Propriétés inédites des coefficients binomiaux
(Réjean Labrie, 10 mai 2022)

Sommaire: Mis à part l'identité de Vandermonde il existe très peu d'autres identités composées d'une sommation de produits de coefficients binomiaux. Voici quatre nouvelles identités de ce type à insérer dans notre coffre à outils mathématiques. Une démonstration par induction vient ensuite formaliser ces nouvelles formules qui mettent en lumière des propriétés insoupçonnées des coefficients binomiaux.

Abstract: Apart from the Vandermonde identity there are very few other identities composed of a summation of products of binomial coefficients. Here are four new identities of this type to insert into our mathematical toolbox. An induction demonstration then formalizes these new formulas that highlight unsuspected properties of binomial coefficients.

1 Préambule et notation

Toutes les variables utilisées dans ce texte, à l'exception de x et y, sont des variables entières. Certaines variables doivent répondre à des conditions particulières en l'occurrence:

a) r ≥ 0;

b) n ≥ 1;

c) $1 \leq i \leq n$;

d) $1 \leq j \leq n$.

Un coefficient binomial, noté $\binom{l}{k}$, correspond au nombre de combinaisons de k objets parmi l. Lorsque $k < 0$ ou $k > l$, alors $\binom{l}{k} = 0$. Pour $0 \leq k \leq l$, on a $\binom{l}{k} > 0$ et ces coefficients peuvent être disposés dans une matrice carrée de dimension n connue sous le nom de matrice de Pascal et symbolisée par U_n. À titre d'exemple on écrit

$$U_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

et on désigne par $u_{i,j}$ l'élément de la matrice U situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j. On en déduit que $u_{i,j} = \binom{i-1}{j-1}$.
Nous expliquons ici la notion d'équerre dans une matrice carrée, en vue de notre démonstration par induction. On défini E_i comme le sous-ensemble des éléments d'une matrice carrée P_n, qui regroupe dans une forme en équerre les valeurs $p_{i,j}$ et $p_{j,i}$ telles que $j \geq i$. Pour illustrer cette notion on peut penser aux valeurs de la ligne 1 et de la colonne 1 qui constituent l'équerre E_1.

2 Présentation des nouvelles identités

La première identité est générale et sera démontrée plus loin après l'introduction de certaines matrices utiles à la démonstration.

$$\binom{i-1}{0}\binom{0+r}{j-1} - \binom{i-1}{1}\binom{1+r}{j-1} + \binom{i-1}{2}\binom{2+r}{j-1} - \cdots (-1)^{n-1}\binom{i-1}{n-1}\binom{n-1+r}{j-1} = (-1)^{i-1}\binom{r}{j-i} \quad (1)$$

Les trois autres découlent de l'application de conditions particulières à la première. Ainsi si on impose la double condition, r=0 et $i \neq j$ on obtient l'identité ci-dessous, toujours égale à zéro.

$$\binom{i-1}{0}\binom{0}{j-1} - \binom{i-1}{1}\binom{1}{j-1} + \binom{i-1}{2}\binom{2}{j-1} - \cdots (-1)^{n-1}\binom{i-1}{n-1}\binom{n-1}{j-1} = 0$$

Avec la condition $i = j = m$ l'identité résultante donne 1 ou -1 et n'est pas affectée par la valeur de r, ce qui est vraiment étonnant.

$$\binom{m-1}{0}\binom{0+r}{m-1} - \binom{m-1}{1}\binom{1+r}{m-1} + \binom{m-1}{2}\binom{2+r}{m-1} - \cdots (-1)^{n-1}\binom{m-1}{n-1}\binom{n-1+r}{m-1} = (-1)^{m-1}$$

Finalement sous la condition $i > j$, peu importe la valeur de r, on a toujours 0 comme valeur finale car alors $j - i < 0$ et donc $\binom{r}{j-1} = 0$ du côté droit de l'équation 1.

