализируемой функции.

Свидетельством тождественности множителя единице в нулевой точке также является тождество результатов мультиплицирования, полученных через два разных подхода: через так называемый геометрический, и через так называемый абстрактный с анализом свойств функций в безразмерных точках.

Можно утверждать то, что в процессе мультиплицирования переход через нулевое значение подмультипликальной функции, обусловленный пересечением функцией оси абсцисс или контакта оси абсцисс в одной точке, не приводит к каким-то бы ни было изменениям промежуточного результата мультиплицирования. На этот результат не влияет даже возможный излом функции (прерывание первой производной), поскольку значение мультипликала в нулевой точке не зависит от **b**. Но что примечательно, излом функции в особенной точке, такой как нулевая, приводит к излому мультипликала в этой точке, но очевидно, не к излому его фактор-производной (подмультипликальной функции), и что не наблюдается при изломе функции вне особенный точках, где лишь вторая производная мультипликала имеет прерывание. Можно сделать вывод от том, что поведение производной и фактор-производной различно в особенных точках, там взаимозависимость между ними нарушается.



А сейчас давайте рассмотрим несколько иной случай, а именно такой, где подмультипликальная функция имеет нулевое значение на протяжении не нулевого по длине интервала. Так внутри данного интервала промежуточный результат мультиплицирования умножается на равный нулю множитель $\mathbf{0}^{\mathbf{dx}}$, поскольку **dx** в данном случае бесконечно малая, но не нулевая величина.

В этом случае мультипликал «схлопывается» до нуля правее точки входа подмультипликальной функции в горизонтальный отрезок с нулевым значением. Далее мультипликал не восстанавливается, даже не смотря на последующий выход подмультипликальной функции на ненулевые значения, ибо что-бы то ни было (промежуточный результат мультиплицирования), однажды умноженное на ноль в качестве в результате потом даёт только ноль (сплошной чёрный график на диаграмме). В этой связи можно говорить о том, что точка именно касания неопределённым мультипликалом оси абсцисс (речь не о бесконечно близком приближения к оси) означает по сути точку его прерывания. Если проводить мультиплицирование в направлении обратном направлению роста аргумента, то в точке входа слева в интервал с нулевым значением подмультипликальной функции промежуточный результат мультиплицирования перестанет существовать в следствии попытки произведения операции деления на ноль, что также является для мультипликала точкой его прерывания, после которой, левее, он также не восстановится (полый чёрный график на диаграмме). Таким образом для горизонтального интервала подмультипликальной функции с нулевым значением существует две точки, в которых мультипликал прерывается, это точки начала и конца данного интервала. Сам интервал является областью неопределённости мультипликала Также можно утверждать и то, что мультипликал функции **y=0** не есть **y=0**, а таковой просто не существует, поскольку вся область определения подмультипликальной функции от $-\infty$ до $+\infty$ является областью неопределённости её мультипликала.

Ссылки:

[1] Интеграл: https://ru.wikipedia.org/wiki/Интеграл
[2] Производная функции: https://ru.wikipedia.org/wiki/Производная_функции
[3] Дифференциал функции: https://ru.wikipedia.org/wiki/Дифференциал_(математика)
[4] Факториал: https://ru.wikipedia.org/wiki/Факториал
[5] Сумма: https://ru.wikipedia.org/wiki/Сумма_(математика)
[6] Умножение: https://ru.wikipedia.org/wiki/Умножение
[7] Тетрация: https://ru.wikipedia.org/wiki/Тетрация