Les équations de Seiberg-Witten LCK+

Antoine Balan

May 22, 2021

Abstract

We define the moduli space of Seiberg-Witten LCK+.

1 Les équations de Seiberg-Witten LCK+

Les équations LCK+ [DO] [M] sont définies pour une surface complexe (M, J) de dimension 2 :

$$d\omega + \theta \wedge \omega = 0$$

$$d\theta_+ = 0$$

avec $\omega \in \Lambda_+^{1,1}(M)$, θ est la forme de Lee. (Pour LCK simple, on a $d\theta = 0$).

2 Le groupe de jauge

Le groupe de jauge est :

$$\mathcal{G} = \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{R}_+^*)$$

Il agit sur les équations SW-LCK+ :

$$f.(\omega, \theta) = (f\omega, \theta - \frac{df}{f})$$

3 L'espace des modules

L'espace des modules SW-LCK+ est le quotient des solutions des équations SW-LCK+ par le groupe de jauge :

$$\mathcal{M} = E/\mathcal{G}$$

3.1 Un complexe elliptique

L'espace des modules est de dimension finie car le complexe est elliptique.

$$0 \to \mathcal{C}^\infty \to \Lambda^1 \oplus \Lambda_+^2 \to \Lambda_+^2 \oplus \Lambda^3 \to 0$$

La première flêche est donnée par $f \mapsto (\theta - \frac{df}{f}, f\omega)$ et la seconde est $P_+(d)$ et $d\omega + \theta \wedge \omega$. La dimension de l'espace des modules est :

$$1 + 2b_2^+ - b_1$$

3.2 Compacité

L'espace des modules est compacte car la première condition est cohomologique et la seconde est, après changement de jauge, $\theta = \theta_0 + h$ avec h harmonique. On a une décomposition $h = h_1 + h_2$ avec $||h_1|| < K$ et h_2 harmonique avec des périodes entières, ce qui donne une condition cohomologique.

4 Un fibré en droites réel

On considère le groupe de jauge réduit $\mathcal{G}_0$ des fonctions qui valent 1 en p, un point fixé.

$$\mathcal{M}_0 = E/\mathcal{G}_0$$

On a alors un fibré en droites réel L :

$$\mathcal{M} \to \mathcal{M}_0$$

5 Les invariants SW-LCK+

On considère la classe de Chern $c_1(L \otimes \mathbf{C})$ qui définit des invariants de SW-LCK+ en intégrant sur l'espace des modules.

References

[DO] S.Dragomir, L.Ornea, "Locally Conformal Kähler Geometry", Birkhaüser, USA, 1998.

[M] J.Morgan, "The Seiberg-Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds", Mathematical Notes, Princeton University Press, USA, 1995.