$$\binom{i-1}{0}\binom{r}{j-1} - \binom{i-1}{1}\binom{1+r}{j-1} + \binom{i-1}{2}\binom{2+r}{j-1} - \binom{i-1}{3}\binom{3+r}{j-1} + \cdots (-1)^{n-1}\binom{i-1}{n-1}\binom{n-1+r}{j-1} = 0$$

3 Matrices nécessaires à la démonstration

On a vu précédemment la matrice U_5 qui comporte 5 lignes et 5 colonnes. Il est possible de former un nombre infini d'autres matrices de dimension 5 par la suppression de la ligne numéro un et l'ajout d'une ligne supplémentaire à la fin. Cette dernière provient de la matrice infinie de Pascal qui a comme sixième ligne les coefficients binomiaux (1,5,10,10,5,10). L'on garde seulement les 5 premiers coefficients de cette suite car on a 5 colonnes à remplir pour une matrice carrée de dimension 5. On désigne cette nouvelle matrice par $U_{5,1}$ où l'indice 5 correspond à la dimension de la matrice et le 1 indique qu'on a effectué un décalage d'une ligne vers le bas dans les lignes de la matrice infinie. On peut alors symboliser la matrice U_5 par $U_{5,0}$ pour signaler l'absence de décalage. Ci-dessous nous voyons les matrices $U_{5,1}$ et $U_{5,2}$.

$$U_{5,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 \end{pmatrix} \qquad U_{5,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 \end{pmatrix}$$

Dans le cas général d'un décalage de r lignes vers le bas on aura la matrice $U_{5,r}$ composée des éléments $u_{i,j,r} = \binom{i-1+r}{j-1}$.

$$U_{5,r} = \begin{pmatrix} \binom{0+r}{0} & \binom{0+r}{1} & \binom{0+r}{2} & \binom{0+r}{3} & \binom{0+r}{4} \\ \binom{1+r}{0} & \binom{1+r}{1} & \binom{1+r}{2} & \binom{1+r}{3} & \binom{1+r}{4} \\ \binom{2+r}{0} & \binom{2+r}{1} & \binom{2+r}{2} & \binom{2+r}{3} & \binom{2+r}{4} \\ \binom{3+r}{0} & \binom{3+r}{1} & \binom{3+r}{2} & \binom{3+r}{3} & \binom{3+r}{4} \\ \binom{4+r}{0} & \binom{4+r}{1} & \binom{4+r}{2} & \binom{4+r}{3} & \binom{4+r}{4} \end{pmatrix}$$

Nous aurons aussi besoin d'une matrice carrée V dans le reste de cet article. Cette matrice contient à la ligne i les coefficients binomiaux de l'expression algébrique $(x-y)^i$. Elle diffère de la matrice U par le fait que les nombres des colonnes paires sont affectés d'un signe négatif. Comme illustration voici la matrice V_5 composée des éléments $v_{i,j} = (-1)^{j-1}\binom{i-1}{j-1}$.

$$V_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{0}{1} & \binom{0}{2} & -\binom{0}{3} & \binom{0}{4} \\ \binom{1}{0} & -\binom{1}{1} & \binom{1}{2} & -\binom{1}{3} & \binom{1}{4} \\ \binom{2}{0} & -\binom{2}{1} & \binom{2}{2} & -\binom{2}{3} & \binom{2}{4} \\ \binom{3}{0} & -\binom{3}{1} & \binom{3}{2} & -\binom{3}{3} & \binom{3}{4} \\ \binom{4}{0} & -\binom{4}{1} & \binom{4}{2} & -\binom{4}{3} & \binom{4}{4} \end{pmatrix}$$

Procédons maintenant au produit matriciel de V par U pour obtenir la matrice résultante P. À titre d'exemple si on effectue le produit matriciel de V_5 par $U_{5,0}$ on obtient la matrice carrée $P_{5,0}$ comme illustré ci-après.

