Une démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss

Antoine Balan

March 11, 2021

1 Le théorème de d'Alembert-Gauss

Le théorème de d'Alembert-Gauss dit qu'un polynôme complexe a une racine :

$$\forall P \in \mathbf{C}[X], \exists z \in \mathbf{C}, P(z) = 0$$

2 Démonstration

2.1 Les parties réelles et imaginaires

On sépare la partie réelle de P, $z = x + iy$, $R(x, y) = Re(P(z))$ et la partie imaginaire $I(x, y) = Im(P(z))$ et on forme les deux courbes du plan $\mathcal{R}$, $R(x, y) = 0$ et $\mathcal{I}$, $I(x, y) = 0$. Il faut montrer que les courbes $\mathcal{R}$ et $\mathcal{I}$ s'intersectent.

2.2 Comportement à l'infini

Lorsqu'on tend vers l'infini, on a $P(z) \sim z^n$ de sorte que les courbes $\mathcal{R}$ et $\mathcal{I}$ se comportent comme des droites $y = x.tan(k\pi/n + \pi/2n)$ et $y = x.tan(k\pi/n)$.

2.3 Le disque

On forme un grand disque centré en zéro et on a des points de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{I}$ sur le cercle, de façon alternée, qui sont reliés sur le disque.

2.4 Les intersections des courbes avec elles-mêmes

Quand les courbes $\mathcal{R}$ et $\mathcal{I}$ s'intersectent en elles-mêmes, il y a un nombre pair de branches. En effet, on a autour d'une intersection le comportement $R(x, y) \sim a(z - b)^m + \bar{a}(\bar{z} - \bar{b})^m$ de sorte que $R(x, y)$ possède un nombre pair de branches et de même pour $I(x, y)$.

3 Fin de la démonstration

En partant d'un point du cercle, on arrive en suivant la courbe $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{I}$ à un autre point du cercle car les intersections ont un nombre pair de branches de sorte qu'on traverse la courbe à chaque intersection. Si on prend un point du cercle de $\mathcal{R}$, r_1, la courbe est $\mathcal{R}(r_1, r'_1)$, elle aboutit en r'_1; et le point immédiatement suivant dans le sens trigonométrique est i_1 dont la courbe est $\mathcal{I}(i_1, i'_1)$. Si les courbes $\mathcal{R}$ et $\mathcal{I}$ ne s'intersectent pas, alors i'_1 est entre r_1 et r'_1 pour le sens trigonométrique, de sorte que par récurrence, on obtient des courbes $\mathcal{R}(r_i, r'_i)$ et $\mathcal{I}(i_j, i'_j)$ qui se s'intersectent pas et donc on encadre un i_k qui ne peut se relier à i'_k ; d'où une contradiction.