

Le calcul tensoriel continu

Les ∞ -variétés

Antoine Balan

December 14, 2020

Abstract

We introduce the continuous tensor calculus which is the tensor calculus when the index is continuous instead of being discreet.

1 Le calcul tensoriel

Pour une variété différentielle M , il est possible de faire un calcul tensoriel en considérant les espaces tangent et cotangent. Pour ce faire, on tensorise les espaces en on introduit des coordonnées locales (x_i) . Un tenseur peut alors s'écrire par exemple :

$$A_{lp}^{ijk}$$

avec des règles de transformation quand on fait des changements de coordonnées.

$$\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}$$

On multiplie alors les tenseurs par ces fonctions pour obtenir le tenseur dans les nouvelles coordonnées. Par exemple :

$$\tilde{A}^i = A^j \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}$$

Avec la notation d'Einstein.

2 Le calcul tensoriel continu

Il est possible de faire un calcul tensoriel continu lorsque l'indice du tenseur est continu, par exemple, si x^t sont les coordonnées locales :

$$\tilde{A}^t = \int_{-\infty}^{+\infty} A^{t'} \left(\frac{\partial \tilde{x}^t}{\partial x^{t'}} \right) dt'$$

La différentielle d'une fonction est :

$$df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x^t} dx^t dt$$

On a la règle de cohérence suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \tilde{x}^t}{\partial x^{t'}} \right) \left(\frac{\partial x^{t'}}{\partial \tilde{x}^{t''}} \right) dt' = \delta(t - t'')$$

L'espace de base est l'espace de Fréchet des fonctions de Schwartz. De sorte que :

$$x^t(f) = f(t) = \delta_t(f)$$

Les fonctions sur cet espace sont les fonctionnelles des fonctions de Schwartz. Une fonctionnelle \mathcal{F} est dérivable si la limite suivante existe pour tout h :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(g + \epsilon h) - \mathcal{F}(g)}{\epsilon} = d\mathcal{F}_g(h)$$

et si la différentielle est linéaire et continue, c'est une distribution. Une fonctionnelle est lisse si on peut itérer les différentielles. Les dérivations des fonctionnelles lisses s'identifient au point avec les fonctions. On a l'égalité suivante :

$$X(\mathcal{F}(g)) = d\mathcal{F}_g(X)$$

La métrique est un deux tenseur tel que :

$$g(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{t,t'} X_t Y_{t'} dt dt'$$

La métrique est riemannienne si la métrique est une forme quadratique définie positive.

Définition :

Les variétés de dimension infinie modélées sur l'espace de Schwartz des fonctions lisses réelles à décroissance plus que polynômiales à l'infini sont les ∞ -variétés.