$$\underset{V_5}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}} \quad X \quad \underset{U_{5,0}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}} \quad = \quad \underset{P_{5,0}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Regardons les matrices résultantes $P_{5,1}$, $P_{5,2}$, $P_{5,3}$ et $P_{5,4}$ après la multiplication de V_5 par $U_{5,1}$, $U_{5,2}$, $U_{5,3}$ et $U_{5,4}$ respectivement .

$$\underset{P_{5,1}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{P_{5,2}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{P_{5,3}}{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{P_{5,4}}{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

On observe que le contenu de la matrice $P_{5,i}$ se résume aux coefficients binomiaux de $(x+y)^i$ répétés d'une ligne à l'autre avec un décalage sur la droite d'une colonne. De plus un signe négatif précède les nombres des lignes paires. Par définition du produit matriciel, l'élément $p_{i,j,r}$ de la matrice $P_{n,r}$ correspond à la somme des n produits des éléments de la ligne i de la matrice V_n par les éléments de la colonne j de la matrice $U_{n,r}$.

$$p_{i,j,r} = \sum_{k=1}^{n} v_{i,k}\; u_{k,j,r} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{i-1}{k-1} \binom{k-1+r}{j-1}$$

Si on développe cette dernière sommation on retrouve la partie gauche de l'équation 1.

$$p_{i,j,r} = \binom{i-1}{0}\binom{0+r}{j-1} - \binom{i-1}{1}\binom{1+r}{j-1} + \binom{i-1}{2}\binom{2+r}{j-1} - \cdots (-1)^{n-1}\binom{i-1}{n-1}\binom{n-1+r}{j-1} \tag{2}$$

Ainsi pour démontrer l'équation 1 il reste à démontrer l'équation 3 ci-dessous qui associe à $p_{i,j,r}$ la partie droite de l'équation 1.

$$p_{i,j,r} = (-1)^{i-1}\binom{r}{j-i} \tag{3}$$

4 Démonstration par induction

Afin de démontrer que l'équation 3 est correcte pour toute matrice P_n, r nous débutons en vérifiant qu'elle est correcte pour l'équerre E_1, composée des valeurs de la ligne 1 et de la colonne 1 de la matrice P_n, r. Vérifions le contenu de la première ligne de la matrice en remplaçant i par 1 dans l'équation 2.

$$\begin{aligned} p_{1,j,r} &= \binom{1-1}{0}\binom{r}{j-1} - \binom{1-1}{1}\binom{1+r}{j-1} + \binom{1-1}{2}\binom{2+r}{j-1} - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{1-1}{n-1}\binom{n-1+r}{j-1} \\ &= \binom{0}{0}\binom{r}{j-1} - \binom{0}{1}\binom{1+r}{j-1} + \binom{0}{2}\binom{2+r}{j-1} - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{0}{n-1}\binom{n-1+r}{j-1} \\ &= (-1)^{1-1}(1)\binom{r}{j-1} + (-1)^{2-1}(0) + (-1)^{3-1}(0) + \cdots + (-1)^{n-1}(0) \end{aligned}$$

Ainsi lorsque $i = 1$ et $1 \leq j \leq n$

$$p_{1,j,r} = (-1)^{1-1}\binom{r}{j-1} \tag{4}$$

donc l'équation 3 est vérifée pour la ligne 1 de la matrice P_n, r.
Examinons maintenant le contenu de la première colonne de la matrice, en remplaçant j par 1 dans l'équation 2, lorsque $i > 1$ car le cas $i = 1$ soit $p_{1,1,r}$ a été couvert dans l'équation 4 .

$$\begin{aligned} p_{i,1,r} &= \binom{i-1}{0}\binom{r}{1-1} - \binom{i-1}{1}\binom{1+r}{1-1} + \binom{i-1}{2}\binom{2+r}{1-1} - \cdots (-1)^{n-1}\binom{i-1}{n-1}\binom{n-1+r}{1-1} \\ &= \binom{i-1}{0}\binom{r}{0} - \binom{i-1}{1}\binom{1+r}{0} + \binom{i-1}{2}\binom{2+r}{0} - \cdots (-1)^{n-1}\binom{i-1}{n-1}\binom{n-1+r}{0} \\ &= \binom{i-1}{0} - \binom{i-1}{1} + \binom{i-1}{2} - \cdots (-1)^{n-1}\binom{i-1}{n-1} = 0 \end{aligned}$$

Ci-dessus $p_{i,1,r} = 0$ puisque pour les lignes $i > 1$ du triangle de Pascal il existe une propriété des coefficients binomiaux qui dit que $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{i-1}{k} = 0$.
Donc lorsque $j = 1$ et $2 \leq i \leq n$

$$p_{i,1,r} = (-1)^{i-1}\binom{r}{1-i}$$

et l'équation 3 est vérifiée pour la colonne 1 de P_n, r. Nous avons ainsi démontré que l'équation 3 est vérifiée pour l'équerre E_1. Supposons maintenant que l'équation 3 est vérifiée pour l'équerre E_i et montrons qu'elle est alors aussi vérifiée pour l'équerre E_{i+1}. Pour cela nous allons montrer que $p_{i+1,j+1,r} = -p_{i,j,r}$ en remplaçant i par $i+1$ et j par $j+1$ dans l'équation 2.

$$p_{i+1,j+1,r} = \binom{(i+1)-1}{0}\binom{0+r}{(j+1)-1} - \binom{(i+1)-1}{1}\binom{1+r}{(j+1)-1} + \binom{(i+1)-1}{2}\binom{2+r}{(j+1)-1} - \cdots$$
$$(-1)^{n-2}\binom{(i+1)-1}{n-2}\binom{n-2+r}{(j+1)-1} + (-1)^{n-1}\binom{(i+1)-1}{n-1}\binom{n-1+r}{(j+1)-1}$$

$$= \binom{i}{0}\binom{0+r}{j} - \binom{i}{1}\binom{1+r}{j} + \binom{i}{2}\binom{2+r}{j} - \cdots$$
$$(-1)^{n-2}\binom{i}{n-2}\binom{n-2+r}{j} + (-1)^{n-1}\binom{i}{n-1}\binom{n-1+r}{j}$$

Remplaçons les multiplicandes de chacun des termes combinatoires $\binom{i}{j}$ en utilisant la propriété la plus connue du triangle de Pascal $\binom{i}{j} + \binom{i}{j+1} = \binom{i+1}{j+1}$. À titre d'exemple $\binom{i}{0}$ devient $\binom{i-1}{-1} + \binom{i-1}{0}$. Ainsi $\binom{i}{0}\binom{0+r}{j}$ se transforme en $\binom{i-1}{-1}\binom{0+r}{j} + \binom{i-1}{0}\binom{0+r}{j}$ que l'on partage ci-dessous sur 2 lignes différentes.

$$p_{i+1,j+1,r} = \binom{i-1}{-1}\binom{0+r}{j} - \binom{i-1}{0}\binom{1+r}{j} + \binom{i-1}{1}\binom{2+r}{j} - \cdots$$
$$(-1)^{n-2}\binom{i-1}{n-3}\binom{n-2+r}{j} + (-1)^{n-1}\binom{i-1}{n-2}\binom{n-1+r}{j}$$

$$+ \binom{i-1}{0}\binom{0+r}{j} - \binom{i-1}{1}\binom{1+r}{j} + \binom{i-1}{2}\binom{2+r}{j} - \cdots$$
$$(-1)^{n-2}\binom{i-1}{n-2}\binom{n-2+r}{j} + (-1)^{n-1}\binom{i-1}{n-1}\binom{n-1+r}{j}$$

$$= 0 + \Bigg\{ - \binom{i-1}{0}\binom{1+r}{j} + \binom{i-1}{1}\binom{2+r}{j} - \cdots$$
$$(-1)^{n-2}\binom{i-1}{n-3}\binom{n-2+r}{j} + (-1)^{n-1}\binom{i-1}{n-2}\binom{n-1+r}{j}\Bigg\}$$

$$+ \Bigg\{\binom{i-1}{0}\binom{0+r}{j} - \binom{i-1}{1}\binom{1+r}{j} + \binom{i-1}{2}\binom{2+r}{j} - \cdots$$
$$(-1)^{n-2}\binom{i-1}{n-2}\binom{n-2+r}{j}\Bigg\} + (-1)^{n-1}\binom{i-1}{n-1}\binom{n-1+r}{j}$$

$$= \Bigg\{\binom{i-1}{0}\left[-\binom{1+r}{j} + \binom{r}{j}\right] + \binom{i-1}{1}\left[\binom{2+r}{j} - \binom{1+r}{j}\right] + \binom{i-1}{2}\left[-\binom{3+r}{j} + \binom{2+r}{j}\right] + \cdots$$
$$+ \binom{i-1}{n-2}\left[(-1)^{n-1}\binom{n-1+r}{j} + (-1)^{n-2}\binom{n-2+r}{j}\right]\Bigg\} + (-1)^{n-1}\binom{i-1}{n-1}\binom{n-1+r}{j}$$

$$= \left\{ -\binom{i-1}{0}\binom{r}{j-1} + \binom{i-1}{1}\binom{1+r}{j-1} - \binom{i-1}{2}\binom{2+r}{j-1} - \cdots \right.$$
$$\left. (-1)^{n-1}\binom{i-1}{n-2}\binom{n-2+r}{j-1} \right\} + (-1)^{n-1}\binom{i-1}{n-1}\binom{n-1+r}{j}$$

Le dernier terme vaut 0 en tout temps car $i \leq n-1$ puisque $i+1 \leq n$. En effet, l'indice $i+1$ de l'élément $p_{i+1,j+1,r}$ de la matrice P_n, r ne peut excéder la dimension n de matrice carrée P_n, r. Alors le facteur $\binom{i-1}{n-1}$ devient au maximum $\binom{n-1-1}{n-1} = \binom{n-2}{n-1} = 0$ après le remplacement de i par n-1. Puisque la partie gauche entre accolades correspond à -$p_{i,j,r}$ on arrive au résultat que l'on voulait démontrer.

$$p_{i+1,j+1,r} = -p_{i,j,r} \tag{5}$$

Compte tenu de notre hypothése de récurrence à l'effet que l'équation 3 est vérifiée pour l'équerre E_i nous pouvons remplacer $p_{i,j,r}$ par $(-1)^{i-1}\binom{r}{j-1}$.

$$p_{i+1,j+1,r} = (-1)\left\{(-1)^{i-1}\binom{r}{j-1}\right\} = (-1)^{(i-1)-1}\binom{r}{j-i} = (-1)^{(i-1)-1}\binom{r}{j+1-1-i}$$

$$p_{i+1,j+1,r} = (-1)^{(i-1)-1}\binom{r}{(j+1)-(i-1)}$$

Ainsi l'équation 3 est vérifiée pour l'équerre E_{i+1}. On a vu précédemment que l'équation 3 est vérifiée pour E_1 et comme notre l'hypothèse que l'équation 3 est vérifiée pour E_i implique qu'elle est vérifiée pour E_{i+1} nous pouvons conclure en vertu du principe de récurrence que l'équation 3 est vérifiée pour les équerres E_i telles que $1 \leq i \leq n$. Comme l'ensemble de ces équerres équivaut à la matrice $P_{n,r}$ nous avons démontré que l'équation 3 est vérifiée pour cette matrice.

— —